

УДК 539.37+539.214

ОБ ИЗМЕНЕНИЯХ В ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ В ОКРЕСТНОСТИ ДЕФЕКТА СПЛОШНОСТИ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ПОВТОРНОМ НАГРУЖЕНИИ

© 2023 г. А. А. Буренин^{a,*}, Л. В. Ковтанюк^{a,b,**}, Г. Л. Панченко^{a,b,***}

^aИнститут машиноведения и металлургии ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре, Россия

^bИнститут автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, Россия

*e-mail: burenin@iacp.dvo.ru

**e-mail: lk@iacp.dvo.ru

***e-mail: panchenko@iacp.dvo.ru

Поступила в редакцию 10.04.2023 г.

После доработки 16.04.2023 г.

Принята к публикации 18.04.2023 г.

Приводятся результаты расчетов напряженно-деформируемых состояний упруго-вязкопластического материала, содержащего одиночный цилиндрический дефект сплошности и нагружаемого внешним давлением. Гидростатическое давление на поверхности, удаленной от дефекта, первоначально возрастает, некоторое время выдерживается постоянным и затем постепенно падает до нуля. Процесс всестороннего сжатия оставляет после разгрузки в окрестности дефекта сплошности сформированные уровень и распределение остаточных напряжений. Рассчитывается изменение таких напряжений при повторном нагружении и разгрузке. Интенсивность и характер повторного нагружения считаются идентичными первоначальному. Расчеты проводятся в рамках поставленной одномерной задачи теории больших деформаций. Материал полагается несжимаемым. Учитывается развитие областей вязкопластического течения в активной части процесса и затухание их при разгрузке. Оцениваются изменения в геометрических размерах эволюционирующего дефекта.

Ключевые слова: упругость, вязкопластичность, большие деформации, остаточные напряжения, повторное нагружение

DOI: 10.31857/S0572329923600275, EDN: BNCCFU

1. Введение. Дефекты сплошности в форме микропор или микротрещин неизбежно присутствуют в материалах металлоизделий. В условиях эксплуатации изделий дефекты могут увеличиваться в размерах, могут возникать новые. Это приводит к развитию дефектной структуры материала. Учет подобных обстоятельств в механике связывают со специальным параметром состояния, называемым повреждаемостью, и таким способом устанавливают подход к изучению длительной прочности материалов. Разрушение, связанное с эволюцией дефектной структуры, получило описание в пионерских работах Ю.Н. Работнова [1] и Л.М. Качанова [2]. Данное научное направление остается значимым и развивающимся в настоящее время [3–5]. Достаточно полный обзор результатов, полученных в этой области исследований, содержится в [6].

С другой стороны, также отмечалось упрочнение материалов при их обработке повышенным уровнем гидростатического сжатия [7–11]. Объяснялся данный эффект явлением “залечивания” микродефектов сплошности за счет интенсивного воздействия на материал всесторонним давлением. Попытки в расчетах этого явления [10–

13] приводили к задачам теории больших упругопластических деформаций, так как в окрестности дефекта перемещения сравнимы с его геометрическими размерами и поэтому деформации невозможно принять малыми. Показательными для дальнейшего являются результаты расчетов в одномерной задаче о всестороннем сжатии упругопластического материала с одиночным дефектом сплошности [14, 15]. Наблюдался эффект “приспособляемости” дефекта к циклическим нагружениям по типу “нагрузка–разгрузка”, когда после каждой разгрузки размер дефекта, уровень и распределение в его окрестности остаточных напряжений повторялись. Объяснялось это парадоксальное обстоятельство тем, что в расчетах использовалась математическая модель идеальной упругопластической среды. Считалось, что отказ от идеальности пластического течения приведет либо к развитию дефекта, либо к его “залечиванию”. Здесь откажемся от идеальности упругопластического деформирования, добавив в диссипативные свойства материала вязкое сопротивление пластическому течению. Используемая математическая модель также как и в [14, 15] будет опираться на определение обратимых и необратимых деформаций с помощью дифференциальных уравнений их изменения [15–17]. Из-за возрастания объема вычислений ограничимся только двумя шагами, когда при первоначальном нагружении и разгрузке в окрестности дефекта создается поле остаточных напряжений, а при повторном таком же нагружении и разгрузке происходит его изменение. Это позволит проследить за направлением таких изменений, включая начало в эволюции размера дефекта.

2. Основные соотношения модели. В модели больших деформаций тензоры обратимых \mathbf{e} и необратимых \mathbf{p} деформаций определяются дифференциальными уравнениями их изменения (переноса) [15]

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{e}}{Dt} &= \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p - \frac{1}{2}((\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p - \mathbf{z})) \\ \frac{D\mathbf{p}}{Dt} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = \boldsymbol{\varepsilon}^p - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^p \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \nabla^T\mathbf{v}), \quad \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{z}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{e}), \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} - \nabla^T\mathbf{v}) \\ \mathbf{z} &= A_1^{-1}[A_2^2(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e} - \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + A_2(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}^2 - \mathbf{e}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}^2 - \mathbf{e}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}] \\ A_1 &= 8 - 8L_1 + 3L_1^2 - L_2 - \frac{1}{3}L_1^3 + \frac{1}{3}L_3, \quad A_2 = 2 - L_1 \\ L_1 &= \text{tr } \mathbf{e}, \quad L_2 = \text{tr } \mathbf{e}^2, \quad L_3 = \text{tr } \mathbf{e}^3 \end{aligned} \quad (2.1)$$

В данных зависимостях \mathbf{v} – вектор скорости, $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ – тензор скоростей изменения необратимых деформаций. Второе уравнение (2.1) определяет объективную производную по времени, обеспечивающую геометрическую корректность кинематики деформируемой среды. Когда $\boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{0}$, тензор необратимых деформаций \mathbf{p} остается неизменным, а его компоненты изменяются в соответствии со вторым уравнением (2.1), что характерно для процесса разгрузки.

Тензор полных деформаций Альманси \mathbf{d} согласно (2.1) имеет вид

$$\mathbf{d} = \mathbf{e} + \mathbf{p} - \frac{1}{2}\mathbf{e}^2 - \mathbf{e} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{e} \quad (2.2)$$

Из (2.2) следует, что тензор \mathbf{e} является линейной частью тензора обратимых деформаций $\mathbf{c} = \mathbf{e} - 0.5\mathbf{e}^2$. Но в качестве меры обратимых деформаций будем использовать тензор \mathbf{e} , для которого записано первое уравнение изменения (2.1).

Будем считать материал несжимаемым. Тогда из закона сохранения энергии следует, что напряжения в материале полностью определяются обратимыми деформациями

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{cases} -P_1 \mathbf{I} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{d}} \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{d}), & \mathbf{p} \equiv \mathbf{0} \\ -P_2 \mathbf{I} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{e}} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{e}), & \mathbf{p} \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.3)$$

Здесь P_1 и P_2 – неизвестные функции добавочного гидростатического давления; \mathbf{I} – единичный тензор; $W = \rho_0 \Psi$ – упругий потенциал; ρ_0 – плотность материала в его свободном состоянии; Ψ – термодинамический потенциал (плотность распределения свободной энергии), для которого принимается гипотеза о его независимости от тензора необратимых деформаций \mathbf{p} . Для изотропного деформируемого материала разложим упругий потенциал в ряд Маклорена

$$W = (a - \mu) J_1 + a J_2 + b J_1^2 - \kappa J_1 J_2 - \zeta J_1^3 + \dots$$

$$J_k = \begin{cases} L_k, & \mathbf{p} = \mathbf{0} \\ I_k, & \mathbf{p} \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.4)$$

$$L_1 = \text{tr } \mathbf{d}, \quad L_2 = \text{tr } \mathbf{d}^2, \quad I_1 = \text{tr } \mathbf{c}, \quad I_2 = \text{tr } \mathbf{c}^2$$

В зависимостях (2.4) μ – модуль сдвига, a , b , κ , ζ – другие механические постоянные.

В качестве поверхности нагружения примем обобщенное условие пластического течения Треска–Сен-Венана [18]

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^p) = k, \quad F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^p) = \frac{1}{2} \max |\sigma_i - \sigma_j| - \eta \max |\varepsilon_k^p| \quad (2.5)$$

следствием которого является ассоциированный закон пластического течения [18, 19]

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \xi \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \xi > 0 \quad (2.6)$$

В соотношениях (2.5) и (2.6) σ_i , ε_k^p – главные значения тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций; k – предел текучести; η – коэффициент вязкого сопротивления пластическому течению.

3. Постановка задачи. Упругое равновесие. Рассмотрим краевую задачу о поведении дефекта сплошности в деформируемом материале в условиях приложения к нему повторных нагрузок. Так как нагружаемая поверхность материала значительно превосходит размеры дефекта сплошности, то деформирование можно считать одномерным, а за границу этого дефекта можно принять круговую цилиндрическую поверхность первоначального радиуса r_0 . Также считаем, что граничное воздействие осуществляется на цилиндрической поверхности первоначального радиуса R_0 ($R_0 \geq r_0$). Пусть материал продеформирован при следующих граничных условиях

$$\sigma_{rr}|_{r=R^*} = -P^*, \quad \sigma_{rr}|_{r=r^*} = 0 \quad (3.1)$$

Здесь σ_{rr} – радиальная компонента тензора напряжений в цилиндрической системе координат r , φ , z , R^* и r^* – радиусы внешней и внутренней цилиндрических поверхностей в условиях равновесия. В рассматриваемых условиях получаем, что вектор перемещений имеет только одну компоненту $u_r = u$, отличную от нуля. На граничных поверхностях для нее получаем

$$u(R^*) = R^* - R_0, \quad u(r^*) = r^* - r_0 \quad (3.2)$$

Из соотношения (2.2) выпишем отличные от нуля компоненты тензора деформаций Альманси

$$d_{rr} = u' - \frac{(u')^2}{2}, \quad d_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} - \frac{u^2}{2r^2}, \quad u' = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (3.3)$$

Из условия несжимаемости среды и зависимостей (3.3) следует дифференциальное уравнение для компоненты перемещения

$$(1 - u')\left(1 - \frac{u}{r}\right) = 1 \quad (3.4)$$

Решая уравнение (3.4) с предположением, что точки граничных поверхностей с первоначальными координатами $r = R_0$ и $r = r_0$ в текущий момент времени имеют координаты $r = R(t)$ и $r = s(t)$ соответственно, найдем

$$u = r - \sqrt{r^2 + \varphi(t)}, \quad \varphi(t) = R_0^2 - R^2(t) = r_0^2 - s^2(t) \quad (3.5)$$

Из (3.3) и (3.5) для компонент тензора деформаций Альманси следует

$$d_{rr} = \frac{1}{2}(1 - H^{-1}), \quad d_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}(1 - H), \quad H = 1 + \frac{\varphi}{r^2} \quad (3.6)$$

Для ненулевых компонент тензора напряжений получим следующие зависимости из (2.3) и (2.4)

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -P + G(d_{rr}, d_{\varphi\varphi}), & \sigma_{\varphi\varphi} &= -P + G(d_{\varphi\varphi}, d_{rr}), & \sigma_{zz} &= -P \\ P &= P_1 - a + \mu - 2b(d_{rr} + d_{\varphi\varphi}) + (\kappa + 3\zeta)(d_{rr}^2 + d_{\varphi\varphi}^2) + 6\zeta d_{rr} d_{\varphi\varphi} \\ G(x, y) &= k_1 x - k_2 x^2 - k_3 xy + k_4 x^3 + k_5(xy^2 + 2x^2 y) \\ k_1 &= 2\mu, & k_2 &= 2(2a + 2b + \kappa), & k_3 &= 2(2b + \kappa), \\ & & k_4 &= 6(\kappa + \zeta), & k_5 &= 2(\kappa + 3\zeta) \end{aligned} \quad (3.7)$$

С учетом зависимостей (3.6) для компонент деформаций из (3.7) определим напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -P + L(H), & \sigma_{\varphi\varphi} &= -P + L(H^{-1}), & \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} &= N(H) \\ L(H) &= \frac{k_4}{8}(1 - H^{-3}) + a_1(1 - H^{-2}) + a_2(1 - H^{-1}) + a_3(H - 1) + \frac{k_5}{8}(H^2 - 1) \\ N(H) &= a_4(H - H^{-1}) + a_5(H^2 - H^{-2}) + \frac{k_4}{8}(H^3 - H^{-3}) \\ a_1 &= a + b - \frac{3}{4}(3\kappa + 5\zeta), & a_2 &= \mu - 2a - 3b + \frac{5}{2}(\kappa + 3\zeta), & a_3 &= b - \frac{3}{4}(\kappa + 5\zeta) \\ a_4 &= \mu - 2a - 2b + \frac{1}{4}(7\kappa + 15\zeta), & a_5 &= a + b - 2\kappa - 3\zeta \end{aligned} \quad (3.8)$$

Для вычисления неизвестной функции $P = P(r)$ воспользуемся уравнением равновесия

$$\sigma'_{rr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0 \quad (3.9)$$

Интегрируя уравнение (3.9) с учетом (3.8), для компонент напряжений и функции P получим окончательные зависимости

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= M(H, x), & \sigma_{\varphi\varphi} &= M(H, x) - N(H), & P &= L(H) - M(H, x) \\ M(H, x) &= a_6 \ln \frac{H}{x} + \frac{k_1}{4}(H - x) + a_7((H - 1)^2 - (x - 1)^2) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{k_4}{48} ((H-1)^3 - (x-1)^3) + a_8(x^{-1} - H^{-1}) + \frac{k_4}{32} ((1-x^{-1})^2 - (1-H^{-1})^2), \quad (3.10)$$

$$x = \frac{r_0^2}{s_0^2}, \quad a_6 = \frac{1}{2} \left(\mu - a - b + \frac{1}{2} (\kappa + 3\zeta) \right)$$

$$a_7 = \frac{1}{4} \left(a + b + \frac{1}{4} (\kappa - 3\zeta) \right), \quad a_8 = \frac{1}{2} \left(a + b - \frac{1}{2} (\kappa + 3\zeta) \right)$$

При записи (3.10) использовалось второе граничное условие (3.1), в котором r^* заменено на s_0 . Обозначение s_0 введено для крайнего значения радиуса внутренней поверхности, соответствующего давлению p_0 на внешней поверхности, при котором на внутренней граничной поверхности впервые выполнится условие пластичности (2.5) в виде

$$(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})|_{r=s_0} = 2k, \quad N(x) = 2k \quad (3.11)$$

Второе уравнение (3.11) служит для нахождения значения s_0 . Значение нагружающего давления p_0 , при котором на внутренней поверхности впервые выполнится условие пластического течения, следует из первого соотношения (3.10) и первого краевого условия (3.1) в виде $\sigma_{rr}|_{r=R} = -p_0$:

$$p_0 = M(x, h), \quad h = H(R) = \frac{R_0^2}{R^2} = 1 + \frac{\varphi}{R_0^2 - \varphi} \quad (3.12)$$

4. Вязкопластическое течение при возрастающем и постоянном нагружающем давлении. В состоянии упругого равновесия под действием давления $p = p_0$ деформируемый материал находится до момента времени $t = 0$. Далее с момента времени $t = 0$ начнем увеличивать внешнее давление. Таким образом, граничные условия задачи примут вид

$$\sigma_{rr}|_{r=R(t)} = -p(t), \quad \sigma_{rr}|_{r=s(t)} = 0, \quad p(t) = p_0(1 + \gamma t), \quad \gamma > 0 \quad (4.1)$$

При увеличении давления $p(t)$ от внутренней граничной поверхности $r = s(t)$ растёт область $s(t) \leq r \leq m(t)$, в которой происходит вязкопластическое течение. Упругопластическая граница $r = m(t)$ отделяет расширяющуюся область течения от области $m(t) \leq r \leq R(t)$, в которой материал деформируется обратимо. Во всей области вязкопластического течения выполняется условие пластичности (2.5) в форме

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2k + 2\eta \epsilon_{rr}^p \quad (4.2)$$

Уравнение равновесия (3.9) при $t \geq 0$ заменим уравнением движения среды

$$\sigma'_{rr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = \rho_0 \dot{v}, \quad \dot{v} = \frac{dv}{dt} \quad (4.3)$$

Здесь $v = v_r$ — отличная от нуля компонента вектора скорости. Для нее и ее производной по времени из соотношений (2.1) и (3.5) следуют зависимости

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} (1 - u')^{-1} = -\frac{\dot{\varphi}}{2r}, \quad \dot{v} = \frac{\partial v}{\partial t} + vv' = -\frac{\dot{\varphi}}{2r} - \frac{\dot{\varphi}^2}{4r^3} \quad (4.4)$$

Тогда уравнение (4.3) с учетом (4.4) примет вид

$$\sigma'_{rr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = -\frac{\rho_0}{2} \left(\frac{\dot{\varphi}}{r} + \frac{\dot{\varphi}^2}{2r^3} \right) \quad (4.5)$$

Интегрируя уравнение движения (4.5) в области обратимого деформирования $m(t) \leq r \leq R(t)$ и учитывая первое граничное условие (4.1), найдем компоненты напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p(t) + M(H, h) + S(\varphi, R, r), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} - N(H) \\ S(\varphi, R, r) &= \frac{\rho_0}{2} \left(\dot{\varphi} \ln \frac{R}{r} + \frac{\dot{\varphi}^2}{4} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

В области течения $s(t) \leq r \leq m(t)$ из (2.4) для компонент напряжений следуют соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -P + G(c_{rr}, c_{\varphi\varphi}), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -P + G(c_{\varphi\varphi}, c_{rr}), \quad \sigma_{zz} = -P, \quad c_{rr} = e_{rr} - \frac{e_{rr}^2}{2} \\ c_{\varphi\varphi} &= e_{\varphi\varphi} - \frac{e_{\varphi\varphi}^2}{2}, \quad P = P_2 - a + \mu - 2b(c_{rr} + c_{\varphi\varphi}) + (k + 3\zeta)(c_{rr}^2 + c_{\varphi\varphi}^2) + 6\zeta c_{rr} c_{\varphi\varphi} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Из зависимостей (2.2), (3.6) и (4.7) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -P + L(H_1), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -P + L(H_1^{-1}), \\ \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} &= N(H_1), \quad H_1 = H(1 - 2p_{rr}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Проинтегрируем уравнение движения (4.5) в области вязкопластического течения $s(t) \leq r \leq m(t)$ с учетом третьей зависимости (4.8) и второго граничного условия (4.1) и найдем компоненту напряжений σ_{rr} , исключив неизвестную функцию $P = P(r)$

$$\sigma_{rr} = -\int_s^r \frac{N(H_1)}{r} dr + S(\varphi, s, r) \quad (4.9)$$

Из зависимостей (2.1) следуют соотношения

$$\varepsilon_{rr}^p = -\varepsilon_{\varphi\varphi}^p = \frac{\dot{p}_{rr}}{1 - 2p_{rr}}, \quad p_{\varphi\varphi} = -\frac{p_{rr}}{1 - 2p_{rr}}, \quad \dot{p}_{rr} = \frac{\partial p_{rr}}{\partial t} + v p_{rr}' \quad (4.10)$$

Зависимости (4.2), (4.8) и (4.10) приводят к дифференциальному уравнению относительно компоненты необратимых деформаций p_{rr}

$$\frac{\partial p_{rr}}{\partial t} - \frac{\dot{\varphi}}{2r} p_{rr}' = \frac{1 - 2p_{rr}}{2\eta} (N(H_1) - 2k) \quad (4.11)$$

На упругопластической границе $r = m(t)$ выполняется следующее из условия непрерывности напряжений соотношение $N(H) = 2k$, сравнивая которое со вторым уравнением (3.11), получим соотношение для $r = m(t)$

$$m = \sqrt{\frac{\varphi}{x - 1}} \quad (4.12)$$

Из условия непрерывности компоненты тензора напряжений σ_{rr} на упругопластической границе $r = m(t)$ и зависимостей (4.6) и (4.9) следует интегро-дифференциальное уравнение для функции $\varphi(t)$

$$S(\varphi, s, R) - \int_s^m \frac{N(H_1)}{r} dr - M \left(1 + \frac{\varphi}{m^2}, h \right) = -p \quad (4.13)$$

Начальными условиями для уравнения (4.13) являются следующие условия

$$\varphi(0) = r_0^2 - s_0^2, \quad \dot{\varphi}(0) = 0 \quad (4.14)$$

Система уравнений (4.11)–(4.14) относительно неизвестных функций p_{rr} , $m(t)$ и $\phi(t)$ была решена численно при помощи конечно-разностного метода.

В области обратимого деформирования из (2.2) и (3.6) найдем компоненты тензора обратимых деформаций

$$e_{rr} = 1 - \sqrt{1 - 2d_{rr}} = 1 - \sqrt{H^{-1}}, \quad e_{\phi\phi} = 1 - \sqrt{1 - 2d_{\phi\phi}} = 1 - \sqrt{H} \quad (4.15)$$

Соотношения (2.2), (3.6) и (4.10) позволяют получить зависимости для компонент тензора обратимых деформаций в области вязкопластического течения

$$e_{rr} = 1 - \sqrt{\frac{1 - 2d_{rr}}{1 - 2p_{rr}}} = 1 - \sqrt{H_1^{-1}}, \quad e_{\phi\phi} = 1 - \sqrt{\frac{1 - 2d_{\phi\phi}}{1 - 2p_{\phi\phi}}} = 1 - \sqrt{H_1} \quad (4.16)$$

В некоторый момент времени t_1 зафиксируем внешнее нагружающее давление на значении $p_1 = p(t_1)$ и положим, что оно далее остается постоянным. Такое изменение режима нагружения не приводит к существенным изменениям деформационной картины. Все соотношения данного раздела продолжают выполняться и в этом случае.

5. Торможение течения при уменьшающемся давлении. В момент времени $t_2 > t_1$ начнем уменьшать давление на внешней границе $r = R(t)$ по закону

$$p(t) = p_1(1 - \gamma_1(t - t_2)), \quad \gamma_1 > 0 \quad (5.1)$$

Уменьшение давления (5.1) приводит к тому, что в деформируемом материале появляется область разгрузки $m_1(t) \leq r \leq m(t)$, в которой $\epsilon_{rr}^p = 0$. При этом компоненты тензора необратимых деформаций \mathbf{p} продолжают изменяться согласно второму уравнению (2.1). Новая упругопластическая граница $r = m_1(t)$ отделяет область разгрузки $m_1(t) \leq r \leq m(t)$ от сужающейся области $s(t) \leq r \leq m_1(t)$, в которой продолжается вязкопластическое течение. А в области $m(t) \leq r \leq R(t)$ материал по-прежнему деформируется обратимо.

Компоненты тензора напряжений в области обратимого деформирования $m(t) \leq r \leq R(t)$ удовлетворяют соотношениям (4.6), а в области вязкопластического течения $s(t) \leq r \leq m_1(t)$ – (4.8) и (4.9). Интегрируя уравнение движения (4.5) в области разгрузки $m_1(t) \leq r \leq m(t)$, установим, что для компоненты тензора напряжений σ_{rr} выполняется зависимость (4.9). Также из (2.2), (2.4) и (3.6) для компонент напряжений в этой области следуют соотношения (4.7) и (4.8).

В области течения компонента необратимых деформаций p_{rr} удовлетворяет дифференциальному уравнению (4.11). В области разгрузки $m_1(t) \leq r \leq m(t)$ согласно последней зависимости (4.10) и второму уравнению (2.1) для компоненты тензора необратимых деформаций p_{rr} следует дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial p_{rr}}{\partial t} - \frac{\phi}{2r} p'_{rr} = 0 \quad (5.2)$$

Условие непрерывности напряжений на упругопластической границе $r = m_1(t)$ приводит к равенству $N(H_1)|_{r=m_1} = 2k$. Сопоставляя его со вторым уравнением (3.12), получим, что

$$q = \sqrt{\phi \frac{1 - 2p_{rr}(q)}{x + 2p_{rr}(q) - 1}}, \quad q = m_1 \quad (5.3)$$

Непрерывность компоненты тензора напряжений σ_{rr} на границе $r = m(t)$ приводит к интегро-дифференциальному уравнению (4.13) для функции $\varphi(t)$, начальными условиями для которого являются условия непрерывности функций $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ в момент времени t_2 .

Из зависимостей (3.2) и (3.5) следует уравнение для границы $r = m(t)$

$$m(t) = \sqrt{m^2(c) + \varphi(c) - \varphi(t)}, \quad c = t_2 \quad (5.4)$$

Уравнения (4.11), (4.13), (5.2)–(5.4) относительно неизвестных функций p_{rr} (в областях течения и разгрузки), $\varphi(t)$, $m(t)$ и $m_1(t)$ решались одновременно при помощи конечно-разностного метода.

Компоненты тензора обратимых деформаций в области обратимого деформирования имеют вид (4.15), а в областях вязкопластического течения и разгрузки – (4.16).

В расчетный момент времени $t_3 > t_2$ упругопластическая граница $r = m_1(t)$ достигнет внутренней граничной поверхности $r = s(t)$. С этого момента времени деформируемый материал разделяется на две области: область обратимого деформирования $m(t) \leq r \leq R(t)$ и область с накопленными необратимыми деформациями $s(t) \leq r \leq m(t)$.

Напряжения определяются соотношениями (4.6) в области обратимого деформирования и зависимостями (4.8), (4.9) в области с остаточными необратимыми деформациями. Компонента остаточных необратимых деформаций p_{rr} в области $s(t) \leq r \leq m(t)$ удовлетворяет уравнению (5.2). Для функции $\varphi(t)$ остается верным интегро-дифференциальное уравнение (4.13) с условиями непрерывности функций $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ в момент времени t_3 . Для границы $r = m(t)$ продолжает выполняться уравнение (5.4). Система уравнений (4.13), (5.2) и (5.4) относительно неизвестных функций $\varphi(t)$, p_{rr} и $m(t)$ также решена конечно-разностным методом.

В момент времени $t_4 = t_2 + \gamma_1^{-1}$, соответствующий полной разгрузке, давление на внешней границе $r = R(t)$ станет равным нулю. В этот момент времени компонента тензора напряжений σ_{rr} на внутренней и внешней граничных поверхностях также равна нулю. Но при этом в продеформированном материале присутствуют остаточные напряжения, а также упругие и пластические деформации.

6. Повторное нагружение. С момента полной разгрузки t_4 будем снова увеличивать внешнюю нагрузку по закону $p(t) = p_1 \gamma(t - t_4)$. С увеличением давления сначала происходит обратимое деформирование материала. В этом случае из системы уравнений (4.13), (5.2) и (5.4) вычисляются функции $\varphi(t)$, p_{rr} и $m(t)$. Для нахождения напряжений и обратимых деформаций используются соотношения (4.6) и (4.15) в области обратимого деформирования и (4.8), (4.9) и (4.16) в области с остаточными необратимыми деформациями.

В некоторый момент времени $t_5 > t_4$ при внешнем давлении $p_2 = p(t_5) > p_0$ на внутренней граничной поверхности $r = s(t)$ снова выполнится условие пластичности $(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})|_{r=s_2} = 2k$, в котором $s_2 = s(t_5) < s_0$. С момента времени t_5 при дальнейшем увеличении внешней нагрузки от внутренней граничной поверхности $r = s(t)$ развивается область вязкопластического течения $s(t) \leq r \leq m_2(t)$. Граница $r = m_2(t)$ отделяет ее от области с остаточными необратимыми деформациями $m_2(t) \leq r \leq m(t)$. А в области $m(t) \leq r \leq R(t)$ материал продолжает деформироваться обратимо. Интегрируя уравнение движения (4.5) с учетом граничных условий и условия непрерывности

напряжений, получим зависимости для вычисления компонент тензора напряжений: в областях $s(t) \leq r \leq m_2(t)$ и $m_2(t) \leq r \leq m(t)$ – (4.8), (4.9), в области $m(t) \leq r \leq R(t)$ – (4.6). Для определения компоненты тензора необратимых деформаций p_{rr} в области течения служит уравнение (4.11), а в области с накопленными необратимыми деформациями – уравнение (5.2). Из условия непрерывности напряжений на упругопластической границе $r = m_2(t)$ следует выполнение уравнения (5.3), в котором $q = m_2(t)$. Упругопластическая граница $r = m(t)$ удовлетворяет уравнению (5.4), в котором $c = t_4$.

В расчетный момент времени $t_6 > t_5$ упругопластическая граница $r = m_2(t)$ достигает границы $r = m(t)$. Таким образом, с последующим ростом давления с момента времени t_6 в материале остается две области: область вязкопластического течения $s(t) \leq r \leq m_2(t)$ и область обратимого деформирования $m_2(t) \leq r \leq R(t)$. Далее, в момент времени $t_7 = t_4 + \gamma^{-1} > t_6$ остановим рост внешнего давления на значении $p(t_7) = p_1$ и продолжим нагружение при постоянном давлении. Такое изменение условий нагружения не вызывает качественных изменений деформационного процесса.

Начиная с некоторого момента времени $t_8 > t_7$, будем уменьшать давление по закону $p(t) = p_1(1 - \gamma_2(t - t_8))$, в котором $\gamma_2 > 0$. Такое изменение режима нагружения приводит к возникновению новой области разгрузки $m_3(t) \leq r \leq m_2(t)$. В уменьшающейся области $s(t) \leq r \leq m_3(t)$ продолжается вязкопластическое течение, а в области $m_2(t) \leq r \leq R(t)$ материал деформируется обратимо. В расчетный момент времени $t_9 > t_8$ упругопластическая граница $r = m_3(t)$ доходит до внутренней границы $r = s(t)$, после чего вязкопластическое течение в материале прекращается. В материале остаются две области: область обратимого деформирования $m_2(t) \leq r \leq R(t)$ и область разгрузки $s(t) \leq r \leq m_2(t)$. В момент времени $t_{10} = t_8 + \gamma_2^{-1}$ внешнее давление становится равным нулю, как и значения компоненты тензора напряжений σ_{rr} на внутренней и внешней границах. Но, как и при первой разгрузке, в материале присутствуют остаточные напряжения и деформации. При этом уровень остаточных напряжений при повторной полной разгрузке становится выше, а радиус внутренней граничной поверхности меньше, чем при первой полной разгрузке. Таким образом, если теперь снова нагружать материал внешним давлением, то вязкопластическое течение начнется при значении давления, большем, чем p_2 . То есть вязкость материала при каждом повторном нагружении способствует увеличению порога, которого должно достичь давление для начала процесса течения в материале. Если принять внешнее давление достаточно высоким, то возможно возникновение повторного (обратного) вязкопластического течения при разгрузке [15, 20]. Не исключается вероятность наступления данного эффекта на некотором последующем цикле нагружений. В таком случае расчеты значительно усложняются, но при формулировании выводов это обстоятельство следует учитывать.

Расчеты проводились в безразмерных переменных $x = r/R_0$ и $\tau = \gamma t$ при значениях постоянных: $r_0/R_0 = 0.03$, $a/\mu = 0.9$, $b/\mu = 4$, $\kappa/\mu = 20$, $\zeta/\mu = 80$, $k/\mu = 0.003$, $\gamma\eta/\mu = 2.395$, $\rho_0\gamma^2 R_0^2/\mu = 2.585 \times 10^{-12}$, $\gamma_1/\gamma = 1$, $\gamma_2/\gamma = 1$. На рис. 2, а изображен график зависимости радиуса внутренней граничной поверхности $s(t)/R_0$ от времени. Здесь $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 2$, $\tau_3 = 2.21$, $\tau_4 = 3$, $\tau_5 = 3.79$, $\tau_6 = 3.99$, $\tau_7 = 4$, $\tau_8 = 5$, $\tau_9 = 5.12$. Рис. 1, б иллюстрирует изменение упругопластических границ $\tilde{m} = m(t)/R_0$ в интервале по вре-

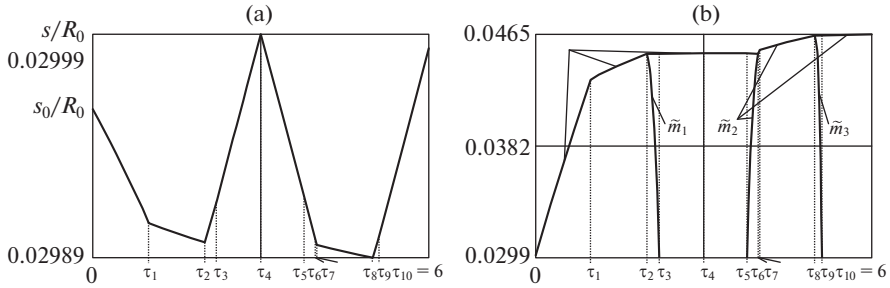


Рис. 1. Графики (а) радиуса внутренней граничной поверхности и (б) упругопластических границ в зависимости от времени.

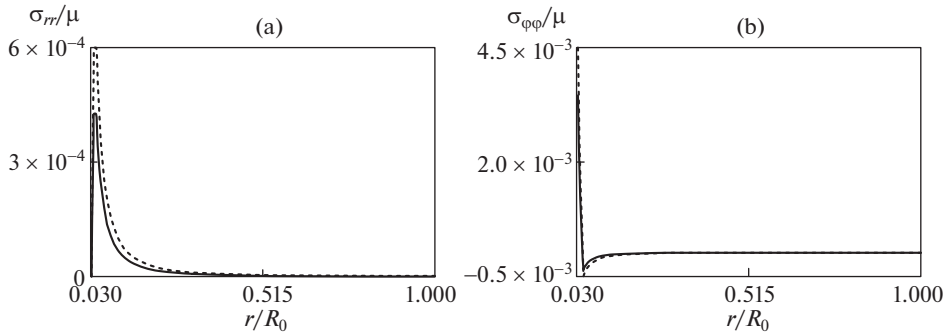


Рис. 2. Остаточные напряжения (а) σ_{rr}/μ и (б) $\sigma_{\phi\phi}/\mu$.

мени от 0 до τ_6 , $\tilde{m}_1 = m_1(t)/R_0$ в интервале от τ_2 до τ_3 , $\tilde{m}_2 = m_2(t)/R_0$ в интервале от τ_5 до τ_{10} и $\tilde{m}_3 = m_3(t)/R_0$ в интервале от τ_8 до τ_9 .

На рис. 2 представлены графики остаточных напряжений. Сплошной чертой изображены компоненты остаточных напряжений σ_{rr}/μ (рис. 2, а) и $\sigma_{\phi\phi}/\mu$ (рис. 2, б) в момент полной разгрузки τ_4 при первом нагружении, а пунктирной чертой — эти же компоненты в момент полной разгрузки τ_{10} при повторном нагружении.

Остаточные необратимые и обратимые деформации в момент времени τ_{10} представлены на рис. 3, а и рис. 3, б соответственно.

7. Заключение. В данной работе рассмотрены процессы развития и торможения вязкопластического течения в материале с одиночным дефектом сплошности при двух последовательных нагружениях. Нагружение осуществлялось посредством приложения внешнего давления, сначала растущего со временем, затем постоянного и далее уменьшающегося до нуля. Далее осуществлялся второй цикл нагружения внешним давлением в таком же порядке. Учет дополнительного диссипативного фактора, вносимого вязким сопротивлением пластическому течению, приводит к исчезновению эффекта приспособляемости дефекта к циклическим нагрузкам по типу “нагрузка–разгрузка”, имеющего место в условиях идеальной упругопластичности. Уровень остаточных напряжений растет, радиус дефекта уменьшается, несмотря на неувеличи-

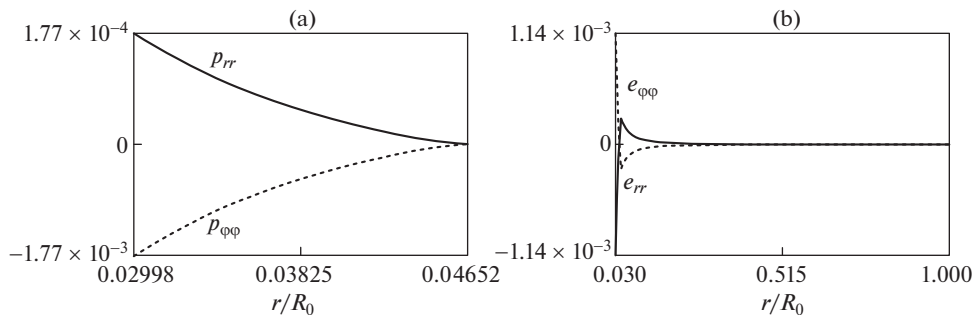


Рис. 3. Остаточные (а) необратимые и (б) обратимые деформации.

вающееся значение нагружающего давления. Давление выбиралось так, что повторное течение при разгрузке не возникает. Однако, с каждым циклом нагружения вероятность его возникновения возрастает, что приведет к усложнению расчетов.

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 22-11-00163).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
3. *Локощенко А.М.* Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
4. *Волков И.А., Игумнов Л.А.* Введение в континуальную механику поврежденной среды. М.: Физматлит, 2017. 304 с.
5. *Betten J.* Creep Mechanics. Berlin: Springer – Verlag, 2008. 367 p.
6. *Локощенко А.М., Фомин Л.В., Терауд В.В., Басалов Ю.Г., Агабабян В.С.* Ползучесть и длительная прочность металлов при нестационарных сложных напряженных состояниях (обзор) // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Серия Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24. № 2. С. 275–318.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1765>
7. *Горелов В.И.* Исследование влияния высоких давлений на механические характеристики алюминиевых сплавов // ПМТФ. 1984. № 5. С. 157–158.
8. *Новиков Н.В., Левитас В.И., Шестаков С.И.* Исследование напряженного состояния силовых элементов аппаратов высокого давления // Проблемы прочности. 1984. № 11. С. 43–48.
9. *Горелов В.И., Зорихин В.Н.* Технология упрочнения контейнеров для прессования металлов // Технология двигателестроения. 1984. № 11–12. С. 40–43.
10. *Левитас В.И.* Большие упругопластические деформации при высоком давлении. Киев: Наук. думка. 1987. 232 с.
11. *Черемской П.Г., Слезов В.В., Бетехтин В.И.* Поры в твердом теле. М.: Энергоатомиздат, 1990. 376 с.
12. *Ковтаниук Л.В., Мурашкин Е.В.* Формирование полей остаточных напряжений у одиночных сферических включений в идеальной упругопластической среде // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 1. С. 94–104.
13. *Ковтаниук Л.В., Мурашкин Е.В., Роговой А.А.* О динамике микропоры в несжимаемой вязкоупругопластической среде в условиях активного нагружения и последующей разгрузке // Вычислительная механика сплошных сред. 2013. Т. 6. № 2. С. 176–186.
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2013.6.2.21>
14. *Буренин А.А., Ковтаниук Л.В., Полоник М.В.* Формирование одномерного поля остаточных напряжений в окрестности цилиндрического дефекта сплошности упругопластической среды // ПММ. 2003. Т. 67. № 2. С. 315–325.

15. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В.* Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с.
16. *Быковцев Г.И., Шитиков А.В.* Конечные деформации упругопластических сред // ДАН СССР. Т. 311. № 1. С. 59–62.
17. *Мясников В.П.* Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестник ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8–13.
18. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
19. *Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д.* Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
20. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Полоник М.В.* Возможность повторного пластического течения при общей разгрузке упругопластической среды // ДАН. 2000. Т. 375. № 6. С. 767–769.