

УДК 531.3

О ПОДАВЛЕНИИ КОЛЕБАНИЙ БАЛОЧНЫХ МОСТОВ ПОЕЗДОМ КАК ИНЕРЦИОННЫМ ДЕМПФЕРОМ

© 2023 г. В. Ю. Поляков^{a,*}, В. В. Саурин^{b,**}

^aРоссийский университет транспорта, Москва, Россия

^bИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: pvy55@mail.ru

**e-mail: saurin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 06.04.2023 г.

После доработки 15.04.2023 г.

Принята к публикации 17.04.2023 г.

В статье рассматривается проблема недопущения резонанса в мостовых балках от периодического воздействия подвижного состава. Резонансные колебания балок становятся реальностью при высоких скоростях движения, когда поезд сформирован из одинаковых вагонов. Явление подавления колебаний балок поездом возможно лишь при точном соотношении длины вагона и балки, что значительно сокращает набор необходимых длин балок. Кроме того, рассмотрение вопросов взаимодействия поезда и моста в целях безопасности требует привлечения достаточно сложного и громоздкого математического аппарата и соответствующего программного обеспечения. В статье предлагается новый метод ограничения колебаний балок, пригодный для любых пролетов и доступный для инженеров на этапе предпроектного назначения динамических параметров балок.

Ключевые слова: динамика мостов, высокоскоростная магистраль, резонанс, подавление колебаний

DOI: 10.31857/S0572329923600251, EDN: TXOFFR

1. Введение. Из-за повышенных требований к плану высокоскоростной магистрали (ВСМ), необходимости устройства пересечения с другими дорогами только на разных уровнях доля мостов на магистрали значительно возрастает [1–3] и достигает 94% от общей длины линии. Благодаря простоте монтажа и дешевизне свободно опертая балка стала предпочтительной конструкцией для строительства мостов на ВСМ. Однако по мере того, как скорость поезда постоянно увеличивается, проблемы, связанные с вибрационной реакцией моста, становятся более важными. Поэтому динамический анализ мостов под нагрузкой скоростных поездов привлекает внимание многих исследователей из разных стран. За последние несколько десятилетий проведен ряд теоретических исследований по вибрационному отклику и колебаниями свободно опертым балкой моста высокоскоростной железной дороги [4–6]. Однако из-за роста скорости движения эта область исследований остается актуальной и сложной.

Введение высокоскоростного движения поездов со скоростями до 111 м/с (400 км/ч) делает реальной возможность возбуждения резонансных колебаний в наиболее распространенных конструкциях мостов — балочных [7]. При этом динамический коэффициент достигает 4 [7]. Резонанс также опасен ухудшением взаимодействия колеса и рельса и ведет к сходу колеса с рельса [8].

Модели упругих балок используются для описания механических систем в широком классе приложений. Мосты, рельсы, манипуляторы и резонаторы — вот несколько примеров конструкций, которые были смоделированы как балки для изучения их поведения. Некоторые материалы, а также геометрические и внешние параметры могут существенно повлиять на их характеристики. Среди параметров, оказывающих значительное влияние на поведение строительных конструкций, является приложенная нагрузка. Тип нагрузки варьируется от простой статической нагрузки на точку до нагрузки, зависящей от пространства и времени.

Поведение гибкой балки с подвижной нагрузкой или системой масса—пружина привлекало внимание исследователей на протяжении десятилетий. Можно отметить работы [9, 10]. Это стало популярной темой в литературе из-за широкого использования во многих инженерных приложениях, например, подвесные мосты, мостовые краны и привязные спутниковые системы [11]. Было предложено несколько моделей для описания характеристик системы и влияния движущейся нагрузки или массы на динамическую характеристику балки. Монография [12] является одним из первых комплексных исследований в этом отношении. Аналитические решения реакции балки были представлены для различных типов нагрузок, таких как подвижная постоянная нагрузка, подвижная гармоническая нагрузка и движущиеся массы. Поскольку конструкция подвергается нагрузке, изменяющейся в пространстве и времени, результирующие напряжения и деформации значительно выше, чем наблюдаемые при стационарных нагрузках. Наиболее распространенными являются балки, использующие модель Эйлера—Бернулли с постоянной движущейся нагрузкой. В более точных моделях используется динамическая система подвижная масса—пружина—демпфер на балке; эти модели учитывали инерцию и эффект отскока движущегося объекта [12, 15]. Для решения уравнений движения системы использовались различные аналитические и численные подходы, такие как метод конечных элементов [16], метод штрафа [17] и множитель Лагранжа [18]. Краткий обзор работ по движущейся нагрузке с их приложениями предоставлен в [19].

В работе Янга [20] и в монографии [21] рассматривается подавление колебаний балок поездом, который и возбуждает эти колебания. В статье [22] явление антирезонанса, или подавления колебаний балок нагрузкой рассмотрены применительно к реальным проектным решениям на высокоскоростных магистралях (ВСМ). Термин “антирезонанс” был введен, по всей видимости, Я.Г. Пановко и И.И. Губановой в их книге (см. например [23]). Классический антирезонанс представлен на рис. 1. Антирезонанс проявляется в виде монотонного уменьшения амплитуды вынужденных колебаний середины балки во время прохода поезда [22]. После прохода поезда ($t > 4.5$ с) происходят свободные колебания. Проблема применения, предложенного в монографии [20] условия подавления колебаний балки подвижным составом заключается в строгом выполнении соотношения длины пролетного строения и вагона. Так, для распространенной длины вагона 25 м (ICE3, CRH380B, CRH3C, AVE-103, Siemens Velaro Rus и т.д.) длина пролетного строения должна быть равна 12.5 м, или 37.5 м или 62.5 м для проявления эффекта подавления колебаний. Однако при движении поездов с другой длиной вагона, например, TGV (18.7 м), резонанс указанных пролетных строений становится возможным на скорости 78 м/с (281 км/ч). С другой стороны, при установленной длине пролетного строения 33 м длина вагона должна быть равна 13.2 м, 22 м или 66 м. При иных вагонах резонанс в таких балках реализуется при скоростях менее расчетных.

Все эти условия значительно затрудняют практическую реализацию подавления колебаний поездом, как инерционным демпфером. В реальности, пересечение различных препятствий требует широкого разнообразия пролетов балок. Так, например, на ВСМ в Китае [21] в основном применяются стандартные балки длиной 20, 24, 32, 40 м. При этом длина средних вагонов различных типов поездов варьируется от 24.77 м до 26.6 м.

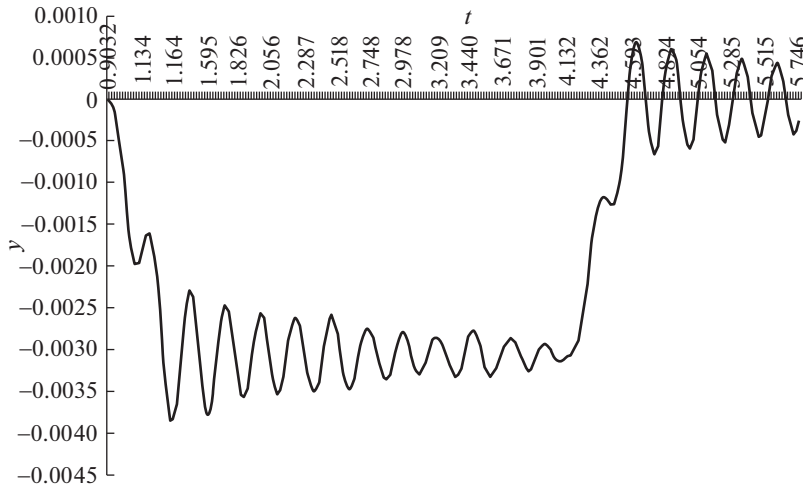


Рис. 1. Явление антирезонанса.

Определение критических скоростей движения, вызывающих резонанс или, наоборот, подавление колебаний с оценкой безопасности движения по коэффициенту сходства производится с помощью сложных методов теории оптимального управления и математического анализа, а также соответствующего программного обеспечения [20, 22]. При проектировании же требуются относительно простые практические методы, позволяющие инженеру не только определить режим динамического поведения балочных пролетных строений до подробной разработки проектной документации, но и назначать удачные динамические параметры балок еще на стадии предпроектной разработки конструкции.

Таким образом, разработка иных условий, позволяющих определить поведение балочных пролетных строений при высокоскоростном движении, или заранее задать удовлетворительные динамические параметры балок является актуальной задачей.

2. Метод определения условий резонанса и подавления колебаний балок. Изучим следующую задачу. Рассмотрим упругую прямолинейную балку показанную на рис. 2.

Балка с изгибной жесткостью EJ и линейной плотностью ρ имеет длину L . Считается, что на балку действует постоянная по величине вертикальная сила $P(t) = \text{const}$, движущаяся вдоль горизонтальной оси со скоростью $V = \text{const}$. В начальный момент времени балка находится в покое, т. е. $y(0, x) = y'(0, x) = 0$ и сила P приложена к левому концу балки $x = 0$. В момент времени $t = L/V$, когда сила оказывается приложенной к правому концу, на левом конце возникает новая сила P , которая движется вдоль балки со скоростью $V = \text{const}$. Таким образом балка оказывается под действием периодической нагрузки с периодом $T = L/V$. Граничные условия не зависят от времени и определяются условиями закрепления: $y(t, 0) = y''(t, 0) = y(t, L) = y''(t, L) = 0$.

Движение балки описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$EJ \frac{\partial^4 y(t, x)}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial t^2} = \delta(x - Vt)P \quad (1.1)$$

В данном случае демпфирование не учитывается. Здесь $\delta(x)$ — дельта функция.

Решение будем искать в виде

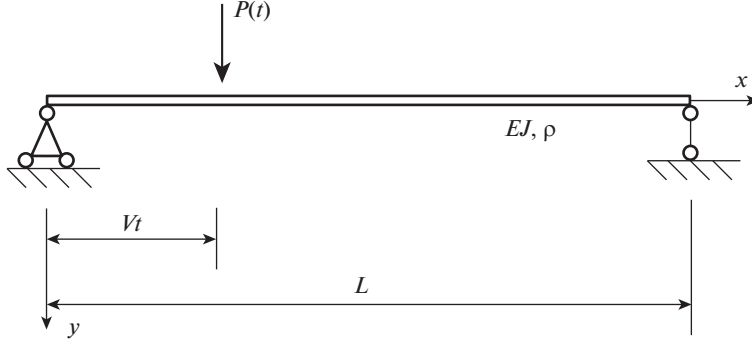


Рис. 2. Упругая балка под действием подвижной силы $P(t)$.

$$y(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(t) \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (1.2)$$

Где m – элемент натуральной последовательности. Последовательно умножая уравнение (1.1) на $\sin \frac{i\pi x}{L}$ и интегрируя его по длине балки от 0 до L уравнение (1.1) сводится к счетному количеству независимых уравнений для нахождения функций $q_m(x)$, $i = 1, \dots, \infty$

$$\frac{\partial^2 q_m(t)}{\partial t^2} + \frac{\pi^4 m^4 EJ}{L^4 \rho} q_m(t) - \frac{2P \sin \left(\frac{\pi m V t}{L} \right)}{\rho L} = 0, \quad m = 1, \dots, \infty \quad (1.3)$$

Решение уравнений (1.3) имеет вид

$$q_m(t) = C_1 \cos \left(\frac{\pi^2 m^2 \sqrt{EJ}}{L^2 \sqrt{\rho}} t \right) + C_2 \sin \left(\frac{\pi^2 m^2 \sqrt{EJ}}{L^2 \sqrt{\rho}} t \right) + \frac{2P \sin \left(\frac{\pi m V t}{L} \right) L^3}{\pi^2 m^2 (EJ \pi^2 m^2 - L^2 V^2 \rho)} \quad (1.4)$$

Для первого интервала движения ($0 < t < L/V$), учитывая начальные условия $q_m(0) = \frac{\partial q_m(0)}{\partial t} = 0$, решение имеет вид

$$q_m(t) = \frac{2PL^3}{\sqrt{EJ} m^3 \pi^3} \left[\frac{VL \sqrt{\rho} \sin \left(\frac{\pi^2 m^2 \sqrt{EJ}}{L^2 \sqrt{\rho}} t \right) - \pi m \sqrt{EJ} \sin \left(\frac{\pi V m t}{L} \right)}{(EJ \pi^2 m^2 - L^2 V^2 \rho)} \right] \quad (1.5)$$

Для того чтобы построить решение для второго интервала ($L/V < t < 2L/V$) нужно учесть, что терминальные условия первого движения являются начальными для второго

$$q_m\left(\frac{L}{V}\right) = -\frac{2PL^4V\sqrt{\rho}\sin\left(\frac{\pi^2m^2\sqrt{EJ}}{VL\sqrt{\rho}}\right)}{\sqrt{EJ}m^3\pi^3(EJ\pi^2m^2 - L^2V^2\rho)}$$

$$\frac{\partial q_m}{\partial t}\Big|_{t=\frac{L}{V}} = -\frac{2PL^2V\left(\cos\left(\frac{\pi^2m^2\sqrt{EJ}}{VL\sqrt{\rho}}\right) - (-1)^m\right)}{m\pi(EJ\pi^2m^2 - L^2V^2\rho)} \quad (1.6)$$

Введем в рассмотрение параметр

$$\beta_0 = \frac{\pi\sqrt{EJ}}{VL\sqrt{\rho}} \quad (1.7)$$

Тогда соотношения (1.6) переписутся в виде

$$q_m\left(\frac{L}{V}\right) = \frac{2PL^2\sin(\pi m^2\beta_0)}{\sqrt{\rho EJ}m^3\pi^3V(\beta_0^2m^2 - 1)}$$

$$\frac{\partial q_m}{\partial t}\Big|_{t=\frac{L}{V}} = \frac{2P(\cos(\pi m^2\beta_0) - (-1)^m)}{m\pi\rho(\beta_0^2m^2 - 1)} \quad (1.8)$$

Интересным представляется случай, когда параметр β_0 является целым числом

$$\beta_0 = 1, 2, \dots \quad (1.9)$$

В этом случае первое соотношение из (1.8) тождественно равно нулю

$$q_m\left(\frac{L}{V}\right) = 0$$

а второе имеет вид

$$\frac{\partial q_m}{\partial t}\Big|_{t=\frac{L}{V}} = \frac{2P}{m\pi\rho(\beta_0^2m^2 - 1)}((-1)^{m^2\beta_0} - (-1)^m) \quad (1.10)$$

Очевидно, что значение выражения (1.10) определяется значением скобки, которую, не теряя общности можно переписать в виде

$$((-1)^{m\beta_0} - (-1)^m) = \begin{cases} 0, & \beta_0 = 2i + 1 \\ 2(-1)^m, & \beta_0 = 2i \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.11)$$

Таким образом, если значение параметра β_0 является нечетным числом $\beta_0 = 2i - 1$, $i = 1, 2, \dots$, то реализуются условия антирезонанса и терминальные условия для этого движения имеют вид

$$q_m\left(\frac{L}{V}\right) = 0, \quad \frac{\partial q_m}{\partial t}\Big|_{t=\frac{L}{V}} = 0 \quad (1.12)$$

Используя это свойство, можно утверждать, что какая бы не была система последовательно действующих движущихся сосредоточенных сил вдоль балки, амплитуды возникающих колебаний всегда будут ограниченными. А при условии наличия диссипативных сил такие колебания будут затухать.

В случае, если значение параметра β_0 является четным числом $\beta_0^* = 2i$, $i = 1, 2, \dots$, то несмотря на то, что в конце движения реализуются нулевые перемещения по всей длине балки, распределение скоростей могут быть не нулевыми

$$\left. \frac{\partial q_m}{\partial t} \right|_{t=\frac{L}{V}} = \frac{2P[(-1)^{m\beta_0} - (-1)^m]}{m\pi\rho(\beta_0^2 m^2 - 1)} = \begin{cases} \frac{-4P}{m\pi\rho(\beta_0^2 m^2 - 1)}, & m = 2i - 1 \\ 0, & m = 2i \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.13)$$

Таким образом при четных значениях параметра m (четные моды) так же, как и в предыдущем случае наблюдается явление антирезонанса. Можно предположить, что для нечетных мод при периодическом нагружении балки бегущими силами может наблюдаться явление резонанса.

Рассмотрим следующий процесс нагружения балки бегущими вдоль нее поперечными силами с интенсивностью P . В начальный момент времени $t = 0$ к левому концу балки приложена сила P , которая движется по направлению к правому концу со скоростью V . В момент времени, когда сила достигает правого конца на левом конце балки появляется сила P , которая движется к правому концу с той же скоростью V . Далее процесс повторяется.

Предположим, что в некоторый момент времени $t_j = j\frac{L}{V}$ происходит смена сил и на левом конце возникает сила P_j . По индукции можно доказать, что начальное условие для этой задачи (1.13) имеет вид

$$\left. \frac{\partial q_m}{\partial t} \right|_{t=j\frac{L}{V}} = \frac{-4P(2j-1)}{m\pi\rho(\beta_0^2 m^2 - 1)} \quad (1.14)$$

Для полноты картины осталось рассмотреть один особый случай. Из соотношения (1.8) следует, что при $m = \beta_0 = 1$ знаменатель становится равным нулю. Поэтому рассмотрим этот случай отдельно. Тогда уравнение (1.3) примет вид

$$\frac{\partial^2 q_1(t)}{\partial t^2} + \frac{\pi^2 V^2}{L^2} q_1(t) - \frac{2P \sin(\pi V t)}{\rho L} = 0 \quad (1.15)$$

Решение (1.15) имеет вид

$$q_1(t) = \sin\left(\frac{\pi V t}{L}\right) c_2 + \cos\left(\frac{\pi V t}{L}\right) c_1 - \frac{P t}{\pi \rho V} \cos\left(\frac{\pi V t}{L}\right) + \frac{P L}{\pi^2 \rho V^2} \sin\left(\frac{\pi V t}{L}\right) \quad (1.16)$$

Из (1.16) видно, что начальные условия $q_m(0) = \frac{\partial q_m(0)}{\partial t} = 0$ удовлетворяются при $c_1 = c_2 = 0$. При этом терминальные условия есть

$$q_1^1\left(\frac{L}{V}\right) = \frac{P L}{\pi \rho V^2} \neq 0, \quad \left. \frac{\partial q_1^1}{\partial t} \right|_{t=\frac{L}{V}} = 0 \quad (1.17)$$

Используя условия (1.17) в качестве начальных для второго движения получим

$$q_1^{(2)}(t) = \frac{P}{\pi^2 \rho V^2} \left(\pi(L - Vt) \cos\left(\frac{\pi V t}{L}\right) + L \sin\left(\frac{\pi V t}{L}\right) \right) \quad (1.18)$$

Терминальные условия для этого движения имеют нулевые движения

$$q_1^1\left(\frac{L}{V}\right) = 0, \quad \left. \frac{\partial q_1^1}{\partial t} \right|_{t=\frac{L}{V}} = 0 \quad (1.19)$$

Таким образом в отличие от общего случая (β_0 – нечетные числа) периодические движения реализуются на двух циклах движения.

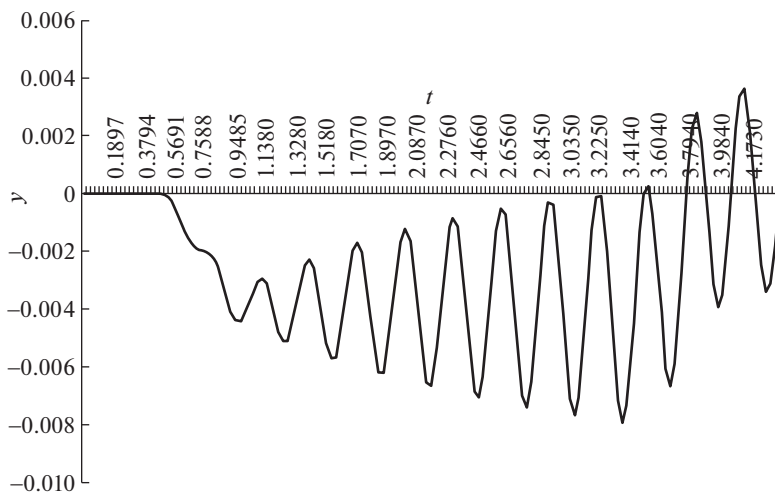


Рис. 3. Диаграмма колебаний $y(t)$ середины балки 50 м от 10-вагонного поезда при резонансе и $\beta_0 = 4$, $V = 82.5$ м/с.

3. Верификация метода с помощью компьютерного моделирования. Очевидно, что сформулированные в п. 2 условия не полностью соответствуют реальным условиям, поскольку подвижной состав представляет собой для пролетного строения множество движущихся переменных сил, а не одиночную постоянную силу. Поэтому из-за суперпозиции сил контакта подавление колебаний в виде антирезонанса может и не происходить. Однако, по нашему мнению, подавление колебаний может проявляться в виде ограниченности амплитуды колебаний.

Проверка сформулированных условий проявления резонанса и подавления или ограничения колебаний производилась с помощью комплекса численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений колебаний подвижного состава из 10 вагонов с 10 степенями свободы каждый, дифференциальных уравнений в частных производных для верхнего строения пути и балок пролетных строений [24]. Модель вагона с 10 степенями свободы учитывает колебания подпрыгивания и галопирования кузова вагона и тележек, которые возбуждаются проходом через мост. Такие колебания вагона, как виляние, боковой отход, боковая качка не рассматриваются, так как такие колебания не возбуждаются мостами.

Рассмотрим движение поезда со скоростью 82.5 м/с (297 км/ч) по балке 50 м для различных значений β_0 . Эта скорость является критической (вызывающей резонанс) исходной балки реального проекта.

Как и было предсказано, для $\beta_0 = 4$ и соответствующего ему соотношения EJ/t происходят резонансные колебания балки (рис. 3). Очевидно, что амплитуда резонансных колебаний будет возрастать с увеличением длины поезда (на линии С.-Петербург—Москва длина поезда Сапсан достигает 20 вагонов).

При $\beta_0 = 3$ в соответствии с п. 2 ожидалось явление антирезонанса. Из-за наложения колебаний от прохода не менее чем 4 колес, уместающихся на этой балке одновременно, монотонного уменьшения амплитуды вынужденных колебаний не наблюдается. При этом (рис. 4) видно, что амплитуда вынужденных колебаний остается ограниченной. Согласно нормам [25] предельный прогиб для такой балки составляет 2.2 см. Однако важным представляется практическое отсутствие свободных колебаний после

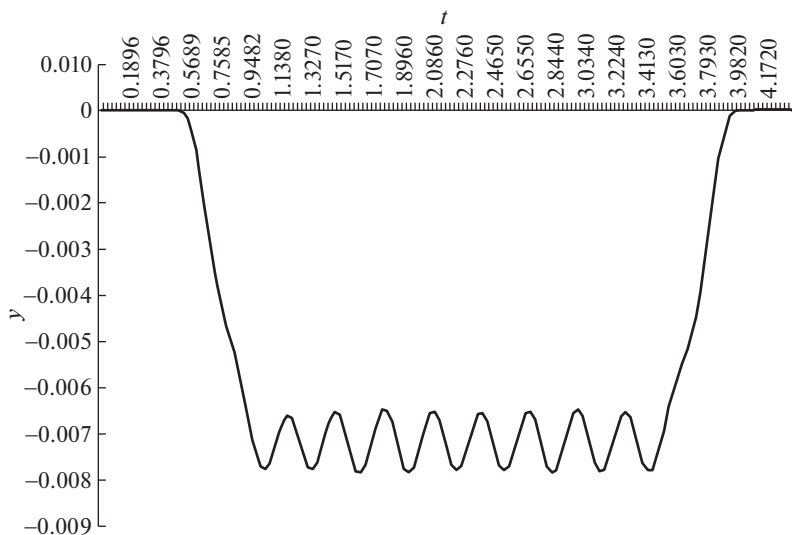


Рис. 4. Диаграмма колебаний $y(t)$ середины балки 50 м при $\beta_0 = 3$, $V = 82.5$ м/с.

ухода поезда, что подтверждает выполнение условия (2.12). Таким образом, можно констатировать подтверждение численным экспериментом на более подробной модели [24] теоретических результатов преобразований и вычислений, изложенных в п. 2.

4. Заключение. Разработан новый метод прогнозирования динамического поведения балочных пролетных строений мостов на ВСМ. Этот инженерный метод позволяет без привлечения сложного программного обеспечения на этапе предпроектных работ назначить динамические параметры балки с предписанным динамическим поведением. Таким образом можно избежать резонанса балки, достижимого при высокоскоростном движении.

Работа выполнена в рамках госзадания № 123021700050-1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jiang L., Feng Y., Zhou W., He B. Vibration characteristic analysis of high-speed railway simply supported beam bridge-track structure system // *Steel Compos. Struct.* 2019. V. 31. № 6. С. 591–600. <https://doi.org/10.12989/scs.2019.31.6.591>
2. Fryba L. A rough assessment of railway bridges for high speed trains // *Eng. Struct.* 2001. V. 23. № 5. С. 548–556. [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(00\)00057-2](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(00)00057-2)
3. Lin C.C., Wang J.F., Chen B.L. Train-induced vibration control of high-speed railway bridges equipped with multiple tuned mass dampers // *J. Bridge Eng.* 2005. V. 10. № 4. С. 398–414. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1084-0702\(2005\)10:4\(398\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1084-0702(2005)10:4(398))
4. Feng Y., Jiang L., Zhou W., Lai Z., Chai X. An analytical solution to the mapping relationship between bridge structures vertical deformation and rail deformation of high-speed railway // *Steel Compos. Struct.* 2019. V. 33. № 2. С. 209–224. <https://doi.org/10.12989/scs.2019.33.2.209>
5. Miguel L.F.F., Lopez R.H., Torii A.J. Robust design optimization of TMDs in vehicle–bridge coupled vibration problems // *Eng. Struct.* 2016. V. 126. С. 703–711. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.08.033>

6. *Pisal A.Y., Jangid R.S.* Vibration control of bridge subjected to multi-axle vehicle using multiple tuned mass friction dampers // *Int. J. Adv. Struct. Eng.* 2016. V. 8. C. 213–227.
<https://doi.org/10.1007/s40091-016-0124-y>
7. *Левин Б.А., Поляков В.Ю.* Мосты ВСМ: основные проблемы и решения // Бюллетень ОУС ОАО РЖД. 2019. № 1. С. 34–52.
8. *Poliakov V., Zhang N., Saurin V. Thanh D.N.* Running safety of a high-speed train within a bridge zone // *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* 2020. V. 20. № 11.
<https://doi.org/10.1142/S0219455420501163>
9. *Li J., Zhang H.* Moving load spectrum for analyzing the extreme response of bridge free vibration // *Hindawi. Shock Vib.* 2020. V. 6. C. 13.
<https://doi.org/10.1155/2020/9431620>
10. *Bashmal S.* Determination of critical and cancellation speeds of euler–bernoulli beam subject to a continuously moving load // *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* 2019. V. 19. № 3. 22 c.
<https://doi.org/10.1142/S0219455419500305>
11. *Lee K., Cho Y., Chung J.* Dynamic contact analysis of a tensioned beam with a moving mass–spring system // *J. Sound Vib.* 2012. V. 331. № 11. C. 2520–2531. 1
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.01.014>
12. *Fryba L.* Vibration of Solids and Structures Under Moving Loads. Thomas Telford, 1999, 524 c.
13. *Dmitriev A.S.* Transverse vibrations of a three-span beam under a moving load // *Soviet Applied Mech.* 1974. V. 10. C. 1263–1266.
<https://doi.org/10.1007/BF00882128>
14. *Olsson M.* On the fundamental moving load problem // *J. Sound Vib.* 1991. V. 145. № 2. C. 299–307.
15. *Wen R.K.* Dynamic response of beams traversed by two-axle loads // *J. Eng. Mech. Div.* 1968. V. 86. C. 91–111.
16. *Lin Y.-H., Trethewey M.W.* Finite element analysis of elastic beams subjected to moving dynamic loads // *J. Sound Vib.* 1990. V. 136. № 2. C. 323–342.
[https://doi.org/10.1016/0022-460X\(90\)90860-3](https://doi.org/10.1016/0022-460X(90)90860-3)
17. *Cho Y.H.* Numerical simulation of the dynamic responses of railway overhead contact lines to a moving pantograph, considering a nonlinear dropper // *J. Sound Vib.* 2008. V. 315. № 3. C. 433–454.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.02.024>
18. *Lee K.* Analysis of dynamic contact between overhead wire and pantograph of a high-speed electric train // *Proc. Instn Mech. Eng. F: J. Rail Rapid Transit.* 2007. V. 221. № 2. P. 157–166.
19. *Ouyang H.* Moving-load dynamic problems: A tutorial (with a brief overview) // *Mech. Syst. Signal Process.* 2011. V. 25. № 6. P. 2039–2060.
20. *Yang Y.B., Yau J.D., Wo Y.S.* Vehicle–bridge interaction dynamics: with applications to high-speed railways. Singapore: World Scientific Publishing Co., 2004. 530 p.
21. *Xia H., Zhang N., Guo W.* Dynamic interaction of train-bridge systems in high-speed railways. Theory and Applications. World Scientific Publishing Co., 2004. 530 p.
22. *Поляков В.Ю.* Анतिрезонанс пролетных строений железнодорожных мостов при высокоскоростном движении // *Транспортное строительство.* 2018. № 10. С. 2–5.
23. *Пановко Я.Г., Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. 4 изд. Пер. М.: Наука, 1987. 352 с.
24. *Поляков В.Ю.* Численное моделирование взаимодействия подвижного состава с мостовыми конструкциями при высокоскоростном движении // *Строительная механика и расчет сооружений.* 2016. № 2. С. 54–60.
25. Свод правил СП 453.1325800.2019 Сооружения искусственные высокоскоростных железнодорожных линий. Правила проектирования и строительства. М.: Стандартинформ, 2020. 139 с.