ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2023, № 6, с. 69–82

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА ГОРЯЧЕВА–СРЕТЕНСКОГО

А. А. Косов[a,*]

[a] *Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия*

**e-mail: kosov_idstu@mail.ru*

Поступила в редакцию 25.08.2022 г.
После доработки 11.03.2023 г.
Принята к публикации 23.03.2023 г.

Изучаются уравнения движения гиростата Горячева–Сретенского. Установлено, что одна компонента вектора угловой скорости совершает колебания с нулевым средним значением на всех решениях вне множества нулевого уровня интеграла площадей. Найдены все стационарные решения, включающие два состояния покоя и два параметрических семейства перманентных вращений. Методом интегральных связок Четаева получены достаточные условия устойчивости стационарных решений. На основе анализа корней характеристического уравнения получены условия неустойчивости. Установлена возможность гироскопической стабилизации за счет момента циркулярно-гироскопических сил при определенных условиях.

Ключевые слова: гиростат Горячева–Сретенского, частные и общие интегралы, стационарные решения, устойчивость

DOI: 10.31857/S0572329922600657, **EDN:** RTQUEU

1. Введение. В динамике твердого тела с неподвижной точкой важное значение имеют как классические случаи полной интегрируемости (Эйлера, Лагранжа и Ковалевской), так и случаи частичной интегрируемости, когда удается получить дополнительный частный интеграл [1–3]. Один из таких частично интегрируемых случаев для уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки был найден Д.Н. Горячевым [4], который показал существование четвертого по счету интеграла на инвариантном множестве нулевого уровня интеграла площадей. Интегрирование дифференциальных уравнений движения с использованием дополнительного интеграла было выполнено [5] С.А. Чаплыгиным, установившим, что решения в общем случае представляются гиперэллиптическими функциями времени. Эти результаты были распространены Л.Н. Сретенским [6] на более общие по сравнению с твердым телом уравнения движения гиростата, содержащие дополнительный параметр – вектор гиростатического момента.

Исследования случая Горячева–Чаплыгина для твердого тела и гиростата Горячева–Сретенского, а также их аналогов и обобщений успешно продолжаются и в настоящее время по нескольким направлениям. Изучались [7] эргодические свойства решений волчка Горячева–Чаплыгина, показано, что собственное вращение и прецессия обладают главным движением, а нутация является квазипериодической функцией времени. Обобщение случая Горячева–Чаплыгина, где в гамильтониане присутствует ряд новых дополнительных параметров, изучалось в [2], при этом сохраняется вывод об интегрируемости на нулевом уровне интеграла площадей. Доказана [8] периодичность движений тела в случае Горячева при малых значениях энергии.

Были найдены [9] стационарные решения уравнений гиростата Горячева—Сретенского, лежащие на инвариантном множестве нулевого уровня интеграла площадей, но анализ их устойчивости не проводился. Изучалась [10] орбитальная устойчивость периодических движений твердого тела в случае Горячева—Чаплыгина, показана их неустойчивость в первом приближении. Затем эта неустойчивость была подтверждена [11] и в строгой нелинейной постановке применением теоремы Четаева. Были выделены инвариантные множества волчка Горячева—Чаплыгина и обобщенным методом Рауса исследовалась их устойчивость [12].

Объектом исследования в данной статье являются уравнения движения гиростата Горячева—Сретенского с дополнительным моментом циркулярно-гироскопических сил. Статья организована следующим образом. В разделе 2 приводятся уравнения движения, их первые интегралы и формулируются задачи исследования. В разделе 3 установлено, что одна из компонент вектора угловой скорости совершает колебания с нулевым средним значением на всех движениях вне множества нулевого уровня интеграла площадей. В разделе 4 найдены все стационарные решения, среди которых два состояния покоя и два параметрических семейства перманентных вращений, и получены условия устойчивости или неустойчивости найденных стационарных решений. В разделе 5 построение и исследование устойчивости стационарных решений проведено в случае нелинейного потенциала. В разделе 6 рассматривается влияние момента циркулярно-гироскопических сил на устойчивость стационарных решений и доказана возможность стабилизации в линейном приближении при условиях, аналогичных теореме Томсона—Тета—Четаева. Раздел 7 посвящен обсуждению результатов. В заключение кратко сформулированы основные результаты статьи.

2. Дифференциальные уравнения движения, первые интегралы и постановка задачи. Рассмотрим векторную форму уравнений движения гиростата с неподвижной точкой под действием момента потенциальных и циркулярно-гироскопических сил

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{M}, \quad \mathbf{M} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + \mathbf{M}_2, \quad \mathbf{M}_2 = L(t, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega})\, \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} \tag{2.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega} \tag{2.2}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{col}(p, q, r)$ — вектор угловой скорости, $\boldsymbol{\gamma} = \mathrm{col}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — единичный вектор оси симметрии силового поля, заданные проекциями на оси связанной системы координат, $\mathbf{I} = \mathbf{I}^T > 0$ — симметричная положительно определенная матрица тензора инерции относительно неподвижной точки, $\boldsymbol{\lambda} = \mathrm{col}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — вектор гиростатического момента, $U(\boldsymbol{\gamma})$ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция (потенциал), $L(t, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega})$ — произвольная непрерывная функция. Отметим, что уравнения движения гиростата под действием момента потенциальных и гироскопических сил, аналогичные или более общие, чем система (2.1), (2.2), рассматривались во многих работах (см., например, [13—16]). Момент циркулярно-гироскопических сил вида $\mathbf{M}_2 = L(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}$ использовался в уравнениях Гриоли [17]. Момент вида $\mathbf{M}_2 = L\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}$, $L = \mathrm{const}$ возникает при вращении ферромагнитного тела в постоянном и однородном магнитном поле в случае, изученном в [18].

Как известно [13—16], система (2.1), (2.2) имеет три первых интеграла:

$$J_1 = J_1(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} + 2U(\boldsymbol{\gamma}) = c_1 = \mathrm{const} \tag{2.3}$$

$$J_2 = J_2(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\gamma}^{\mathbf{T}} (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\gamma}) = c_2 = \mathrm{const} \tag{2.4}$$

$$J_3 = J_3(\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\gamma} = 1 \tag{2.5}$$

Предположим пока, что момент $\mathbf{M}_2 = L(t,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\gamma}$ отсутствует, т.е. что $L(t,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\omega}) \equiv 0$. Далее всюду будем считать матрицу инерции диагональной $\mathbf{I} = \mathrm{diag}(A, B, C)$, потенциал пока будем полагать линейной функцией $U(\boldsymbol{\gamma}) = a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3$, и параметры отвечающими условиям гиростата Горячева–Сретенского [4, 6]: $A = B = 4C,\ \ b = c = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. При этих условиях система (2.1), (2.2) и первые интегралы в координатной форме запишутся так

$$\begin{aligned} 4C\dot{p} &= 3Cqr - \lambda_3 q \\ 4C\dot{q} &= -3Cpr + \lambda_3 p + a\gamma_3 \\ C\dot{r} &= -a\gamma_2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2 \tag{2.7}$$

$$J_1 = 4Cp^2 + 4Cq^2 + Cr^2 + 2a\gamma_1 = c_1 = \mathrm{const} \tag{2.8}$$

$$J_2 = 4Cp\gamma_1 + 4Cq\gamma_2 + \gamma_3(Cr + \lambda_3) = c_2 = \mathrm{const} \tag{2.9}$$

$$J_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \tag{2.10}$$

В [6] установлено, что функция

$$J_4 = 4C(Cr - \lambda_3)(p^2 + q^2) - 4aCp\gamma_3 \tag{2.11}$$

удовлетворяет во всем фазовом пространстве дифференциальному соотношению

$$\dot{J}_4 = \left.\frac{dJ_4}{dt}\right|_{(2.6),(2.7)} = -aqJ_2 \tag{2.12}$$

Из (2.12) следует, что на инвариантном множестве $J_2 = 0$, задаваемом нулевым уровнем интеграла площадей (2.8), функция (2.11) порождает первый интеграл

$$J_4 = 4C(Cr - \lambda_3)(p^2 + q^2) - 4aCp\gamma_3 = c_4 = \mathrm{const} \tag{2.13}$$

с произвольной постоянной $c_4 = \mathrm{const}$. Наличие четырех известных первых интегралов (2.8)–(2.10) и (2.13) позволяет выполнить на множестве $J_2 = 0$ интегрирование в квадратурах [6]. Однако поведение решений и их свойства представляют несомненный интерес и вне этого множества $J_2 = 0$. Задача построения решений вне множества $J_2 = 0$ рассматривались в [19], где была проведена редукция к системе двух уравнений.

Задачи исследования в данной статье состоят в том, чтобы:

1) установить эргодические свойства компоненты $q(t)$ решения системы (2.6), (2.7) вне множества $J_2 = 0$;

2) выявить все стационарные решения, которые задаются постоянными, обращающими правые части уравнений движения (2.6), (2.7) в нуль;

3) используя первые интегралы получить методом интегральных связок Четаева [20] достаточные условия устойчивости выявленных стационарных решений;

4) используя уравнения линейного приближения и теорему Ляпунова выявить случаи неустойчивости;

5) распространить условия устойчивости на случай нелинейного потенциала и выяснить влияние циркулярно-гироскопических сил на устойчивость стационарных решений.

3. О поведении $q(t)$ вне множества $J_2 = 0$. *Утверждение* 1. Для всякого решения $(\boldsymbol{\omega}(t), \boldsymbol{\gamma}(t))$ системы уравнений движения гиростата (2.6), (2.7), не лежащего в инвариантном множестве $J_2 = 0$, его компонента $q(t)$ совершает колебания с нулевым средним значением $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t q(\tau)\,d\tau = 0.$

Доказательство. Рассмотрим произвольное решение $(\boldsymbol{\omega}(t),\boldsymbol{\gamma}(t))$, не лежащее на множестве $J_2 = 0$. Из существования интегралов J_1 и J_3 вытекает ограниченность решения $(\boldsymbol{\omega}(t),\boldsymbol{\gamma}(t))$ при всех $-\infty < t < +\infty$. Значит на этом решении будет ограничена сверху и снизу при всех $-\infty < t < +\infty$ и задаваемая формулой (2.11) функция J_4. Интегрируя дифференциальное равенство (2.12), получаем $J_4(\boldsymbol{\omega}(t),\boldsymbol{\gamma}(t)) = J_4(\boldsymbol{\omega}(0),\boldsymbol{\gamma}(0)) - aJ_2(\boldsymbol{\omega}(0),\boldsymbol{\gamma}(0))\int\limits_0^t q(\tau)\,d\tau$, поэтому, поскольку $aJ_2(\boldsymbol{\omega}(0),\boldsymbol{\gamma}(0)) \neq 0$, то из ограниченности функции J_4 вдоль решения $(\boldsymbol{\omega}(t),\boldsymbol{\gamma}(t))$ следует, что $\left|\int\limits_0^t q(\tau)\,d\tau\right| < +\infty$ при всех $-\infty < t < +\infty$. Следовательно, среднее значение равно нулю $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t q(\tau)\,d\tau = 0$. Утверждение доказано.

Следствие 1. Для любого стационарного решения $(\boldsymbol{\omega}(t),\boldsymbol{\gamma}(t)) = (\bar p,\bar q,\bar r,\bar\gamma_1,\bar\gamma_2,\bar\gamma_3) = \mathrm{const}$, не лежащего в множестве $J_2 = 0$, всегда будет $\bar q = 0$.

Это следствие полезно при отыскании всех стационарных решений системы (2.6), (2.7).

4. Стационарные решения и условия их устойчивости. Все стационарные решения $(\bar p,\bar q,\bar r,\bar\gamma_1,\bar\gamma_2,\bar\gamma_3) = \mathrm{const}$ системы (2.6), (2.7), лежащие на инвариантном множестве $J_2 = 0$, были найдены в [9], при этом для них характерно $\bar q = 0$. Таким образом, с учетом следствия 1 для всех стационарных решений системы (2.6), (2.7) выполняются равенства $\bar q = 0$, $\bar\gamma_2 = 0$. Поэтому для нахождения стационарных решений получаем систему уравнений

$$-3C\overline{pr} + \lambda_3\bar p + a\bar\gamma_3 = 0, \quad \overline{p\gamma_3} - \overline{r\gamma_1} = 0 \tag{4.1}$$

Эта система имеет очевидное решение

$$\bar p = \bar q = \bar r = 0, \quad \bar\gamma_2 = \bar\gamma_3 = 0, \quad \bar\gamma_1 = \sigma = \pm 1 \tag{4.2}$$

Все другие вещественные стационарные решения находятся следующим образом. Используя геометрический интеграл (2.10), полагаем $\bar\gamma_1 = \cos\varphi$, $\bar\gamma_3 = \sin\varphi$, где $0 < \varphi < 2\pi$ – произвольно. Заметим, что решения (4.1) с $\bar\gamma_1 = 0$ нас не интересуют, так как они влекут $\bar\gamma_3 = 0$ и противоречат геометрическому интегралу. Поэтому считаем, что $\bar\gamma_1 = \cos\varphi \neq 0$. В случае $\bar\gamma_3 = 0$ из системы (4.1) вновь получается решение (4.2), поэтому считаем, что $\bar\gamma_3 = \sin\varphi \neq 0$. Из второго уравнения (4.1) выражаем $\bar r$ и, подставляя в первое, получаем квадратное относительно $\bar p$ уравнение $3C\sin\varphi\bar p^2 - \lambda_3\cos\varphi\bar p - a\sin\varphi\cos\varphi = 0$, которое имеет вещественные корни при условии

$$D = \lambda_3^2\cos^2\varphi + 12aC\sin^2\varphi\cos\varphi \geq 0 \tag{4.3}$$

Таким образом, система (2.6), (2.7) имеет при всех $0 < \varphi < 2\pi$, $\varphi \neq \pi/2, \pi, 3\pi/2$, удовлетворяющих неравенству (4.3), два стационарных решения (при $D = 0$ они совпадают)

$$\bar p_{1,2} = \frac{\lambda_3\cos\varphi \pm \sqrt{D}}{6C\sin\varphi}, \quad \bar q = 0, \quad \bar r_{1,2} = \frac{\lambda_3\cos\varphi \pm \sqrt{D}}{6C\cos\varphi}$$
$$\bar\gamma_1 = \cos\varphi, \quad \bar\gamma_2 = 0, \quad \bar\gamma_3 = \sin\varphi \tag{4.4}$$

Других стационарных решений, кроме двух состояний покоя (4.2) и двух однопараметрических семейств перманентных вращений (4.4), система (2.6), (2.7) не имеет.

Перейдем теперь к анализу устойчивости стационарных решений. Введем обозначения для отклонений от невозмущенного стационарного движения

$$x_1 = p - \overline{p}, \quad x_2 = q - \overline{q}, \quad x_3 = r - \overline{r}$$

$$x_4 = \gamma_1 - \overline{\gamma}_1, \quad x_5 = \gamma_2 - \overline{\gamma}_2, \quad x_6 = \gamma_3 - \overline{\gamma}_3$$

В этих переменных интегралы уравнений возмущенного движения для стационара (4.2), выпишутся следующим образом:

$$J_1 - \overline{J}_1 = 4Cx_1^2 + 4Cx_2^2 + Cx_3^2 + 2ax_4, \quad J_3 - \overline{J}_3 = 2\sigma x_4 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2$$

Здесь и далее $\overline{J}_i$ означает значение выбранного интеграла на невозмущенном движении. Функцию Ляпунова по методу Четаева [20] строим в виде связки (линейной комбинации) интегралов

$$V(x) = J_1 - \overline{J}_1 + \alpha_3 \left(J_3 - \overline{J}_3\right)$$

С целью уничтожения линейных слагаемых в связке выберем число α_3 следующим образом $\alpha_3 = -a\sigma$, тогда функция $V(x)$ будет квадратичной формой $V(x) = 4Cx_1^2 + 4Cx_2^2 + Cx_3^2 - a\sigma(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)$. В случае $\sigma = -\operatorname{sign}(a)$ эта квадратичная форма является положительно определенной по отношению ко всем переменным $x = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_6)$. Тем самым доказано следующее

Утверждение 2. Состояние покоя (4.2), соответствующее значению $\sigma = -\operatorname{sign}(a)$, устойчиво по Ляпунову.

Для анализа устойчивости второго состояния покоя (4.2), которому соответствует $\sigma = \operatorname{sign}(a)$, воспользуемся теоремой Ляпунова о неустойчивости по линейному приближению. Для этого состояния покоя характеристическое уравнение линейного приближения имеет вид

$$z^2(z^4 + a_2 z^2 + a_0) = 0 \tag{4.5}$$

где

$$a_2 = \frac{\lambda_3^2 - 20C|a|}{16C^2}, \quad a_0 = \frac{|a|(4C|a| - \lambda_3^2)}{16C^3} \tag{4.6}$$

Для того, чтобы уравнение (4.5) не имело корней с положительной вещественной частью, оба коэффициента (4.6) должны быть неотрицательны, что приводит к противоречивым условиям $\lambda_3^2 \geq 20C|a|$, $4C|a| \geq \lambda_3^2$. Это означает, что один из коэффициентов (4.6) отрицателен и уравнение (4.5) имеет корень с положительной вещественной частью. Тем самым доказано следующее

Утверждение 3. Состояние покоя (4.2), соответствующее значению $\sigma = \operatorname{sign}(a)$, неустойчиво по Ляпунову.

Теперь рассмотрим вопрос об устойчивости перманентных вращений из семейств (4.4). В этом случае интегралы уравнений возмущенного движения записываются так

$$J_1 - \overline{J}_1 = 8C\overline{p}x_1 + 2C\overline{r}x_3 + 2ax_4 + 4Cx_1^2 + 4Cx_2^2 + Cx_3^2$$

$$J_2 - \overline{J}_2 = 4C\overline{\gamma}_1 x_1 + C\overline{\gamma}_3 x_3 + 4C\overline{p}x_4 + \left(C\overline{r} + \lambda_3\right)x_6 + 4Cx_1x_4 + 4Cx_2x_5 + Cx_3x_6$$

$$J_3 - \overline{J}_3 = 2\overline{\gamma}_1 x_4 + 2\overline{\gamma}_3 x_6 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2$$

Функцию Ляпунова по методу Четаева [20] строим в виде связки интегралов

$$V(x) = J_1 - \bar{J}_1 + \alpha_2 (J_2 - \bar{J}_2) + \alpha_3 (J_3 - \bar{J}_3) + \beta_2 (J_2 - \bar{J}_2)^2 + \beta_3 (J_3 - \bar{J}_3)^2$$

С целью уничтожения линейных слагаемых в связке числа α_2 и α_3 выберем следующим образом

$$\alpha_2 = -\frac{2\bar{p}}{\bar{\gamma}_1}, \quad \alpha_3 = \frac{\bar{r}(C\bar{r} + \lambda_3)}{\bar{\gamma}_3^2}$$

Тогда функцию Ляпунова можно записать в виде

$$V(x) = V_{14}(x_1, x_4) + V_{25}(x_2, x_5) + V_{36}(x_3, x_6) + \beta_2 (J_2 - \bar{J}_2)^2 + \beta_3 (J_3 - \bar{J}_3)^2$$

где

$$V_{14}(x_1, x_4) = 4Cx_1^2 - \frac{2\bar{p}}{\bar{\gamma}_1} 4Cx_1 x_4 + \frac{\bar{r}(C\bar{r} + \lambda_3)}{\bar{\gamma}_3^2} x_4^2$$

$$V_{25}(x_2, x_5) = 4Cx_2^2 - \frac{2\bar{p}}{\bar{\gamma}_1} 4Cx_2 x_5 + \frac{\bar{r}(C\bar{r} + \lambda_3)}{\bar{\gamma}_3^2} x_5^2$$

$$V_{36}(x_3, x_6) = Cx_3^2 - \frac{2\bar{p}}{\bar{\gamma}_1} Cx_3 x_6 + \frac{\bar{r}(C\bar{r} + \lambda_3)}{\bar{\gamma}_3^2} x_6^2$$

Так как положительные числа β_2 и β_3 можно брать как угодно большими, то для положительной определенности квадратичной части функции Ляпунова необходимо и достаточно [21], чтобы квадратичная форма $V_2(x) = V_{14}(x_1, x_4) + V_{25}(x_2, x_5) + V_{36}(x_3, x_6)$ была положительно определенной на линейном множестве

$$\Theta = \{\bar{\gamma}_1 x_4 + \bar{\gamma}_3 x_6 = 0, 4C\bar{\gamma}_1 x_1 + C\bar{\gamma}_3 x_3 + 4C\bar{p} x_4 + (C\bar{r} + \lambda_3) x_6 = 0\}$$

Поскольку переменные x_2 и x_5 не входят в линейные ограничения Θ, то квадратичная форма $V_{25}(x_2, x_5)$ должна быть положительно определена, для чего в соответствии с критерием Сильвестра необходимо и достаточно

$$\Delta = \lambda_3 \bar{r} - 3C\bar{r}^2 > 0 \tag{4.7}$$

В силу полного совпадения коэффициентов, это же неравенство (4.7) обеспечит и положительную определенность квадратичной формы $V_{14}(x_1, x_4)$. А условия положительной определенности квадратичной формы $V_{36}(x_3, x_6)$ даются неравенством $\lambda_3 \bar{r} > 0$, которое заведомо выполнено при выполнении (4.7). Таким образом, условие (4.7) гарантирует положительную определенность трех первых слагаемых (каждого относительно своих переменных), а значит и всей функции Ляпунова. Тем самым доказано

Утверждение 4. Каждое перманентное вращение из однопараметрических семейств (4.4), для которого выполнено неравенство (4.7), является устойчивым по Ляпунову.

Нарушение неравенства (4.7) для какого-либо стационарного решения (4.4) еще не означает его неустойчивость, поскольку это условие является лишь достаточным. Для получения условий неустойчивости воспользуемся теоремой Ляпунова о неустойчивости по линейному приближению. Для стационарных решений (4.4) характеристическое уравнение системы линейного приближения имеет вид (4.5), где коэффициенты вместо (4.6) задаются следующими формулами

$$a_2 = \bar{p}^2 + \bar{r}^2 + \frac{(3C\bar{r} - \lambda_3)^2 - 20Ca\bar{\gamma}_1}{16C^2} \tag{4.8}$$

$$a_0 = \frac{1}{16C^3}(9C^3\overline{p}^2\overline{r}^2 + 9C^3\overline{r}^4 - 12aC^2\overline{p}^2\overline{\gamma}_1 - 14aC^2\overline{pr}\,\overline{\gamma}_3 - 13aC^2\overline{r}^2\overline{\gamma}_1 - 6C^2\overline{p}^2\overline{r}\lambda_3 - \\ -6C^2\overline{r}^3\lambda_3 + 4Ca^2\overline{\gamma}_1^2 + 2aC\lambda_3\overline{p\gamma}_3 + 6aC\lambda_3\overline{r\gamma}_1 + C\overline{p}^2\lambda_3^2 + C\overline{r}^2\lambda_3^2 - a\lambda_3^2\overline{\gamma}_1) \quad (4.9)$$

Из теоремы Ляпунова о неустойчивости по линейному приближению вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 5. Каждое перманентное вращение из однопараметрических семейств (4.4), для которого коэффициенты характеристического уравнения a_2 и a_0, вычисляемые по формулам (4.8) и (4.9), удовлетворяют хотя бы одному из трех условий $a_2 < 0$, $a_0 < 0$, $a_2^2 - 4a_0 < 0$, является неустойчивым по Ляпунову.

Пример 1. Пусть параметры системы (2.6), (2.7) имеют следующие значения: $C = 1$, $\lambda_3 = 4$, $a = -1$. При $\varphi = \frac{\pi}{6}$ имеются два стационарных решения вида (4.4):

$$\overline{p}_1 = \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{6}\sqrt{48 - 6\sqrt{3}}, \quad \overline{r}_1 = \frac{\sqrt{3}}{18}(4\sqrt{3} + \sqrt{48 - 6\sqrt{3}}), \quad \overline{\gamma}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \overline{\gamma}_3 = \frac{1}{2}$$

$$\overline{p}_2 = \frac{2}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{6}\sqrt{48 - 6\sqrt{3}}, \quad \overline{r}_2 = \frac{\sqrt{3}}{18}(4\sqrt{3} - \sqrt{48 - 6\sqrt{3}}), \quad \overline{\gamma}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \overline{\gamma}_3 = \frac{1}{2}$$

Вычисляя по формуле (4.7), для первого решения находим $\Delta = \sqrt{3}(16 - \sqrt{3} - 4\sqrt{16 - 2\sqrt{3}}) = 0.18\ldots > 0$. Для второго решения получаем $\Delta = \sqrt{3}(16 - \sqrt{3} + 4\sqrt{16 - 2\sqrt{3}}) = 49.24\ldots > 0$. Таким образом, из утверждения 4 следует, что оба стационарных решения, отвечающих $\varphi = \frac{\pi}{6}$, устойчивы по Ляпунову.

При $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ имеются два стационарных решения вида (4.4):

$$\overline{p}_1 = \frac{1}{6}(4 - \sqrt{16 + 6\sqrt{2}}), \quad \overline{r}_1 = \frac{1}{6}(4 - \sqrt{16 + 6\sqrt{2}}), \quad \overline{\gamma}_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \overline{\gamma}_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{p}_2 = \frac{1}{6}(4 + \sqrt{16 + 6\sqrt{2}}), \quad \overline{r}_2 = \frac{1}{6}(4 + \sqrt{16 + 6\sqrt{2}}), \quad \overline{\gamma}_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \overline{\gamma}_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Условия (4.7) для обоих решений нарушаются. Вычисляя по формуле (4.9) коэффициент характеристического уравнения, для первого решения получаем $a_0 = -\frac{7}{32} - \frac{11}{12}\sqrt{2} + \frac{5}{24}\sqrt{8 + 3\sqrt{2}} = -0.78\ldots < 0$, а для второго $a_0 = -\frac{7}{32} - \frac{11}{12}\sqrt{2} - \frac{5}{24}\sqrt{8 + 3\sqrt{2}} = -2.24\ldots < 0$. Таким образом, на основании утверждения 5 оба стационарных решения, отвечающих $\varphi = \frac{5\pi}{4}$, неустойчивы по Ляпунову.

Изменим теперь значение одного параметра, положив $\lambda_3 = 1$. Тогда при $\varphi = \frac{9\pi}{16}$ имеются два стационарных решения вида (4.4):

$$\overline{p}_1 = 0.2240\ldots, \quad \overline{r}_1 = -1.1261\ldots, \quad \overline{\gamma}_1 = \cos\left(\frac{9\pi}{16}\right), \quad \overline{\gamma}_3 = \sin\left(\frac{9\pi}{16}\right)$$

$$\overline{p}_2 = -0.2903, \quad \overline{r}_2 = 1.4594\ldots, \quad \overline{\gamma}_1 = \cos\left(\frac{9\pi}{16}\right), \quad \overline{\gamma}_3 = \sin\left(\frac{9\pi}{16}\right)$$

Вычисляя по формуле (4.7) для первого решения находим $\Delta = -3.8879\ldots < 0$, а для второго $\Delta = -2.3148\ldots < 0$. Условия (4.7) для обоих решений нарушаются. Вычисляя по формулам (4.8), (4.9) коэффициенты характеристического уравнения для первого решения получаем $a_0 = 1.0422\ldots > 0$, $a_2 = 2.2726\ldots > 0$, $a_2^2 - 4a_0 = 0.9960\ldots > 0$. Для второго решения соответственно получаем $a_0 = 1.0057\ldots > 0$, $a_2 = 2.6838\ldots > 0$, $a_2^2 - 4a_0 = 3.1801\ldots > 0$. Все корни характеристических уравнений лежат на мнимой оси, утверждение 5 неприменимо. Таким образом, в данном случае вопрос об устойчивости для обоих стационарных решений остается открытым.

5. Случай нелинейного потенциала $U(\gamma_1)$. В этом разделе рассмотрим гиростат Горячева–Сретенского в более общем случае нелинейного потенциала $U = U(\gamma_1)$, где $U(\gamma_1)$ – некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция. Отметим, что такого вида потенциальная функция, зависящая только от одной компоненты вектора $\boldsymbol{\gamma}$, использовалась в [22]. Уравнения движения вместо (2.6), (2.7) и интеграл энергии теперь запишутся так

$$\begin{gathered} 4C\dot{p} = 3Cqr - \lambda_3 q \\ 4C\dot{q} = -3Cpr + \lambda_3 p + U'(\gamma_1)\gamma_3 \\ C\dot{r} = -U'(\gamma_1)\gamma_2 \end{gathered} \tag{5.1}$$

$$\dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3,\ \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1,\ \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2 \tag{5.2}$$

$$J_1 = 4Cp^2 + 4Cq^2 + Cr^2 + 2U(\gamma_1) = c_1 = \text{const} \tag{5.3}$$

Интеграл площадей и геометрический интеграл для системы (5.1), (5.2) сохранят вид (2.4), (2.5). Состояния покоя (4.2) будут стационарными решениями и для системы (5.1), (5.2). Другие стационарные решения $(\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}, \overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \overline{\gamma}_3) = \text{const}$ системы (5.1), (5.2), для которых $\overline{q} = 0$, $\overline{\gamma}_2 = 0$, находятся с помощью квадратного относительно $\overline{p}$ уравнения

$$3C\sin\varphi\overline{p}^2 - \lambda_3\cos\varphi\overline{p} - U'(\cos\varphi)\sin\varphi\cos\varphi = 0 \tag{5.4}$$

которое имеет вещественные корни при условии

$$D_1 = \lambda_3^2\cos^2\varphi + 12U'(\cos\varphi)C\sin^2\varphi\cos\varphi \geq 0 \tag{5.5}$$

Таким образом, система (5.1), (5.2) имеет при всех $0 < \varphi < 2\pi$, $\varphi \neq \pi/2, \pi, 3\pi/2$, удовлетворяющих неравенству (5.5), два стационарных решения

$$\begin{gathered} \overline{p}_{1,2} = \frac{\lambda_3\cos\varphi \pm \sqrt{D_1}}{6C\sin\varphi}, \quad \overline{q} = 0, \quad \overline{r}_{1,2} = \frac{\lambda_3\cos\varphi \pm \sqrt{D_1}}{6C\cos\varphi} \\ \overline{\gamma}_1 = \cos\varphi, \quad \overline{\gamma}_2 = 0, \quad \overline{\gamma}_3 = \sin\varphi \end{gathered} \tag{5.6}$$

При $D_1 = 0$ эти решения (5.6) совпадают друг с другом. Для анализа устойчивости состояний покоя (4.2) функцию Ляпунова по методу Четаева [20] строим в виде связки интегралов

$$\begin{gathered} V(x) = J_1 - \overline{J}_1 + \alpha_3(J_3 - \overline{J}_3) + \beta_3(J_3 - \overline{J}_3)^2 = \\ = 4Cx_1^2 + 4Cx_2^2 + Cx_3^2 + 2U'(\sigma)x_4 + \alpha_3(2\sigma x_4 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) + \\ + U''(\sigma)x_4^2 + 4\beta_3 x_4^2 + o(\|x\|^2), \end{gathered}$$

где используется интеграл энергии в форме (5.3). С целью уничтожения линейных слагаемых в связке и подавления влияния слагаемого $U''(\sigma)x_4^2$ если $U''(\sigma) < 0$, выберем числа α_3 и β_3 следующим образом: $\alpha_3 = -U'(\sigma)\sigma$, $4\beta_3 \geq |U''(\sigma)|$. Тогда квадратичная часть функции $V(x)$ будет формой $V(x) = 4Cx_1^2 + 4Cx_2^2 + Cx_3^2 - U'(\sigma)\sigma(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) + (4\beta_3 + U''(\sigma))x_4^2$. В случае $U'(\sigma)\sigma < 0$ эта квадратичная форма является положительно определенной по отношению ко всем переменным $x = \mathrm{col}(x_1, \dots, x_6)$. Тем самым доказано следующее

Утверждение 6. Состояние покоя (4.2) системы (5.1), (5.2), для которого выполнено условие $U'(\sigma)\sigma < 0$, устойчиво по Ляпунову.

Для линеаризованной в окрестности состояния покоя (4.2) системы (5.1), (5.2) характеристическое уравнение имеет вид (4.5), а коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_2 = \frac{\lambda_3^2 - 20CU'(\sigma)\sigma}{16C^2}, \quad a_0 = \frac{U'(\sigma)(4CU'(\sigma) - \lambda_3^2\sigma)}{16C^3} \tag{5.7}$$

Если $U'(\sigma)\sigma > 0$, то один из коэффициентов (5.7) будет отрицателен, поэтому справедливо следующее

Утверждение 7. Состояние покоя (4.2) системы (5.1), (5.2), для которого выполнено условие $U'(\sigma)\sigma > 0$, неустойчиво по Ляпунову.

В случае линейного потенциала $U = a\gamma_1$ одно из двух состояний покоя (4.2) было устойчиво, а другое неустойчиво. В случае же нелинейной функции $U = U(\gamma_1)$ возможны ситуации, когда оба состояния покоя устойчивы, или оба неустойчивы. Например, для функции $U(\gamma_1) = a\gamma_1^2$ при $a < 0$ оба состояния покоя устойчивы, а при $a > 0$ оба неустойчивы.

Теперь рассмотрим вопрос об устойчивости перманентных вращений из семейств (5.6). В этом случае интегралы уравнений возмущенного движения записываются так

$$J_1 - \bar{J}_1 = 8C\bar{p}x_1 + 2C\bar{r}x_3 + 2U'(\bar{\gamma}_1)x_4 + 4Cx_1^2 + 4Cx_2^2 + Cx_3^2 + U''(\bar{\gamma}_1)x_4^2 + o(\|x\|^2)$$

$$J_2 - \bar{J}_2 = 4C\bar{\gamma}_1x_1 + C\bar{\gamma}_3x_3 + 4C\bar{p}x_4 + (C\bar{r} + \lambda_3)x_6 + 4Cx_1x_4 + 4Cx_2x_5 + Cx_3x_6$$

$$J_3 - \bar{J}_3 = 2\bar{\gamma}_1x_4 + 2\bar{\gamma}_3x_6 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2$$

Функцию Ляпунова по методу Четаева [20] строим в виде связки интегралов

$$V(x) = J_1 - \bar{J}_1 + \alpha_2(J_2 - \bar{J}_2) + \alpha_3(J_3 - \bar{J}_3) + \beta_2(J_2 - \bar{J}_2)^2 + \beta_3(J_3 - \bar{J}_3)^2$$

С целью уничтожения линейных слагаемых в связке числа α_2 и α_3 выберем следующим образом

$$\alpha_2 = -\frac{2\bar{p}}{\bar{\gamma}_1}, \quad \alpha_3 = \frac{\bar{r}(C\bar{r} + \lambda_3)}{\bar{\gamma}_3^2}$$

Тогда квадратичную часть функции Ляпунова можно записать в виде

$$V_2(x) = V_{14}(x_1, x_4) + V_{25}(x_2, x_5) + V_{36}(x_3, x_6) + \beta_2(J_2 - \bar{J}_2)^2 + \beta_3(J_3 - \bar{J}_3)^2$$

где

$$V_{14}(x_1, x_4) = 4Cx_1^2 - \frac{2\bar{p}}{\bar{\gamma}_1}4Cx_1x_4 + \frac{\bar{r}(C\bar{r} + \lambda_3)}{\bar{\gamma}_3^2}x_4^2 + U''(\bar{\gamma}_1)x_4^2$$

$$V_{25}(x_2, x_5) = 4Cx_2^2 - \frac{2\bar{p}}{\bar{\gamma}_1}4Cx_2x_5 + \frac{\bar{r}(C\bar{r} + \lambda_3)}{\bar{\gamma}_3^2}x_5^2$$

$$V_{36}(x_3, x_6) = Cx_3^2 - \frac{2\overline{p}}{\overline{\gamma}_1}Cx_3x_6 + \frac{\overline{r}(C\overline{r} + \lambda_3)}{\overline{\gamma}_3^2}x_6^2$$

Так как положительные числа β_2 и β_3 можно брать как угодно большими, то для положительной определенности квадратичной части функции Ляпунова необходимо и достаточно [21], чтобы квадратичная форма $V_2(x)$ была положительно определенной на линейном множестве $\Theta = \{\overline{\gamma}_1 x_4 + \overline{\gamma}_3 x_6 = 0, 4C\overline{\gamma}_1 x_1 + C\overline{\gamma}_3 x_3 + 4C\overline{p}x_4 + (C\overline{r} + \lambda_3)x_6 = 0\}$.

Поскольку переменные x_2 и x_5 не входят в линейные ограничения Θ, то квадратичная форма $V_{25}(x_2, x_5)$ должна быть положительно определена, для чего в соответствии с критерием Сильвестра необходимо и достаточно выполнения неравенства (4.7). На множестве Θ выразим x_3 и x_6 через x_1 и x_4, тогда после подстановки форма $V_{14}(x_1, x_4) + V_{36}(x_3, x_6)$ запишется так

$$V_{14} + V_{36} = a_{11}x_1^2 + 2a_{14}x_1x_4 + a_{44}x_4^2$$

где

$$a_{11} = \frac{4C(1 + 3\overline{\gamma}_1^2)}{\overline{\gamma}_3^2}, \quad a_{14} = \frac{4}{\overline{\gamma}_3^3}(3C\overline{r}\,\overline{\gamma}_1^2 - \lambda_3\overline{\gamma}_1^2 - C\overline{r})$$

$$a_{44} = \frac{(3C\overline{r}\overline{\gamma}_1 - \lambda_3\overline{\gamma}_1)^2}{C\overline{\gamma}_3^4} - \frac{2\overline{r}\overline{\gamma}_1(3C\overline{r} - \lambda_3)}{\overline{\gamma}_3^4} + \frac{\overline{r}(C\overline{r} + \lambda_3)}{\overline{\gamma}_3^4} + U''(\overline{\gamma}_1)$$

Применив критерий Сильвестра, получаем необходимые и достаточные условия положительной определенности формы $V_{14} + V_{36}$ в виде следующего неравенства

$$\begin{aligned} &C\overline{\gamma}_3^4(1 + 3\overline{\gamma}_1^2)U''(\overline{\gamma}_1) + 32C^2\overline{p}^2\overline{\gamma}_3^2 + C\overline{r}\lambda_3\overline{\gamma}_3^2 - 8C^2\overline{r}^2\overline{\gamma}_1^2\overline{\gamma}_3^2 - \\ &- 3C^2\overline{r}^2\overline{\gamma}_3^4 - 8C\lambda_3\overline{p}\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_3^3 + 4C\lambda_3\overline{r}\overline{\gamma}_1^4 + \lambda_3^2\overline{\gamma}_1^2\overline{\gamma}_3^2 > 0 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Из наличия положительно определенного первого интеграла на основании теоремы Ляпунова вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 8. Каждое перманентное вращение из однопараметрических семейств (5.6), для которого выполнены неравенства (4.7) и (5.8), является устойчивым по Ляпунову.

Замечание. Если $U''(\overline{\gamma}_1) \geq 0$ и выполнено неравенство (4.7), то будет выполняться и неравенство (5.8).

Для получения условий неустойчивости воспользуемся теоремой Ляпунова о неустойчивости по линейному приближению. Для стационарных решений (5.6) характеристическое уравнение системы линейного приближения имеет вид (4.5), где коэффициенты вместо (4.6) задаются следующими формулами

$$a_2 = \overline{p}^2 + \overline{r}^2 + \frac{4}{C}\overline{\gamma}_3^2U''(\overline{\gamma}_1) + \frac{(3C\overline{r} - \lambda_3)^2 - 20C\overline{\gamma}_1U'(\overline{\gamma}_1)}{16C^2} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned} a_0 = &\frac{1}{16C^3}(C\overline{\gamma}_3^2U''(\overline{\gamma}_1)(\lambda_3\overline{r} - 3C\overline{r}^2 - 4\overline{\gamma}_1U'(\overline{\gamma}_1)) + 9C^3\overline{p}^2\overline{r}^2 + 9C^3\overline{r}^4 - 12U'(\overline{\gamma}_1)C^2\overline{p}^2\overline{\gamma}_1 - \\ &- 14U''(\overline{\gamma}_1)C^2\overline{p}\overline{r}\overline{\gamma}_3 - 13U'(\overline{\gamma}_1)C^2\overline{r}^2\overline{\gamma}_1 - 6C^2\overline{p}^2\overline{r}\lambda_3 - 6C^2\overline{r}^3\lambda_3 + 4CU'(\overline{\gamma}_1)^2\overline{\gamma}_1^2 + \\ &+ 2U'(\overline{\gamma}_1)C\lambda_3\overline{p}\overline{\gamma}_3 + 6U'(\overline{\gamma}_1)C\lambda_3\overline{r}\overline{\gamma}_1 + C\overline{p}^2\lambda_3^2 + C\overline{r}^2\lambda_3^2 - U'(\overline{\gamma}_1)\lambda_3^2\overline{\gamma}_1) \end{aligned} \tag{5.10}$$

Из теоремы Ляпунова о неустойчивости по линейному приближению вытекает теперь справедливость следующего утверждения.

Утверждение 9. Каждое перманентное вращение из однопараметрических семейств (5.6), для которого коэффициенты a_2 и a_0, характеристического уравнения (4.5), вычисляемые по формулам (5.9) и (5.10), удовлетворяют хотя бы одному из трех условий $a_2 < 0$, $a_0 < 0$, $a_2^2 - 4a_0 < 0$, является неустойчивым по Ляпунову.

Сопоставляя основные результаты данного и предыдущего разделов отметим, что особенность случая нелинейного потенциала проявляется в том, что как достаточные, так и необходимые условия устойчивости перманентных вращений существенным образом зависят от значения второй производной $U''(\overline{\gamma}_1)$ на исследуемом стационарном решении. А вот для состояний покоя в случае нелинейного потенциала условия устойчивости от значения второй производной не зависят и вполне аналогичны случаю линейного потенциала.

6. О влиянии момента циркулярно-гироскопических сил на устойчивость стационарных решений. Вернемся теперь к рассмотрению системы (2.1), (2.2), в которой действует момент циркулярно-гироскопических сил $L(t,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\gamma}$, т.е. функция $L = L(t,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\omega})$ не обращается тождественно в ноль. Потенциал $U = U(\gamma_1)$ будем считать таким же, как в разделе 5, а параметры удовлетворяющими условиям Горячева–Сретенского. Тогда в координатной форме уравнения движения записываются так

$$
\begin{gathered}
4C\dot{p} = 3Cqr - \lambda_3 q + L(q\gamma_3 - r\gamma_2) \\
4C\dot{q} = -3Cpr + \lambda_3 p + U'(\gamma_1)\gamma_3 + L(r\gamma_1 - p\gamma_3) \\
C\dot{r} = -U'(\gamma_1)\gamma_2 + L(p\gamma_2 - q\gamma_1)
\end{gathered} \tag{6.1}
$$

$$
\dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2 \tag{6.2}
$$

Легко проверить, что справедливы следующие факты:

1) система (6.1), (6.2) и система (5.1), (5.2) имеют одни и те же стационарные решения;

2) система (6.1), (6.2) имеет те же первые интегралы (5.3), (2.9), (2.10).

Поэтому условия устойчивости стационарных решений, полученные с помощью интегральных связок Четаева и сформулированные в утверждениях 6 и 8, будут справедливы и по отношению к системе (6.1), (6.2). Таким образом, здесь имеется прямая аналогия с второй теоремой Томсона–Тэта–Четаева [23]: если построением знакоопределенной связки интегралов установлена устойчивость стационарного решения системы (5.1), (5.2) с действием только потенциального момента $\boldsymbol{\gamma}\times\dfrac{\partial U}{\partial\boldsymbol{\gamma}}$, то она сохраняется в системе (6.1), (6.2) при добавлении произвольного циркулярно-гироскопического момента $L(t,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\gamma}$.

Рассмотрим теперь как обстоит дело касательно свойства неустойчивости. Далее считаем, что в системе (6.1) $L(t,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\omega}) = L = \text{const}$. Тогда характеристическое уравнение для состояния покоя (4.2) системы (6.1), (6.2) по-прежнему имеет вид (4.5), а его коэффициенты выражаются следующим образом

$$
a_2 = \frac{L^2}{4C^2} + \frac{\lambda_3^2 - 20CU'(\sigma)\sigma}{16C^2}, \quad a_0 = \frac{U'(\sigma)(4CU'(\sigma) - \lambda_3^2\sigma)}{16C^3} \tag{6.3}
$$

Из (6.3) следует, что если выполнено условие

$$
4C\sigma U'(\sigma) - \lambda_3^2 > 0 \tag{6.4}
$$

то при всех достаточно больших $|L|$ будут выполнены неравенства $a_0 > 0$, $a_2 > 0$, $a_2^2 - 4a_0 > 0$, следовательно, все корни соответствующего характеристического уравнения (4.5) будут расположены на мнимой оси.

Тем самым установлено, что при выполнении (6.4) циркулярно-гироскопический момент $L\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\gamma}$ с достаточно большим по модулю коэффициентом $L = \text{const}$ осуществляет гироскопическую стабилизацию в первом приближении для неустойчивого при одном только потенциальном моменте состояния покоя. Если же вместо (6.4) выполнено неравенство $U'(\sigma)(4CU'(\sigma) - \lambda_3^2\sigma) < 0$, то при любом $L = \text{const}$ характеристическое уравнение будет иметь корень с положительной вещественной частью, следовательно состояние покоя будет неустойчиво.

Рассмотрим теперь произвольное перманентное вращение семейства (5.6), оно при любом L будет стационарным решением и для системы (6.1), (6.2). Соответствующее ему характеристическое уравнение имеет вид (4.5), в котором коэффициент a_0 задается формулой (5.10), а коэффициент a_2 является квадратным трехчленом $a_2 = b_2L^2 + b_1L + b_0$, в котором $b_2 = \dfrac{4\overline{\gamma}_1^2 + \overline{\gamma}_3^2}{16C^2} > 0$. Поэтому, если для a_0, вычисляемого по формуле (5.10), будет выполнено условие $a_0 > 0$, то при всех достаточно больших $|L|$ будут выполнены неравенства $a_0 > 0$, $a_2 > 0$, $a_2^2 - 4a_0 > 0$, следовательно, все корни соответствующего характеристического уравнения (4.5) будут расположены на мнимой оси.

Таким образом, для перманентных вращений также установлена возможность стабилизации в первом приближении за счет присоединения момента циркулярно-гироскопических сил. Здесь налицо полная аналогия с первой теоремой Томсона—Тэта—Четаева [23]: если коэффициент при наименьшей степени в характеристическом уравнении положителен, то возможна гироскопическая стабилизация за счет момента $L\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\gamma}$ с достаточно большим по модулю коэффициентом $L = \text{const}$, а если коэффициент при наименьшей степени отрицателен, то такая стабилизация невозможна.

7. Обсуждение результатов. Исследование устойчивости движения гиростатов методом интегральных связок Четаева было начато В.В. Румянцевым [24]. Достаточные условия устойчивости перманентных вращений тяжелого гиростата были получены методом Четаева в [25], а с помощью теоремы Рауса—Ляпунова в [26]. Но в этих работах рассматривался случай общего положения (все компоненты вектора гиростатического момента ненулевые, все координаты центра масс ненулевые), поэтому полученные в них условия не применимы к случаю гиростата Горячева—Сретенского. Этот случай по терминологии [27] является вырожденным и должен изучаться отдельно. Если в уравнениях движения гиростата (2.1) потенциал удовлетворяет условиям Горячева, т.е. имеет вид $U(\boldsymbol{\gamma}) = a\gamma_1$, а вектор гиростатического момента вместо условий Сретенского подчинен условиям $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, то имеет место другой вырожденный в смысле [27] случай, для которого устойчивость перманентных вращений вокруг первой главной оси инерции рассматривалась в [28].

В дальнейшем исследования устойчивости стационарных решений уравнений движения тяжелого гиростата были продолжены и развиваются и в настоящее время (см., например, [29—32] и цитированную там литературу). Из недавних работ этого направления отметим [33], где были найдены семейства перманентных вращений и условия их устойчивости в случае, когда потенциал линейный и зависит только от одной переменной. Сопоставление на ряде примеров показало, что утверждение 4 и теорема 6 из [33] дают одинаковые области устойчивости, хотя записи самих условий устойчивости существенно различаются. При этом в [33] условия Горячева—Сретенского не используются, поэтому теорема 6 из [33] применима к более широкому классу систем, чем утверждение 4. Однако в случае нелинейного потенциала, где применимо утверждение 8, результаты [33] не применимы, поскольку относятся только к случаю линейного потенциала.

Отметим также, что возможность и условия стабилизации в линейном приближении за счет момента циркулярно-гироскопических сил для уравнений движения гиростата ранее в литературе не рассматривались, и аналогия с теоремами Томсона—Тэта—Четаева не устанавливалась.

Заключение. В заключение сформулируем кратко основные результаты статьи. Установлено, что на всех решениях, лежащих вне множества $J_2 = 0$ нулевого уровня интеграла площадей, компонента вектора угловой скорости $q(t)$ имеет нулевое среднее значение по всей оси времени. Найдены все стационарные решения уравнений движения гиростата Горячева—Сретенского и проведен анализ их устойчивости. Доказано, что одно состояние покоя устойчиво, а другое неустойчиво. Получены достаточные условия устойчивости перманентных вращений. Показана возможность гироскопической стабилизации в первом приближении за счет момента циркулярно-гироскопических сил при определенных условиях, аналогичных теореме Томсона—Тета—Четаева.

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект 22-29-00819.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубев В.В.* Лекции по интегрированию уравнений движения твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1953. 287 с.
2. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 384 с.
3. *Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М.* Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наукова думка, 2012. 401 с.
4. *Горячев Д.Н.* О движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае $A = B = 4C$ // Матем. сб. 1900. Т. 21. Вып. 3. С. 431—438.
5. *Чаплыгин С.А.* Новый случай вращения тяжелого твердого тела, подпертого в одной точке // Тр. Отд. физ. наук Об-ва любителей естествознания. 1901. Т. 10. Вып. 2. С. 32—34.
6. *Сретенский Л.Н.* О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гиростата // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149. № 2. С. 292—294.
7. *Козлов В.В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2000. 256 с.
8. *Гашененко И.Н.* О решении Д.Н. Горячева // Механика твердого тела. 2009. Вып. 39. С. 29—41.
9. *Харламов М.П.* Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. Л.: ЛГУ, 1988. 144 с.
10. *Маркеев А.П.* О тождественном резонансе в одном частном случае задачи об устойчивости периодических движений твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 3. С. 32—37.
11. *Бардин Б.С.* К задаче об устойчивости маятникообразных движений твердого тела в случае Горячева—Чаплыгина // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 2. С. 14—21.
12. *Карапетян А.В.* Инвариантные множества механических систем с симметрией // Проблемы устойчивости и управления. М.: Физматлит, 2013. С. 184—210.
13. *Щетинина Е.К.* Новые решения уравнений Гриоли—Пуассона в случае инвариантного соотношения // Вісник Донецького національного університету. Сер. А. Природничі науки. 2010. № 2. С. 24—28.
14. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* О решениях уравнений движения твердого тела в потенциальном силовом поле в случае постоянного модуля кинетического момента // Механика твердого тела. 2017. Вып. 47. С. 12—24.
15. *Yehia H.M.* Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // J. Egyp. Math. Soc. 2017. V. 25. № 2. P. 216—219. https://doi.org/10.1016/j.joems.2016.08.001
16. *Зыза А.В.* Компьютерное исследование полиномиальных решений уравнений динамики гиростата // Компьют. исслед. моделир. 2018. Т. 10. № 1. С. 7—25. https://doi.org/10.20537/2076-7633-2018-10-1-7-25

17. *Grioli G.* Questioni di dinamica del corpo rigido // Atti. Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis., Mat. e Natur. 1963. V. 35. f. 1–2. P. 35–39.
18. *Козлов В.В.* К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 28–33.
19. *Мерцалов Н.И.* Задача о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку при $A = B = 4C$ и интеграле площадей $\neq 0$ // Изв. АН СССР. Отделение техн. наук. 1946. № 5. С. 697–701.
20. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
21. *Рубановский В.Н., Самсонов В.А.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука, 1988. 304 с.
22. *Макеев Н.Н.* Интегрируемость гиростатических систем в магнитном поле // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы. 2003. Вып. 5. С. 49–70.
23. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Физматлит, 1987. 304 с.
24. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения гиростатов // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 1. С. 9–16.
25. *Анчев А.* О перманентных вращениях тяжелого гиростата, имеющего неподвижную точку // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 1. С. 49–58.
26. *Дружинин Э.И.* Устойчивость стационарных движений гиростатов // Труды Казанского авиационного института Казань: Изд-во КАИ. 1966. Вып. 92. С. 12–23.
27. *Дружинин Э.И.* Об устойчивости стационарных движений гиростатов в вырожденных случаях // Труды Казанского авиационного института Казань: Изд-во КАИ. 1968. Вып. 97. С. 30–48.
28. *Ковалев А.М.* Устойчивость равномерных вращений тяжелого гиростата вокруг главной оси // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 6. С. 994–998.
29. *Vera J.A.* The gyrostat with a fixed point in a Newtonian force field: Relative equilibria and stability // J. Math. Anal. Appl. 2013. V. 401. № 3. P. 836–849. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.11.003
30. *de Bustos Munoz M.T., Guirao J.L.G., Vera Lopez J.A., Campuzano A.V.* On sufficient conditions of stability of the permanent rotations of a heavy triaxial gyrostat // Qualit. Theory Dyn. Syst. 2015. V. 14. № 2. P. 265–280. https://doi.org/10.1007/s12346-014-0128-6
31. *Iñarrea M., Lanchares V., Pascual A.I., Elipe A.* Stability of the permanent rotations of an asymmetric gyrostat in a uniform Newtonian field // Appl. Math. Comput. 2017. V. 293. P. 404–415. https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.08.041
32. *Kosov A.A., Semenov E.I.* On first integrals and stability of stationary motions of gyrostat // Physica D. Nonlin. Phenom. 2022. V. 430. P. 133103. https://doi.org/10.1016/j.physd.2021.133103
33. *Lanchares V., Iñarrea M., Pascual A.I., Elipe A.* Stability conditions for permanent rotations of a heavy gyrostat with two constant rotors // Mathematics. 2022. V. 10. P. 1882. https://doi.org/10.3390/math10111882