

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКОЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ТОНКОГО КРУГЛОГО ИДЕАЛЬНО ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ

© 2023 г. И. М. Цветков^{a,*}

^aМосковский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*e-mail: cvetkoviv@yandex.ru

Поступила в редакцию 30.08.2022 г.

После доработки 11.11.2022 г.

Принята к публикации 17.11.2022 г.

Рассматривается напряженно-деформированное состояние, возникающее при динамическом растяжении однородного круглого слоя из несжимаемого идеально жесткопластического материала, подчиняющегося критерию Мизеса–Генки. Верхнее и нижнее основания свободны от напряжений, на боковой границе задана радиальная скорость. Учитывается возможность утолщения либо утоньшения слоя, что моделирует шейкообразование и дальнейшее развитие шейки. Выявлено два характерных режима растяжения — один связан с достаточно большой скоростью удаления боковой границы слоя от центра, второй с ускорением. Во втором случае проведен анализ с использованием метода асимптотического интегрирования, позволяющий приближенно найти параметры напряженно-деформированного состояния.

Ключевые слова: идеальная пластичность, предел текучести, круглый слой, растяжение, шейка, квазистатика, динамика, скорость деформации, напряжение, асимптотические разложения

DOI: 10.31857/S0572329922600682, **EDN:** QWQFKO

Интерес к динамическим задачам пластического течения возникает в самых разных областях [1, 2] — оптимизация быстрых производственных процессов, поведение грунтов при внезапных приложениях нагрузок, безопасность строений подверженных ударам или авариям. Локализация деформаций, шейкообразование — результат неустойчивости пластического течения и часто является предвестником разрушения конструкции.

В [3, 4] проведен анализ задач о динамическом растяжении идеально жесткопластических стержня и бесконечного листа в осесимметричной и плоской постановках соответственно. На основе метода асимптотического интегрирования, в случае когда ускорение торцов достаточно высоко, получены приближенно параметры напряженно-деформированного состояния, в том числе аппроксимация границы области квадратичным трехчленом.

Настоящая работа посвящена задаче об осесимметричном растяжении идеально жесткопластического слоя. С использованием метода асимптотического интегрирования, показано, что при переходе от квазистатики к динамическому деформированию прослеживается два характерных сценария растяжения. Каждый из них связан с достижением некоторой безразмерной функцией времени определенного порядка малости по отношению к малому геометрическому параметру, характеризующую форму слоя. Одна из этих функций представляет собой обратное число Эйлера, другая зависит от ускорения, с которым боковая поверхность удаляется от центра. При реализа-

ции режима связанного с достижением ускорения своих критических значений, приближенно вычислены параметры напряженно-деформированного состояния, в частности получена аппроксимация формы границы слоя, позволяющая моделировать шейкообразование.

1. Постановка задачи о динамическом растяжении круглого слоя. Рассмотрим деформирование во времени круглого слоя из однородного несжимаемого идеально жесткопластического материала, подчиняющегося критерию пластичности Мизеса–Генки с плотностью ρ и пределом текучести σ_s . Область Ω_t в $\mathbb{R}^3$, занятая слоем в момент t , симметрична относительно оси z , имеет неизменный во времени объем $|\Omega|$ и в цилиндрической системе координат, связанной с осью симметрии слоя, имеет вид

$$\Omega_t = \{(r, \theta, z) | 0 \leq r \leq R(t), 0 \leq \theta < 2\pi, -h(t, r) \leq z \leq h(t, r)\} \quad (1.1)$$

$$|\Omega| = 4\pi \int_0^{R(t)} rh(t, r) dr = 2\pi R^2(t) h^*(t) \quad (1.2)$$

Средняя высота слоя h^* определяется в (1.2) таким образом, чтобы объем слоя цилиндрической формы радиуса $R(t)$ и высоты $2h^*(t)$ равнялся $|\Omega|$.

Верхнее и нижнее основания слоя $z = \pm h(r, t)$ свободны от напряжений, а на боковой поверхности $r = R(t)$ задана радиальная скорость:

$$r = R(t): v_r = V(t), V(t) > 0 \quad (1.3)$$

Итак, рассматривается растяжение слоя с заданной кинематикой движения его боковой поверхности. Функции $R(t)$ и $h^*(t)$ являются соответственно монотонно возрастающей и монотонно убывающей. Ограничимся рассмотрением поля вектора скорости следующего вида: $v(x, t) = (v_r(r, z, t), 0, v_z(r, z, t))$. Это порождает тензор скоростей деформации $\underline{\gamma}$ с ненулевыми компонентами, где запятая в индексе обозначает дифференцирование по соответствующей переменной

$$v_{rr} = v_{r,r}, \quad v_{\theta\theta} = \frac{v_r}{r}, \quad v_{zz} = v_{z,z}, \quad v_{rz} = \frac{1}{2}(v_{r,z} + v_{z,r}) \quad (1.4)$$

В силу несжимаемости $\text{tr} \underline{\gamma} = 0$.

Представим симметричный тензор напряжений $\underline{\sigma}(x, t)$ как сумму шаровой и девиаторной частей: $\underline{\sigma} = -p\underline{I} + \underline{s}$, где p – давление, $\underline{I}$ – единичный тензор второго ранга, $\text{tr} \underline{s} = 0$. Определим интенсивности скоростей деформаций v_u и напряжений σ_u :

$$v_u = \sqrt{\underline{\gamma} : \underline{\gamma}}, \quad \sigma_u = \sqrt{\underline{s} : \underline{s}} \quad (1.5)$$

Векторные определяющие соотношения идеально жесткопластической среды

$$v_u \underline{s} = \sigma_u \underline{\gamma} \quad (1.6)$$

тензорно линейны, следовательно ненулевыми у девиатора $\underline{s}$ будут те же компоненты, что и у тензора $\underline{\gamma}$. Выражая $s_{\theta\theta} = -s_{rr} - s_{zz}$, оставим у девиатора независимыми компоненты s_{rr} , s_{rz} , s_{zz} . Тогда определяющее соотношение $\sigma_u = \sigma_s$, являющееся условием пластичности Мизеса–Генки, запишется следующим образом:

$$s_{rr}^2 + s_{zz}^2 + s_{rr}s_{zz} + s_{rz}^2 = \tau_s^2 \quad (1.7)$$

Исключая интенсивности σ_u и v_u , из соотношений (1.6) можно образовать независимые пропорции $s_{rr}v_{zz} = s_{zz}v_{rr}$, $s_{rz}v_{rr} = s_{rr}v_{rz}$, которые с учетом связей (1.4) преобразуются к виду:

$$s_{rr}v_{z,z} = s_{zz}v_{r,r}, \quad s_{rr}(v_{r,z} + v_{z,r}) = 2s_{rz}v_{r,r} \quad (1.8)$$

Выпишем условие несжимаемости, а также два уравнения движения в осесимметричном случае:

$$v_{r,r} + \frac{v_r}{r} + v_{z,z} = 0 \quad (1.9)$$

$$-p_{,r} + s_{rr,r} + s_{rz,z} + \frac{1}{r}(2s_{rr} + s_{zz}) = \rho(v_{r,t} + v_r v_{r,r} + v_z v_{r,z}) \quad (1.10)$$

$$-p_{,z} + s_{rz,r} + s_{zz,z} + \frac{s_{rz}}{r} = \rho(v_{z,t} + v_r v_{z,r} + v_z v_{z,z}) \quad (1.11)$$

Нелинейная система шести уравнений (1.7)–(1.11) замкнута относительно шести функций $v_r, v_z, p, s_{rr}, s_{rz}, s_{zz}$ зависящих от r, z и t в области Ω_t с заранее неизвестной частью границы $z = \pm h(r, t)$, которая характеризуется нормалью $\mathbf{n}$:

$$n_r = -\frac{\partial h / \partial r}{\sqrt{1 + (\partial h / \partial r)^2}}, \quad n_z = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial h / \partial r)^2}}$$

На этих частях границы выполнены условия равенства нулю двух компонент вектора напряжений:

$$z = \pm h(r, t): (p - s_{rr}) \frac{\partial h}{\partial r} \pm s_{rz} = 0, \quad -s_{rz} \frac{\partial h}{\partial r} \pm (-p + s_{zz}) = 0 \quad (1.12)$$

Также, выполняется кинематическое граничное условие на боковой границе слоя (1.3).

Для строгой постановки начально краевой задачи, рассматриваемой при $t > 0$, необходимо задать функцию $h(r, 0) \equiv h_0(r)$, $0 \leq r < r_0$, удовлетворяющую интегральному условию

$$\frac{|\Omega|}{4\pi} = \int_0^{r_0} r h_0(r) dr$$

Из симметричности области Ω вытекает, что функции s_{rz}, v_z антисимметричны по z .

2. Квазистатический режим растяжения. Квазистатическая постановка задачи о растяжении идеально жесткопластического слоя отличается от динамической тем, что в правых частях уравнений (1.10), (1.11) стоят нули, т.е. время t становится параметром, входящим в решения неявно через V, h и R . Уравнения (1.10) и (1.11) превращаются в уравнения равновесия.

Аналитическое решение квазистатической задачи несложно получить, если в начальный момент времени слой имел цилиндрическую форму, т.е. $h_0^* = \text{const}$. Будем обозначать параметры этого решения верхним индексом “qs”. Имеем:

$$v_r^{qs} = \frac{Vr}{R}, \quad v_z^{qs} = -2 \frac{Vz}{R} \quad (2.1)$$

$$s_{rz}^{qs} = 0, \quad s_{rr}^{qs} = s_{\theta\theta}^{qs} = \frac{\tau_s}{\sqrt{3}}, \quad s_{zz}^{qs} = p^{qs} = -\frac{2\tau_s}{\sqrt{3}} \quad (2.2)$$

Напряженное состояние (2.2) однородно и не зависит от заданной скорости V .

Интегрируя задачу Коши

$$\frac{dr}{dt} = v_r^{qs}(r), \quad \frac{dz}{dt} = v_z^{qs}(z); \quad r|_{t=0} = r_0, \quad z|_{t=0} = z_0$$

найдем лагранжев закон движения частиц (при интегрировании полагаем, что V и R постоянны):

$$r^{qs} = r_0 \exp\left(\frac{Vt}{R}\right), \quad z^{qs} = z_0 \exp\left(-2\frac{Vt}{R}\right)$$

Траектории частиц – семейство гипербол $r^2 z = r_0^2 z_0$. Независимость r^{qs} от z_0 и z^{qs} от r_0 свидетельствует о том, что Ω_t представляет собой вытягивающийся со временем цилиндр.

Кинематика (2.1) обеспечивает отсутствие жестких зон в Ω_t , так как согласно (1.4) и (1.5) $v_u^{qs} = \sqrt{6} \frac{V}{R} > 0$ во всех точках слоя.

Исследуем далее вопрос о том, при каких соотношениях безразмерных параметров системы (или на каких временах) выписанное выше квазистатическое приближение является главным и им можно ограничиться в технологических расчетах, а когда инерционные эффекты, вызванные слагаемыми в правых частях уравнений (1.10) и (1.11), начинают играть соизмеримую роль в распределении напряжений и движении точек слоя.

3. Асимптотическое разложение. Обратимся к динамическим уравнениям (1.10), (1.11) и образуем три явно зависящих от времени безразмерных параметра:

$$\alpha(t) = \frac{h^*(t)}{R(t)} \ll 1, \quad \varepsilon_1 = \frac{\rho V^2(t)}{\tau_s}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\rho \dot{V}(t) h^*(t)}{\tau_s} \quad (3.1)$$

Первый из них – малый геометрический параметр, второй – обратное число Эйлера. На разных интервалах процесса растяжения порядок малости α по отношению к ε_1 и ε_2 может меняться. От этого зависит вклад инерционных слагаемых в уравнения движения.

Представим разложения шести неизвестных функций в виде регулярных асимптотических рядов по целым степеням малого асимптотического параметра α (в [3, 4] аналогичные по структуре разложения использовались при анализе растяжения осесимметричного стержня и бесконечного листа, в [5] разложения использовались в анализе задачи Прандтля):

$$\begin{aligned} v_r(r, z, t) &= V(t) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n(t) v_{\xi}^{\{n\}}(\xi, \zeta, \tau) \\ v_z(r, z, t) &= V(t) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n(t) v_{\zeta}^{\{n\}}(\xi, \zeta, \tau) \\ s_{(rr; rz; zz)}(r, z, t) &= \tau_s \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n(t) s_{(\xi\xi; \xi\zeta; \zeta\zeta)}^{\{n\}}(\xi, \zeta, \tau) \\ p(r, z, t) &= \tau_s \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n(t) p^{\{n\}}(\xi, \zeta, \tau) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\xi = \frac{\alpha(t)r}{h^*(t)} = \frac{r}{R(t)}, \quad \zeta = \frac{z}{h^*(t)}, \quad \tau = \sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}} \frac{t}{h^*(t)} \quad (3.3)$$

Безразмерные коэффициенты рядов (3.2) (с верхними индексами) зависят от новых безразмерных координат ξ , ζ и безразмерного времени τ . Область слоя Ω_t (1.1) в любой момент времени описывается неравенствами

$$\Omega_{\tau} = \{(\xi, \theta, \zeta) | 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi, -\eta(\xi, \tau) \leq \zeta \leq \eta(\xi, \tau)\} \quad (3.4)$$

$$\eta(\xi, \tau) = \frac{h(r, t)}{h^*(t)}, \quad \int_0^1 \xi \eta(\xi, \tau) d\xi = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial h}{\partial r} = \alpha \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \quad (3.5)$$

Отметим что порядок малости по α безразмерных производных $\partial h / \partial r$ и $\partial \eta / \partial \xi$ разный. Так как функция $\tau(t)$ монотонно возрастает, якобиан замены переменных $\partial(\xi, \zeta, \tau) / \partial(r, z, t)$ отличен от нуля, т.е. она невырождена.

Имеет место замена дифференциальных операторов:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{R(t)} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\alpha(t)}{h^*(t)} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{h^*(t)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{V\xi}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{2V\zeta}{R} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \left(\sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}} \frac{1}{h^*} + \frac{2V\tau}{R} \right) \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (3.7)$$

Из определения малого параметра (3.1) и средней высоты слоя (1.2) следуют кинетические соотношения:

$$\dot{\alpha} = -\frac{3\alpha V}{R}, \quad \dot{h}^* = -2 \frac{h^* V}{R} \quad (3.8)$$

Подставим ряды (3.2) в пять уравнений (1.7)–(1.11) и граничные условия (1.3), (1.12). С учетом формул (3.5)–(3.8) получим систему, состоящую из уравнений движения (1.10), (1.11)

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left(-\alpha p_{,\xi}^{\{n\}} + \alpha s_{\xi\xi,\xi}^{\{n\}} + s_{\xi\xi,\xi}^{\{n\}} + \frac{1}{\xi} (2\alpha s_{\xi\xi}^{\{n\}} + \alpha s_{\xi\xi}^{\{n\}}) \right) = \\ & = \varepsilon_1 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} (-3nv_{\xi}^{\{n\}} - \xi v_{\xi,\xi}^{\{n\}} + 2\zeta v_{\xi,\xi}^{\{n\}} + 2\tau v_{\xi,\tau}^{\{n\}}) + \\ & + \sqrt{\varepsilon_1} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n v_{\xi,\tau}^{\{n\}} + \varepsilon_1 \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \sum_{j=0}^n v_{\xi}^{\{j\}} v_{\xi,\xi}^{\{n-j\}} + \varepsilon_1 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \sum_{j=0}^n v_{\xi}^{\{j\}} v_{\xi,\xi}^{\{n-j\}} + \varepsilon_2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n v_{\xi}^{\{n\}} \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n (-p_{,\xi}^{\{n\}} + \alpha s_{\xi\xi,\xi}^{\{n\}} + s_{\xi\xi,\xi}^{\{n\}} + \frac{\alpha}{\xi} s_{\xi\xi}^{\{n\}}) = \\ & = \varepsilon_1 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} (-3nv_{\xi}^{\{n\}} - \xi v_{\xi,\xi}^{\{n\}} + 2\zeta v_{\xi,\xi}^{\{n\}} + 2\tau v_{\xi,\tau}^{\{n\}}) + \\ & + \sqrt{\varepsilon_1} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n v_{\xi,\tau}^{\{n\}} + \varepsilon_1 \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \sum_{j=0}^n v_{\xi}^{\{j\}} v_{\xi,\xi}^{\{n-j\}} + \varepsilon_1 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \sum_{j=0}^n v_{\xi}^{\{j\}} v_{\xi,\xi}^{\{n-j\}} + \varepsilon_2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n v_{\xi}^{\{n\}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

условия несжимаемости (1.9), которое в силу линейности, может быть записано в виде рекуррентной цепочки (коэффициенты с отрицательными индексами далее всюду считаются равными нулю)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(v_{\xi,\xi}^{\{n-1\}} + \frac{1}{\xi} v_{\xi}^{\{n-1\}} + v_{\xi,\xi}^{\{n\}} \right) \alpha^n = 0 \Leftrightarrow v_{\xi,\xi}^{\{n-1\}} + \frac{1}{\xi} v_{\xi}^{\{n-1\}} + v_{\xi,\xi}^{\{n\}} = 0, \quad n \geq 0 \quad (3.11)$$

критерия Мизеса–Генки (1.7)

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n s_{\xi\xi}^{\{n\}} \right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n s_{\xi\xi}^{\{n\}} \right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n s_{\xi\xi}^{\{n\}} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n s_{\xi\xi}^{\{n\}} \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n s_{\xi\xi}^{\{n\}} \right)^2 = 1 \\ & \Leftrightarrow (s_{\xi\xi}^{\{0\}})^2 + (s_{\xi\xi}^{\{0\}})^2 + s_{\xi\xi}^{\{0\}} s_{\xi\xi}^{\{0\}} + (s_{\xi\xi}^{\{0\}})^2 = 1, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\sum_{j=0}^n (s_{\xi\xi}^{\{j\}} s_{\xi\xi}^{\{n-j\}} + s_{\xi\xi}^{\{j\}} s_{\xi\xi}^{\{n-j\}} + s_{\xi\xi}^{\{j\}} s_{\xi\xi}^{\{n-j\}} + s_{\xi\xi}^{\{j\}} s_{\xi\xi}^{\{n-j\}}) = 0, \quad n \geq 1$$

условия соосности девиатора напряжений и тензора скоростей деформаций (1.8)

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n s_{\xi\xi}^{\{n\}} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n v_{\xi,\xi}^{\{n\}} \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n s_{\xi\xi}^{\{n\}} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} v_{\xi,\xi}^{\{n\}} \right) \Leftrightarrow \\ & \sum_{j=0}^n s_{\xi\xi}^{\{j\}} v_{\xi,\xi}^{\{n-j\}} = \sum_{j=0}^{n-1} s_{\xi\xi}^{\{j\}} v_{\xi,\xi}^{\{n-1-j\}}, \quad n \geq 0 \\ & \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n s_{\xi\xi}^{\{n\}} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n v_{\xi,\xi}^{\{n\}} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} v_{\xi,\xi}^{\{n\}} \right) = 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n s_{\xi\xi}^{\{n\}} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} v_{\xi,\xi}^{\{n\}} \right) \Leftrightarrow \\ & \sum_{j=0}^n s_{\xi\xi}^{\{j\}} v_{\xi,\xi}^{\{n-j\}} + \sum_{j=0}^{n-1} s_{\xi\xi}^{\{j\}} v_{\xi,\xi}^{\{n-1-j\}} = 2 \sum_{j=0}^{n-1} s_{\xi\xi}^{\{j\}} v_{\xi,\xi}^{\{n-1-j\}}, \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Граничные условия (1.3) имеют вид:

$$\xi = 1: v_{\xi}^{\{0\}} = 1, \quad v_{\xi}^{\{n\}} = 0, \quad n \geq 1 \quad (3.14)$$

Условия того, что верхнее и нижнее основания свободны от напряжений (1.12) следующие:

$$\begin{aligned} \zeta = \pm \eta(\xi, \tau): \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} (p^{\{n\}} - s_{\xi\xi}^{\{n\}}) \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \pm \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n s_{\xi\xi}^{\{n\}} &= 0 \\ - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} s_{\xi\xi}^{\{n\}} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \pm \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n (-p^{\{n\}} + s_{\xi\xi}^{\{n\}}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Безразмерные параметры $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$ входят только в уравнения (3.9) и (3.10). На тех или иных временных интервалах порядок их малости по сравнению с $\alpha(t)$ может меняться. От этого зависит учет или неучет слагаемых в правых частях уравнений в процессе приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра.

4. Метод асимптотического интегрирования. Воспользуемся методом асимптотического интегрирования [3–6] задачи (3.9)–(3.15), заключающемся в последовательном решении замкнутых систем уравнений относительно $v_{\xi}^{\{n\}}$, $v_{\xi}^{\{n\}}$, $s_{\xi\xi}^{\{n\}}$, $s_{\xi\xi}^{\{n\}}$, $s_{\xi\xi}^{\{n\}}$, $p^{\{n\}}$, где $n \geq 0$, в области Ω_{τ} с заранее неизвестной частью границы $\zeta = \pm \eta(\xi, \tau)$.

Обратимся к уравнению (3.11) при $n = 0$: $v_{\xi,\xi}^{\{0\}} = 0$. Отсюда следует, что $v_{\xi}^{\{0\}} = v_{\xi}^{\{0\}}(\xi, \tau)$, а с учетом требования антисимметричности по ζ получим $v_{\xi}^{\{0\}} = 0$.

Из рекуррентной цепочки (3.11) при $n = 1$ и из второго условия (3.13) при $n = 0$ имеем

$$v_{\xi,\xi}^{\{0\}} + \frac{v_{\xi}^{\{0\}}}{\xi} + v_{\xi,\xi}^{\{1\}} = 0, \quad s_{\xi\xi}^{\{0\}} v_{\xi,\xi}^{\{0\}} = 0 \quad (4.1)$$

Перепишем первое уравнение (4.1) следующим образом и запишем следствие второго уравнения

$$\frac{1}{\xi} (\xi v_{\xi}^{\{0\}})_{,\xi} = -v_{\xi,\xi}^{\{1\}}, \quad v_{\xi}^{\{0\}} = v_{\xi}^{\{0\}}(\xi, \tau)$$

Таким образом, видно, что $v_{\xi,\xi}^{\{1\}}$ является функцией от ξ , τ . Обозначим $v_{\xi,\xi}^{\{1\}} = a(\xi, \tau)$, тогда, с учетом нечетности $v_{\xi}^{\{1\}}$ по ζ , общий вид $v_{\xi}^{\{0\}}$ и $v_{\xi}^{\{1\}}$ следующий

$$v_{\xi}^{\{0\}} = -\frac{1}{\xi} \left(\int_0^{\xi} a(u, \tau) u du - b(\tau) \right), \quad v_{\zeta}^{\{1\}} = a(\xi, \tau) \zeta \quad (4.2)$$

где $a(\xi, \tau)$ и $b(\tau)$ произвольные функции, удовлетворяющие граничному условию (3.14)

$$-\int_0^1 a(u, \tau) u du + b(\tau) = 1$$

Из физических соображений $\lim_{\xi \rightarrow 0} v_{\xi}^{\{0\}} = 0$, откуда необходимо вытекает $b(\tau) \equiv 0$. Потребуем чтобы решение (4.2) совпало с квазистатическим для чего достаточно положить $a(\xi, \tau)$ константой, таким образом

$$v_{\xi}^{\{0\}} = \xi, \quad v_{\zeta}^{\{1\}} = -2\zeta \quad (4.3)$$

Линейные зависимости (4.3) имеют место для любых соотношений порядков малости по α параметров $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$. Рассмотрев первое уравнение в (3.12) и уравнения (3.13) при $n = 1$, выведем незамкнутую систему уравнений относительно $s_{\xi\xi}^{\{0\}}, s_{\xi\zeta}^{\{0\}}, s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}, v_{\xi}^{\{1\}}$:

$$(s_{\xi\xi}^{\{0\}})^2 + (s_{\zeta\zeta}^{\{0\}})^2 + s_{\xi\xi}^{\{0\}} s_{\zeta\zeta}^{\{0\}} + (s_{\xi\zeta}^{\{0\}})^2 = 1, \quad -2s_{\xi\xi}^{\{0\}} = s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}, \quad s_{\xi\xi}^{\{0\}} v_{\xi}^{\{1\}} = 2s_{\xi\zeta}^{\{0\}} \quad (4.4)$$

Для замыкания системы (4.4) необходимо рассмотреть конкретный режим растяжения. Из (3.9) и (3.10) следует, что на временных интервалах, где одновременно $\varepsilon_1 \alpha^2 = o(1)$ и $\varepsilon_2 = o(1)$, после приравнивания нулю коэффициентов при α^0 в (3.9), с учетом (4.3), придем к следующей системе уравнений:

$$(s_{\xi\xi}^{\{0\}})^2 + (s_{\zeta\zeta}^{\{0\}})^2 + s_{\xi\xi}^{\{0\}} s_{\zeta\zeta}^{\{0\}} + (s_{\xi\zeta}^{\{0\}})^2 = 1, \quad -2s_{\xi\xi}^{\{0\}} = s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}, \quad s_{\xi\zeta}^{\{0\}} = 0$$

Из последнего уравнения имеем, что $s_{\xi\zeta}^{\{0\}} = s_{\xi\zeta}^{\{0\}}(\xi, \tau)$, а с учетом требования нечетности $s_{\xi\zeta}^{\{0\}}$ по ζ получаем

$$s_{\xi\zeta}^{\{0\}} = 0, \quad s_{\xi\xi}^{\{0\}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad s_{\zeta\zeta}^{\{0\}} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

Таким образом пришли к напряженному состоянию, соответствующему квазистатическому растяжению слоя цилиндрической формы. Также, приравнявая коэффициенты при α^0 , из (3.10) следует, что $-p_{\zeta}^{\{0\}} + s_{\zeta\zeta}^{\{0\}} = 0$.

Итак, динамические эффекты начинают играть роль и вносить вклад в напряженно-деформированное состояние, сопоставимый с квазистатикой, если выполняется хотя бы одно из требований: а) параметр ε_1 становится порядка α^n , $n \geq -2$; б) параметр ε_2 становится порядка α^m , $m \geq 0$.

Остановимся в данной работе на случае, когда $\varepsilon_2 = O(1)$ и $\varepsilon_1 = o(\alpha^{-2})$. Рассмотрев коэффициенты при α^0 в (3.9) и (3.10) и, добавив полученные уравнения к (4.4), имеем замкнутую систему относительно $s_{\xi\xi}^{\{0\}}, s_{\xi\zeta}^{\{0\}}, s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}, v_{\xi}^{\{1\}}$:

$$s_{\xi\zeta}^{\{0\}} = \varepsilon_2 \zeta, \quad -p_{\zeta}^{\{0\}} + s_{\zeta\zeta}^{\{0\}} = 0 \quad (4.5)$$

Первое уравнение (4.5) замыкает систему, а третье служит для определения давления $p^{\{0\}}$.

Решение системы (4.5) следующее:

$$\begin{aligned}
s_{\xi\zeta}^{\{0\}} &= \varepsilon_2 \xi \zeta, & s_{\xi\xi}^{\{0\}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \varepsilon_2^2 \xi^2 \zeta^2}, & s_{\zeta\zeta}^{\{0\}} &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \varepsilon_2^2 \xi^2 \zeta^2} \\
v_{\xi}^{\{1\}} &= -2\sqrt{3} \frac{\sqrt{1 - \varepsilon_2^2 \xi^2 \zeta^2}}{\varepsilon_2 \xi} + f(\xi, \tau)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

где функция $f(\xi, \tau)$ определяется из последующих по α приближений. Заметим, что если формально устремить $\varepsilon_2 \rightarrow 0$, то компоненты девиатора (4.6) будут стремиться к квазистатическому решению.

Вид функции $v_{\xi}^{\{1\}}$ позволяет сделать следующие выводы:

1. Точно однородным граничным условиям на боковой границе слоя $\xi = 1$ удовлетворить не удается.

2. Когда $|\xi| \rightarrow 0$, т.е. при стремлении к центру слоя, $|v_{\xi}^{\{1\}}| \rightarrow \infty$. Это говорит о потере асимптотичности в смысле Пуанкаре вблизи точки $\xi = 0$ ряда (3.2) для радиальной скорости v_{ξ} .

Из этих выводов следует, что использование асимптотических рядов (3.2) вблизи боковой поверхности $\xi = 1$ слоя, т.е. в зоне краевого эффекта и в центре $\xi = 0$, где происходит перестройка течения, неправомерно. По своей геометрии область неприемлемости асимптотического разложения напоминает задачу Прандтля [5].

5. Уравнение для определения формы границы слоя. Обратимся к граничным условиям (3.15) на неизвестной границе слоя $\zeta = \pm\eta(\xi, \tau)$. Порядок малости по α производной $\frac{\partial\eta}{\partial\xi}$ заранее неизвестен. Предположим сначала, что $\frac{\partial\eta}{\partial\xi} \sim 1$, т.е. $\frac{\partial h}{\partial r} \sim \alpha$. Тогда в главном по α приближении

$$\zeta = \pm\eta(\xi, \tau): p^{\{0\}} - s_{\xi\zeta}^{\{0\}} = 0, \quad s_{\xi\xi}^{\{0\}} = 0$$

Но согласно (4.6) компонента $s_{\xi\zeta}^{\{0\}}$ равна нулю только при $\xi = 0$ или при $\eta = 0$. Ни одно из этих уравнений форму границу описывать не может, что говорит о неправомерности предположения $\frac{\partial\eta}{\partial\xi} \sim 1$.

Пусть $\frac{\partial\eta}{\partial\xi} \sim \frac{1}{\alpha}$, т.е. $\frac{\partial h}{\partial r} \sim 1$. Тогда, в главном по α приближении, условия (3.15) имеют вид

$$\zeta = \pm\eta(\xi, \tau): -\alpha s_{\xi\zeta}^{\{0\}} \frac{\partial\eta}{\partial\xi} \pm (-p^{\{0\}} + s_{\xi\zeta}^{\{0\}}) = 0, \quad \alpha \frac{\partial\eta}{\partial\xi} (p^{\{0\}} - s_{\xi\xi}^{\{0\}}) \pm s_{\xi\zeta}^{\{0\}} = 0 \tag{5.1}$$

Будем работать только с верхней частью границы $\zeta = \pm\eta(\xi, \tau)$ — т.к. нижнее основание получается отражением относительно плоскости $\zeta = 0$, то в уравнениях (5.1) оставим знак “+”. Исключая $p^{\{0\}}$ из равенств (5.1) и подставляя из (4.6) компоненты девиатора напряжений, получаем нелинейное уравнение первого порядка для определения функции $\eta(\xi, \tau)$:

$$\sqrt{3}\alpha\sqrt{1 - \varepsilon_2^2 \xi^2 \eta^2} \frac{\partial\eta}{\partial\xi} = \varepsilon_2 \xi \eta \left(1 - \alpha^2 \left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi} \right)^2 \right) \tag{5.2}$$

Необходимо учесть также интегральное условие нормировки (3.5). Частную производную можно заменить на обыкновенную, т.к. время в уравнение входит как параметр через известную функцию ε_2 (3.1).

Для приближенного интегрирования уравнения заметим, что если положить $\varepsilon_2 = 0$, то с учетом (3.5) получим $\eta \equiv 1$, что соответствует слою цилиндрической формы в квазистатическом решении. Представим функцию $\eta(\xi, \tau)$ в виде ряда по ε_2 :

$$\eta(\xi, \tau) = 1 + \varepsilon_2 \eta_1 + \varepsilon_2^2 \eta_2 + \dots, \quad \varepsilon_2 < 1$$

и подставим в (5.2) и интегральное условие (3.5). В линейном приближении по ε_2 для η_1 будем иметь уравнение $\frac{d\eta_1}{d\xi} = \frac{\xi}{\sqrt{3}\alpha}$, откуда после интегрирования и нормировки следует параболическая зависимость

$$\eta = 1 + \frac{\varepsilon_2}{2\sqrt{3}\alpha} \left(\xi^2 - \frac{1}{2} \right) \quad (5.3)$$

моделирующая утоньшение слоя в центре и утолщение вблизи его боковой поверхности, т.е. шейкообразование при динамическом растяжении.

Найдем последний из неопределенных коэффициентов главного по α приближения (3.2) — давление $p^{\{0\}}$. Из второго уравнения (4.5) следует, что $-p^{\{0\}} + s_{\xi\xi}^{\{0\}}$ не зависит от ξ , а из первого граничного условия (5.1) то, что эта же комбинация на границе равна $\alpha s_{\xi\xi}^{\{0\}} \frac{\partial \eta}{\partial \xi}$. Следовательно всюду в области Ω_τ :

$$p^{\{0\}} = s_{\xi\xi}^{\{0\}} - \alpha s_{\xi\xi}^{\{0\}} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\eta} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \varepsilon_2^2 \xi^2 \tau^2} - \alpha \varepsilon_2 \xi \eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \quad (5.4)$$

куда из (4.6) подставлены компоненты $s_{\xi\xi}^{\{0\}}$, $s_{\xi\xi}^{\{0\}}$ девиатора напряжений. В (5.4) входит функция удовлетворяющая дифференциальному уравнению (5.2). В качестве приближенного решения может быть использована аппроксимация квадратичным трехчленом (5.3).

Вернемся к размерным переменным зависящим от r, z, t :

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{Vr}{R} - \frac{2\sqrt{3}V\tau_s}{\rho\dot{V}r} \sqrt{1 - \frac{\rho^2\dot{V}^2 r^2 z^2}{\tau_s^2 R^2}} + Vf(r, t) \frac{h^*}{R} + O((h^*/R)^2) \\ v_z &= -\frac{2Vz}{R} + O((h^*/R)^2) \\ s_{rr} &= \frac{\tau_s}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{\rho^2\dot{V}^2 r^2 z^2}{\tau_s^2 R^2}} + O(h^*/R), \quad s_{zz} = -\frac{2\tau_s}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{\rho^2\dot{V}^2 r^2 z^2}{\tau_s^2 R^2}} + O(h^*/R) \\ s_{rz} &= \frac{\rho\dot{V}rz}{R} + O(h^*/R) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Аппроксимация границы $h(r, t)$ квадратичным трехчленом:

$$h(r, t) = h^* \left(1 + \frac{\rho\dot{V}R}{2\sqrt{3}\tau_s} \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{1}{2} \right) \right), \quad \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{\rho\dot{V}h^*r}{\sqrt{3}\tau_s R} \quad (5.6)$$

Используя эту аппроксимацию можем выписать давление p , где h и $\partial h/\partial r$ следует взять из (5.6):

$$p = -\frac{2\tau_s}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{\rho^2\dot{V}^2 r^2 z^2}{\tau_s^2 R^2}} - \frac{\rho\dot{V}r}{R} h \frac{\partial h}{\partial r} + O(h^*/R)$$

Заметим, что в отличие от квазистатики, все исследуемые компоненты тензора напряжений отличны от нуля, в частности, осевое напряжение σ_{zz} имеет вид $\sigma_{zz} \approx \frac{\rho \dot{V}r}{R} h \frac{\partial h}{\partial r}$.

6. Заключение. Таким образом, найдены условия, связывающие безразмерные параметры задачи, при которых необходим учет динамических эффектов. Показано, что переход от квазистатики к динамическому режиму растяжения круглого слоя, характеризующийся достижением ускорения $\dot{V}$ своих критических значений, влечет за собой образование и рост шейки в его центральной части. Параметры напряженно-деформированного состояния и других инерционных эффектов точно или приближенно найдены выше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001.
2. Ильюшин А.А. Труды. Т. 4. Моделирование динамических процессов в твердых телах и инженерные приложения. М.: Физматлит, 2009.
3. Георгиевский Д.В. Динамические режимы растяжения стержня из идеально жесткопластического материала // Прикладная механика и техническая физика. 2021. 62. № 5. С. 119–130.
<https://doi.org/10.15372/PMTF20210513>
4. Цветков И.М. Динамическое растяжение листа из идеально жесткопластического материала. // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2022. № 6. С. 51–60.
5. Georgievskii D.V., Müller W.H., Abali B.E. Thin-layer inertial effects in plasticity and dynamics in the Prandtl problem // ZAMM. 2019. V. 99. № 12. P. 1–11.
<https://doi.org/10.1002/zamm.201900184>
6. Найфэ А.Х. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с. = Nayfeh A.H. Introduction To Perturbation Techniques. N.Y.: Wiley, 1981.