

ISSN 1024-7084

Номер 6

Ноябрь–Декабрь 2024



ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА • № 6 • 2024

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

# МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА



# **СОДЕРЖАНИЕ**

---

---

## **Номер 6, 2024**

---

Об одном точном решении для нестационарной системы уравнений радиационно-кондуктивного теплообмена <i>В. В. Завьялов</i>	5
Осесимметричное течение пуазейля термовязкой жидкости под действием градиентов давления и температуры <i>Д. В. Князев</i>	12
Энергетический баланс режимов микровзрывной фрагментации двухжидкостных капель <i>Д. В. Антонов, Р. М. Федоренко, Д. Н. Ковалев, П. А. Стрижак</i>	22
Достаточные энергетические оценки устойчивости нестационарных комбинированных сдвиговых течений в цилиндрическом слое <i>Д. В. Георгиевский</i>	37
О колебаниях жидкости во вращающемся сосуде в форме параболоида <i>А. Г. Петров</i>	46
Точное решение задачи о течении пара в щели между испаряющейся каплей жидкости и горячей стенкой <i>А. В. Палагин</i>	51
Погружающийся и всплывающий вихрь в картине плавного втекания свободно падающей капли этанола в воду <i>Ю. Д. Чашечкин, А. Ю. Ильиных</i>	62
Расчетно-экспериментальные исследования развития двумерных возмущений при неустойчивости Рэлея–Тейлора и их перехода к турбулентности <i>Е. В. Бодров, Д. О. Кочетков, Е. В. Левкина, Н. В. Невмержицкий, В. П. Стаценко, Ю. В. Третьяченко, И. Р. Фарин, Ю. В. Янилкин</i>	82
Влияние акустического воздействия на сталкивающиеся ламинарные микроструи <i>Ю. А. Литвиненко, А. А. Смяцких, М. В. Литвиненко</i>	96
Модель подъема поршня в дозаторе на основе магнитной жидкости в магнитном поле произвольной величины <i>Д. А. Пелевина, Д. И. Меркулов, И. И. Меркулова, В. А. Турков, В. А. Налетова</i>	106
Реакция замещения метана углекислым газом в гидрате при инжекции жидкой углекислоты в пласт <i>Г. Г. Цыпкин</i>	117
Структура течения вблизи поверхности испарения <i>В. Ю. Левашов, А. П. Крюков, А. Л. Кусов</i>	127
Электродинамический механизм расширения двухкомпонентной плазмы в сферически-симметричном вакуумном промежутке <i>А. О. Коковин, В. Ю. Кожевников, А. В. Козырев, Н. С. Семенюк</i>	138

Эволюция волн давления в жидкости, содержащей пористую перегородку, насыщенную пузырьковой жидкостью

*И. К. Гималтдинов, А. С. Родионов, О. Ю. Валиахметова*

149

Электродинамика маломощного аномального тлеющего разряда в плоском канале с высокоскоростным потоком газа

*С. Т. Суржиков*

160

---

---

# CONTENTS

---

---

Number 6, 2024

---

An Exact Solution for a Time-Dependent System of Radiative-Conductive Heat Transfer Equations <i>V. V. Zavyalov</i>	5
Axisymmetric Poiseuille Flow with Temperature-Dependent Viscosity under Pressure and Temperature Gradients <i>D. V. Knyazev</i>	12
Energy Balance of Puffing and Microexplosion of Two-Liquid Droplets <i>D. V. Antonov, R. M. Fedorenko, D. N. Kovalev, P. A. Strizhak</i>	22
Sufficient Energy Estimates of Stability of Unsteady Combined Shear Flows in a Cylindrical Layer <i>D. V. Georgievskii</i>	37
On Fluid Oscillations a Rotating Paraboloidal Vessel <i>A. G. Petrov</i>	46
Exact Solution of the Problem of Vapor Flow through a Gap between an Evaporating Droplet of Liquid and a Hot Wall <i>A. V. Palagin</i>	51
Submerging and Floating-up Vortices in the Picture of Smooth Inflow of a Free-Falling Ethanol Drop into Water <i>Yu. D. Chashechkin, A. Yu. Il'inykh</i>	62
Numerical and Experimental Investigation of the Development of Two-Dimensional Disturbances in the Case of Rayleigh–Taylor Instability and Transition to Turbulence <i>E. V. Bodrov, D. O. Kochetkov, B. V. Levkina, N. V. Nevmerzhitskii, V. P. Statsenko, Yu. V. Tretyachenko, I. R. Farin, Yu. V. Yanilkin</i>	82
Effect of Acoustic Excitation on Colliding Laminar Microjets <i>Yu. A. Litvinenko, A. A. Smyatskikh, M. V. Litvinenko</i>	96
Model of Lifting a Piston in a Metering Device Based on Magnetic Fluid in a Magnetic Field of an Arbitrary Strength <i>D. A. Pelevina, D. I. Merkulov, I. I. Merkulova, V. A. Turkov, V. A. Naletova</i>	106
Reaction of methane replacement with carbon dioxide in hydrate during injection of liquid carbon dioxide into formation <i>G. G. Tsyplkin</i>	117
Flow Structure near an Evaporation Surface <i>V. Yu. Levashev, A. P. Kryukov, A. L. Kusov</i>	127
Electrodynamic Mechanism of Expansion of Two-Component Plasma in a Spherically Symmetric Vacuum Gap <i>A. O. Kokovin, V. Yu. Kozhevnikov, A. V. Kozyrev, N. S. Semenyuk</i>	138

Evolution of Pressure Waves in Liquid Containing a Porous Partition Saturated with a Bubble Fluid

*I. K. Gimaldinov, A. S. Rodionov, O. Yu. Valiakhmetova*

149

Electrodynamics of a Low-Power Anomalous Glow Discharge in a Plane Channel with

High-Speed Gas Flow

*S. T. Surzhikov*

160

---

---

# ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ РАДИАЦИОННО-КОНДУКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

© 2024 г. В. В. Завьялов<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>Российский федеральный ядерный центр Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики им. акад. Е.И. Забабахина, Снежинск, Россия

\*e-mail: v.v.zavyalov@vnitf.ru

Поступила в редакцию 27.08.2024 г.

После доработки 08.10.2024 г.

Принята к публикации 08.10.2024 г.

Рассматривается точное автомодельное решение типа бегущей тепловой волны для нестационарной нелинейной системы радиационно-кондуктивного теплообмена в декартовой геометрии. Радиационная составляющая рассматривается в кинетической модели при специально подобранных коэффициентах поглощения и рассеяния. Приводится пример тестовой задачи в плоской геометрии.

*Ключевые слова:* теплоперенос, точное решение

**DOI:** 10.31857/S1024708424060019, **EDN:** FETWCS

## ВВЕДЕНИЕ

Аналитические решения для уравнений математической физики очень важны в качестве тестов для численных методов. Их ценность резко возрастает, если они качественно моделируют физические процессы. В 1963 году была опубликована работа [1], где были рассмотрены различные варианты точных решений для квазилинейного уравнения теплопроводности. В 1979 году сотрудниками РФЯЦ–ВНИИТФ было предложено точное автомодельное решение уравнения переноса фотонов в плоском слое для нестационарной кинетической модели в чисто поглощающей среде [2]. Для построения решения было предложено использовать предопределенный вид коэффициента поглощения, пропорциональность внутренней энергии четвертой степени температуры и представление температуры через автомодельную переменную. Этот подход оказался весьма плодотворным, он успешно развивался, и предложенный класс точных решений используется в РФЯЦ–ВНИИТФ [3–9]. В данной работе показана возможность применения рассматриваемой методологии построения точных решений для сложного радиационно-кондуктивного теплообмена.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Система уравнений, описывающая радиационно-кондуктивный теплообмен в неподвижной среде, состоит из спектрального кинетического уравнения переноса, описывающего перенос, поглощение и рассеяние теплового излучения, уравнения энергии, описывающего изменение температуры с учетом теплопроводности. Согласно [10], уравнения в равновесном спектральном случае для изотропного рассеяния

$$\begin{cases} \frac{\partial I_v}{c\partial t} + \Omega \cdot \nabla I_v + \alpha_v I_v = \frac{\alpha_{cv}}{4\pi} B_v + \frac{\alpha_{sv}}{4\pi} \int_{\Omega} I_v d\Omega, \\ \rho \frac{\partial E}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{S}_c + \int_0^{\infty} \alpha_{cv} \left( \int_{\Omega} I_v d\Omega - B_v \right) dv, \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $I_v(\mathbf{r}, \Omega, v, t)$  – интенсивность излучения в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$  в направлении  $\Omega$ ,  $\alpha_v(T, v) = \alpha_{cv}(T, v) + \alpha_{sv}(T, v)$  – коэффициент ослабления, равный сумме коэффициентов поглощения и рассеяния,  $T(\mathbf{r}, t)$  – температура вещества,  $E(T)$  – удельная внутренняя энергия вещества,  $\sigma, p$  – положительные константы,  $B_v(v, T) = pv^3(e^{v/T} - 1)^{-1}$  – функция Планка ( $B(T) = \sigma T^4$  – в приближении “серой материи”),  $\rho(\mathbf{r}, t)$  – плотность вещества,  $\mathbf{S}_c = -k\nabla T$  – вектор потока кондуктивного тепла,  $k(\mathbf{r}, T)$  – коэффициент теплопроводности,  $v$  – энергия фотонов.

Для системы уравнений (1.1) в области  $\Gamma$  пространства  $\mathbb{R}^n$  с замкнутой границей  $\bar{\Gamma}$  решается смешанная задача с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} I_v(\mathbf{r}, \Omega, t=0) &= I_v^0(\mathbf{r}, \Omega), \quad I_v(\mathbf{r} \in \bar{\Gamma}, \mathbf{n} \cdot \Omega < 0, t) = I_v(\mathbf{r} \in \bar{\Gamma}, \Omega, t), \\ T(\mathbf{r}, t=0) &= T^0(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$T(\mathbf{r} \in \bar{\Gamma}, t) = T_{\bar{\Gamma}}(\mathbf{r}, t), \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к  $\bar{\Gamma}$ . Для учета явления кондуктивной теплопроводности ограничимся граничными условиями первого рода (1.3).

Система (1.1) описывает нестационарный перенос излучения. Отметим, что в работе [11] доказывается существование и единственность решения даже для более сложного случая теплообмена с дополнительным учетом ионной теплопроводности.

## 2. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Аналогично [8] будем рассматривать многокомпонентную гомогенную смесь, состоящую из  $\hat{m}$  веществ, которая удовлетворяет модели [11]

$$\hat{z}_v = \sum_m c_m \hat{z}_{v,m}, \quad \sum_m c_m = 1,$$

где  $\hat{z}_v$  – некоторая характеристика вещества,  $c_m$  – массовая доля вещества,  $m = 1, 2, \dots, \hat{m}$  – индекс вещества. Также, предполагая степенную зависимость энергии вещества от температуры, представим уравнение состояния в форме  $E_* = \tilde{C}_{V,*} T^{\tilde{h}_*}$ , где  $\tilde{C}_{V,*}(T) = \sum_m c_m \tilde{C}_{V,*m}(T)$  – удельная теплоемкость вещества,  $\tilde{h}_* > 0$  – показатель степени, и символ \* определяет тип переноса тепла.

Рассмотрим отдельно уравнения, описывающие кондуктивную и радиационную составляющие. Перенос тепла за счет теплопроводности записывается так

$$\rho \frac{\partial E_C}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T), \quad (2.1)$$

а система уравнений лучистого переноса энергии

$$\begin{cases} \frac{\partial I_v}{\partial t} + \Omega \cdot \nabla I_v + \alpha_v I_v = \frac{\alpha_{cv}}{4\pi} B_v + \frac{\alpha_{sv}}{4\pi} \int_{\Omega} I_v d\Omega \Omega, \\ \rho \frac{\partial E_R}{\partial t} = \int_0^{\infty} \alpha_{cv} \left( \int_{\Omega} I_v d\Omega - B_v \right) dv. \end{cases} \quad (2.2)$$

Для уравнения (2.1) в работе [1] рассматривается набор различных точных решений и, в частности, бегущая тепловая волна, распространяющаяся с постоянной скоростью. Пусть  $k = k_0 T$ ,  $T = \xi$  и  $\xi(\mathbf{r}, t)$  – автомодельная переменная, тогда в многомерном случае для гомогенной смеси ее можно описать

$$\xi = \xi_1 (\xi_t t + \xi_{\nabla} \mathbf{r} + \xi_0), \quad \xi_{\nabla} = \frac{\nabla \xi}{\xi_1}, \quad \tilde{C}_{V,C} = k_0 (\nabla \xi)^2 \left( \rho \frac{\partial \xi}{\partial t} T^{\tilde{h}_C - 1} \right)^{-1}, \quad (2.3)$$

где  $\xi_t, \xi_1, \xi_0, k_0 > 0$  – константы.

Решение системы (2.2) ищем в виде

$$T = \xi, \quad I_v = B_v f, \quad \alpha_{sv,m} = \alpha_{s0} \alpha_{cv,m}, \quad \alpha_{cv,m} = \alpha_{c0,m} \frac{\partial \ln B_v}{\partial \xi}.$$

Здесь  $f(\mathbf{r}, \Omega) > 0$  – некоторая функция,  $\alpha_{c0} > 0$ ,  $\alpha_{s0} \geq 0$  – константы. Подставляя эти выражения в (2.2), получим

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1 (\xi_t t + \xi_\nabla \cdot \mathbf{r} + \xi_0), \quad -1 \leq \mu = \cos(\Omega \cdot \xi_\nabla) \leq 1, \\ f &= \frac{\delta \gamma}{4\pi (1 - \alpha_{s0} \hat{f}) (1 + \gamma \mu)}, \quad \int_{\Omega} f d\Omega = \frac{\hat{f}}{1 - \alpha_{s0} \hat{f}}, \quad \hat{f} = \delta A r h \gamma, \\ \gamma &= \frac{|\nabla \xi|}{\alpha_{c0} (1 + \alpha_{s0}) + \frac{\partial \xi}{c \partial t}}, \quad \delta = \frac{\alpha_{c0}}{\nabla \xi}, \quad \tilde{C}_{V,R} = \frac{16\pi \alpha_{c0} \sigma T^{4-\tilde{h}_r} ((1 + \alpha_{s0}) \hat{f} - 1)}{\rho \tilde{h}_r \frac{\partial \xi}{\partial t} (1 - \alpha_{s0} \hat{f})}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Очевидно, что  $\tilde{C}_V(T)$  будет константой только в случае  $\tilde{h} = 4$ . Таким образом, получено решение для нестационарного случая [8]. Если рассмотреть квазистационарный режим ( $\frac{\partial I_v}{\partial t} = 0$ ), то достаточно положить в (7)  $\frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$  для параметра  $\gamma$  [8]. Сопоставляя формулы (2.3) и (2.4), легко убедиться, что вид автомодельной переменной  $\xi$  совпадает и, выбирая двучленное уравнение состояния в виде

$$E = E_R + E_C = \left( \frac{16\pi \alpha_{c0} \sigma T^{4-\tilde{h}_R} ((1 + \alpha_{s0}) \hat{f} - 1)}{\tilde{h}_R (1 - \alpha_{s0} \hat{f})} T^{\tilde{h}_R} + \frac{k_0 (\nabla \xi)^2}{\tilde{h}_C T^{\tilde{h}_C-1}} T^{\tilde{h}_C} \right) \left( \rho \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^{-1},$$

мы получим точное решение системы (1.1). В работе [6] рассматривается автомодельное точное решение для системы уравнений, описывающей перенос лучистой энергии в приближении спектральной диффузии. Автомодельная переменная имеет тот же вид, как и в (2.3), (2.4), что позволяет предположить возможность построения аналогичного точного решения с учетом теплопроводности.

### 3. ПРИМЕР

В качестве примера рассмотрим задачу о прогреве холодной чисто поглощающей двухкомпонентной среды тепловой волной в приближении “серой материи” для плоского слоя. Важным фактом является наличие ограничений на выбор констант для рассматриваемого автомодельного решения, в частности, условие  $\tilde{C}_V(T) > 0$ . Для решения кинетического уравнения необходимо также выполнение условий  $|\gamma| < 1$ ,  $\alpha_{s0} \hat{f} > 1$ . В начальный момент времени зададим фоновую температуру  $T^0 = 0.0001$  и выберем следующий набор констант:

$$\begin{aligned} \hat{m} &= 2, \quad c_1 = 0.2, \quad c_2 = 0.8, \quad \alpha_{c0,1} = 5, \quad \alpha_{c0,2} = 2.5, \quad \alpha_{s0} = 0, \quad k_{0,1} = 9, \quad k_{0,2} = 4, \\ \rho_1 &= 0.2, \quad \rho_2 = 0.8, \quad \xi_1 = 1, \quad \xi_0 = 0, \quad \xi_\nabla = -0.5, \quad \xi_t = 5, \quad \tilde{h}_r = 4, \quad \tilde{h}_c = 1. \end{aligned}$$

Тогда точное автомодельное решение для радиационно-кондуктивного переноса тепла описывается формулами

$$\begin{aligned} T &= \begin{cases} \xi = 5t - 0.5z, & T > T^0; \\ T^0, & T \leq T^0; \end{cases} \quad I^0 = B(T^0), \quad I = \begin{cases} fB = -\frac{3\gamma}{(1+\gamma\mu)} B, & T > T^0; \\ B, & T \leq T^0; \end{cases} \\ \tilde{C}_V &= \frac{6\sigma}{5} (\hat{f} - 1) T^3 + 0.25, \quad \gamma = -0.5/(3 + 5/3000), \quad \alpha_c = \frac{3}{T}, \quad k = 5T. \end{aligned}$$

Задача решалась в области  $z \in [0, 0.25]$ . Радиационный перенос энергии моделировался методом дискретных ординат с гауссовой квадратурой с 20 узлами. В качестве конечно-разностной схемы использовалась нелинейная TVD-подобная схема повышенного порядка точности с ограничителем Ван Альбада [12,13]. Уравнение теплопроводности аппроксимировалось конечно-разностной

схемой РОМБ [14]. Счет по времени осуществлялся по неявной схеме Эйлера первого порядка точности. Расчет велся до момента времени  $t = 0.02$  с сеточным шагом по пространству  $\Delta z = 0.002$  и по времени  $\Delta t = 0.00001$ . Заданная точность численного моделирования по температуре определялась величиной  $10^{-6}$ .

Во многих приложениях интересны следующие характеристики теплового поля, которые для данного точного решения имеют вид

$$U = \int_{-1}^1 \frac{I}{c} d\mu = \frac{\delta Arth\gamma}{c} B, \quad P = \int_{-1}^1 \mu^2 \frac{I}{c} d\mu = 2\delta \frac{Arth\gamma - \gamma}{c\gamma^2} B,$$

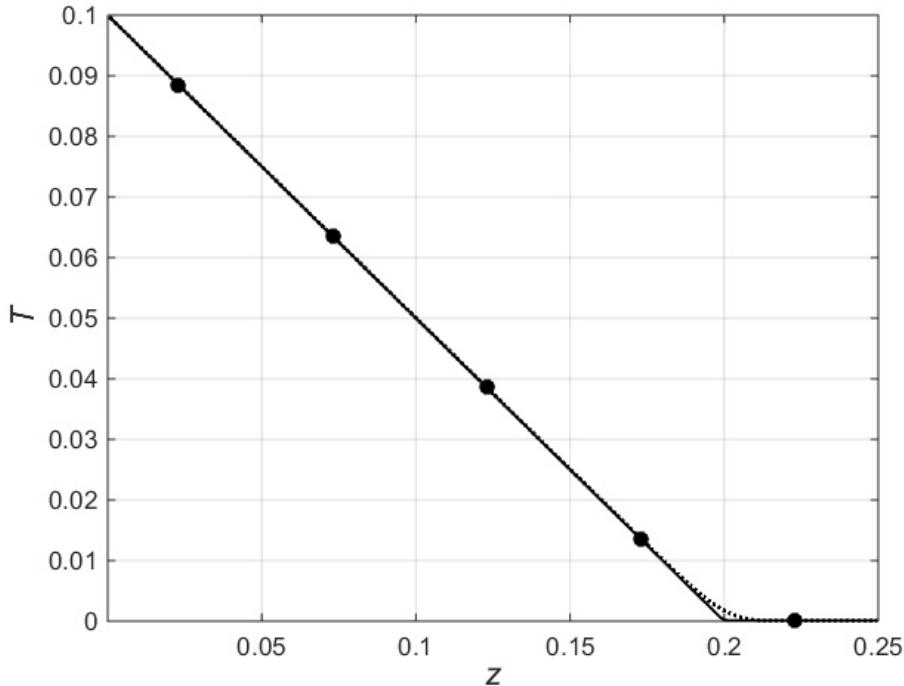
$$S_R = \int_{-1}^1 \mu I d\mu = 2\delta \frac{\gamma - Arth\gamma}{\gamma} B, \quad S_C = -k \frac{\partial T}{\partial z},$$

где  $U$  – плотность излучения,  $P$  – давление излучения,  $S_R$  – поток излучения,  $\mu$  – косинус угла полета фотонов. Результаты расчетов и аналитические представления некоторых важных величин теплового поля для решения, представляющего собой линейную волну, исходящую из начала координат, представлены на рис. 1–3. Аналитические данные представлены сплошной линией, численные результаты – пунктирными линиями с маркерами.

Из расчета видно, что численные результаты для представленных величин хорошо совпадают с аналитическими. Заметное отличие наблюдается только для температуры на фронте прохождения тепловой волны. Приведенный пример показывает возможность применения рассматриваемого класса точных решений для исследования численных методов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлено точное автомодельное решение для спектральной нелинейной системы, описывающей перенос тепла для поглощающей, излучающей и изотропно рассеивающей среды



**Рис. 1.** Профили температуры  $T$ : сплошная линия – аналитическое решение, пунктирная линия с маркером – численное решение.

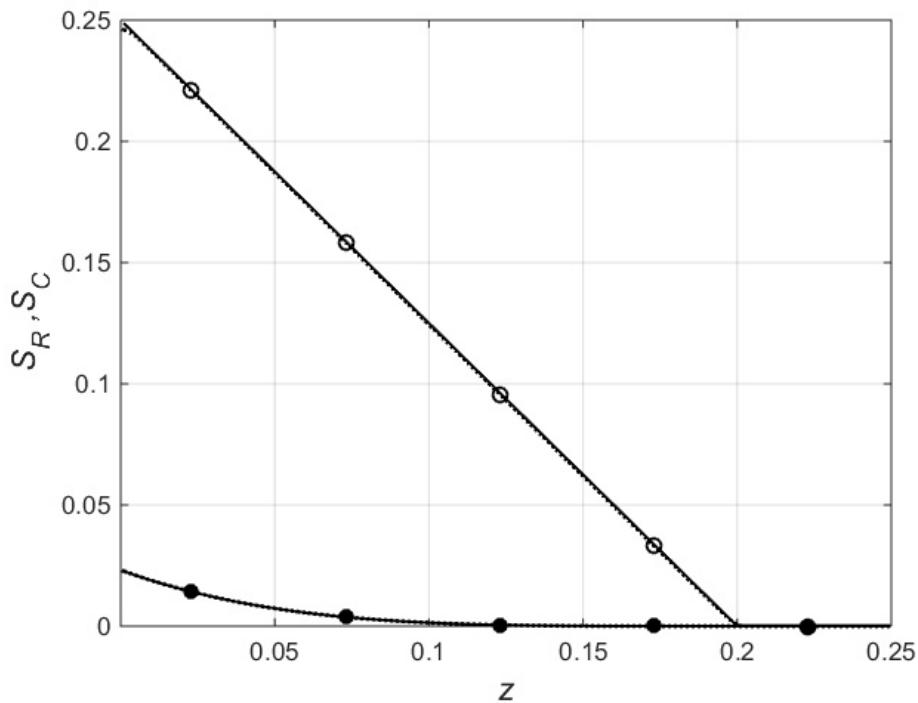


Рис. 2. Профили радиационного  $S_R$  (маркер окружность) и кондуктивного  $S_C$  (маркер точка) потоков, аналитические решения — сплошная линия.

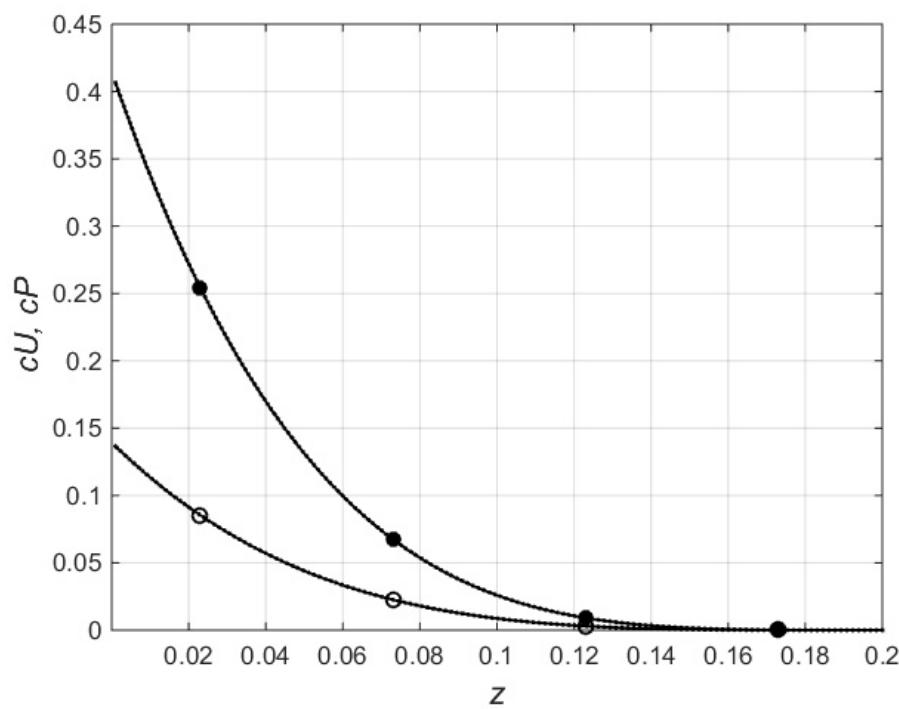


Рис. 3. Профили интегральной интенсивности  $cU$  (маркер точка) и давления излучения, умноженного на скорость света,  $cP$  (маркер окружность), аналитические решения — сплошная линия.

в кинетической модели с учетом тепловодности в декартовой системе координат. Решение существует в случае нестационарного, квазистационарного и регулярного режимов для кинетического уравнения переноса. Несмотря на некоторые недостатки изложенного подхода, например, предопределенный вид коэффициентов поглощения и рассеивания, важным, по мнению автора, является простота реализации и описание интенсивности излучения  $I_v$ . Это дает возможность получения других характеристик теплового поля, что особенно важно при разработке и отладке методов моделирования задач сложного теплообмена.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А., Соболь И.М. Примеры численного решения температурных волн // ЖВМ и МФ. 1963. Т. 3. № 4. С. 702–719.
2. Думкина Г.В., Козманов М.Ю. Точное решение нелинейной системы уравнений энергии и нестационарного переноса излучения // ЖВМ и МФ. 1979. Т. 19. № 4. С. 1061–1063.
3. Андреев Е.С., Думкина Г.В., Козманов М.Ю. О некоторых точных решениях системы уравнений энергии и спектрального нестационарного переноса излучения // ЖВМ и МФ. 1981. Т. 21. № 4. С. 1054–1055.
4. Гусев В.Ю., Козманов М.Ю. О некоторых точных решениях системы уравнений энергии и переноса излучения с учетом рассеяния // ВАНТ. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1986. Вып. 3. С. 20–21.
5. Шестаков А.А. Об одном точном решении системы спектральных уравнений переноса лучистой энергии // ВАНТ. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1988. Вып. 2. С. 40–43.
6. Shestakov A.A., Zavyalov V.V., Andreev E.S. Analytical Solution of the System of Energy and Radiation Transport Equations for 1D Heterogeneous media // 2nd International Conference “From Scientific Computing to Computational Engineering”. 2006. Athens. P. 299–306.
7. Завьялов В.В., Козманов М.Ю., Селезнев В.Н., Черняков В.Е., Шестаков А.А. Результаты численных расчетов одномерных тестовых задач переноса излучения // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2005. Вып. 3. С. 26–36.
8. Завьялов В.В. Об одном классе аналитических автомодельных решений системы уравнений переноса излучения и энергии для гомогенной среды // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51. № 6. С. 931–936.
9. Завьялов В.В. Точное автомодельное решение системы уравнений переноса излучения в кинетической модели для регулярного режима // Теплофизика и аэромеханика. 2024. Т.31. № 1. С. 159–166.
10. Суржиков С.Т. Тепловое излучение газов и плазмы. М.: МГТУ им. Баумана, 2004. 544 с.
11. Козманов М.Ю. Принцип максимума для системы уравнений переноса излучения с учетом электронной и ионной теплопроводности // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1994. Вып. 3. С. 18–20.
12. Код ЭГИДА-2Д для моделирования двумерных задач. Саров: ФГУП “РФЯЦ–ВНИИЭФ”. 2008. – 344 с.
13. Гаджиев А.Д., Завьялов В.В., Шестаков А.А. Применение TVD подхода к DSn методу решения уравнения переноса теплового излучения // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2009. Вып. 2. С. 37–48.
14. Писарев В.Н., Чернова С.В. Численная методика РОМБ решения трехмерного уравнения теплопроводности в криволинейной системе координат // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2007. Вып. 3, 4. С. 3–5.

# AN EXACT SOLUTION FOR A TIME-DEPENDENT SYSTEM OF RADIATIVE-CONDUCTIVE HEAT TRANSFER EQUATIONS

V. V. Zaviyalov<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>Russian Federal Nuclear Center, Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics,  
Snezhinsk, Russia

\*e-mail: v.v.zaviyalov@vniitf.ru

**Abstract**—An exact self-similar solution of the type of a traveling heat wave for the time-dependent nonlinear system of radiative-conductive heat transport equations in the Cartesian geometry is considered. The radiation component is considered in the kinetic model with specially adjusted absorption and scattering coefficients. An example of the test problem in the plane geometry is given.

**Keywords:** heat transfer, exact solution

# ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕЧЕНИЕ ПУАЗЕЙЛЯ ТЕРМОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАДИЕНТОВ ДАВЛЕНИЯ И ТЕМПЕРАТУРЫ

© 2024 г. Д. В. Князев<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

\*e-mail: dvk@icmm.ru

Поступила в редакцию 22.07.2024 г.

После доработки 29.08.2024 г.

Принята к публикации 11.10.2024 г.

Исследование стационарного осесимметричного течения Пуазейля ньютоновской жидкости, индуцируемого продольными градиентами давления и температуры, с коэффициентом динамической вязкости, зависящим от температуры, сведено к отысканию решений трёхпараметрической краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка. В области пространства параметров, соответствующей отрицательному осевому градиенту температуры, существуют две ветви решений, описывающих течения, сопровождающиеся отводом тепла от жидкости. Смыкаясь, ветви образуют границу в фазовом пространстве, за пределами которой решения задачи пуазейлевского типа не существуют. Одна из ветвей продолжается в область неотрицательных значений продольного градиента температуры и содержит изотермическое решение Пуазейля. Вдоль этой ветви кривая зависимости расхода от безразмерного осевого градиента температуры имеет минимум в области положительных значений последнего. В этой части пространства параметров режим теплообмена с внешней средой зависит от соотношения между всеми тремя безразмерными комплексами задачи. Режим теплообмена влияет на характер течения, тормозя поток у твёрдой стенки при теплоотдаче, и формируя более наполненный профиль скорости при поглощении тепла жидкостью.

**Ключевые слова:** течение Пуазейля, зависимость вязкости от температуры, ветвление решений

**DOI:** 10.31857/S1024708424060022, **EDN:** FETQOY

В ряде случаев зависимость коэффициента вязкости от температуры может заметно влиять на течение жидкости. Универсального закона, выражающего эту зависимость, по-видимому, не существует, поэтому на практике используются разнообразные эмпирические и полуэмпирические формулы [1, 2]. Как правило, коэффициент вязкости уменьшается с ростом температуры, такое поведение нередко удачно описывается степенными и показательными зависимостями.

Простыми, но практически и теоретически важными являются сдвиговое течение Куэтта и напорное течение Пуазейля. Эти течения между параллельными твёрдыми границами, поддерживаемыми при постоянных температурах, рассмотрены в [3, 4] с учётом тепловыделения за счёт внутреннего трения и без уточнения конкретного вида зависимости коэффициента вязкости от температуры, лишь в предположении, что он является положительной, гладкой, убывающей функцией. Этих допущений оказывается достаточно для построения решения задачи Куэтта о сдвиговом стационарном термовязком течении в виде квадратур [3]. В [4] задача о течении Пуазейля, поддерживаемом постоянным осевым градиентом давления, сведена к однопараметрическому интегральному уравнению. Показано, что по достижении параметром критического значения, решение уравнения перестаёт существовать. Причём в некоторой окрестности критического значения задача имеет, по меньшей мере, два решения. Метод исследования, использованный в [4], ясно указывает на то, что исчезновение решения тесно связано с требованием положительности коэффициента вязкости. Примеры точных решений задач для конкретных видов зависимостей коэффициента вязкости от температуры можно найти в обзорной работе [5].

Неоднородное распределение температуры вдоль границ области течения влечёт необходимость учёта конвективного механизма переноса тепла и нелинейности распределения давления. В этой ситуации течения пуазейлевского типа, с единственной компонентой скорости, зависящей от поперечной к ней координаты, возможны лишь для некоторых законов, связывающих коэффициент вязкости с температурой, и специальных распределений температуры вдоль границы. К таким случаям относятся течения с линейным распределением температуры вдоль границы при экспоненциальной зависимости вязкости от температуры [6] и степенной связью коэффициента вязкости с температурой при экспоненциальном распределении температуры вдоль твёрдой границы [7]. В [6] найдены явные выражения полей давления и касательных напряжений в плоскопараллельных и осесимметричных термовязких потоках жидкости с экспоненциальным законом зависимости вязкости от температуры. Для этих течений в [8], с использованием подхода, предложенного в [4], выполнена оценка критических значений параметров, ограничивающих область существования решений. В [7] сформулирована задача о плоскопараллельном течении ньютоновской жидкости с гиперболическим законом зависимости вязкости от температуры и найдены её частные решения. Численное исследование задачи показало неединственность её решений [9].

Во всех упомянутых выше работах предполагалось, что, кроме коэффициента вязкости, прочие величины, характеризующие теплофизические свойства среды, включая плотность, постоянны. С использованием приближения Буссинеска в [10] найдено решение задачи о стационарной конвекции в вертикальном канале с коэффициентом вязкости и плотностью, линейно зависящими от температуры. Указано, что температурная неоднородность коэффициента вязкости приводит к отклонению профиля скорости от антисимметричного и способствует дестабилизации стационарного течения. В [11] найдено решение близкой по постановке задачи, но с учётом воздействия постоянного градиента давления и в предположении о гиперболическом законе связи коэффициента вязкости с температурой. Задача о плоском течении Куэтта сжимаемой вязкой среды с уравнением состояния Менделеева–Клапейрона и коэффициентами вязкости (по формуле Сазерленда) и теплопроводности, зависящими от температуры, решена в [12]. Течение газа несимметричное относительно биссектрисы угла, образованного плоскостями, нагретыми до разных температур, с коэффициентом вязкости и теплопроводности, зависящим от температуры по степенному закону, изучено в [13].

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается установившееся осесимметричное течение ньютоновской жидкости в длинной трубе радиуса  $R$  с коэффициентом динамической вязкости, зависящим от температуры. Движение индуцируется разностью давлений  $\Delta p$  в нормальных сечениях  $z = 0, z = L$  и неоднородным распределением температуры вдоль боковой поверхности трубы  $T_0(z)$ . По аналогии с изотермическим течением Пуазеля предполагается, что скорость направлена вдоль оси симметрии потока  $z$  и зависит только от радиуса  $r$ . В этих условиях тензор вязких напряжений имеет две ненулевые компоненты  $\sigma_{rz} = \sigma_{zr}$  и гидродинамические уравнения принимают вид

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial r \sigma_{rz}}{\partial r}, \quad v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \chi \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right], \quad \sigma_{rz} = \eta(T) \frac{dv_z}{dr}. \quad (1.1)$$

Кроме коэффициента вязкости  $\eta$ , все величины, характеризующие физические свойства жидкости, считаются постоянными, включая плотность и коэффициент температуропроводности  $\chi$ . На оси симметрии и боковой поверхности трубы выполняется условия:

$$r = 0 : \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad \Delta p = p(0, 0) - p(0, L) \geq 0; \quad r = R : \quad v_z = 0, \quad T = T_0(z). \quad (1.2)$$

Задача (1.1), (1.2) разрешима не для всех видов зависимостей  $\eta(T)$ ,  $T_0(z)$ . Далее предполагается, что

$$\eta(T) = \eta_0 T^{-\lambda}, \quad T_0(z) = e^{B+Az}, \quad T > 0, \quad \eta_0 > 0, \quad \lambda \geq 0. \quad (1.3)$$

Решение системы (1.1)–(1.3) ищется в виде

$$v_z = \frac{L \Delta p}{\eta_0} w(\xi), \quad p - p(0, L) = \Delta p \frac{P(\xi) \exp(a(1 - \xi)) - 1}{\exp(a) - 1}, \\ T = \exp \left( \frac{b + \theta(\xi) + a\xi}{\lambda} \right), \quad (1.4)$$

где  $0 \leq \xi = r/R \leq 1$ ,  $0 \leq \zeta = z/L \leq 1$  – безразмерные радиальная и осевая координаты;  $a = \lambda AL$ ,  $b = \lambda B$ . Представление температуры в виде (1.4) обусловлено граничным условием (1.3) и необходимостью обеспечить положительность коэффициента вязкости  $\eta(T)$ .

Новая безразмерная неизвестная  $P(\xi)$  удовлетворяет модифицированному уравнению Бесселя нулевого порядка с дополнительными условиями  $P(0) = 1$ ,  $P'(0) = 0$ , так что

$$P = I_0(\alpha\xi) \geq 1, \quad P' = \alpha I_1(\alpha\xi) \geq 0. \quad (1.5)$$

Штрихом обозначается производная по переменной  $\xi$ ;  $I_0(t)$ ,  $I_1(t)$  – модифицированные функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков [14]. Функция  $I_0(t)$  положительная, чётная,  $I_0(t) = I_0(-t)$ , монотонно расчт при  $t > 0$  и  $I_0(0) = 1$ . Функция  $I_1(t)$  нечётная,  $I_1(-t) = -I_1(t)$ , монотонно растёт на всей числовой прямой и  $I_1(0) = 0$ . Безразмерный параметр  $\alpha = ad$  характеризует величину продольного градиента температуры на боковой поверхности трубы с учётом отношения радиального и осевого масштабов  $0 < \delta = R/L < 1$ . При  $\alpha < 0$  температура стенки уменьшается вдоль рассматриваемого участка трубы, при  $\alpha > 0$  – растёт.

Для безразмерной скорости  $w(\xi)$  и её производной из (1.1)–(1.5) следуют выражения:

$$\alpha\delta Pe w = \theta'' + \frac{\theta'\theta' + \alpha^2}{\xi} + \frac{\delta e^b}{1 - \exp(-\alpha/\delta)} I_1(\alpha\xi) \exp(\theta) \leq 0, \quad (1.6)$$

где  $Pe = L^2 \Delta p / (\eta_0 \chi) \geq 0$  – число Пекле. Неравенство  $w'(\xi) \leq 0$  вытекает из свойств монотонности и нечётности функции  $I_1(t)$ .

Формулы (1.5), (1.6) позволяют выписать явные выражения для давления и поля касательных напряжений

$$\begin{aligned} \frac{p - p(0, L)}{\Delta p} &= \frac{I_0(\alpha\xi) \exp(\alpha(1 - \zeta)/\delta) - 1}{\exp(\alpha/\delta) - 1}, \\ \frac{\sigma_{rz}}{\Delta p} &= -\frac{\exp(-\alpha\xi/\delta)}{1 - \exp(-\alpha/\delta)} I_1(\alpha\xi) \leq 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Абсолютная величина  $|\sigma_{rz}|$  минимальна на оси симметрии потока  $|\sigma_{rz}(0, \zeta)| = 0$  и, монотонно возрастая в радиальном направлении, достигает максимума на твёрдой боковой поверхности трубы.

Вследствие (1.6) и граничных условий неизвестная  $\theta(\xi)$  удовлетворяет краевой задаче:

$$\begin{aligned} \theta''' + \left( \frac{1}{\xi} + \frac{2}{\lambda} \theta' \right) \theta'' - \frac{\theta'}{\xi^2} &= -\beta I_1(\alpha\xi) \exp(\theta), \\ \theta'(0) = 0, \theta(1) = 0, \theta''(1) + \theta'(1) + \frac{\theta'(1)\theta'(1) + \alpha^2}{\lambda} &= 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

содержащей три параметра

$$\alpha = \lambda AR, \quad \beta = \frac{\alpha}{1 - \exp(-\alpha/\delta)} \exp(b) \delta^2 Pe \geq 0, \quad \lambda \geq 0.$$

Таким образом, задача (1.1)–(1.3) с помощью (1.4) сводится к системе (1.8).

## 2. АНАЛИЗ ЗАДАЧИ И РАСЧЁТЫ

В силу неравенства  $w'(\xi) \leq 0$  (1.6) безразмерная скорость  $w(\xi) \geq 0$  всегда максимальна на оси потока и монотонно убывает до нулевого значения на твёрдой границе. Подобным же образом ведёт себя  $\theta(\xi)$  при  $\alpha < 0$ , так как из первого уравнения (1.6) вытекает, что

$$\theta' = \frac{\alpha\delta Pe}{\xi} \int_0^\xi t w dt - \frac{1}{\lambda\xi} \left[ \frac{(\alpha\xi)^2}{2} + \int_0^\xi t \theta' \theta' dt \right].$$

При  $\alpha > 0$  ( $\lambda \neq \infty$ ) функция  $\theta(\xi)$  может быть немонотонной и менять знак.

Если в уравнениях и граничных условиях (1.6), (1.8) отбросить слагаемые, содержащие в качестве сомножителя  $\lambda^{-1}$ , то получившаяся система описывает течение жидкости с экспоненциальной зависимостью коэффициента вязкости от температуры и линейным изменением последней вдоль потока [8, 15]:

$$\eta = \eta_0 \exp(-\lambda T), \quad \lambda T = b + \theta(\xi) + a\xi, \quad T_0 = B + Az. \quad (2.1)$$

Иными словами, течение (2.1) соответствует главному члену разложения  $\theta = \theta_0 + \lambda^{-1}\theta_1 + \lambda^{-2}\theta_2 + \dots$ . Таким образом, для достаточно больших значений  $\lambda$  течения со степенной зависимостью коэффициента вязкости от температуры (1.3) близки к течениям (2.1) при одинаковых значениях параметров  $a, \beta$ . Выражения давления и вязких напряжений (1.7) остаются справедливыми для течений (2.1) [6]. Далее случай (2.1) обозначается “ $\lambda = \infty$ ”. В противоположной предельной ситуации,  $0 \leq \lambda < 1$ , главный член разложения  $\theta = \lambda\theta_1 + \lambda^2\theta_2 + \dots$  ( $a = \lambda AR$ ) определяет распределению температуры на фоне изотермического течения Пуазейля с граничным условием (1.3).

При  $\lambda = \infty$  произведение  $a\theta' > 0$  на полуинтервале  $0 < \xi \leq 1$ , поэтому функция  $\theta(\xi) \leq 0$  минимальна на оси симметрии и монотонно растёт до нуля на боковой поверхности трубы при  $\alpha > 0$ .

В случае термовязкого течения потоки массы и тепла связаны между собой. Направление вектора плотности потока тепла

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T = -\kappa_0 T (\theta' \mathbf{e}_r + \alpha \mathbf{e}_z), \quad \kappa_0 = \frac{\kappa}{\lambda R}$$

зависит от  $\theta'(\xi)$  и  $\alpha$ . В частности,  $\gamma = \theta'(1)$  характеризует плотность теплового потока через твёрдую границу. Тепло подводится к жидкости через боковую границу трубы при  $\gamma > 0$  и отводится наружу при  $\gamma < 0$ . Величины  $\gamma$  и  $\alpha$  входят в выражение для расхода

$$Q = 2\pi R \chi \delta \text{Pe} \int_0^1 \xi w d\xi = \frac{2\pi R \chi}{\alpha} \left[ \gamma + \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\alpha^2}{2} + \int_0^1 \xi \theta' \theta' d\xi \right) \right] \geq 0. \quad (2.2)$$

Согласно (2.2) при  $\alpha < 0$  тепло отводится от жидкости через боковую поверхность трубы, то есть  $\gamma \leq 0$ . В случае  $\lambda = \infty$  ( $\mathbf{q}/\kappa_0 = -\theta' \mathbf{e}_r - \alpha \mathbf{e}_z$ ) безразмерный расход  $G = Q/(2\pi R \chi)$  прямопропорционален плотности теплового потока через боковую поверхность трубы и обратнопропорционален плотности осевого потока тепла:  $G = \gamma/\alpha \geq 0$ .

Величины  $\gamma$  и  $G$  зависят от трёх параметров задачи (1.8), то есть  $\gamma = \gamma(\alpha, \beta, \lambda)$ ,  $G = G(\alpha, \beta, \lambda)$ . Анализ этих зависимостей показывает, что существуют критические значения параметров  $\alpha_1 < 0$ ,  $\beta_1 > 0$ ,  $\lambda_1 > 0$ , ограничивающие область существования стационарных решений пуазейлевского типа (1.4). В частности при фиксированных значениях параметров  $\beta$  и  $\lambda$ , в случае убывания температуры вдоль боковой поверхности трубы ( $\alpha < 0$ ), решение задачи вида (1.4) существовать лишь в ограниченном диапазоне значений параметра  $\alpha_1(\beta, \lambda) \leq \alpha \leq 0$  (рис. 1, 2). При этом каждому  $\alpha$  соответствуют два решения с одинаковыми полями давления и вязких напряжений (1.7), но различными плотностями теплового потока  $\gamma \leq 0$  (рис. 1а, 2а) и безразмерными расходами  $G$  (рис. 1б, 2б). Таким образом, можно говорить о двух ветвях решения (I, II), смыкающихся при  $\alpha = \alpha_1$ . С увеличением  $\beta$  абсолютная величина критического значения  $|\alpha_1|$  уменьшается (рис. 1), а с ростом  $\lambda$  увеличивается, достигая конечного максимума при  $\lambda = \infty$  (рис. 2).

Оценить критическое значение  $\alpha_1$  можно, рассмотрев главный член разложения

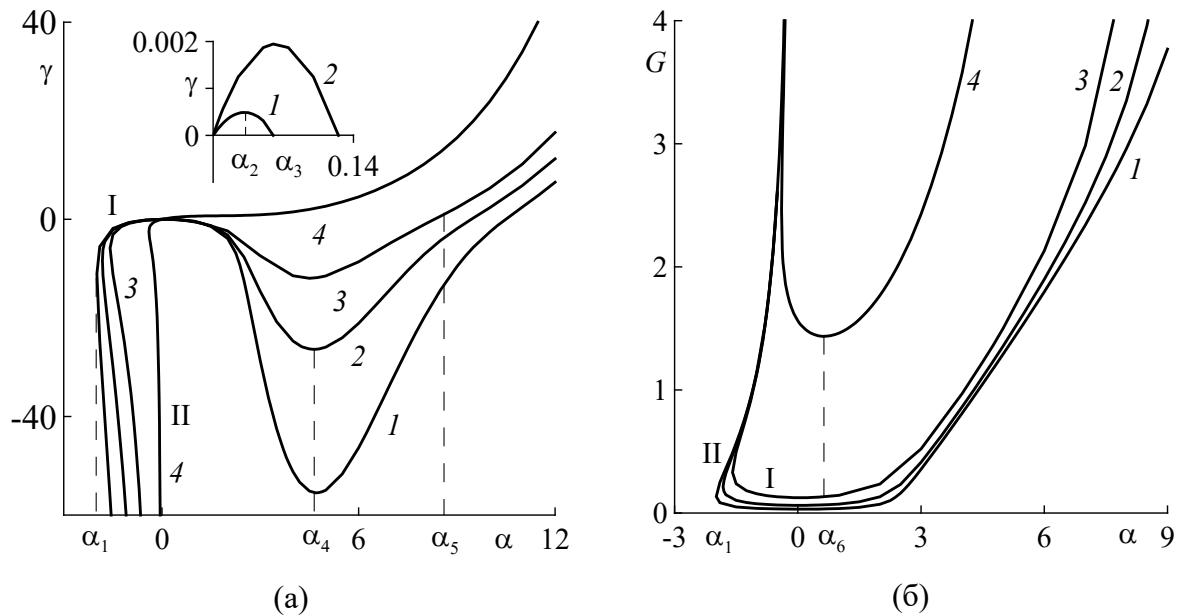
$$\theta = \theta_0 + \beta\theta_1 + \beta^2\theta_2 + \dots \quad (0 \leq \beta < 1)$$

$$\theta_0 = \lambda \ln \frac{J_0(\alpha \xi / \lambda)}{J_0(\alpha / \lambda)} \quad (2.3)$$

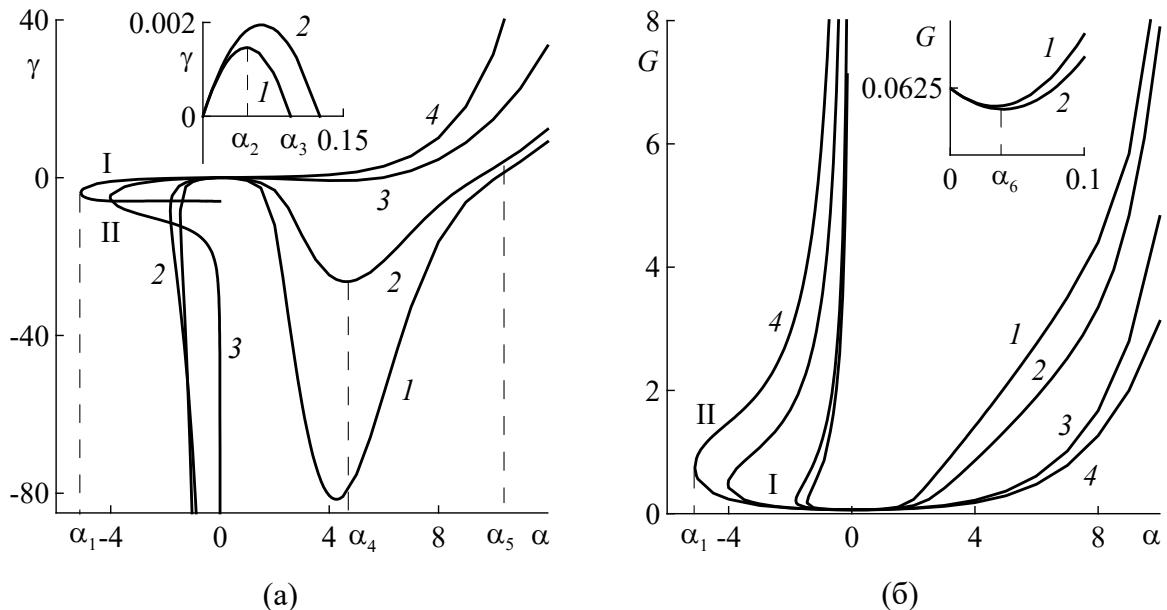
описывающий распределение температуры в неподвижной жидкости ( $\Delta p = 0$ ,  $G = 0$ ). Выражение (2.3) имеет смысл если

$$-\lambda t_1 < \alpha < \lambda t_1, \quad (2.4)$$

где  $t_1 \approx 2.405$  – наименьший положительный ноль функции Бесселя  $J_0(t)$ . Условия (2.4) можно переписать в виде ограничения на равновесный продольный градиент температуры  $A$ :  $-2.405/R < A < 2.405/R$ . Левая часть двойного неравенства (2.4) выступает в качестве оценки критического значения  $\alpha_1$ :  $-2.405\lambda < \alpha_1 < 0$ . В то же время численные расчёты показывают, что система (1.8) имеет решения



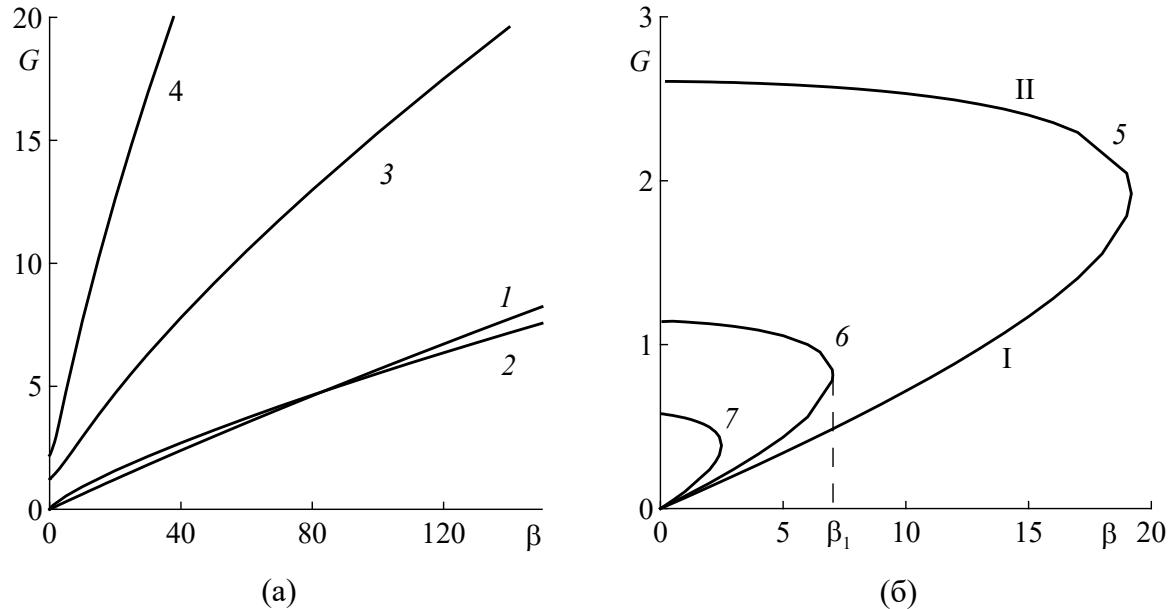
**Рис. 1.** Зависимости  $\gamma(\alpha)$  (а) и  $G(\alpha)$  (б) при  $\lambda = 1$  и различных значениях параметра  $\beta$ : 1 –  $\beta = 0.5$ ,  $\alpha_1 = -1.987$ ; 2 –  $\beta = 1$ ,  $\alpha_1 = -1.818$ ; 3 –  $\beta = 2$ ,  $\alpha_1 = -1.587$ ; 4 –  $\beta = 25$ ,  $\alpha_1 = -0.610$ .



**Рис. 2.** Зависимости  $\gamma(\alpha)$  (а) и  $G(\alpha)$  (б) при  $\beta = 1$  и различных значениях параметра  $\lambda$ : 1 –  $\lambda = 0.75$ ,  $\alpha_1 = -1.452$ ; 2 –  $\lambda = 1$ ,  $\alpha_1 = -1.818$ ; 3 –  $\lambda = 5$ ,  $\alpha_1 = -4.021$ ; 4 –  $\lambda = \infty$ ,  $\alpha_1 = -5.099$ .

при  $\alpha > 2.405\lambda$  (рис. 1б). В этой области значений параметра  $\alpha$  заметно увеличивается скорость роста кривых  $G(\alpha)$ , а зависимости  $G(\beta)$ , построенные по соответствующим решениям при фиксированных  $\alpha, \lambda$ , не отвечают от состояния равновесия (2.3) с нулевым расходом (рис. 3а, кривые 3, 4), то есть использованное выше разложение перестаёт быть применимым. В области параметров  $\alpha < 0, \lambda$ , ограниченной левой частью неравенства (2.4), ветви решений I и II смыкаются по достижении критического значения  $\beta_1(\alpha, \lambda) > 0$  (рис. 3б). Для  $\beta > \beta_1$  решение задачи (1.8) не существует.

В случае  $\lambda = \infty$  правая часть (2.3) обращается в ноль, что соответствует однородному в радиальном направлении распределению температуры (2.1). Оценка критических значений параметров задачи для течений с экспоненциальной зависимостью коэффициента вязкости от температуры (2.1)



**Рис. 3.** Зависимость  $G(\beta)$  при  $\lambda = 1$  и различных положительных (а) и отрицательных (б) значениях параметра  $\alpha$ :  
 1 –  $\alpha = 0.1$ ; 2 –  $\alpha = 2.2$ ; 3 –  $\alpha = 5$ ; 4 –  $\alpha_1 = 7$ ; 5 –  $\alpha = -0.5$ ,  $\beta_1 = 19.187$ ; 6 –  $\alpha = -1$ ,  $\beta_1 = 7.023$ ; 7 –  $\alpha = -1.5$ ,  $\beta_1 = 2.491$ .

выполнена в [8]. При  $\lambda = \infty$  легко найти первые члены разложений  $w$  и  $\theta$  по натуральным степеням  $\beta$

$$\delta \text{Pe}_w = \frac{\beta}{\alpha^2} [I_0(\alpha) - I_0(\alpha\xi)] + \frac{\beta^2}{2\alpha^5} \left\{ [I_0(\alpha\xi) - I_0(\alpha)]^2 + \frac{\alpha^2}{2} (1 - \xi^2) I_0(\alpha) I_0(\alpha\xi) + \right. \\ \left. + \alpha I_0(\alpha) [\xi I_1(\alpha\xi) - I_1(\alpha)] \right\} + \dots, \quad \theta = \frac{\beta}{\alpha^3} \left[ \frac{\alpha^2 I_0(\alpha)}{4} (\xi^2 - 1) + I_0(\alpha) - I_0(\alpha\xi) \right] + \dots \quad (2.5)$$

применимые, в том числе, при  $\alpha$  заметно больших единицы.

При  $|\alpha| < 1$  приближённое решение краевой задачи (1.8), соответствующее ветви I, может быть получено в виде разложения по степеням  $\alpha$

$$\begin{aligned} \theta = & -\frac{\alpha\beta}{64}(\xi^4 - 4\xi^2 + 3) + \frac{\alpha^2}{147456} \left[ 3 \left(1 - \frac{3}{\lambda}\right) \beta^2 \xi^8 - 32 \left(1 - \frac{2}{\lambda}\right) \beta^2 \xi^6 + \right. \\ & + 36 \left(3 - \frac{4}{\lambda}\right) \beta^2 \xi^4 - 192 \left(\beta^2 + \frac{192}{\lambda}\right) \xi^2 + \left(113 + \frac{89}{\lambda}\right) \beta^2 + \frac{36864}{\lambda} \Big] + \dots, \\ \delta \text{Pew} = & \frac{\beta}{4} (1 - \xi^2) + \frac{\alpha\beta^2}{768} (\xi^6 - 6\xi^4 + 9\xi^2 - 4) - \frac{\alpha^2\beta}{983040} \left\{ \left(7 - \frac{3}{\lambda}\right) \beta^2 \xi^{10} - \right. \\ & - \frac{20}{3} \left(11 - \frac{4}{\lambda}\right) \beta^2 \xi^8 + 40 \left(7 - \frac{2}{\lambda}\right) \beta^2 \xi^6 - 40 \left[13\beta^2 - 384 \left(1 - \frac{2}{\lambda}\right)\right] \xi^4 + \\ & \left. + \frac{5}{3} \left[\left(275 + \frac{89}{\lambda}\right) \beta^2 + \frac{36864}{\lambda}\right] \xi^2 - 4 \left(38 + \frac{23}{\lambda}\right) \beta^2 - 15360 \left(1 + \frac{2}{\lambda}\right) \right\} + \dots. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для вычисления (2.6) использовано представление модифицированной функции Бесселя  $I_1(t)$  в виде степенного ряда [14]. С уменьшением теплового воздействия на поток ( $a \rightarrow 0$ ) безразмерная скорость (2.6) стремится к решению Пуазейля  $w = \delta^2(1 - \xi^2)/4$ . При  $\beta = 0$  из (2.6) следует приближённое выражение для (2.3):  $\theta_0 \approx \alpha^2(1 - \xi^2)/(4\lambda)$ . Представление о характере зависимостей  $\gamma$  и  $G$  от парамет-

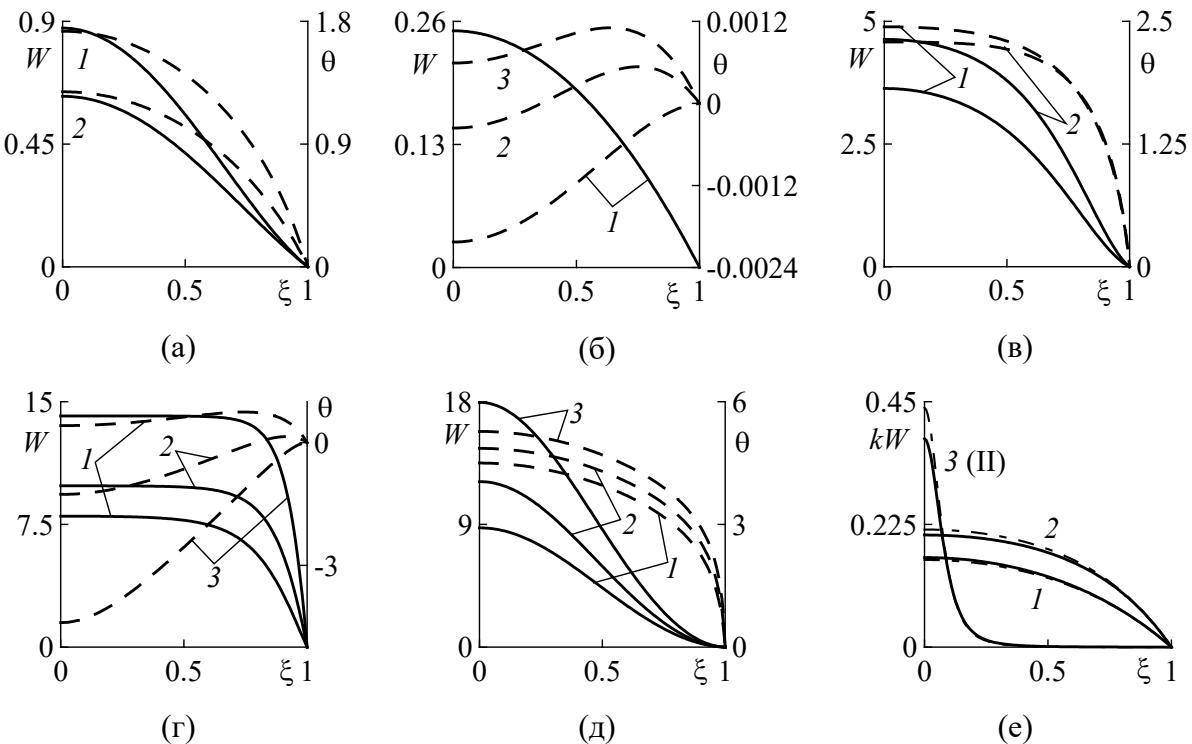
ров задачи дают выражения, вычисленные с помощью (2.6):

$$\begin{aligned}\gamma(\alpha, \beta, \lambda) &\approx \frac{\alpha\beta}{16} - \frac{\alpha^2}{6144\lambda} [(5\lambda + 11)\beta^2 + 3072], \\ G(\alpha, \beta, \lambda) &\approx \frac{\beta}{16} - \frac{5}{6144}\alpha\beta^2 + \frac{\alpha^2\beta}{5898240\lambda} [(119\lambda + 99)\beta^2 + 307020(1 + \lambda)].\end{aligned}\quad (2.7)$$

Структура приближённых выражений (2.6) и их следствий (2.7) позволяет смотреть на них не только как на разложения при  $|\alpha| < 0$ , но и как на первые члены разложений по параметрам  $0 \leq \beta < 1$ ,  $0 \leq \lambda^{-1} < 1$ .

В области  $\alpha_1 \leq \alpha \leq 0$  зависимости  $\gamma(\alpha)$ ,  $G(\alpha)$ , рассчитанные по решениям, принадлежащим ветви I, при фиксированных значениях параметров  $\beta$  и  $\lambda$ , монотонны. Каждая функция  $\gamma(\alpha)$  растёт от значения  $\gamma(\alpha_1) < 0$ , до  $\gamma(0) = 0$  (рис. 1а, 2а; (2.7)). Функции  $G(\alpha)$  – убывающие (рис. 1б, 2б; (2.7)). В случае  $\alpha < 0$  продольный тепловой поток сонаправлен с потоком массы, формирующийся при этом радиальный поток тепла направлен наружу,  $\gamma < 0$ . Абсолютная величина вязких напряжений  $|\sigma_{rz}|$  (1.7) и коэффициент вязкости  $\eta \sim \exp(-\theta - \alpha\zeta/\delta)$  растут вниз по потоку жидкости и от центра к периферии. Всё это способствует торможению течения у твёрдой стенки тем большему, чем больше  $|\gamma|$  (рис. 4а).

В области  $\alpha \geq 0$  осевой поток тепла направлен против течения жидкости, следовательно, согласно (1.7), силы вязкого трения убывают вниз по потоку. Режим теплообмена через твёрдую границу зависит от соотношения параметров задачи  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ . При небольших  $\beta$ ,  $\lambda$  функции  $\gamma(\alpha)$  обращаются в ноль при  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = \alpha_3$ ,  $\alpha = \alpha_5$  и имеют локальные максимум и минимум при  $\alpha = \alpha_2 \in (0, \alpha_3]$ ,  $\gamma(\alpha_2) > 0$  (см. (2.7)) и  $\alpha = \alpha_4 \in [\alpha_3, \alpha_5]$ ,  $\gamma(\alpha_4) \leq 0$  (рис. 1а, 2а, кривые 1–3). Жидкость поглощает тепло через твёрдую границу ( $\gamma > 0$ ) при  $0 < \alpha < \alpha_3$ ,  $\alpha > \alpha_5$  и отдаёт его ( $\gamma < 0$ ) при  $\alpha_3 < \alpha < \alpha_5$ . В случае подвода тепла функция  $\theta(\xi)$  монотонно растёт в радиальном направлении от  $\theta(0) < 0$ , до  $\theta(1) = 0$  (рис. 4б, кривые I; рис. 4г, кривые 3), поэтому коэффициент вязкости  $\eta$  максимальен на оси симметрии потока. При слабой теплоотдаче, то есть при  $\alpha$  близких к границам интервала  $\alpha_3 < \alpha < \alpha_5$ , функция  $\theta(\xi)$  немо-



**Рис. 4.** Профили безразмерной скорости  $W(\xi) = \delta P_{ew}(\xi)$  (—) и  $\theta(\xi)$  (- - -) при различных значениях параметров задачи:  $\beta = 1$ ,  $\lambda = 1$ ; (а)  $1 - \alpha = -1.8$ ,  $2 - \alpha = -1.7$ ; (б)  $1 - \alpha = 0.12$ ,  $2 - \alpha = 0.18$ ,  $3 - \alpha = 0.2$ ; (в)  $1 - \alpha = 4$ ,  $2 - \alpha = 4.7$ ; (г)  $1 - \alpha = 7.5$ ,  $2 - \alpha = 8.5$ ,  $3 - \alpha = 9.5$ ; (д) ветвь II,  $1 - \alpha = -0.9$ ,  $2 - \alpha = -0.7$ ,  $3 - \alpha = -0.5$ ; (е)  $\beta = 0.5$ ,  $\lambda = \infty$ ,  $1 - \alpha = -2$ ,  $k = 1$ ,  $2 - \alpha = 3$ ,  $k = 1$ ,  $3 - \alpha = -2.25$  (ветвь II),  $k = 10^{-4}$ , (штрихпунктирные кривые – приближённые решения).

нотонна и может менять знак (рис. 4б, кривые 2, 3; рис. 4г кривые 1, 2). Интенсивный теплоотвод, при  $\alpha$  близких к  $\alpha_4$ , приводит к торможению жидкости вблизи твёрдой границы (рис. 4в), как и в описанном ранее случае  $\alpha < 0$ . Отличие между этими двумя режимами заключается в более “наполненных” профилях безразмерной скорости и монотонно убывающей функции  $\theta(\xi)$  при  $\alpha > 0$  (сравниваются рис. 4а и 4в). Последнее означает, что коэффициент вязкости убывает быстрее по направлению к оси симметрии, чем в случае  $\alpha < 0$ , также он уменьшается вдоль этой оси вместе с  $|\sigma_{rz}|$ . При достаточно больших значениях параметра  $\alpha$  (например,  $\alpha \geq \alpha_5$ ) профиль скорости напоминает “стержневое” течение, так как скорость отличается от постоянной лишь в сравнительно узкой области у твёрдой границы (рис. 4г). С увеличением параметров  $\beta$  и  $\lambda$  зависимости  $\gamma(\alpha)$  становятся положительными, а затем монотонными (рис. 1а, б, кривые 4). Кривые зависимости безразмерного расхода от параметра  $\alpha$ ,  $G(\alpha)$ , построенные для различных фиксированных значений  $\beta$  и  $\lambda$ , имеют минимум при  $\alpha = \alpha_5(\beta, \lambda)$  (рис. 1б, 2б и вторая формула (2.7)).

Решения задачи (1.8), принадлежащие ветви II, существуют лишь в той области пространства параметров, где  $\alpha_1(\beta, \lambda) \leq \alpha < 0$ . Здесь безразмерный расход  $G$  – монотонно растущая функция параметра  $\alpha$  (рис. 1б, 2б). Как и в случае  $\lambda = \infty$ , при достаточно малых значениях  $\beta, \lambda^{-1}$  зависимость  $\gamma(\alpha) < 0$  имеет до двух локальных экстремумов, исчезающих по мере увеличения этих параметров (рис. 1а, 2а) [15]. С уменьшением внешнего теплового воздействия на поток жидкости ( $\alpha \rightarrow -0$ ) безразмерный расход и теплоотдача через твёрдую стенку неограниченно растут,  $G \rightarrow \infty, \gamma \rightarrow -\infty$ , (рис. 1, 2), что представляется парадоксальным. Отвод тепла наружу через боковую поверхность трубы вновь приводит к торможению потока вблизи неё (рис. 4д). Особенno отчётливо такое поведение поля скорости проявляется в случае  $\lambda = \infty$ . При  $-1 \ll \alpha < 0$  движение сосредоточено в области небольшого радиуса около оси симметрии, за пределами которой жидкость почти неподвижна (рис. 4е, кривая 3).

Случай  $\lambda = \infty$  отличается тем, что для решений, принадлежащих ветви II, при  $\alpha \rightarrow -0$  плотность безразмерного теплового потока через твёрдую границу  $\gamma$  стремится к постоянному значению ( $\gamma \rightarrow -6$ ) независимо от величины параметра  $\beta$  (рис. 2а, кривая 4) [15]. При этом расход неограниченно растёт, так как  $G = \gamma/\alpha$ . Убедиться в этом можно следующим образом. Полагая, что  $-1 < \alpha < 0$ , в (1.8) (слагаемые сомножителем  $\lambda^{-1}$  отброшены) можно принять  $I_1(\alpha\xi) \approx \alpha\xi/2$ . Получившаяся задача имеет решение

$$\theta_* = 3 \ln \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon + \xi^2}, \quad \frac{\alpha\beta}{96} = -\frac{\varepsilon}{(\varepsilon + 1)^3}. \quad (2.8)$$

Здесь  $\varepsilon > 0$  – новый параметр. Решение (2.8) удовлетворяет двум первым граничным условиям (1.8), а последнее условие  $\theta''(1) + \theta'(1) = -12\varepsilon(\varepsilon + 1)^{-2}$  выполняется в двух предельных случаях:  $\varepsilon \rightarrow +\infty, \varepsilon \rightarrow +0$ . Первый случай соответствует ветви решения I, второй – ветви II. Ветви смыкаются в точке минимума правой части второго выражения (2.8) при  $\varepsilon = 1/2, \alpha\beta = -128/9$ . Последнее соотношение нельзя использовать как количественную связь между критическими значениями параметров, по достижении которых решение задачи перестаёт существовать, но качественно (2.8) верно описывает исчезновение трения.

Безразмерная плотность теплового потока через твёрдую границу равна  $\gamma = \theta'(1) = -6/(\varepsilon + 1)$ , следовательно,  $\gamma \rightarrow -6$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$  ( $\alpha \rightarrow -0$ ) для любого фиксированного  $\beta$ , что согласуется с результатами численных расчётов [15] (рис. 2а, кривая 4).

Для того чтобы последнее граничное условие (1.8) выполнялось точнее можно рассмотреть аддитивную поправку  $\Theta(\xi, \varepsilon)$  к (2.8). Для решений, относящихся к ветви I,  $\Theta(\xi, \varepsilon)$  удобно представить в виде ряда по натуральным степеням  $\varepsilon^{-1}$ , то есть

$$\theta = \theta_* + \varepsilon^{-1}\Theta_1 + \varepsilon^{-2}\Theta_2 + \dots = 3 \ln \frac{1 + \varepsilon^{-1}}{1 + \varepsilon^{-1}\xi^2} + 3(\varepsilon^{-1} - 2\varepsilon^{-2})(\xi^2 - 1) + \dots$$

В результате  $\theta''(1) + \theta'(1) \sim -12\varepsilon^{-3}$  ( $\varepsilon \rightarrow +\infty$ ).

Если для решений, принадлежащих ветви II, искать поправку в виде

$$\Theta(\xi, \varepsilon) = \varepsilon\Theta_1 + \varepsilon^2\Theta_2 + \varepsilon^3\Theta_3 + \dots,$$

то оказывается, что, начиная с  $\Theta_2$ , все коэффициенты сингулярные при  $\xi = 0$ . Это связано с тем, что точка  $(\xi, \varepsilon) = (0, 0)$  особая для решения (2.8) в отличие от регулярной точки  $(\xi, \varepsilon) = (0, +\infty)$ . Поэтому,

ограничиваясь лишь линейным по  $\epsilon$  слагаемым, можно написать

$$\theta \approx 3 \ln \frac{\epsilon + 1}{\epsilon + \xi^2} + 3\epsilon (\xi^2 - 1), \quad \delta \text{Re}_w \approx \frac{\beta}{8} (\epsilon + 1)^3 \left[ \frac{1}{(\epsilon + \xi^2)^2} - 1 \right]. \quad (2.9)$$

Приближённое решение (2.9) для ветви II, как и (2.5) для ветви I, близки к результатам численных расчетов, в том числе, при  $a$  несколько больших единицы (рис. 4e, штрихпунктирные кривые).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задача о стационарном осесимметричном течении Пуазейля жидкости с коэффициентом динамической вязкости, зависящим от температуры по степенному закону, сводится к трёхпараметрической краевой задаче для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка. Течение с экспоненциальной зависимостью коэффициента вязкости от температуры является его предельным случаем при (бесконечно) больших значениях показателя степени.

В случае понижения температуры боковой поверхности трубы в направлении от входного сечения к выходному, тепловой поток через твёрдую стенку оказывается направленным наружу. При этом решение задачи существует лишь в ограниченной области значений параметров. Каждой точке внутри этой области соответствуют два решения, принадлежащие двум разным ветвям, смыкающимся на границе области существования. По-видимому, физический смысл имеют лишь решения, принадлежащие ветви, переходящей в изотермическое течение Пуазейля при уменьшении внешнего теплового воздействия.

В случае роста температуры боковой поверхности трубы вниз по потоку, характер теплообмена через твёрдую границу зависит от соотношений величин трёх параметров задачи. Режимам с отводом тепла от потока жидкости соответствует лишь ограниченная область пространства параметров. Точкам за её пределами соответствуют решения, описывающие течения с поглощением тепла жидкостью.

Независимо от режима теплообмена на границе скорость жидкости максимальна на оси симметрии течения и монотонно убывает до нуля на твёрдой границе. Отвод тепла через боковую границу способствует торможению потока возле неё. Подвод тепла извне делает профиль скорости более “наполненным”, вплоть до формирования почти однородного течения с тонким пограничным слоем у боковой поверхности тубы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (тема № 121031700169-1).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Евдокимов И.Н., Елисеев Н.Ю. Молекулярные механизмы вязкости жидкости и газа. Ч. 1. М.: РГУ нефти и газа им. И.Н. Губкина, 2005. 59 с.
2. Kulikov Yu. M., Son E.E. Fluid flow with abrupt viscosity – temperature dependence // Hight Temp. 2014. V. 52. № 5. P. 723–729.
3. Регнер C.A. Влияние теплового эффекта на вязкое сопротивление в установившемся одномерном течении капельной жидкости // Прик. мат. и мех. 1958. Т. 22. В. 3. С. 414–418.
4. Каганов С.А. Об установившемся ламинарном течении несжимаемой жидкости в плоском канале и круглой цилиндрической трубе с учётом теплоты трения и зависимости вязкости от температуры // Прик. мех. и тех. физ. 1962. № 3. С. 96–99.
5. Худяев С.И. Об одном классе интегрируемых уравнений в задачах горения и гидродинамики // Мат. моделирование. 1995. Т. 7. № 1. С. 35–60.
6. Найдёнов В.И. Об автомодельности одной задачи конвективного теплообмена // Прик. мех. и тех. физ. 1974. № 5. С. 152–153.
7. Аристов С.Н. Стационарное течение несжимаемой жидкости с переменной вязкостью // Доклады РАН. 1998. Т. 359. № 5. С. 625–628.
8. Найдёнов В.И., Полянин А.Д. О некоторых нелинейных конвективно-тепловых эффектах в теории фильтрации и гидродинамике // Доклады АН СССР. 1984. Т. 279. № 3. С. 575–579.

9. Аристов С.Н., Зеленина В.Г. Влияние теплообмена на пуазейлевское течение с переменной вязкостью // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 2. С. 75–80.
10. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука. 1989. 320 с.
11. Поляков А.Ф. Установившееся вязко-термогравитационное течение капельной жидкости и теплообмен в вертикальной полости при асимметричных тепловых условиях // Термофиз. выс. темп. 2014. Т. 55. В. 1. С. 78–83.
12. Хорин А.Н., Конюхова А.А. Течение Куэтта горячего вязкого газа // Вестн. Сам. гос. тех. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. № 2. С. 365–378.
13. Брутян М.А., Ибрагимов У.Г. Автомодельное несимметричное течение вязкого газа в клине // Прик. мат. и мех. 2022. Т. 86. В. 5. С. 741–752.
14. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М.: Наука. 1968. 344 с.
15. Князев Д.В. Течение Пуазеля термовязкой жидкости под действием продольных градиентов давления и температуры // Пермские гидродинамические научные чтения. Сборник докладов. Пермь. 2023. 510 с. <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/sborniki/permskie-gidrodinamicheskie-nauchnye-uchteniya-2023.pdf>.

## AXISYMMETRIC POISEUILLE FLOW WITH TEMPERATURE-DEPENDENT VISCOSITY UNDER PRESSURE AND TEMPERATURE GRADIENTS

D.V. Knyazev<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>*Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch  
of the Russian Academy of Sciences, Perm, Russia*

*\*e-mail: dvk@icmm.ru*

**Abstract**—The study of steady-state axisymmetric Poiseuille flow of a Newtonian fluid induced by streamwise pressure and temperature gradients in the case of the dynamic viscosity coefficient dependent on the temperature is reduced to finding solutions to a three-parameter boundary-value problem for a third-order ordinary differential equation. In the domain of the parameter space corresponding to negative axial temperature gradients, there exist two branches of solutions describing flows accompanied by heat removal from the fluid. When the branches meet, they form a boundary in the phase space beyond which no solutions to the Poiseuille-type problem exist. One of the branches can be continued into the domain of non-negative values of the streamwise temperature gradient and contains an isothermal Poiseuille solution. Along this branch, curve of the flow rate as a function of the dimensionless axial temperature gradient has a minimum in the domain of positive values of the latter. In this part of the parameter space, the heat exchange regime with the external medium depends on the relation between all three dimensionless numbers of the problem. The heat exchange regime affects the nature of flow, slowing down the flow near the rigid wall during heat transfer, and forming a more filled velocity profile when heat is absorbed by fluid.

**Keywords:** Poiseuille flow, temperature dependence of viscosity, branching of solutions

## ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ БАЛАНС РЕЖИМОВ МИКРОВЗРЫВНОЙ ФРАГМЕНТАЦИИ ДВУХЖИДКОСТНЫХ КАПЕЛЬ

© 2024 г. Д. В. Антонов<sup>a,\*</sup>, Р. М. Федоренко<sup>a</sup>, Д. Н. Ковалев<sup>a</sup>, П. А. Стрижак<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Томск, Россия

\*e-mail: dva14@tpu.ru

Поступила в редакцию 01.10.2024 г.

После доработки 11.10.2024 г.

Принята к публикации 11.10.2024 г.

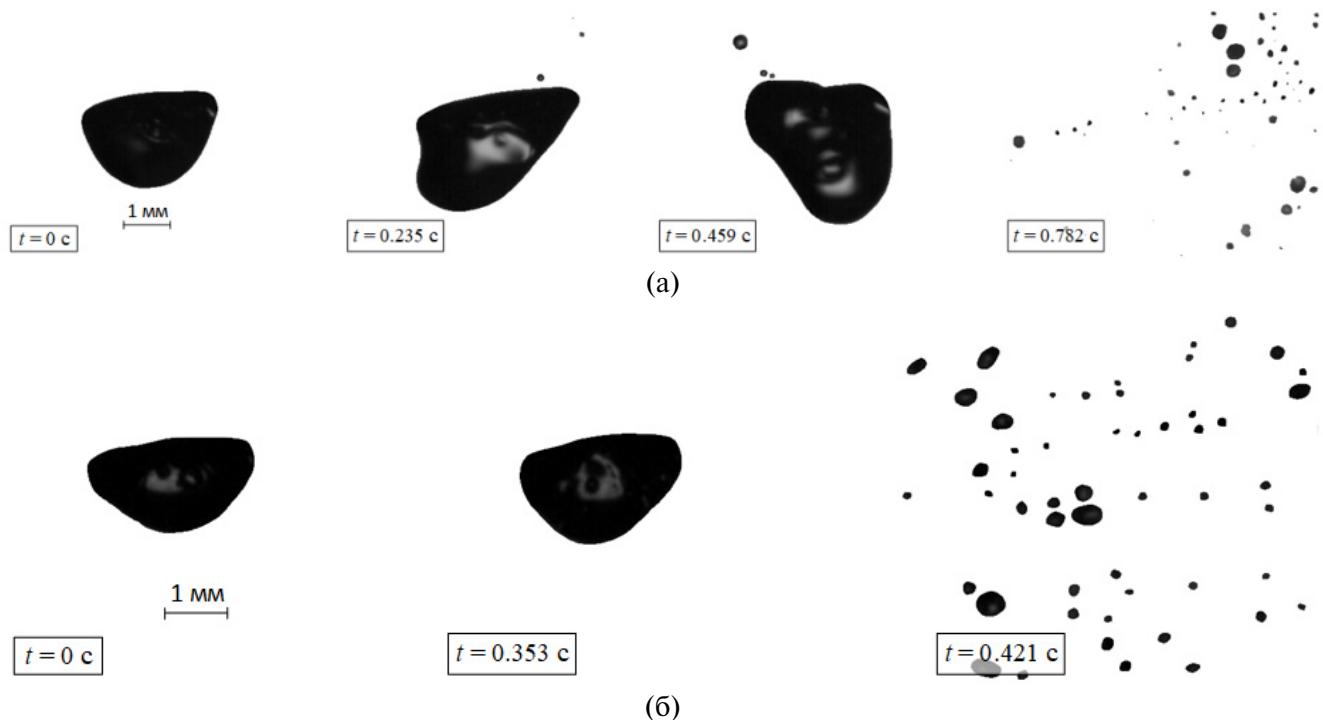
Приведены результаты энергетического анализа режимов (паффинг и микровзрывы) фрагментации двухжидкостных капель типа ядро-оболочка. Показано, что с помощью классического энергетического подхода к описанию гидродинамических процессов можно спрогнозировать критические (необходимые и достаточные) условия для реализации режимов фрагментации и их последствия. В отличие от силового подхода возможна оценка дискретных энергий, затрачиваемых на испарение, прогрев, фрагментацию, вязкую диссипацию и сопротивление при движении фронта фрагментации.

**Ключевые слова:** паффинг, микровзрыв, энергетический баланс, двухжидкостная капля, ядро, оболочка

**DOI:** 10.31857/S1024708424060031, **EDN:** FEOOVN

В связи с обоснованием возможности практического применения интенсивного вторичного дробления двухжидкостных капель в режимах паффинга и микровзрыва в энергетике, автомобильной промышленности, авиации появился целый ряд работ, посвященных исследованиям критических условий для реализации этих процессов [1, 2] и их последствий [3, 4]. Режимы паффинга и микровзрыва реализуются вследствие интенсивного подвода тепла к двухжидкостным каплям, в которых в качестве дисперсной фазы выступает легколетучий низкокипящий компонент (например, вода, фреоны, кислоты, эфиры, спирты), а в качестве несущей – высококипящий компонент (например, углеводородные топлива, жидкие металлы) [5–7]. В зависимости от физико-химических свойств дисперсной и несущей среды, а также условий интенсивного подвода тепла к двухжидкостным каплям и их формы, регистрируются разномасштабные последствия фрагментации. Существенно отличаются размеры, скорости и траектории движения вторичных фрагментов. При анализе диапазонов изменения совокупности этих параметров, как правило, выделяют два ключевых режима фрагментации [3, 4]: паффинг как локальное вскипание капли с частичным отрывом жидкостных фрагментов от ее поверхности и микровзрыв как полный распад перегретой до метастабильного состояния капли с формированием аэрозольного облака. Также применяются подходы, например, [8] с выделением дополнительных режимов “оптимальный по длительности и масштабам фрагментации микровзрыв”, “формирование парового пузыря в форме большого шара перед фрагментацией”, “интенсивное высвобождение пара”, “формирование парового пузыря в форме большого шара и интенсивное высвобождение пара” и “вспенивание”. Все выделенные режимы определяются по видеокадрам, полученным в процессе съемки быстропротекающих процессов (рис. 1).

Известно, что интенсивность фрагментации, с точки зрения формирования минимальных размеров вторичных капель, повышается с ростом соотношения сил поверхностного натяжения и динамической вязкости, соответственно, числа Лапласа [9]. Силы поверхностного натяжения позволяют сдерживать преждевременный распад двухжидкостных капель с последующим достижением критических условий дробления и формированием мелкодисперсного аэрозоля. Благодаря такому сдерживанию в капле накапливается избыточная энергия, которая приводит к разномасштабным последствиям фрагментации.



**Рис. 1.** Типичные видеокадры процессов микровзрывной фрагментации двухжидкостных капель: (а) – паффинг ( $T_g = 1070 \pm 20$  К;  $R_d = 1.25 \pm 0.05$  мм; рапсовое масло 90 об.%, вода 10 об.%); (б) – микровзрыв ( $T_g = 1070 \pm 20$  К;  $R_d = 1.40 \pm 0.05$  мм; дизельное топливо 90 об.%, вода 10 об.%).

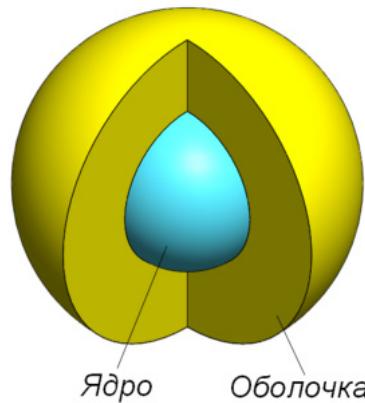
В 1686 г. В. Лейбниц предложил энергетический подход к описанию процессов в механике жидкости, газа и плазмы [10]. Его идеи были развиты Д. Бернуlli, который ввёл понятие “гидродинамика” при описании течений [11]. Пока не сформированы представления о том, как накопленная в двухжидкостной капле энергия влияет на режимы фрагментации в результате интенсивного теплового воздействия. Это мотивировало проведение настоящего исследования.

Целью настоящей работы является оценка энергетического баланса режимов паффинга и микровзрыва двухжидкостных капель при их интенсивном прогреве, испарении и фрагментации.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

По мере интенсивного прогрева двухжидкостных капель типа ядро-оболочка (рис. 2) в дисперсной фазе накапливается избыточная энергия, кратная энталпии перегрева (величина достижимого перегрева, умноженная на удельную теплоемкость  $\Delta T \cdot C$ ). В рамках теории сплошной среды энергетику распада двухжидкостной капли определяют термодинамические и кинетические параметры, в состав которых входят внутренняя и свободная энергии, энталпия и свободная энталпия – потенциал Гиббса, их производные – термодинамические параметры: плотность, давление, температура, энтропия, коэффициент поверхностного натяжения, концентрация растворимых веществ, химический потенциал и другие, а также кинетические коэффициенты, характеризующие вязкость, температуропроводность и диффузию [12].

Для микровзрывного распада системы из двух жидкостей важными гидродинамическими параметрами являются текучесть (способность приходить в движение под действием бесконечно малых сил), необратимый переход энергии внутреннего перегрева низкокипящих жидкостей в компоненты энергий после фрагментации, связанные с преодолением внешних сил (преимущественно поверхностного натяжения), движения фронта фрагментации, формирования вторичных капель и др. До момента фрагментации обмен энергией между греющей средой и двухжидкостной каплей под действием диффузионных (тепловых и концентрационных) процессов происходит довольно медленно – времена прогрева  $\tau_1 = R_d^2/a_d \sim (10^{-3}–10)$  с). Вследствие механического переноса вещества фронт фрагментации движется с звуковыми скоростями и регистрируется режим паффинга – характерные времена



**Рис. 2.** Схема иллюстрации двухжидкостной капли с выделенными ядром и оболочкой.

разрыва свободной поверхности  $\tau_p = \delta_f/U_d \sim (10^{-8}-10^{-4}$  с). А в случае, если фронт фрагментации движется под действием атомно-молекулярных взаимодействий со скоростями выше скорости звука, то это сопровождается акустическими возмущениями в форме “хлопка” – характерные времена  $\tau_{me} = \delta_f/U_d \sim (10^{-12}-10^{-8}$  с). После микровзрыва снова происходит переход к механическому переносу вещества (перемещению вторичных капель в газовой среде) с значительно большими характерными временами. Далее реализуется переход к диффузионной стадии прогрева и испарения, но уже не родительской капли, а вторичных фрагментов. Таким образом, реализуется каскадная фрагментация. Сверхбыстрые скорости высвобождения энергии достигаются при высвобождении доступной потенциальной энергии  $dG = \sigma dS_f$ , сосредоточенной в приповерхностном слое толщиной порядка  $10^{-6}$  см [12], а также химической энергии при протекании реакций и изменении концентраций веществ  $\mu_i dS_i$ . Наличие процессов, локализованных на малых масштабах, приводит к формированию тонких нестабильных структур при формировании вторичных капель. Временные масштабы составляют от  $10^{-2}$  до  $10^{-12}$  с. Верхние границы соответствуют макроскопическим процессам, а нижние – атомно-молекулярным. Широкий диапазон временных масштабов при фрагментации двухжидкостной капли свидетельствует о наличии как медленных механических, так и быстрых атомно-молекулярных процессов, способствующих высвобождению доступной потенциальной поверхности и других компонентов внутренней энергии. Баланс энергий в общем случае записывается в виде выражения:

$$dG = -sdT + VdP + \mu_i dS_i + \sigma dS_f.$$

Для исследования процессов микровзрывной фрагментации двухжидкостных капель использовались типичные для различных энергетических и топливных технологий жидкости: дизельное топливо, керосин, рапсовое масло, вода. Концентрация горючего компонента при проведении экспериментов составляла 90 об.%. Выбор жидкостей, а также их концентраций обусловлен тем, что для данных топливных композиций зарегистрированы условия устойчивой реализации микровзрыва и паффинга в широком диапазоне температур (400–800 К) и начальных размеров исходных капель (0.5–1 мм) [13]. В табл. 1 представлены основные свойства жидкостей (на основе данных [14]), использованных в проведенных экспериментах при их начальной температуре 300 К.

Методика генерации капель аналогична использованной в [15]. Применились два электронных дозатора “Ленпипет Новус” (шаг варьирования генерируемого объема 0.1 мкл). На первом этапе формировалась капля воды заданного объема и подвешивалась на держатель. Далее формировалась капля горючего компонента, которая растекалась по поверхности капли воды, образуя на ее поверхности пленку толщиной 0.05–0.5 мм [15]. Толщина пленки горючего компонента зависела от генерируемого объема капли. Таким образом, формировались ядро – вода и оболочка – топливо. Выбор такой схемы формирования двухжидкостных капель (горючая жидкость/вода) обусловлен тем, что в технологиях сжигания эмульгированных топлив капельки воды зачастую распределены в объеме горючей жидкости и объединяются в одну общую каплю в процессе нагрева [15].

**Таблица 1.** Основные свойства жидкостей (на основе данных [14]), использованных в проведенных экспериментах при их начальной температуре около 300 К

Жидкость	$T_b$ , К	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$C_p$ , Дж/(кг·К)	$\lambda$ , Вт/(м·К)	$\eta$ , мПа·с	$\sigma$ , Н/м
Вода	373	998.2	4182	0.599	1.004	0.072
Дизельное топливо	513	878.7	1802	0.101	2.442	0.029
Керосин	453	727.1	2209	0.133	0.814	0.023
Рапсовое масло	493	868.9	2111	0.115	4.737	0.031

Экспериментальная методика аналогична, использованной в работе [16]. В качестве нагревательной системы использовалась трубчатая муфельная печь, которая располагалась вертикально. Диапазон варьируемых температур – от 293 до 1523 К. Сверху на выходе муфельной печи устанавливался металлический теплоизолированный цилиндр (толщина стенки 10 мм, температура внешней стенки не более 333 К) для поддержания постоянной температуры на выходе муфельной печи. В цилиндре выполнены отверстия для ввода капель в зону нагрева, регистрации процессов распада, освещения капель светодиодным прожектором. Исследуемые капли вводились в область регистрации с помощью координатного механизма, на конце которого находился держатель, представляющий собой никромовую проволоку с диаметром 0.2 мм. В зависимости от исследуемого процесса влияние держателя проявляется по-разному и тем больше, чем больше характерное время. При изучении процессов испарения и горения однородных капель [17–19] без их взрывного распада [18] этот фактор может оказывать существенное влияние. При этом характерные времена процессов испарения, зажигания и достижения условий микровзрывной фрагментации существенно различаются (более чем в 5 раз). В случае достижения критических условий распада, влияние держателя на процесс нагрева капли минимально. Существует ряд опубликованных работ, в которых считается, что при диаметре держателя 0.1 ~ 0.2 мм его влияние на процессы прогрева, испарения, горения и распада незначительно [20–22], при коэффициенте теплопроводности держателя ниже 80 Вт/(м·К), влиянием данного фактора можно пренебречь [18]. Теплопроводность никромовой проволоки, которая использовалась в данном исследовании, составляет 22.5 Вт/(м·К) [23], поэтому она не оказывает существенного влияния на микровзрывную фрагментацию. Этот тип держателя был выбран потому, что никромовая проволока оказывает наименьшее влияние на нагрев, испарение и фрагментацию двухжидкостных капель по сравнению с другими материалами (керамикой, фосфором, железом, сталью и т.д.) [23]. Температура газовоздушной среды регистрировалась с помощью системы, состоящей из комплекса сбора данных National Instruments и малоинерционных термопар типа ТХА с погрешностью измерений температуры менее чем ±3 К. Калибровка системы измерения температуры газовоздушной среды производилась в нескольких сечениях потока на разном расстоянии от выходного отверстия муфельной печи.

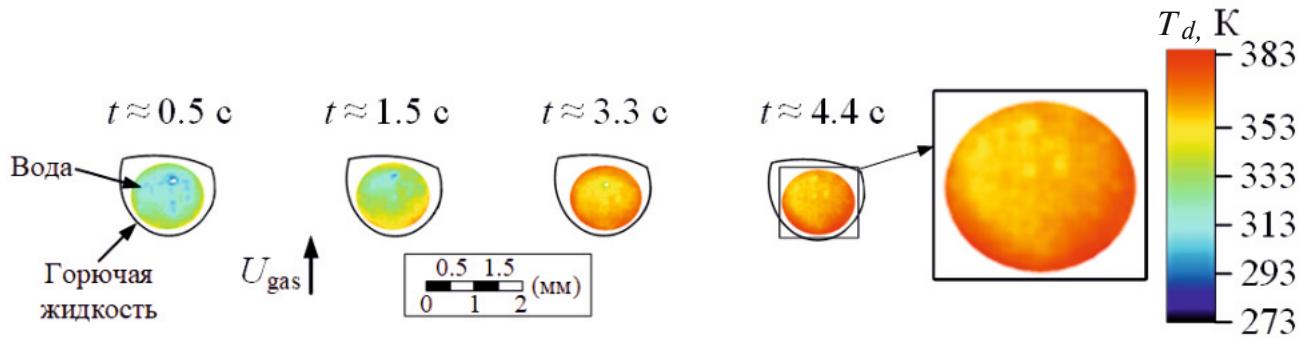
Исследуемые капли располагались на расстоянии 3–4 см от выходного отверстия муфельной печи, при котором температура в области регистрации оставалась постоянной (изменения не более 15 К [24]). Область регистрации подсвечивалась с помощью светодиодного прожектора (для реализации метода теневой съемки). Характеристики процессов прогрева, испарения и фрагментации капель регистрировались с помощью высокоскоростной камеры Phantom Miro M310. Частота съемки при проведении экспериментов составляла 10<sup>4</sup> кадр/с при разрешении 512 × 512 пикселей. При обработке изображений регистрировался режим распада исходной капли, размеры исходных капель в процессе нагрева ( $R_d$ ) и скорости движения фронта фрагментации в момент распада ( $U_d$ ). Систематические погрешности определения размеров и скоростей не превышали ±0.036 мм и 0.04 м/с, соответственно.

Для регистрации температуры воды в неоднородных каплях жидкостей (горючая жидкость/вода) был использован метод плоскостной лазерно-индукционной флуоресценции (PLIF) [24]. Для реализации метода PLIF использовались: высокоскоростная видеокамера, макрообъектив, светофильтр для нейтрализации избыточного лазерного излучения, флуоресцентный краситель, непрерывный лазер, коллиматор для формирования лазерного ножа с варьируемым углом раскрытия, персональный компьютер с ПО Davis. В экспериментах в качестве флуорофора использовался Rhodamine B (по аналогии с [25]). Данный краситель (Rhodamine B) имеет плохую растворимость в типичных нефтепродуктах и горючих жидкостях. Это позволяло проводить регистрацию температурного распределения вблизи границы горючая жидкость/вода. В процессе проведения эксперимента капля рассекалась по

оси симметрии (через центр масс) лучом непрерывного лазера. Полученные видеокадры с изображением капли регистрировались высокоскоростной видеокамерой и обрабатывались с применением ПО Davis. Толщина лазерного ножа составляла 0.5 мм. Обеспечивалась минимальная постоянная плотность лазерного излучения в измерительной области. При больших значениях толщины лазерного ножа последний мог оказывать существенное влияние на характеристики прогрева капли. Эксперименты по регистрации температуры воды в составе двухжидкостных капель включали два этапа [24]. Первый – температурная калибровка измерительной системы с применением малоинерционных термопар и капель воды с примесью флуорофора Rhodamine B. Второй – регистрация температурного поля двухжидкостных капель в процессе нагрева. Первый этап заключался в получении изображений при заданных постоянных во всей измерительной области (во всем объеме капли) температурах воды. Измерения проводились не менее чем для 20–30 значений температур газовой среды в диапазоне от 300 К до 1200 К с целью получения калибровочной кривой. Для калибровки системы в капли вводились миниатюрные малоинерционные термопары (платина-платинородиевая, диаметр спая 0.05 мм, инерционность 0.01 с) таким образом, чтобы ее спай размещался в центре масс капли воды. Капля с размещенной в ней миниатюрной термопарой вводилась в зону нагрева. При идентичных начальных условиях проводились от 3 до 5 экспериментальных серий. Каждая серия включала от 100 до 1000 видеокадров с изображением капли в процессе прогрева и испарения (в течение всего времени существования). Полученная в экспериментах калибровочная кривая представляла зависимость температуры от светимости флуорофора Rhodamine B в единицах яркости. Систематическая погрешность определения температуры  $T_d$  с использованием разработанного подхода не превышала 2–3 °C.

Двухжидкостные капли неоднородны по температуре и составу, а также стратифицированы в поле массовых сил. Типичные распределения температуры ядра в виде воды и представлены на рис. 3. Выделены области оболочки и ядра. В процессе интенсивной фрагментации двухжидкостных капель формируются протяженные анизотропные структуры, вид которых зависит от физико-химических свойств греющей среды и исследуемых жидкостей, геометрии капель. Области отрыва вторичных капель определяют положение областей высокой скорости диссипации энергии, уровня завихренности, концентрации компонентов и тонкую пространственную структуру течений в целом [26].

На рис. 4 представлена физическая модель процесса микровзрывной фрагментации двухжидкостной капли. На первом этапе исследуемая двухжидкостная капля с начальной температурой  $T_0$  нагревается до достижения условий микровзрывной фрагментации. В процессе нагрева температурное поле водяного ядра становится существенно неоднородным. Нагрев протекает от границы раздела вода/горючая жидкость к центру капли. Физический механизм реализации микро-взрывной фрагментации двухжидкостных капель заключается в достижении на границе раздела компонентов температуры нуклеации воды  $T_N$  [27]. Жидкий горючий компонент имеет более высокую температуру кипения, это позволяет воде вблизи границы раздела жидкостей перегреваться существенно выше относительно равновесной температуры кипения (373.15 К), т.е. вода переходит в метастабильное состояние. Поскольку граница раздела жидкостей имеет волнобразную структуру, то неоднородности границы раздела выступают в качестве готовых центров нуклеации. В результате внешнего воздействия, как правило, возмущений, возникающих в капле за счет воздействия газового потока, происходит цепная



**Рис. 3.** Типичный пример изменения поля температуры воды в двухжидкостной капле, закрепленной на держателе, в процессе прогрева до достижения условий микровзрывной фрагментации ( $T_g = 600 \pm 10$  К;  $R_d = 0.90 \pm 0.05$  мм; дизельное топливо 90 об.%, вода 10 об.%).

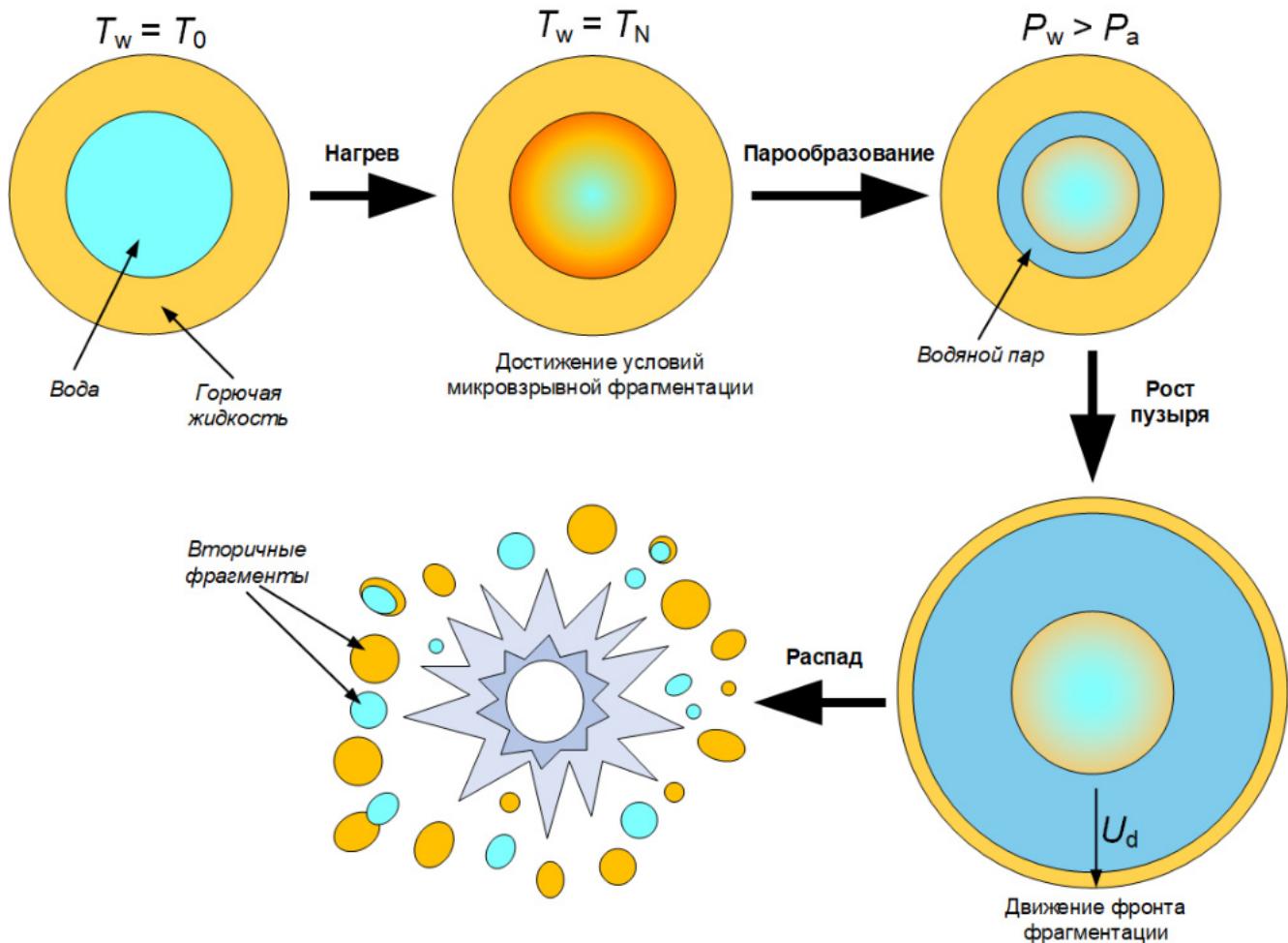


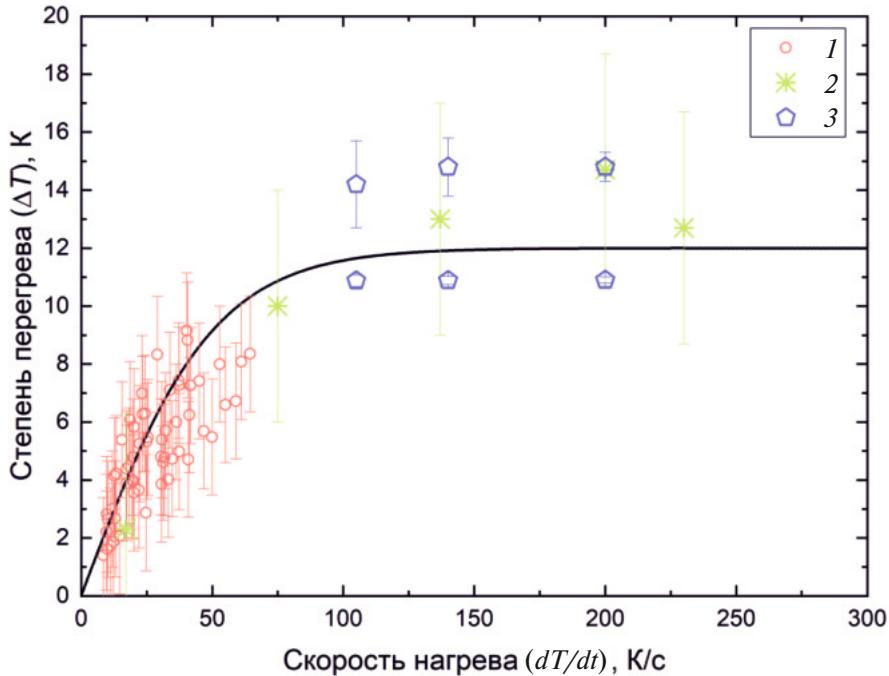
Рис. 4. Физическая модель микровзрывной фрагментации двухжидкостной капли.

активация центров парообразования, т.е. система стремится к стабильному состоянию. В результате чего перегретая вода испаряется, образуя внутри капли паровую прослойку, давление в которой выше атмосферного (за счет более высокой температуры пара). На следующем этапе исследуемая капля быстро увеличивается в размерах за счет расширения паровой прослойки, формируя фронт движения фрагментации. Когда силы давления пара внутри капли превышают внешние силы, действующие на каплю, она распадается с образованием вторичных фрагментов.

## 2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ БАЛАНС

Наиболее интенсивно паффинг и микровзрыв реализуются в системе, состоящей из легкокипящей (воды) и высококипящей (углеводородное топливо) жидкостях. Вода сконцентрирована внутри топливной оболочки. По мере интенсивного прогрева температура водяного ядра возрастает от начальной  $T_0$  до перегрева ( $T_N$ ) выше температуры кипения воды (373.15 K) на 10–15 K (рис. 5).

Влияющими параметрами задачи являются плотности, теплоемкости, теплопроводности, вязкости, теплоты парообразования, скорости испарения несущей и дисперсной фаз, воздуха, поверхностное и межфазное натяжение. Допустим, что двухжидкостная капля изолирована, и все процессы, протекающие в ней сферически симметричные, гравитация отсутствует. Потенциальная поверхностная энергия  $E_\sigma = \sigma S_d$  и кинетическая энергия движения фронта фрагментации  $E_k = m_d \cdot U_d^2/2$ . Доля энергии  $E_\sigma$ , распределенной в приповерхностном слое толщиной порядка размера молекулярного кластера  $\delta_\sigma \sim 10^{-6}$  см и массой  $m_\sigma$ , составляет менее 1% кинетической энергии движения фронта фрагментации  $E_k$ . Плотность поверхностной энергии много больше плотности кинетической энергии  $(E_\sigma \cdot m_d)/(E_k \cdot m_\sigma) \sim 1000$ , которая участвует в формировании тонких течений и вторичных ка-



**Рис. 5.** Зависимость степени перегрева воды от скорости прогрева, построенная по экспериментальным данным: 1 – [24]; 2 – [27]; 3 – [28].

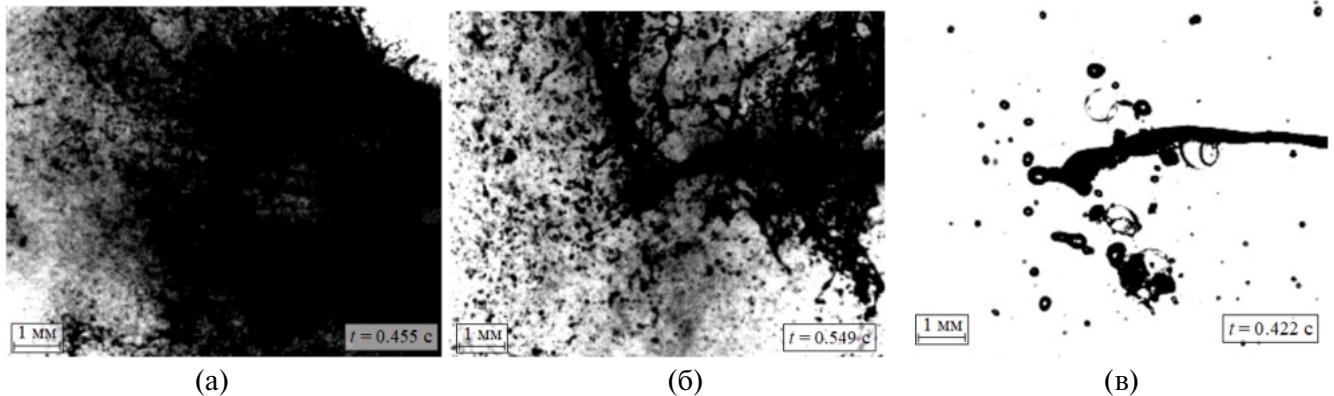
пель. В результате интенсивного прогрева и испарения двухжидкостной капли энергия, запасенная в дисперсной фазе ( $E_d = \gamma_N m_w C_w \Delta T$ , где  $\gamma_N$  – доля перегретой воды), расходуется на фазовый переход вода-водяной пар высокого давления  $E_e = \gamma_e m_w L_w$ , где  $\gamma_e$  – доля испарившейся воды. Так как вода внутри топливной оболочки перегрета выше равновесной температуры кипения (373.15 K) на 10–15 K, то внутри формируется паровой пузырек, давление в котором выше, чем в окружающем газе. Это приводит к его последующему динамичному росту. За счет действия сил поверхностного натяжения и внешнего давления (Лапласово давления) сдерживается мгновенное схлопывание парового пузыря. При превышении сил внутреннего давления пара над внешними силами, действующими на топливную оболочку, происходит распад двухжидкостной капли. На преодоление этих сил затрачивается соответствующая поверхностная энергия  $E_\sigma$ . Оставшаяся энергия переходит в мгновенную кинетическую энергию движения массивов жидкостей в виде вторичных фрагментов  $E_k$ . Далее с учетом затрат энергии на сопротивление газовоздушной среды меняются скорости вторичных фрагментов, баланс энергий переходит в более инерционную стадию механического переноса. Дополнительные, но менее существенные, чем запасенная энергия  $E_d$  и затраченные энергии  $E_e$ ,  $E_\sigma$ ,  $E_k$ , поправки в энергетический баланс могут быть связаны с теплообменом между водяным ядром, топливной оболочкой и газовоздушной средой, которые не учитывались в данной работе.

Выражение для контроля баланса энергий с учетом этого принимает вид:

$$E_d = E_e + E_\sigma + E_k. \quad (2.1)$$

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 6 представлены типичные видеокадры трех случаев фрагментации двухжидкостных капель (рис. 6). Одним из важных аспектов микровзрывной фрагментации является интенсивность распада. Она характеризуется скоростью, с которой происходит этот процесс. Интенсивность определяет количество энергии, высвобождающейся в результате взрыва. В зависимости от состава топливной оболочки интенсивность распада меняется (рис. 6). Из исследованных составов наиболее высокие интенсивности визуально наблюдаются для состава с горючей оболочкой в виде дизельного топлива. Рост интенсивности приводит к увеличению количества вторичных фрагментов и к минимальным размерам этих частиц. В представленных экспериментах скорость движения вторичных капель после



**Рис. 6.** Типичные видеокадры с демонстрацией процессов микровзрывной фрагментации для трех составов двухжидкостных капель: (а) – дизельное топливо/вода,  $S_d = (1.00 \pm 0.05) \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$ ,  $m_d = (3.4 \pm 0.2) \cdot 10^{-6} \text{ кг}$ ,  $U_d = 3.5 \pm 0.2 \text{ м/с}$ ,  $\gamma_e = 0.2$ ,  $m_w = (3.0 \pm 0.2) \cdot 10^{-6} \text{ кг}$ ,  $\gamma_N = 0.2$ ,  $\Delta T \approx 10 \text{ К}$ ; (б) – рапсовое масло/вода,  $S_d = (1.10 \pm 0.05) \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$ ,  $m_d = (7.9 \pm 0.4) \cdot 10^{-7} \text{ кг}$ ,  $U_d = 3.5 \pm 0.2 \text{ м/с}$ ,  $\gamma_e = 0.2$ ,  $m_w = (2.3 \pm 0.1) \cdot 10^{-6} \text{ кг}$ ,  $\gamma_N = 0.2$ ,  $\Delta T \approx 10 \text{ К}$ ; (в) – керосин/вода,  $S_d = (1.00 \pm 0.05) \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$ ,  $m_d = (7.2 \pm 0.4) \cdot 10^{-7} \text{ кг}$ ,  $U_d = 3.3 \pm 0.2 \text{ м/с}$ ,  $\gamma_e = 0.2$ ,  $m_w = (3.1 \pm 0.2) \cdot 10^{-7} \text{ кг}$ ,  $\gamma_N = 0.2$ ,  $\Delta T \approx 10 \text{ К}$ .

распада для всех составов составляет 3.4 м/с. По мере движения фронта фрагментации в газовой среде скорость вторичных фрагментов снижается. В начале микровзрыва скорость составляет порядка 3.5 м/с, через  $t = 0.05$  с скорость падает до 3.3 м/с.

Для видеокадров процессов микровзрывной фрагментации, представленных на рис. 6, на основании экспериментальных данных выполнен расчет значений энергий при распаде в режимах паффинга и микровзрыва. Числовые значения в виде диаграмм распределения энергий представлены на рис. 7. Диапазон значений энергий для всех составов составил от  $3.9 \cdot 10^{-7}$  до 1.4 Дж. Максимальные значения зарегистрированы для энергии фазового перехода вода – водяной пар ( $E_e$ ) в опытах с составом вода/дизельное топливо, а минимальные для потенциальной поверхностной энергии.

В выражении для баланса (2.1) достоверно известна потенциальная энергия перед распадом  $E_\sigma$ . Неопределённости имеются в энергиях  $E_e$ ,  $E_d$  и  $E_k$  вследствие сложно детектируемых в эксперименте долях испарившейся  $\gamma_e$  и перегретой воды  $\gamma_N$ , скорости движения фронта фрагментации  $U_d$ . Из выражения для энергетического баланса (2.1) получена зависимость, связывающая параметры  $\gamma_e$  и  $\gamma_N$  со скоростью движения фронта фрагментации  $U_d$

$$U_d = \sqrt{2 \cdot (\gamma_N m_w C_w \Delta T - \sigma S_d - \gamma_e m_w L_w) / m_d}. \quad (3.1)$$

С использованием выражения (3.1) выполнено параметрическое исследование влияния доли испарившейся  $\gamma_e$  и перегретой  $\gamma_N$  воды на скорость движения фронта фрагментации  $U_d$  в момент распада. Полученные закономерности иллюстрируют области реализации режимов микровзрыва (рис. 8) при степени перегрева  $\Delta T \approx 10 \text{ К}$  и паффинга (рис. 9) при степени перегрева  $\Delta T \approx 5 \text{ К}$ . Для всех исследуемых составов выделена общая закономерность, выражающаяся в том, что с ростом доли перегретой жидкости критические скорости движения фронта фрагментации увеличиваются, а с ростом доли испарившейся жидкости – снижаются. Полученные зависимости отражают критические значения скоростей движения фронта фрагментации, необходимые для распада исходных капель на вторичные фрагменты.

На рис. 8 и 9 показано, что существуют предельные значения  $\gamma_e$  и  $\gamma_N$ , при которых скорость движения фронта фрагментации  $U_d$  стремится к 0, т.е. существует переходная граница, характеризующая предельное соотношение долей перегретой и испарившейся жидкостей. Для исследования зависимости  $\gamma_e$  от  $\gamma_N$  с использованием предположения, что  $U_d = 0$ , выведена формула

$$\gamma_e = \frac{\gamma_N \cdot m_w \cdot C_w \cdot \Delta T - \sigma \cdot S_d}{m_w \cdot L_w}. \quad (3.2)$$

С использованием выражения (3.2) установлено минимальное значение перегрева воды ( $\Delta T \approx 0.0027 \text{ К}$ ), при котором выполняется данное соотношение. Также определены зависимо-

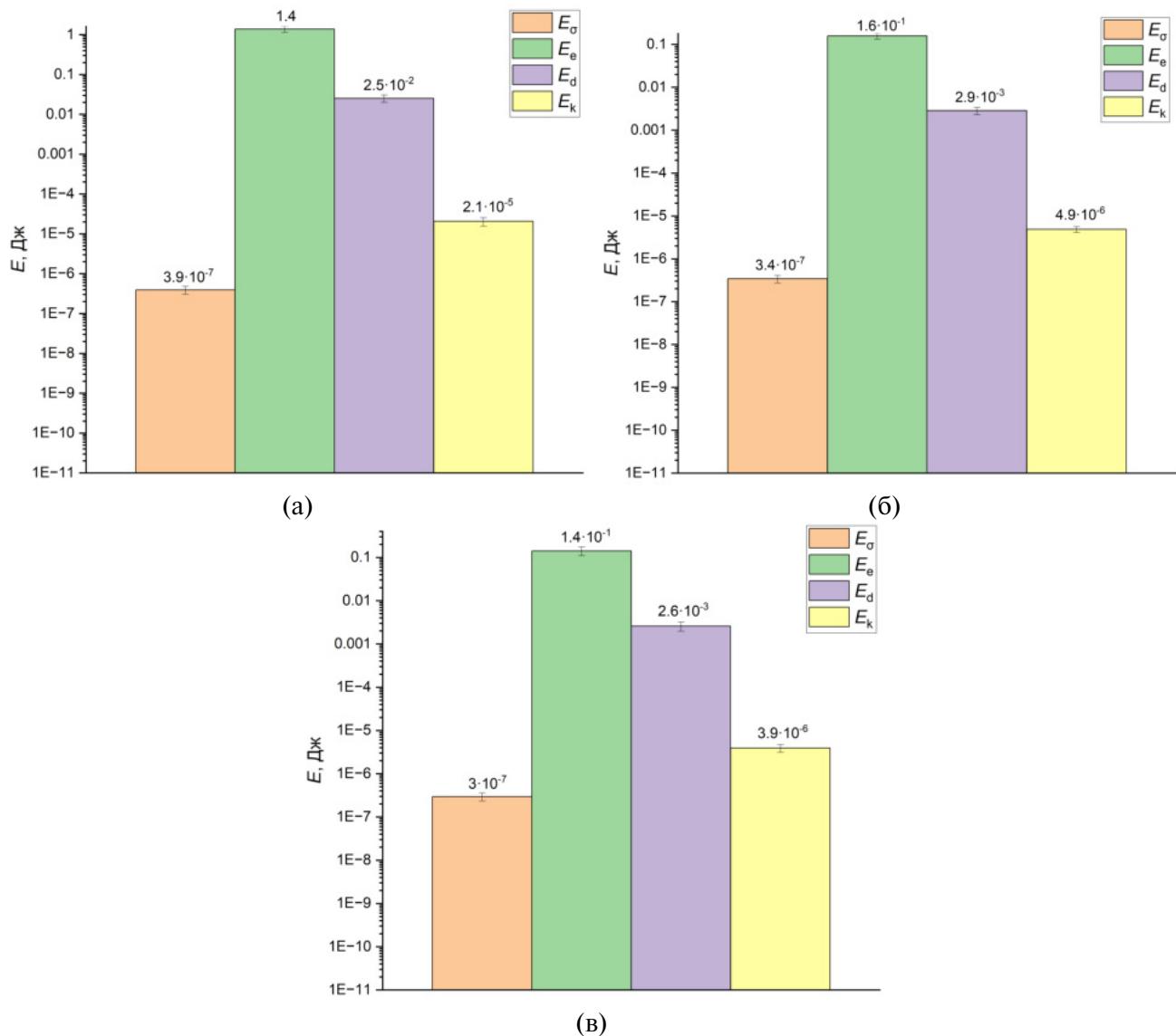


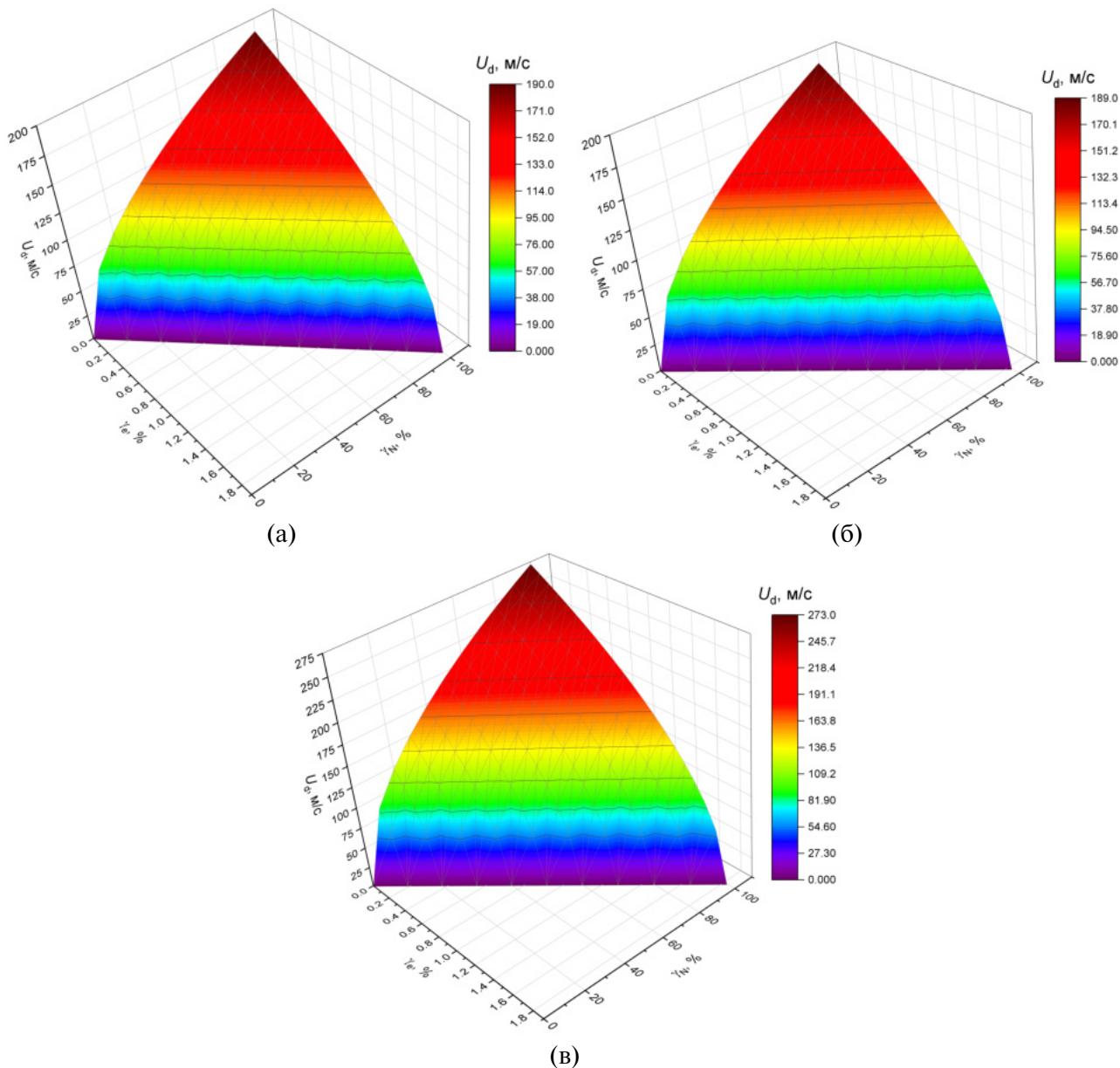
Рис. 7. Диаграмма распределений энергий в момент микровзрыва для трех составов двухжидкостных капель: (а) – дизельное топливо/вода; (б) – рапсовое масло/вода; (в) – керосин/вода.

сти для двух режимов фрагментации двухжидкостных капель (рис. 10): паффинг (степень перегрева  $\Delta T \approx 5$  К) и микровзрыв (степень перегрева  $\Delta T \approx 10$  К). Проведенные расчеты показали, что зависимость между  $\gamma_e$  и  $\gamma_N$  слабо зависит от свойств горючего компонента, отличия рассчитанных значений не превышает 0.026%.

В безразмерном виде полученные результаты построены в виде пространственного поля для иллюстрации зависимости критического числа Вебера  $We = (2R_d \cdot \rho \cdot U_d^2)/\sigma$  от доли испарившейся  $\gamma_e$  и перегретой  $\gamma_N$  воды (рис. 11). Данные зависимости позволяют выполнить оценки необходимых затрат энергии для реализации микровзрывного распада двухжидкостных капель.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлена методика расчета баланса энергий, необходимых и достаточных для реализации режимов паффинга и микровзрыва двухжидкостных капель при их интенсивном прогреве. Определены диапазоны изменения времени процессов прогрева, испарения, интенсивной фрагментации и механического переноса вторичных капель с последующими каскадными эффектами. Определены достижимые скорости фронта фрагментации в диапазоне от 0 м/с и до 273 м/с в зависимости от доли

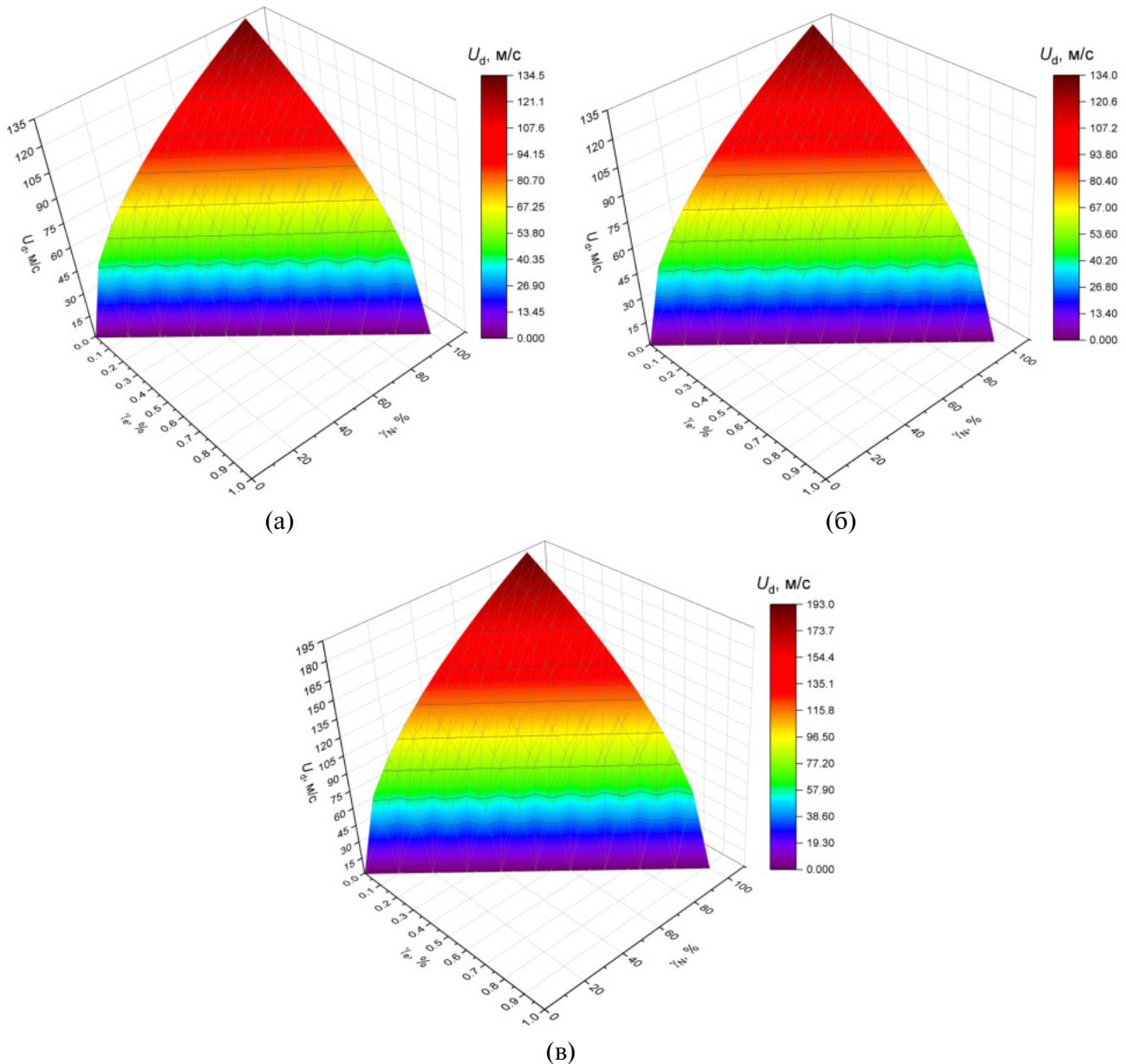


**Рис. 8.** Зависимости скорости движения фронта фрагментации  $U_d$  от параметров  $\gamma_e$  и  $\gamma_N$  при микровзрыве: (а) – рапсовое масло/вода; (б) – керосин/вода; (в) – дизельное топливо/вода.

испаряющейся и перегретой воды. Предложенный баланс и характерные времена процессов валидированы при сравнении с результатами экспериментальных исследований. Получена удовлетворительная корреляция с учетом имеющегося оборудования для регистрации быстропротекающих процессов в лаборатории тепломассопереноса Томского политехнического университета. Установленные закономерности на основе энергетического баланса являются основами для формирования устойчивой фрагментации в энергетике, автомобильной промышленности, авиации.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследования проведены за счет гранта Российского научного фонда (проект №24-79-10031, <https://rscf.ru/project/24-79-10031/>).



**Рис. 9.** Зависимости скорости движения фронта фрагментации  $U_d$  от параметров  $\gamma_e$  и  $\gamma_N$  при паффинге: (а) – рапсовое масло/вода; (б) – керосин/вода; (в) – дизельное топливо/вода.

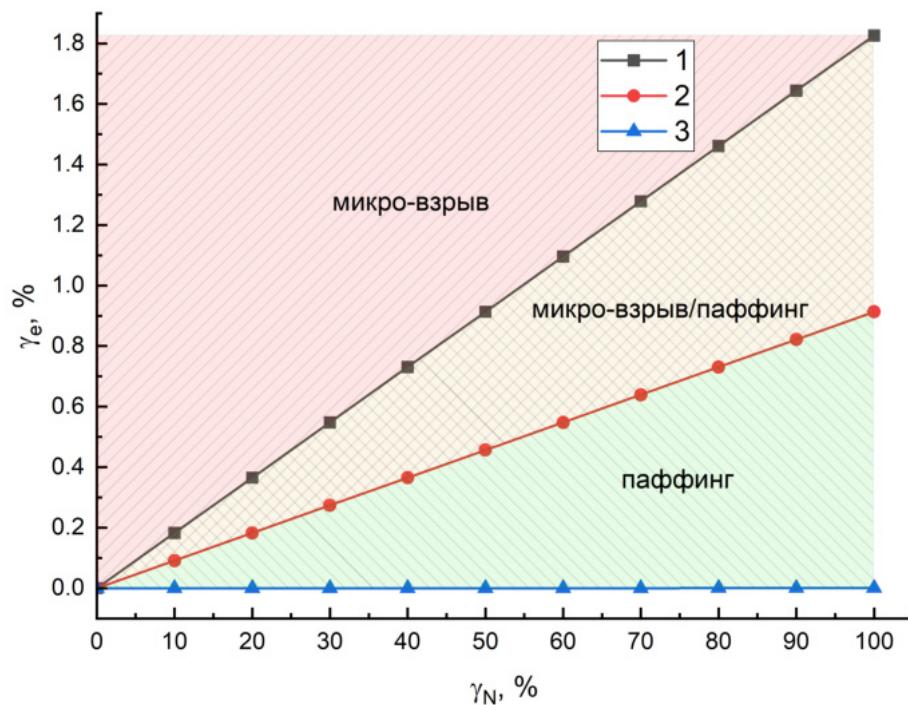


Рис. 10. Зависимости  $\gamma_e$  от  $\gamma_N$  для разных составов двухжидкостных капель: 1–3 – степень перегрева  $\Delta T \approx 10, 5, 0.0027$  К.

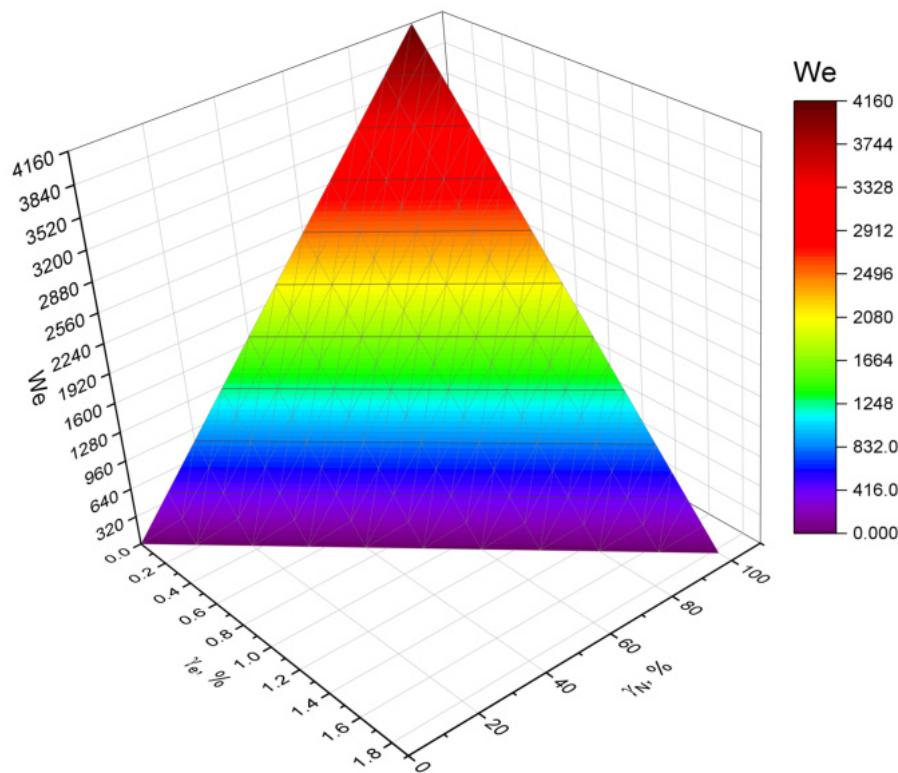


Рис. 11. Зависимости числа Вебера We от параметров  $\gamma_e$  и  $\gamma_N$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Amani A., Jalilnejad E., Mousavi S.M.* Simulation of phenol biodegradation by *RalstoniaEutropha* in a packed-bed bioreactor with batch recycle mode using CFD technique // *J. Ind. Eng. Chem.* 2018. V. 59. P. 310–319.
2. *Lyupa A.A., Morozov D.N., Trapeznikova M.A., Chetverushkin B.N., Churbanova N.G., Lemeshevsky S.V.* Simulation of oil recovery processes with the employment of high-performance computing systems // *Math. Models Comput. Simul.* 2016. V. 8. № 2. P. 129–134.
3. *Horgue P., Soulaine C., Franc J., Guibert R., Debenest G.* An open-source toolbox for multiphase flow in porous media // *Comput. Phys. Commun.* 2015. V. 187. P. 217–226.
4. *Antonov D.V., Piskunov M.V., Strizhak P.A.* Breakup and explosion of droplets of two immiscible fluids and emulsions // *Int. J. Therm. Sci.* 2019. V. 142. P. 30–41.
5. *Antonov D.V., Fedorenko R.M., Strizhak P.A.* Micro-Explosion Phenomenon: Conditions and Benefits // *Energies.* 2022. V. 15. №. 20. P. 7670.
6. *Голубятников А.Н., Украинский Д.В.* О динамике сферического пузырька в неионогенных жидкостях // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 4. С. 52–62.
7. *Губайдуллин Д.А., Панин К.А., Федоров Ю.В.* Акустика жидкости с покрытыми оболочкой каплями при наличии фазовых переходов // Изв. РАН. МЖГ. 2022. № 4. С. 41–51.
8. *Liu C., Cui L., Xu J., Cen L., Xu J., Li P., Xiao T., Cao F.* Achieving optimal micro-explosions in stable emulsions by adding water-soluble polymers // *Chem. Eng. Sci.* 2023. V. 281. P. 119–120.
9. *Антонов Д.В., Вершинина К.Ю., Федоренко Р.М.* Микровзрывная фрагментация двухжидкостных капель на основе таллового масла // Письма в ЖТФ. 2023. Т. 49. №. 14. С. 3–7.
10. *Лейбниц Г.В.* Краткое доказательство примечательной ошибки Декарта... Соч. в 4 том. Т. I. М.: Мысль, 1981. С. 118–125.
11. *Бернулли Д.* Гидродинамика, или записки о силах и движениях жидкостей. Л.: Изд. АН СССР, 1950. 551 с.
12. *Чашечкин Ю.Д.* Теория и метрология аэрогидромеханики // Материалы III Отраслевой конференции по измерительной технике и метрологии для исследований летательных аппаратов, КИМИЛА 2018. 2018. С. 45–76.
13. *Antonov D.V., Strizhak P.A.* Intensification of vaporization and secondary atomization of droplets of fire-extinguishing liquid composition // *Tech. Phys. Lett.* 2020. V. 46. P. 122–125.
14. *Yaws C.L.* Yaws' handbook of thermodynamic and physical properties of chemical compounds. Knovel. 2003. 233 p.
15. *Antonov D.V., Kuznetsov G.V., Strizhak P.A.* Comparison of the characteristics of micro-explosion and ignition of two-fluid water-based droplets, emulsions and suspensions, moving in the high-temperature oxidizer medium // *Acta Astronaut.* 2019. V. 160. P. 258–269.
16. *Антонов Д.В., Федоренко Р.М., Стрижак П.А.* Коллективные эффекты при формировании вторичных фрагментов в результате микровзрывной фрагментации композиционных топлив // Горение взрыв. Т. 15. № 2. С. 22–33.
17. *Chauveau C., Birouk M., Halter F., Gokalp I.* An analysis of the droplet support fiber effect on the evaporation process // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2019. V. 128. P. 885–891.
18. *Wang J., Huang X., Qiao X., Ju D., Sun C.* Experimental study on effect of support fiber on fuel droplet vaporization at high temperatures // *Fuel.* 2020. V. 268. P. 117–407.
19. *Chauveau C., Birouk M., Gokalp I.* An analysis of the d2-law departure during droplet evaporation in microgravity // *Int. J. Multiph. Flow.* 2011. V. 37. P. 252–259.
20. *Liu Y.C., Xu Y., Avedisian C.T., Hicks M.C.* The effect of support fibers on micro-convection in droplet combustion experiments // *Proc. Combust. Inst.* 2015. V. 35. P. 1709–1716.
21. *Zhang Y., Huang R., Huang Y., Huang S., Ma Y., Xu S., Zhou P.* Effect of ambient temperature on the puffing characteristics of single butanol-hexadecane droplet // *Energy.* 2018. V. 145. P. 430–441.
22. *Kang H., Won J., Baek S.W., Kwon S.* Autoignition and combustion characteristics of sodium borohydride-based non-toxic hypergolic fuel droplet at elevated temperatures // *Combust. Flame.* 2017. V. 181. P. 149–156.
23. *Antonov D., Bellettre J., Tarlet D., Massoli P., Vysokomornaya O., Piskunov M.* Impact of holder materials on the heating and explosive breakup of two-component droplets // *Energies.* 2018. V. 11. № 12. P. 3307.

24. Antonov D.V., Volkov R.S., Fedorenko R.M., Strizhak P.A., Castanet G., Sazhin S.S. Temperature measurements in a string of three closely spaced droplets before the start of puffing/micro-explosion: Experimental results and modelling // Int. J. Heat Mass Transf. 2021. V. 181. P. 121837.
25. Vysokomornaya O.V., Piskunov M.V., Strizhak P.A. Breakup of heterogeneous water drop immersed in high-temperature air // Appl. Therm. Eng. 2017. V. 127. P. 1340–1345.
26. Бардаков Р.Н., Васильев А.Ю., Чашечкин Ю.Д. Расчет и измерения конических пучков трехмерных периодических внутренних волн, возбуждаемых вертикально осциллирующим поршнем // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 4. С. 117–133.
27. Sazhin S.S., Bar-Kohany T., Nissar Z., Antonov D., Strizhak P.A., Rybdylova O.D. A new approach to modelling micro-explosions in composite droplets // Int. J. Heat Mass Transf. 2020. V. 161. P. 120238.
28. Su G.-Y., Bucci M., McKrell T., Buongiorno J. Transient boiling of water under exponentially escalating heat inputs. Part I: Pool boiling // Int. J. Heat Mass Transf. 2016. V. 96. P. 667–684.

### ОБОЗНАЧЕНИЯ

$a_d$  – температуропроводность,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  
 $C_w$  – удельная теплоемкость воды,  $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ ;  
 $E_d$  – запасенная энергия метастабильного состояния дисперсной фазы,  $\text{Дж}$ ;  
 $E_e$  – энергия фазового перехода, затрачиваемая на испарение,  $\text{Дж}$ ;  
 $E_k$  – кинетическая энергия движения фронта фрагментации,  $\text{Дж}$ ;  
 $E_\sigma$  – потенциальная поверхностная энергия,  $\text{Дж}$ ;  
 $G$  – потенциальная энергия,  $\text{Дж}$ ;  
 $L_w$  – удельная теплота парообразования воды,  $\text{Дж}/\text{кг}$ ;  
 $m_d$  – масса родительской капли,  $\text{кг}$ ;  
 $m_o$  – масса горючей жидкости,  $\text{кг}$ ;  
 $m_w$  – масса водяного ядра,  $\text{кг}$ ;  
 $P$  – давление,  $\text{Па}$ ;  
 $P_a$  – атмосферное давление,  $\text{Па}$ ;  
 $P_w$  – давление в паровом пузырьке,  $\text{Па}$ ;  
 $R_d$  – радиус родительской капли,  $\text{м}$ ;  
 $S_d$  – площадь поверхности родительской капли,  $\text{м}^2$ ;  
 $S_f$  – площадь поверхности горючего компонента,  $\text{м}^2$ ;  
 $S_i$  – концентрация растворенных веществ,  $\text{кг}$ ;  
 $s$  – энтропия,  $\text{Дж}/\text{К}$ ;  
 $T$  – температура,  $\text{К}$ ;  
 $T_0$  – начальная температура водяного ядра,  $\text{К}$ ;  
 $T_d$  – температура капли,  $\text{К}$ ;  
 $T_g$  – температура газовой среды,  $\text{К}$ ;  
 $T_w$  – температура на границе раздела горючая жидкость/вода,  $\text{К}$ ;  
 $T_N$  – достижимая температура перегрева водяного ядра,  $\text{К}$ ;  
 $t$  – время,  $\text{с}$ ;  
 $U_d$  – скорость движения фронта фрагментации,  $\text{м}/\text{с}$ ;  
 $U_{\text{gas}}$  – скорость движения газовой среды,  $\text{м}/\text{с}$ ;  
 $V$  – объем,  $\text{м}^3$ ;  
 $\gamma_e$  – доля испарившейся воды, %;  
 $\gamma_N$  – доля перегретой воды, %;  
 $\Delta T$  – степень перегрева,  $\text{К}$ ;  
 $\delta_f$  – толщина топливной оболочки,  $\text{м}$ ;  
 $\nu$  – коэффициент динамической вязкости,  $\text{Па}\cdot\text{с}$ ;  
 $\mu_i$  – химический потенциал,  $\text{Дж}/\text{кг}$ ;  
 $\rho$  – плотность,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  
 $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения горючего компонента,  $\text{Н}/\text{м}$ ;  
 $\tau_1$  – время прогрева,  $\text{с}$ ;  
 $\tau_{me}$  – время регистрации акустических возмущений в форме “хлопка”,  $\text{с}$ ;  
 $\tau_p$  – время разрыва свободной поверхности,  $\text{с}$ .

# ENERGY BALANCE OF PUFFING AND MICROEXPLOSION OF TWO-LIQUID DROPLETS

D.V. Antonov<sup>a,\*</sup>, R.M. Fedorenko<sup>a</sup>, D.N. Kovalev<sup>a</sup>, and P.A. Strizhak<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russia*

\*e-mail: dva14@tpu.ru

**Abstract**—The results of energy analysis of the fragmentation regimes (puffing and microexplosion) of two-liquid droplets of the core-shell type are given. It is shown that using the classical energy approach to describe the hydrodynamic processes, it is possible to predict the critical (necessary and sufficient) conditions for the implementation of fragmentation regimes and their consequences. As distinct from the force approach, it is possible to estimate the discrete energies spent on evaporation, heating, fragmentation, viscous dissipation, and resistance during the motion of the fragmentation front.

**Keywords:** puffing, microexplosion, energy balance, two-liquid drop, core, shell

# ДОСТАТОЧНЫЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОМБИНИРОВАННЫХ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СЛОЕ

© 2024 г. Д. В. Георгиевский<sup>a, b, \*</sup>

<sup>a</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>b</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\*e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию 06.07.2024 г.

После доработки 08.10.2024 г.

Принята к публикации 08.10.2024 г.

Исследуется эволюция во времени трёхмерной картины начальных возмущений, налагаемых на нестационарное течение, являющееся комбинацией одномерных  $r\theta$ - и  $rz$ -сдвигов ньютоновской вязкой жидкости в бесконечном по простиранию цилиндрическом слое. Заданы кольцевые и осевые скорости обеих цилиндрических границ, не меняющиеся в возмущённом движении. Приводится формулировка линеаризованной задачи в вариациях скоростей, скоростей деформаций, давления и девиатора напряжений. Для анализа данной задачи развивается метод интегральных соотношений, позволяющий получать в гильбертовом пространстве  $H_2$  достаточные оценки развития возмущений, в частности, устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости. В эти оценки входят как кинематические параметры основного течения, так и гармоники кольцевых и волновые числа осевых возмущений. В случае, когда основное движение в слое стационарно, имеют место экспоненциальные оценки устойчивости.

**Ключевые слова:** ньютоновская вязкая жидкость, цилиндрический слой, сдвиговое течение, возмущение, линеаризация, оценки устойчивости, квадратичный функционал, вариационные неравенства, экспоненциальная устойчивость

**DOI:** 10.31857/S1024708424060043, **EDN:** FENHOU

В линеаризованной теории гидродинамической устойчивости хорошо известна теорема Сквайра [1], позволяющая сводить трёхмерную картину возмущений, налагаемую на стационарное сдвиговое течение ньютоновской вязкой жидкости в плоском слое в случае условий прилипания на обеих границах, к двумерной в плоскости этого течения. Условия данной теоремы весьма жёстки и нарушение хотя бы одного из них делает общее утверждение неверным, причём известны соответствующие контрпримеры, в том числе и экспериментальные [2–4]. Если основное течение происходит не в плоском, а в цилиндрическом слое, то даже в стационарном случае при простом сдвиге ( $r\theta$ -кольцевом или  $rz$ -осевом) переход к возмущениям требует рассмотрение наиболее общей  $r\theta z$ -картины.

Целью работы является получение достаточных интегральных, или энергетических, оценок устойчивости комбинированного сдвигового течения, т. е. комбинации  $r\theta$ - и  $rz$ -сдвигов, вообще говоря, нестационарных в бесконечном по простиранию цилиндрическом слое.

## 1. НЕВОЗМУЩЁННОЕ СДВИГОВОЕ ТЕЧЕНИЕ И ЕГО ПАРАМЕТРЫ

Пусть течение ньютоновской вязкой жидкости с постоянными плотностью  $\rho$  и динамической вязкостью  $\mu$  реализуется в цилиндрическом слое  $\Omega$ :

$$\Omega = \{0 < a < r < b, 0 \leq \theta < 2\pi, -\infty < z < \infty\}, \quad (1.1)$$

где  $(r, \theta, z)$  — цилиндрическая система координат, связанная с осью слоя. На внутренней  $r = a$  и внешней  $r = b$  граничных поверхностях при  $t > 0$  заданы скорости с физическими компонентами  $(v_r, v_\theta, v_z)$ :

$$\begin{aligned} r = a, \quad t > 0 : \quad v_r = 0, \quad v_\theta = V_{\theta a}(t), \quad v_z = V_{za}(t), \\ r = b, \quad t > 0 : \quad v_r = 0, \quad v_\theta = V_{\theta b}(t), \quad v_z = V_{zb}(t). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Выполняются также начальные условия

$$t = 0, \quad x \in \Omega : \quad v_r = 0, \quad v_\theta = u_\theta(r), \quad v_z = u_z(r), \quad (1.3)$$

согласующиеся с граничными условиями (1.2):

$$u_\theta(a) = V_{\theta a}(0), \quad u_\theta(b) = V_{\theta b}(0), \quad u_z(a) = V_{za}(0), \quad u_z(b) = V_{zb}(0).$$

Вектор скорости  $\mathbf{v}(x, t)$ , тензор скорости деформаций  $\mathbf{d}(x, t)$ , давление  $p(x, t)$  и девиатор напряжений  $\mathbf{s}(x, t)$  удовлетворяют в  $\Omega$  записанным в безындексной форме уравнениям движения с массовыми силами  $\mathbf{F}(r, t)$ :

$$-\operatorname{grad} p + \operatorname{Div} \mathbf{s} + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad (1.4)$$

соотношениям Стокса

$$\mathbf{d} = \operatorname{Def} \mathbf{v} \equiv \frac{1}{2} (\operatorname{Grad} \mathbf{v} + (\operatorname{Grad} \mathbf{v})^T), \quad (1.5)$$

физически линейным определяющим соотношениям ньютоновской жидкости

$$\mathbf{s} = 2\mu \mathbf{d} \quad (1.6)$$

и условию несжимаемости

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.7)$$

Поиск решения в  $\Omega$  при  $t > 0$  в виде комбинации двух нестационарных одномерных сдвиговых течений с ненулевыми физическими компонентами  $v_\theta, v_z, d_{r\theta}, d_{rz}, p, s_{r\theta}$  и  $s_{rz}$ , зависящими только от  $r$  и  $t$ , приводит к двум не связанным между собой начально-краевым параболическим задачам для функций  $v_\theta(r, t)$  и  $v_z(r, t)$ . В слое  $\Omega$  при  $t > 0$  эти функции должны удовлетворять уравнениям движения

$$v \left( v_{\theta,rr} + \frac{v_{\theta,r}}{r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + F_\theta = v_{\theta,t}, \quad (1.8)$$

$$v \left( v_{z,rr} + \frac{v_{z,r}}{r} \right) + F_z = v_{z,t}, \quad (1.9)$$

где  $v = \mu/\rho$  — кинематическая вязкость жидкости, а на цилиндрических поверхностях  $r = a$  и  $r = b$  и в начальный момент  $t = 0$  соответствующим граничным (1.2) и начальным (1.3) условиям. Запятая в индексе означает частное дифференцирование по переменным, стоящим после запятой.

После нахождения поля скоростей ненулевые компоненты тензоров  $\mathbf{d}$  и  $\mathbf{s}$ , а также давление  $p$  находятся из соотношений

$$\begin{aligned} d_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( v_{\theta,r} - \frac{v_\theta}{r} \right), \quad d_{rz} = \frac{1}{2} v_{z,r}, \quad p = \rho \int \left( \frac{v_\theta^2}{r} + F_r \right) dr, \\ s_{r\theta} &= \mu \left( v_{\theta,r} - \frac{v_\theta}{r} \right), \quad s_{rz} = \mu v_{z,r}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где давление определяется с точностью до произвольной аддитивной функции времени.

В дальнейшем будем помечать параметры описанного комбинированного сдвигового течения верхним индексом “ $\circ$ ” и считать это течение невозмущённым, или основным. Кроме того обозначим

$$D_{r\theta}(t) = \sup_{a < r < b} |d_{r\theta}(r, t)|, \quad D_{rz}(t) = \sup_{a < r < b} |d_{rz}(r, t)|. \quad (1.11)$$

## 2. ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ ЗАДАЧА В ВОЗМУЩЕНИЯХ

Наложим при  $t \geq 0$  на рассмотренное выше течение трёхмерную картину малых возмущений, так что возмущённое течение будет характеризоваться величинами  $\mathbf{v}^\circ(r, t) + \delta\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ;  $\mathbf{d}^\circ(r, t) + \delta\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$ ;  $p^\circ(r, t) + \delta p(\mathbf{x}, t)$ ;  $s^\circ(r, t) + \delta s(\mathbf{x}, t)$ . Вариации не подвержены: а) границы слоя, а следовательно, и сама область (1.1); б) заданные в (1.2) окружная и осевая скорости границ; в) массовые силы.

В терминах малых возмущений дадим постановку линеаризованной начально-краевой задачи, соответствующей задаче (1.2) – (1.7), вблизи основного течения. Изложение удобно вести, используя не физические компоненты векторов и тензоров, как это сделано, например, в [5], а их ко- и контравариантные компоненты в криволинейной системе координат  $q^i$ , где  $q^1 = r$ ,  $q^2 = \theta$ ,  $q^3 = z$  [6]. Напомним, что ненулевые символы Кристоффеля второго рода, коэффициенты Ламе и компоненты диагональной фундаментальной матрицы в этой системе имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r; \quad H_1 = H_3 = 1, \quad H_2 = r; \\ g_{11} = g_{33} = g^{11} = g^{33} &= 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g^{22} = \frac{1}{r^2}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Замкнутая в  $\Omega$  система уравнений (1.4) – (1.7) после линеаризации в индексной форме запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q^k} (-r \delta p g^{jk} + r \delta s^{jk}) - (\delta p g^{jk} - \delta s^{jk}) \Gamma_{jk}^i &= \\ = \rho \left( \frac{\partial \delta v^i}{\partial t} + v^{\circ j} \frac{\partial \delta v^i}{\partial q^j} + \frac{\partial v^{\circ i}}{\partial q^j} \delta v^j + (v^{\circ j} \delta v^k + v^{\circ k} \delta v^j) \Gamma_{jk}^i \right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\delta d_{kl} = \frac{1}{2} g^{ik} g^{jl} \left( \frac{\partial \delta v_i}{\partial q^j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial q^i} - 2 \Gamma_{ij}^m \delta v_m \right), \quad (2.3)$$

$$\delta s^{ij} = 2\mu \delta d^{ij}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial(r \delta v^i)}{\partial q^i} = 0. \quad (2.5)$$

Границные и начальные условия для системы (2.2) – (2.5) имеют вид

$$r = a, \quad t > 0 : \quad \delta v^i = 0; \quad r = b, \quad t > 0 : \quad \delta v^i = 0, \quad (2.6)$$

$$t = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega : \quad \delta v^i = \delta v^i(\mathbf{x}, 0). \quad (2.7)$$

Начальные возмущения скоростей  $\delta v^i(\mathbf{x}, 0)$ , естественно, согласованные с однородными граничными условиями (2.6), являются заданными.

Поскольку в соотношения (2.2) – (2.7) не входят координаты  $q^2$  и  $q^3$  (компоненты  $v^{\circ i}$  зависят только от  $q^1$  и  $t$ ), представим все величины с символом  $\delta$  в виде отдельных гармоник

$$\begin{aligned} \delta v^j(\mathbf{x}, t) &= v^j(q^1, t) \exp(inq^2 + isq^3), \\ \delta d^{jk}(\mathbf{x}, t) &= d^{jk}(q^1, t) \exp(inq^2 + isq^3), \\ \delta p(\mathbf{x}, t) &= p(q^1, t) \exp(inq^2 + isq^3), \\ \delta s^{jk}(\mathbf{x}, t) &= s^{jk}(q^1, t) \exp(inq^2 + isq^3), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где  $n$  и  $s$  — волновые числа в окружном и осевом направлениях;  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $0 \leq s \in R$ . Осесимметричным возмущениям соответствует значение  $n = 0$ , а плоским (в плоскостях ортогональных оси слоя  $\Omega$ ) — значение  $s = 0$ .

Подставим представления (2.8) в (2.2) – (2.7) и получим начально-краевую задачу, линеаризованную относительно функций  $v^j$ ,  $d^{jk}$ ,  $p$ ,  $s^{jk}$  двух переменных  $q^1$  и  $t$ . Эти функции, вообще говоря, комплекснозначны, поэтому будем с определённой долей условности называть их амплитудами вариаций. Волновые числа  $n$  и  $s$  в получившуюся постановку будут входить как внешние параметры. Из-за громоздкости, вызванной несимметричностью, выписывать в общем виде систему относительно амплитуд, образовавшуюся в результате разделения переменных (2.8), здесь не будем.

### 3. АНАЛИЗ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В $H_2$

Умножим обе части уравнений (2.2), записанных относительно амплитуд, на  $f(r)\bar{v}_i$ , где  $\bar{v}_i(q^1, t)$  — комплексно сопряжённые ковариантные компоненты возмущений скорости,  $f(r)$  — некоторая вещественнонезначная весовая функция. Просуммируем по повторяющемуся индексу  $i$  от 1 до 3, тем самым получая одно скалярное соотношение, проинтегрируем его по  $r$  от  $a$  до  $b$  и удержим действительные части образовавшихся квадратичных функционалов, которые будут зависеть только от времени.

Вид функции  $f(r)$  выберем из тех соображений, чтобы слагаемые с давлением  $\delta p(x, t)$  после указанных процедур в сумме стали равными нулю. Выделяя эти слагаемые из (2.2) и преобразуя их, запишем

$$\begin{aligned} & - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q^k} (-r \delta p g^{jk} + \delta p g^{jk} \Gamma_{jk}^i) \right) \Rightarrow \\ & - \int_a^b \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (pr) \bar{v}_1 + \frac{in}{r^2} p \bar{v}_2 + is p \bar{v}_3 - \frac{1}{r} p \bar{v}_1 \right) f(r) dr = \\ & = \int_a^b p \left[ \frac{\partial}{\partial r} (f(r) \bar{v}_r) - \frac{in}{r} f(r) \bar{v}_\theta - is f(r) \bar{v}_z \right] dr. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Выражение в квадратных скобках в (3.1) в силу условия несжимаемости (2.5) равно нулю, если положить  $f(r) = r$ , что и сделаем далее.

Преобразуем каждое из слагаемых в правой части (2.2):

$$\begin{aligned} & \bullet \quad \rho \frac{\partial \delta v^i}{\partial t} \Rightarrow \rho \int_a^b r \left( \bar{v}_i \frac{\partial v^i}{\partial t} \right)_* dr = \rho \int_a^b r \frac{\partial}{\partial t} (v^i \bar{v}_i)_* dr - \\ & - \rho \int_a^b r \left( v^i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} \right)_* dr = \rho \frac{d}{dt} \int_a^b r |\mathbf{v}|^2 dr - \rho \int_a^b r \left( v^i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} \right)_* dr, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где знаки \* и \*\* в нижнем индексе означают соответственно действительную и мнимую части выражения. Из (3.2) следует, что

$$\rho \int_a^b r \left( \bar{v}_i \frac{\partial v^i}{\partial t} \right)_* dr = \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \int_a^b r |\mathbf{v}|^2 dr \equiv \frac{\rho}{2} \frac{dI^2}{dt}; \quad (3.3)$$

$$\bullet \quad \rho v^{\circ j} \frac{\partial \delta v^i}{\partial q^j} \Rightarrow \rho \int_a^b (i v^{\circ 2} + i s v^{\circ 3})_* r |\mathbf{v}|^2 dr = 0; \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} & \bullet \quad \rho \frac{\partial v^{\circ i}}{\partial q^j} \delta v^j \Rightarrow \rho \int_a^b r \left( v^1 \left( \frac{\partial v^{\circ 2}}{\partial r} \bar{v}_2 + \frac{\partial v^{\circ 3}}{\partial r} \bar{v}_3 \right) \right)_* dr = \\ & = \rho \int_a^b r \left( v_r \left( r \bar{v}_\theta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta^\circ}{r} \right) + \bar{v}_z \frac{\partial v_z^\circ}{\partial r} \right) \right)_* dr = 2\rho \int_a^b r (v_r (d_{r\theta}^\circ \bar{v}_\theta + d_{rz}^\circ \bar{v}_z))_* dr, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где скорости деформаций  $d_{r\theta}^\circ$  и  $d_{rz}^\circ$  основного движения связаны со скоростями  $v_\theta^\circ$  и  $v_z^\circ$  соотношениями Стокса (1.10);

$$\begin{aligned} & \bullet \quad \rho (v^{\circ j} \delta v^k + v^{\circ k} \delta v^j) \Gamma_{jk}^i \Rightarrow \rho \int_a^b r (v^{\circ j} v^k \bar{v}_i + v^{\circ k} v^j \bar{v}_i)_* \Gamma_{jk}^i dr = \\ & = 2\rho \int_a^b v^{\circ 2} (v^1 \bar{v}_2 - r^2 v^2 \bar{v}_1)_* dr = 2\rho \int_a^b v_\theta^\circ (v_r \bar{v}_\theta - v_\theta \bar{v}_r)_* dr = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Преобразуем теперь каждое из слагаемых в левой части (2.2), содержащих вариации девиатор напряжений:

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q^k} (r \delta s^{ik}) \implies \int_a^b \left[ \bar{v}_j \frac{\partial}{\partial r} (rs^{jl}) \right]_* dr + \int_a^b r [i\bar{v}_j (ns^{j2} + ss^{j3})]_* dr = \\
 & = 2\mu \int_a^b r \left( -\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial r} d^{j1} + i n \bar{v}_j d^{j2} + i s \bar{v}_j d^{j3} \right)_* dr = -\mu \int_a^b \left( 2r \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{v}_\theta)}{\partial r} \frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} + r \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{i n}{r} v_r \frac{\partial(r\bar{v}_\theta)}{\partial r} - \frac{2v_\theta}{r} \frac{\partial(r\bar{v}_\theta)}{\partial r} + \right. \\
 & \quad \left. + i s r v_r \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right)_* dr - \mu n^2 \int_a^b \frac{1}{r} (|v_r|^2 + 2|v_\theta|^2 + |v_z|^2) dr - \\
 & \quad - \mu s^2 \int_a^b r (|v_r|^2 + |v_\theta|^2 + 2|v_z|^2) dr - 2\mu n s \int_a^b (v_\theta \bar{v}_z)_* dr + \\
 & \quad + \mu n \int_a^b \left[ i \left( \bar{v}_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \bar{v}_r v_\theta + \frac{2}{r} \bar{v}_\theta v_r \right) \right]_* dr + \mu s \int_a^b \left( i r \bar{v}_r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)_* dr,
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

где приняты во внимание определяющие соотношения (2.4) и выражения (2.3) контравариантных компонент скоростей деформаций через ковариантные компоненты вектора скорости;

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad & \delta s^{jk} \Gamma_{jk}^i \implies \int_a^b r (\bar{v}_i s^{jk} \Gamma_{jk}^i)_* dr = 2\mu \int_a^b (2\bar{v}_2 d^{12} - r^2 \bar{v}_1 d^{22})_* dr = \\
 & = 2\mu \int_a^b \frac{1}{r} \left[ \bar{v}_\theta \left( i n v_r + \frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - 2v_\theta \right) \right]_* dr - 2\mu \int_a^b \frac{1}{r} [\bar{v}_r (v_r + i n v_\theta)]_* dr = \\
 & = -2\mu \int_a^b \frac{1}{r} (|v_\theta|^2 + |v_r|^2) dr - \frac{2}{\mu} \int_a^b \frac{n}{r} [i(\bar{v}_r v_\theta - v_r \bar{v}_\theta)]_* dr.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Здесь учтено то, что

$$\int_a^b \left( \bar{v}_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right)_* dr = \int_a^b \left[ \frac{\partial |v_\theta|^2}{\partial r} - \left( v_\theta \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} \right)_* \right] dr = - \int_a^b \left( \bar{v}_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right)_* dr, \tag{3.9}$$

а следовательно, интегралы в правой и левой частях цепочки (3.9) равны нулю.

Пусть функции  $\sqrt{r}v_r$ ,  $\sqrt{r}v_\theta$  и  $\sqrt{r}v_z$  — элементы комплекснозначного гильбертова пространства  $H_2^0(a, b)$  с нормами

$$I_r = \left( \int_a^b r |v_r|^2 dr \right)^{\frac{1}{2}}, \quad I_\theta = \left( \int_a^b r |v_\theta|^2 dr \right)^{\frac{1}{2}}, \quad I_z = \left( \int_a^b r |v_z|^2 dr \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.10}$$

причём согласно обозначению в (3.3)

$$I^2 = I_r^2 + I_\theta^2 + I_z^2. \tag{3.11}$$

Будем оценивать сверху входящую в (3.3) производную по времени квадратичного функционала (3.11). Воспользуемся двумя группами неравенств в  $H_2^0(a, b)$  — неравенствами Коши — Буняковского,

оценивающими сверху скалярное произведение с некоторым весом  $F(r)$ , например,

$$\int_a^b rF(r)(v_r \bar{v}_z)_* dr \leq \sup_{a < r < b} |F(r)| I_r I_z, \quad (3.12)$$

а также неравенствами Фридрихса [7], дающими оценки снизу трёх интегралов, входящих в (3.7):

$$\begin{aligned} \int_a^b r \left( \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)_* dr &= \int_a^b r \left[ \left( \frac{\partial v_{r*}}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_{r**}}{\partial r} \right)^2 \right] dr \geq \\ &\geq \lambda^2 \int_a^b r(v_{r*}^2 + v_{r**}^2) dr = \lambda^2 I_r^2, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r\bar{v}_\theta)}{\partial r} \frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} \right)_* dr &= \int_a^b \left( r \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{|v_\theta|^2}{r} \right)_* dr \geq \\ &\geq \int_a^b \left( \lambda^2 r + \frac{1}{r} \right) |v_\theta|^2 dr = \lambda^2 I_\theta^2 + \int_a^b \frac{|v_\theta|^2}{r} dr, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b r \left( \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)_* dr &= \int_a^b r \left[ \left( \frac{\partial v_{z*}}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_{z**}}{\partial r} \right)^2 \right] dr \geq \\ &\geq \lambda^2 \int_a^b r(v_{z*}^2 + v_{z**}^2) dr = \lambda^2 I_z^2, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где  $\lambda^2$  — наименьшее положительное собственное число задачи на собственные значения

$$(r\varphi')' + \lambda^2 r\varphi = 0, \quad \varphi(a) = \varphi(b) = 0, \quad \varphi \in R, \quad (3.16)$$

обладающее минимизирующим свойством [8, с. 260, 351]

$$\int_a^b r\varphi'^2 dr \geq \lambda^2 \int_a^b r\varphi^2 dr. \quad (3.17)$$

Параметр  $\lambda$ , естественно, зависит от  $a$  и  $b$ .

Для дальнейших выкладок, принимая во внимание условие несжимаемости, преобразуем ещё ряд интегралов, участвующих в цепочке (3.7):

$$\bullet - \int_a^b \left( \frac{in}{r} v_r \frac{\partial(r\bar{v}_\theta)}{\partial r} \right)_* dr = n^2 \int_a^b \frac{|v_\theta|^2}{r} dr - 2n \int_a^b \frac{1}{r} (iv_r \bar{v}_\theta)_* dr + ns \int_a^b (v_z \bar{v}_\theta)_* dr, \quad (3.18)$$

$$\bullet 2 \int_a^b \left( \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial(r\bar{v}_\theta)}{\partial r} \right)_* dr = 2 \int_a^b \frac{|v_\theta|^2}{r} dr, \quad (3.19)$$

$$\bullet \int_a^b \left( isrv_r \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right)_* dr = s^2 \int_a^b r|v_z|^2 dr + ns \int_a^b (v_\theta \bar{v}_z)_* dr, \quad (3.20)$$

$$\bullet \quad \int_a^b \left( in\bar{v}_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right)_* dr = -n^2 \int_a^b \frac{|v_\theta|^2}{r} dr + n \int_a^b \frac{1}{r} (i\bar{v}_r v_\theta)_* dr - ns \int_a^b (v_\theta \bar{v}_z)_* dr, \quad (3.21)$$

$$\bullet \quad \int_a^b \left( isr\bar{v}_r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)_* dr = -s^2 \int_a^b r|v_z|^2 dr - ns \int_a^b (\bar{v}_\theta v_z)_* dr. \quad (3.22)$$

Собирая вместе все выведенные ранее оценки и опуская промежуточные выкладки, запишем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dI^2}{dt} &\leq -\nu \int_a^b r \left[ \left( 2\lambda^2 + \frac{n^2+2}{r^2} + s^2 \right) |v_r|^2 + \left( \lambda^2 + \frac{2n^2+1}{r^2} + s^2 \right) |v_\theta|^2 + \right. \\ &+ \left. \left( \lambda^2 + \frac{n^2}{r^2} + 2s^2 \right) |v_z|^2 \right] dr + 2 \left( \sup_{a < r < b} \left| \frac{in}{r} \nu - d_{r\theta}^\circ \right| + \sup_{a < r < b} \left| \frac{in}{r} \nu \right| \right) I_r I_\theta + \\ &+ 2 \sup_{a < r < b} |d_{rz}^\circ| I_r I_z + 2 \sup_{a < r < b} \left| \frac{ns}{r} \nu \right| I_\theta I_z. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Так как, например,  $I_r I_\theta \leq (I_r^2 + I_\theta^2)/2$ , то с учётом обозначений (1.11) из (3.23) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dI^2}{dt} &\leq Q_1(t) I_r^2 + Q_2(t) I_\theta^2 + Q_3(t) I_z^2, \\ Q_1(t) &= D_{r\theta}(t) + D_{rz}(t) + \nu \left( \frac{2n}{a^2} - 2\lambda^2 - \frac{n^2+2}{b^2} - s^2 \right), \\ Q_2(t) &= D_{r\theta}(t) + \nu \left( \frac{2n}{a^2} + \frac{2ns}{a} - \lambda^2 - \frac{2n^2+1}{b^2} - s^2 \right), \\ Q_3(t) &= D_{rz}(t) + \nu \left( \frac{2ns}{a} - \lambda^2 - \frac{n^2}{b^2} - 2s^2 \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Пусть  $Q(t) = \max\{Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t)\}$ . Тогда, продолжая (3.24), придём к дифференциальному неравенству для ключевой величины  $I^2(t)$ :

$$\frac{dI^2}{dt} \leq 2Q(t)I^2(t), \quad (3.25)$$

откуда нетрудно вывести итоговую оценку

$$I^2(t) \leq I^2(0) \exp \left( 2 \int_0^t Q(\tau) d\tau \right), \quad (3.26)$$

фактически представляющую собой неравенство типа Гронуолла [9]. Множитель  $I^2(0)$  зависит только от распределения начальных возмущений в  $\Omega$  и известен в силу начальных условий (2.7).

#### 4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ

Описанная в предыдущем пункте процедура по существу является развитием метода интегральных соотношений применительно к нестационарному основному течению. Этот метод (см. обзоры в [10, 11]) позволяет получать довольно общие, в основном достаточные, оценки устойчивости, в частности, нижние оценки критических чисел Рейнольдса. Первыми классическими результатами на этом пути были теорема Рэлея о точке перегиба и теоремы Фьортьоффа и Хойланда о полукруге для невязких течений, а также оценки Джозефа – Ии действительных частей собственных чисел в задаче Оппа – Зоммерфельда. В случае нестационарного основного движения из-за того, что коэффициенты линеаризованного уравнения в возмущениях явно зависят от времени и отделение множителя типа

$e^{\alpha t}$  со спектральным параметром  $\alpha \in C$  не приводит к задаче на собственные значения, техника применения метода несколько усложняется [12–14].

Неравенство (3.26) можно рассматривать как интегральную в смысле нормы (3.10), или энергетическую с весом, верхнюю оценку развития во времени вплоть до  $t \rightarrow \infty$  кинематических возмущений, наложенных при  $t = 0$  на нестационарное комбинированное сдвиговое течение в цилиндрическом слое (1.1). Характер развития этих возмущений полностью определяется поведением функции  $Q(t)$  как при конечных  $t > 0$ , так и при  $t \rightarrow \infty$ .

Достаточными условиями того, чтобы основное течение было: а) устойчиво по Ляпунову по мере пространства  $H_2^0$  либо б) асимптотически устойчиво по этой же мере, являются требования того, чтобы соответственно а) функция  $\int_0^t Q(\tau) d\tau$  была ограничена при  $t > 0$ , и б) эта же функция была не только ограничена при  $t > 0$ , но и стремилась к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

Рост слагаемых  $D_{r\theta}(t)$  и  $D_{rz}(t)$  в (3.24), т. е. увеличение максимальных по  $r$  скоростей сдвига основного течения дестабилизирует картину возмущений во времени, тогда как уменьшение в отрицательную область всех трёх выражений в скобках при  $v$  в (3.24), наоборот, стабилизирует. Заметим, что три упомянутые выражения не зависят от времени, но в них входят параметры возмущений  $n$  и  $s$ . Таким образом, можно найти комбинацию номера  $n^*$  гармоники возмущения по углу  $\theta$  и волнового числа  $s^*$  возмущения по оси  $z$ , при которых функция  $Q(t)$  максимальна как функция двух переменных  $n$  и  $s$ , т. е. картина возмущённого движения наименее устойчива. Поскольку в реальном возмущении присутствуют все гармоники и волновые числа, то в достаточные оценки устойчивости будут входить именно параметры  $n^*$  и  $s^*$ . Тот факт, что возможны ситуации, когда  $n^* \neq 0$  и  $s^* \neq 0$ , подтверждает необходимость учёта при постановке задачи устойчивости осевых возмущений, даже если  $v_z^0 \equiv 0$ , и кольцевых возмущений, даже если  $v_\theta^0 \equiv 0$ . Пара параметров  $(n^*, s^*)$ , а также собственное значение  $\lambda^2$  задачи (3.16) как функции радиусов  $a$  и  $b$  должны быть найдены в результате дополнительного анализа.

В случае, когда массовые силы и скорости границ слоя не зависят от времени, основное течение стационарно. Максимальные скорости деформаций  $D_{r\theta}$  и  $D_{rz}$ , входящие в (3.24), а следовательно, и  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  и  $Q$  становятся постоянными. Неравенство (3.26) приобретает вид

$$I^2(t) \leq I^2(0) e^{2Qt}. \quad (4.1)$$

Если  $Q < 0$ , то имеет место асимптотическая устойчивость с экспоненциальным характером убывания начальных возмущений. Случай  $Q = 0$  можно трактовать как устойчивость по Ляпунову по оговоренной ранее мере. Информативность же неравенства (5.1) при  $Q > 0$  невелика и состоит лишь в том, что оно даёт верхнюю (также экспоненциальную) оценку возможного роста возмущений.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 24-21-20008).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971. 350 с. = Betchov R., Criminale W.O. Stability of Parallel Flows. N.-Y, London: Acad. Press, 1967.
2. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физматлит, 2005. 288 с. = Drazin P.G. Introduction to Hydrodynamic Stability. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
3. Coles D. Transition in circular Couette flow // J. Fluid Mech. 1965. V. 21. No. 3. P. 385–425.
4. Pascal J.P., Rasmussen H. Stability of power law fluid flow between rotating cylinders // Dynamics and Stability of Syst. 1995. V. 10. No. 1. P. 65–93.
5. Георгиевский Д.В. Интегральный анализ трёхмерной картины возмущений течения Пуазейля в трубе // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2015. № 4. С. 40–45.
6. Георгиевский Д.В., Климов Д.М. Энергетический анализ развития кинематических возмущений в слабонеоднородных вязких жидкостях // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 2. С. 56–67.
7. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 572 с. = Rektoris K. Variational Methods in Mathematics, Sciences and Engineering. Dordrect – Boston: Reidel, 1980.
8. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. М.-Л.: ГИТТЛ, 1951. 476 с.
9. Мартынюк А.А., Лакимикантам В., Лила С. Устойчивость движения: метод интегральных неравенств. Киев: Наукова думка, 1989. 270 с.

10. Козырев О.Р., Степанянц Ю.А. Метод интегральных соотношений в линейной теории гидродинамической устойчивости // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНИТИ, 1991. Т. 25. С. 3–89.
11. Георгиевский Д.В. Избранные задачи механики сплошной среды. 2-ое изд. М.: URSS, 2020. 560 с.
12. Георгиевский Д.В. Устойчивость нестационарного сдвига среды Бингама в плоском слое // ПММ. 2018. Т. 82. № 6. С. 798–807.
13. Георгиевский Д.В. Оценки экспоненциального затухания возмущений, наложенных на продольные гармонические колебания вязкого слоя // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 10. С. 1366–1375.
14. Georgievskii D.V., Putkaradze V.G. Energy-Based Stability Estimates for Incompressible Media with Tensor-Nonlinear Constitutive Relations//Cont. Mech. and Thermodyn. 2023. V. 35. No. 4. P. 1403–1415.

## SUFFICIENT ENERGY ESTIMATES OF STABILITY OF UNSTEADY COMBINED SHEAR FLOWS IN A CYLINDRICAL LAYER

D. V. Georgievskii<sup>a, b, \*</sup>

<sup>a</sup>*Moscow State University, Moscow, Russia*

<sup>b</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

\*e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

The time evolution of the three-dimensional pattern of initial disturbances imposed on an unsteady flow, which is a combination of one-dimensional  $r\theta$ - and  $rz$ -shears of Newtonian viscous fluid in a cylindrical layer infinite in length, is studied. The annular and axial velocities of both cylindrical boundaries, which do not vary in the disturbed motion, are specified. The formulation of the linearized problem in terms of variations in the velocities, the strain rates, the pressure, and the stress deviator is given. To analyze this problem, the method of integral relations is developed. The method makes it possible to obtain sufficient estimates of the development of disturbances in the Hilbert space  $H_2$ , in particular, Lyapunov stability and asymptotic stability. These estimates include both the kinematic parameters of main flow and harmonics of the annular disturbances and wavenumbers of axial disturbances. For the steady-state main flow in the layer, exponential estimates of stability take place.

**Keywords:** Newtonian viscous fluid, cylindrical layer, shear flow, disturbance, linearization, stability estimates, quadratic functional, variational inequalities, exponential stability

## О КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СОСУДЕ В ФОРМЕ ПАРАБОЛОИДА

© 2024 г. А. Г. Петров<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\*e-mail: petrovipmtech@gmail.com

Поступила в редакцию 28.06.2024 г.

После доработки 11.11.2024 г.

Принята к публикации 11.11.2024 г.

Рассматриваются уравнения колебания жидкости во вращающемся с постоянной скоростью параболоиде в длинноволновом приближении. Построено точное решение уравнений колебания жидкости.

**Ключевые слова:** теория мелкой воды, нелинейные колебания, вращающийся сосуд, параболоид, точное решение

**DOI:** 10.31857/S1024708424060059, **EDN:** FELDXF

Задача колебаний жидкости в сосудах (бассейнах) имеют много приложений как в технике, так и в геофизике. Наиболее популярны исследования в рамках теории длинных волн (теории мелкой воды), позволяющие учесть изменения донной поверхности бассейна. Линейная теория свободных колебаний жидкости в параболоиде вращения и параболическом канале изложена в монографиях [1, 2]. В них в линейном приближении полученных явные формулах для различных мод свободных колебаний и их периодов. Нелинейные колебания жидкости в параболоиде вращения изучались в [3–6]. В этих работах приводятся примеры частных точных решений осесимметричных уравнений мелкой воды. В [7] предложен способ построения широкого класса решений с помощью лагранжевых переменных, обобщающий решения [36]. Это исследование продолжено в работе [8]. В ней показано, что нелинейные колебания жидкости, описываемые данным классом решений, оказываются изохронными, т.е. их период определяется только параметрами параболоида и не зависит от амплитуды колебаний. В [9] с помощью группового анализа получен класс периодических по времени решений, описывающий нелинейные колебания жидкости в круговом параболоиде с замкнутыми или квазизамкнутыми траекториями движения жидких частиц.

В данной работе методом лагранжевых координат [7, 8] построено семейство точных решений уравнений осесимметричных колебаний жидкости во вращающемся сосуде. Семейство зависит от угловой скорости вращения жидкости и амплитудного параметра. Такие решения имеют интересный приложения для описания волн в северных озерах и морях с учетом вращения Земли, а также для тестирования различных асимптотических решений, обзор которых представлен в [10].

### 1. РАВНОВЕСНЫЕ ФОРМЫ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СОСУДЕ

Форма свободной поверхности  $h(r)$  тяжелой жидкости, вращающейся с угловой скоростью  $\omega$ , удовлетворяет уравнениям гидростатики во вращающейся системе координат [1, 2]:

$$-\omega^2 r = -g \frac{\partial h}{\partial r}. \quad (1.1)$$

Донная поверхность сосуда имеет форму параболоида и определяется уравнением:

$$\varsigma(r) = kr^2 = H \frac{r^2}{a^2},$$

где  $a$  — радиус смоченной поверхности в покоящемся сосуде, а  $H$  — уровень поверхности покоящейся жидкости.

Тогда семейство форм поверхности  $h_\omega(r)$ , удовлетворяющего уравнению (1.1) и условию сохранения объема жидкости

$$\frac{V}{2\pi} = \int_0^{a_\omega} (h_\omega(r) - \zeta(r)) r dr = \text{const}$$

имеет следующий компактный вид:

$$\frac{h_\omega(r) - \zeta(r)}{H} = (1 - q)^{1/2} - (1 - q) \frac{r^2}{a^2}, \quad q = \frac{a^2 \omega^2}{2g}.$$

На рис. 1 изображена свободная поверхность в жидкости с параметром вращения  $q = 0.5$ . Жирная линия — поверхность дна, сплошная тонкая линия — поверхность жидкости, штриховая горизонтальная линия — уровень покоящейся жидкости, вертикальные линии определяют радиусы смоченных поверхностей и  $R$  покоящейся и вращающейся жидкостей соответственно. Из решения видно, что радиус смоченной поверхности  $R$  зависит от параметра  $q$  следующим образом:

$$R/a = (1 - q)^{-1/4}. \quad (1.2)$$

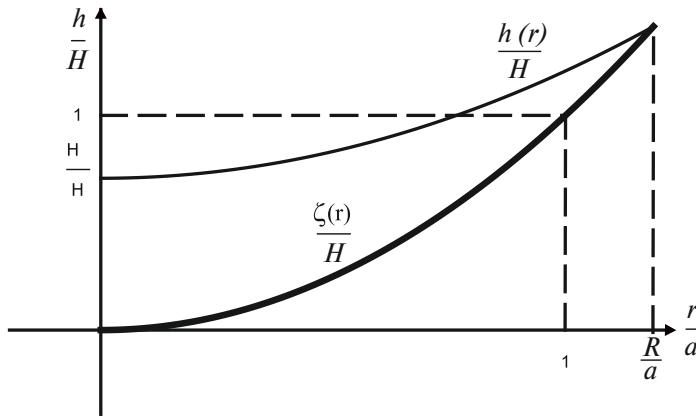


Рис. 1. Равновесная поверхность в бассейне в форме параболоида.

## 2. ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО СТОЯЧИХ ВОЛН ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ СОСУДЕ

Уравнения мелкой воды в неинерциальной системе координат, скрепленной с вращающимся судном имеют вид [1, 2]:

$$\mathbf{w}_r + \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_c = -g \operatorname{grad} h, \quad \frac{d(h - \zeta)}{dt} + (h - \zeta) \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

где — вектор скорости,  $h$  и  $Z$  — отметки свободной поверхности и дна соответственно,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}_r$ ,  $\mathbf{w}_e$ ,  $\mathbf{w}_c$  — векторных скорости, относительного, переносного и кoriолисова ускорений, со следующими компонентами в полярных координатах  $r, \theta$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(v_r, v_\theta), \quad & \mathbf{w}_r \left( \left( \frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2}{r} \right), \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(rv_\theta) \right), \\ \mathbf{w}_e(-\omega^2 r, 0), \quad & \mathbf{w}_c(-2\omega^2 v_\theta, 2\omega v_r). \end{aligned}$$

Компоненты векторного уравнения и уравнение неразрывности принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2}{r} - \omega^2 r - 2\omega v_\theta = -g \frac{\partial h}{\partial r}, \quad & \frac{1}{r} \frac{d(rv_\theta)}{dt} + 2\omega v_r = 0, \\ \frac{d}{dt}(h - \zeta) + (h - \zeta) \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial(v_\theta)}{\partial \theta} \right) = 0. \end{aligned}$$

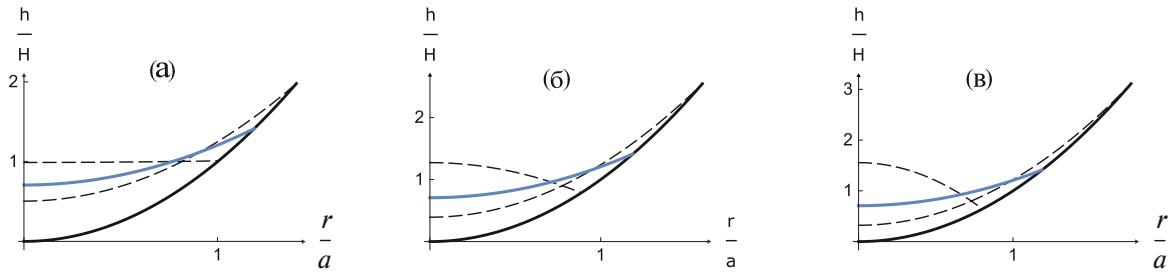


Рис. 2. Поверхности максимального развития для амплитудных параметров  $e = 1.4$  — (а),  $1.8$  — (б),  $2.2$  — (в).

Нелинейные уравнения (2.1) имеют семейство точных решений

$$\frac{h - \zeta}{H} = \frac{(1 - q)^{1/2}}{f(\xi, t)} - \frac{(1 - q)r^2}{f^2(\xi, t)a^2}, \quad q = \frac{a^2\omega^2}{2g}; \quad (2.1)$$

$$f(\xi, t) = \frac{1}{2} \left( \xi + 1/\xi + (\xi - 1/\xi) \cos(2t\sqrt{gk}) \right), \quad \xi \geq 1. \quad (2.2)$$

Решение имеет 2 параметра: параметр угловой скорости  $q \in (0, 1)$  и амплитудном параметре  $1 \leq \xi < \infty$ . Решение получено с помощью лагранжевых координат. Соответствующая подстановки приведена в [7, 8]. Компактный вывод решения (2.2), (2.3) приведен в разд. 4 и 5.

### 3. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ

Полученное решение (2.2) можно назвать стоячей волной. При амплитудном параметре  $\xi = 1 \Rightarrow f = 1$  формула (2.2) описывает равновесную форму (I-2). При  $\xi > 1$  форма волны меняется. Из уравнения  $h - \zeta = 0$  находим радиус смоченной поверхности  $R$  и соответствующую высоту  $h(R)$

$$\frac{h(R)}{H} = \frac{R^2}{a^2} = f(\xi, t)(1 - q)^{-1/2}. \quad (3.1)$$

Форма стоячей волны максимального развития и максимальный радиус смоченной поверхности  $R_{\max}$  получается подстановкой  $f(\xi, t) = \xi$  в (2.2) и (3.1) соответственно

$$\frac{h - \zeta}{H} = \frac{(1 - q)^{1/2}}{\xi} - \frac{(1 - q)r^2}{\xi^2 a^2}, \quad \frac{h(R_{\max})}{H} = \frac{R_{\max}^2}{a^2} = \xi(1 - q)^{-1/2}.$$

Форма стоячей волны минимального развития и минимальный радиус смоченной поверхности  $R_{\min}$  получается подстановкой  $f(\xi, t) = \xi$  в (2.2) и (3.1) соответственно

$$\frac{h - \zeta}{H} = \xi(1 - q)^{1/2} - \xi^2(1 - q)\frac{r^2}{a^2}, \quad \frac{h(R_{\min})}{H} = \frac{R_{\min}^2}{a^2} = \frac{(1 - q)^{-1/2}}{\xi}.$$

Стоячие волны максимального и минимального развития изображены на рис. 2 штриховыми линиями при амплитудных параметрах  $\xi = 1.4$ ,  $\xi = 1.8$  и  $\xi = 2.2$  и параметре вращения  $q = 0.5$ . Тонкая синяя линия — статическая поверхность жидкости, черная жирная линия — донная поверхность. Амплитудный параметр меняется в пределах  $1 \leq \xi \leq \infty$ , при  $\xi \rightarrow \infty$  максимальный смоченный радиус (величина заплеска) стремится к бесконечности.

### 4. ВЫВОД РЕШЕНИЯ

Решение (2.1), следуя [7], ищем в лагранжевых координатах в виде

$$\begin{aligned} r &= \rho(t)r_0, \quad h = \zeta + \frac{h_0(r_0)}{\rho^2(t)}, \\ v_r &= \dot{\rho}(t)r_0, \quad v_\theta = \omega \left( \frac{r_0}{\rho} - r_0 \rho \right), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $h_0(r_0)$  — функция лагранжевой координаты  $r_0$ ,  $a$ ,  $\rho(t)$  — функция времени.

Более общий вид подстановки приведен в [7, 8].

Решение (4.1) можно выразить в эйлеровых координатах

$$v_r = \frac{\dot{\rho}}{\rho} r, \quad v_\theta = \omega \left( \frac{r}{\rho^2} - r \right), \quad h = \zeta + \frac{h_0(r/\rho(t))}{\rho^2(t)}. \quad (4.2)$$

Для производных по времени от функций (4.1) имеем

$$\frac{dv_r}{dt} = \ddot{\rho} r_0, \quad \frac{1}{r} \frac{d(rv_\theta)}{dt} = -2\omega r_0 \dot{\rho}, \quad \frac{d}{dt}(h - \zeta) = -\frac{2\dot{\rho}}{\rho} (h - \zeta).$$

а для производных по координате (4.2) —

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{h'_0(r_0)}{\rho^3(t)}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} = 2 \frac{\dot{\rho}}{\rho}.$$

Отсюда видно, что второе и третье уравнения системы (2.1) удовлетворяются тождественно, а подстановка приведённых выражений в первое уравнение системы (2.1) приводит его к следующему виду:

$$r_0 \ddot{\rho} - \omega^2 \left( \frac{1}{\rho r_0} \left( \frac{r_0}{\rho} - r_0 \rho \right)^2 + r_0 \rho + 2 \left( \frac{r_0}{\rho} - r_0 \rho \right) \right) = -g \left( \frac{h'_0}{\rho^3} + k \rho r_0 \right).$$

Переменные  $t$  и  $r_0$  в этом уравнении можно разделить

$$\rho^3(t) \left( \ddot{\rho} + gk\rho - \frac{\omega^2}{\rho^3} \right) = -\frac{gh'_0(r_0)}{r_0} = gn. \quad (4.3)$$

Функции от  $t$  и  $r_0$  тождественно равных и следовательно постоянны. Постоянная величина обозначена через  $gn$ , где  $n$ -произвольное действительное число. Таким образом, соотношения (4.3) расщепляются на два уравнения

$$\ddot{\rho} + gk\rho = (\omega^2 + gn) \rho(t)^{-3}, \quad -\frac{gh'_0(r_0)}{r_0} = gn. \quad (4.4)$$

Решение первого уравнения (4.4) можно построить проще, чем в [7, 8], если воспользоваться аналогией с двумерным линейным осциллятором (см. раздел 6). При  $k > 0, n > 0$  решение имеет вид

$$\begin{aligned} \rho(t)^2 &= \left( \frac{\omega^2 + gn}{kg} \right)^{1/2} f(\xi, t). \\ f(\xi, t) &= \frac{1}{2} \left( \xi + 1/\xi + (\xi - 1/\xi) \cos(2t\sqrt{gk}) \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

## 5. АНАЛОГИЯ С ЛИНЕЙНЫМ ОСЦИЛЛЯТОРОМ

В [11] обратили внимание, что уравнение (4.4) следует из систем уравнений для линейного осциллятора

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = 0, \quad \ddot{y} + \Omega^2 y = 0. \quad (5.1)$$

Для этого запишем эту систему в полярных координатах  $x = \cos \theta$ ,  $y = \sin \theta$  и примем во внимание сохранение кинетического момента  $M = \rho^2 \dot{\theta}$

$$\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 + \Omega^2 \rho = 0 \Rightarrow \ddot{\rho} + \Omega^2 \rho = M^2 / \rho^3. \quad (5.2)$$

При замене уравнение (5.2) совпадает с уравнением (4.4), что и требовалось показать.

$$\Omega^2 = gk, \quad M^2 = \omega^2 + gn. \quad (5.3)$$

Подставив решение линейных уравнений (5.1) (с кинетическим моментом  $M = x\dot{y} - y\dot{x}$ ):  $x = A \cos \Omega t$ ,  $y = \frac{M}{A\Omega} \sin \Omega t$  в полярную координату  $p^2 = x^2 + y^2$ , после несложных преобразований получим

$$\rho^2 = \frac{1}{2} \frac{M}{\Omega} \left( \xi + \frac{1}{\xi} + \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) \cos 2\Omega t \right), \quad \xi = \frac{A^2 \Omega}{M}. \quad (5.4)$$

Подставив в (5.4) формулы (5.3), получим требуемое решение (2.3).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследуется достаточно популярная постановка задачи [3–10]. Для нее получена двухпараметрическая серия точных решений (2.2) нелинейных уравнений колебаний свободной поверхности тяжелой жидкости во вращающемся сосуде, имеющего форму параболоида. Первый параметр определяет угловую скорость вращения сосуда, второй параметр — амплитуду колебаний около равновесной поверхности. Все известные решения [3–9] записываются в более общем виде и выражаются через произвольную функцию начального распределения толщины слоя  $h_0$  и функцию  $M_0$  распределения углового момента. Приведенная в явном виде двухпараметрическая серия точных решений (2.2) представляет собой наиболее интересный, реализуемый в эксперименте, частный случай. Это оригинальный результат, позволяющий легко определять формы волн наибольшего развития и проводить сравнение с экспериментом. Кроме того, впервые в гидродинамической задаче замечена аналогия с линейным двумерным осциллятором. Она значительно упрощает вывод решения уравнения (4.3) по сравнению с выводом, который представлен в [7].

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500443-0).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
2. *Кочин Н.Е., Кильель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Т. 1. Л.; М.: Гостехиздат, 1948. 535 с.
3. *Miles J.W., Ball F.K.* On free-surface oscillations in a rotating paraboloid // J. Fluid Mech. 1963. V. 17. Pt 2. P. 257–266.
4. *Thacker W.C.* Some exact solutions to the nonlinear shallow-water wave equations // J. Fluid Mech. 1981. V. 107. P. 499–508.
5. *Мигель Л.Х.* Класс точных нестационарных решений уравнений мелкой воды с вращением // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1994. Т. 30. № 5. С. 718–720.
6. *Доценко С.Ф., Рубино А.* Точные аналитические решения нелинейных уравнений длинных волн в случае осесимметричных колебаний жидкости во вращающемся параболическом бассейне // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 2. С. 158–164.
7. *Свиркунов П.Н.* Неуставновившиеся осесимметричные течения в приближении теории мелкой воды // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 3. С. 520–522.
8. *Калашник М. В., Кахиани В. О., Ломинадзе Д. Г., Патарашивили К. И., Свиркунов П. Н., Цакадзе С. Д.* Нелинейные изохронные колебания жидкости в параболоиде: теория и эксперимент// Изв. РАН. МЖГ. 2004. А5 5. С. 131–142.
9. *Чесноков А.А.* Свойства и точные решения уравнений движения мелкой воды во вращающемся параболоиде // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 3. С. 496–504.
10. *Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е.* Асимптотики волновых и вихревых локализованных решений линеаризованных уравнений мелкой воды/ В сб. “Актуальные проблемы механики”, посв. 50-летию Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, М.: Наука, 2015. С. 98–139.
11. *Chalykh O.A., Veselov A.P.* A Remark on Rational Isochronous Potentials // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. 2005. V. 12, Suppl. 1, 179–183.

## ON FLUID OSCILLATIONS A ROTATING PARABOLOIDAL VESSEL

A. G. Petrov<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

\*e-mail: petrovipmech@gmail.com

**Abstract**—The equations of fluid oscillations in a paraboloid rotating at a constant velocity are considered in the longwave approximation. An exact solution to the equations of fluid oscillations is constructed.

**Keywords:** shallow water theory, nonlinear oscillations, rotating vessel, paraboloid, exact solution

## ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ ПАРА В ЩЕЛИ МЕЖДУ ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ КАПЛЕЙ ЖИДКОСТИ И ГОРЯЧЕЙ СТЕНКОЙ

© 2024 г. А. В. Палагин<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва, Россия

\*e-mail: palagin@ibrae.ac.ru

Поступила в редакцию 19.07.2024 г.

После доработки 08.10.2024 г.

Принята к публикации 08.10.2024 г.

Рассматривается течение пара в щели между каплей жидкости и горячей стенкой, обусловленное испарением жидкости. Предполагается, что температура стенки превышает минимальную температуру пленочного кипения, и прямого контакта с жидкостью нет. Задача о подобном течении возникает, в частности, при моделировании закризисного теплообмена, когда капли из парожидкостного потока выпадают на нагреваемую поверхность и частично испаряются на ней, внося значительный вклад в теплопередачу. В рамках рассматриваемой задачи щель между каплей и стенкой предполагается плоской, течение пара — ламинарным и осесимметричным. Представлено точное решение соответствующей гидродинамической задачи.

**Ключевые слова:** осесимметричное течение, плоская щель между каплей жидкости и горячей стенкой, точное решение

DOI: 10.31857/S1024708424060063, EDN: FEFROI

При движении воды в трубах парогенератора происходит постепенное возрастание массовой доли пара. После ряда последовательно сменяющих друг друга вдоль канала режимов течения, включая объемное кипение и дисперсно-кольцевой режим [1], возникает кризис теплообмена, характеризующийся высыханием пленки жидкости, контактирующей со стенкой. В следующем после кризиса закризисном режиме стенка трубы контактирует только с паром. Коэффициент теплопередачи существенно снижается, что приводит к резкому росту температуры стенки. При этом некоторая часть жидкости в форме капель, увлеченных потоком пара в дисперсно-кольцевом режиме, продолжает оставаться в ядре потока. Часть капель выпадает из потока на стенку, что приводит к интенсификации теплоотвода за счет прямого взаимодействия капель со стенкой.

Данные, приведенные в работе [2], показывают, что для параметров потока, представляющих практический интерес (давление 3–18 МПа, массовый поток 500–1000 кг/м<sup>2</sup>с), характерный размер капель в ядре потока оказывается порядка или меньше 1 мм.

При падении на горячую стенку капли подобного размера не разрушаются. Если температура стенки превышает минимальную температуру пленочного кипения, смачивания стенки не происходит. При приближении капли к горячей поверхности происходит испарение жидкости — тем более интенсивное, чем ближе капля к поверхности. Образующийся пар препятствует прямому контакту жидкости и стенки.

В соответствии с работами [3–7], характерное время взаимодействия, т.е. длительность пребывания капли вблизи стенки, определяется частотой собственных колебаний капли. Ускоренная видеосъемка процесса взаимодействия капли с горячей поверхностью [8–9] дает достаточно ясное представление о характере действия сил инерции и поверхностного натяжения, определяющих эволюцию формы капли, и в целом подтверждает это утверждение.

Падающая капля испытывает деформацию, до определенной степени аналогичную деформации упругого мячика при столкновении с твердой стенкой: сфера – сфериод с постепенно увеличивающейся, а затем уменьшающейся степенью сплюснутости – сфера. В ходе этого процесса силы поверхности натяжения стремятся вернуть деформированной капле сферическую форму, соответствующую минимуму поверхностной энергии. Под действием поверхностных сил скорость жидкости внутри капли перераспределяется, и в результате получается упругий отскок капли от поверхности. Заметим, что в работах [2–9] речь идет о достаточно маленьких каплях (с размером порядка 1 мм и меньше), как раз и представляющих интерес для рассматриваемой задачи.

Поверхность капли, обращенная к стенке, имеет форму, близкую к кругу. Прямого контакта между жидкостью и стенкой не возникает – этому препятствует слой пара. При уменьшении расстояния между поверхностью капли и стенкой возрастает тепловой поток от стенки, обратно пропорциональный этому расстоянию, и соответственно возрастает интенсивность испарения жидкости. Из-за образующегося пара возрастает локальное давление между поверхностью капли и стенкой, под действием этого избыточного давления пар движется к периферии области контакта.

Толщина слоя, отделяющего поверхность капли от стенки, определяется балансом между избыточным давлением, создаваемым образующимся паром, и давлением со стороны капли, меняющей в ходе взаимодействия со стенкой направление своего импульса на противоположное.

В настоящей работе рассматривается задача о течении пара в щели между испаряющейся каплей жидкости и горячей стенкой.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим течение пара в стационарном режиме.

Будем считать, что капля в ходе взаимодействия со стенкой и деформации сохраняет симметрию относительно оси, нормальной к поверхности стенки и проходящей через центр масс капли. Поверхность капли, обращенную к стенке, будем считать плоской и имеющей форму круга с радиусом  $R$ . Введем цилиндрическую систему координат  $(r, z)$  с центром в точке пересечения оси симметрии с поверхностью стенки. Координата  $z$  направлена по оси симметрии от поверхности стенки (рис. 1).

Система уравнений гидродинамики в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (1.1)$$

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} \right), \quad (1.2)$$

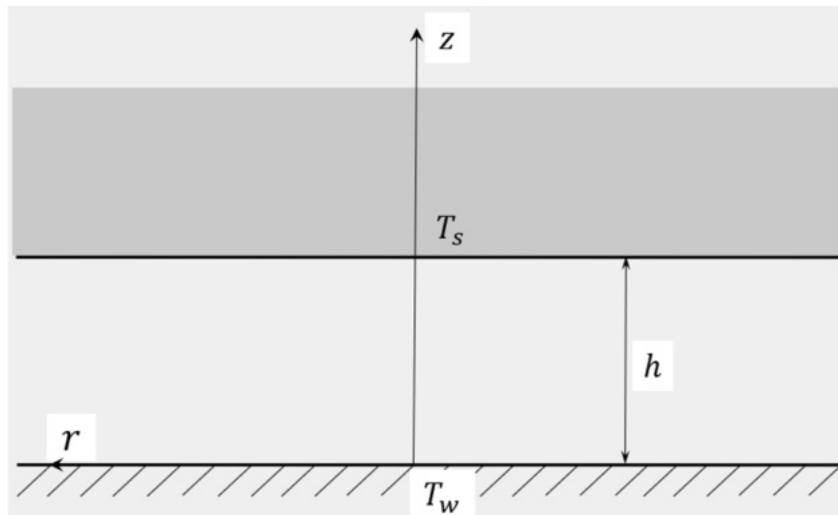


Рис. 1. Геометрия задачи.

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\eta}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right]. \quad (1.3)$$

Сформулируем граничные условия. Будем считать, что тепловой поток от стенки к капле [Дж/м<sup>2</sup>с]дается соотношением

$$Q = \frac{\lambda \cdot (T_w - T_s)}{h},$$

где  $\lambda$  – теплопроводность пара,  $h$  – толщина парового слоя,  $T_w$  – температура стенки,  $T_s$  – температура жидкости. Жидкость находится при температуре насыщения, поэтому все тепло от горячей стенки идет на парообразование. При этом плотность массового потока пара с поверхности капли (кг/м<sup>2</sup>с):

$$m = \frac{1}{\Lambda} \frac{\lambda (T_w - T_s)}{h},$$

где  $\Lambda$  – скрытая теплота парообразования. Для  $z$ -компоненты скорости пара граничное условие на поверхности капли имеет вид:

$$v_z|_{z=h} = -\frac{m}{\rho}, \quad (1.4)$$

где  $\rho$  – плотность пара. На поверхности стенки граничное условие для  $v_z$ :

$$v_z|_{z=0} = 0. \quad (1.5)$$

Граничные условия для  $r$ -компоненты скорости пара на поверхности капли и стенки:

$$v_r|_{z=0} = 0; \quad v_r|_{z=h} = 0. \quad (1.6)$$

Течение пара предполагается ламинарным. Как будет показано ниже, для представляющих практический интерес параметров задачи (размер капли, давление среды) течение действительно является ламинарным.

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

### 2.1. Сведение задачи к одному ОДУ

Рассмотрим область  $0 \leq r \leq R$ ,  $0 \leq z \leq h$ . Масса испарившейся жидкости с поверхности капли внутри области в единицу времени

$$m \cdot \pi r^2$$

в стационарном режиме равна потоку пара через боковую поверхность области

$$2\pi r \cdot \rho \cdot \int_0^h v_r(r, z) dz,$$

откуда

$$\int_0^h v_r(r, z) dz = \frac{1}{2} \frac{m}{\rho} r.$$

Как можно видеть, среднее по толщине слоя значение радиальной компоненты скорости пропорционально координате  $r$ . Сделаем предположение, что и сама радиальная компонента скорости зависит от  $r$  таким же образом

$$v_r(r, z) \sim r.$$

Это предположение будет оправдано тем, что мы получим решение системы (1.1)–(1.3), удовлетворяющее всем граничным условиям.

Представим величину радиальной компоненты скорости в виде

$$v_r(r, z) = \frac{1}{2} \frac{\lambda \cdot (T_w - T_s)}{\rho h^2 \Lambda} r \varphi(z) = \frac{1}{2} \frac{r}{\tau} \varphi(z), \quad (2.1)$$

где  $\varphi$  есть некоторая функция координаты  $z$ , для которой справедливо соотношение

$$\frac{1}{h} \int_0^h \varphi(z) dz = 1, \quad (2.2)$$

а

$$\tau = \frac{\rho h^2 \Lambda}{\lambda \cdot (T_w - T_s)} \quad (2.3)$$

есть характерное время теплообмена в рассматриваемой задаче.

Из уравнения непрерывности (1.1) с учетом (2.1) следует

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\varphi(z)}{\tau}. \quad (2.4)$$

Из соотношения (2.4) можно сделать определенные выводы о характере зависимости величины  $v_z$  от координаты  $r$ . Интегрируя (2.4) по  $z$ , получаем в самом общем случае

$$v_z = -\frac{1}{\tau} \int \varphi(z) dz + C(r), \quad (2.5)$$

где  $C(r)$  – некоторая функция  $r$ . Легко видеть, что скорость (2.5) может удовлетворять граничным условиям (1.4) и (1.5) для любого значения  $r$  только если

$$C(r) = \text{const.}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = 0. \quad (2.6)$$

С учетом (2.1), (2.4) и (2.6) уравнения сохранения импульса (1.2) и (1.3) принимают вид:

$$\frac{1}{2\tau} \frac{\eta}{\rho} r \varphi'' - \frac{1}{2\tau} v_z r \varphi' - \frac{1}{4\tau^2} r \varphi^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (2.7)$$

$$\frac{\eta}{\rho} \frac{1}{\tau} \varphi' - \frac{1}{\tau} v_z \varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (2.8)$$

Рассмотрим уравнение сохранения  $z$ -компоненты импульса (2.8). Как можно видеть, в левой части уравнения все члены зависят только от  $z$ . Следовательно, и градиент давления  $\partial P / \partial z$  зависит только от  $z$ . В таком случае величину давления в самом общем виде можно представить как сумму функций только от  $r$  и от  $z$

$$P(r, z) = P_r(r) + P_z(z). \quad (2.9)$$

Из соотношения (2.9) следует, что радиальный градиент давления  $\partial P / \partial r$  является функцией только координаты  $r$ .

Рассмотрим теперь уравнение (2.7). Перепишем его в следующем виде:

$$\frac{\eta}{\rho} \varphi'' - v_z \varphi' - \frac{1}{2\tau} \varphi^2 = \frac{2\tau}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r}. \quad (2.10)$$

Величины в правой части зависят только от  $z$ ; левая часть зависит только от  $r$ . Уравнение (2.10) может выполняться, только если обе его части равны константе. Соответственно, имеем

$$\frac{\eta}{\rho} \varphi'' - v_z \varphi' - \frac{\varphi^2}{2\tau} = \frac{\text{const}}{\tau}. \quad (2.11)$$

Здесь константа в правой части представлена в таком виде, что величина const является безразмерной.  
Поскольку

$$\varphi = -\tau v_z',$$

$$\varphi' = -\tau v_z'',$$

$$\varphi'' = -\tau v_z''',$$

то уравнение (2.11) можно переписать в виде

$$\frac{\eta}{\rho} v_z''' - v_z v_z'' + \frac{1}{2} v_z'^2 = -\frac{\text{const}}{\tau^2}. \quad (2.12)$$

Введем новую неизвестную функцию

$$f = \frac{h\rho}{\eta} v_z, \quad (2.13)$$

и новую переменную

$$x = \frac{z}{h}. \quad (2.14)$$

В терминах величин (2.13), (2.14) уравнение (2.12) принимает вид

$$f''' - f f'' + \frac{1}{2} f'^2 = \gamma, \quad (2.15)$$

где величина  $\gamma$  связана с константой уравнения (2.12) следующим образом:

$$\gamma = -\text{const} \frac{h^4 \rho^2}{\tau^2 \eta^2}.$$

Границные условия для уравнения (2.15) определяются на основании граничных условий (1.4)–(1.6) и соотношений (2.13)–(2.14):

$$f|_{x=0} = 0, \quad (2.16)$$

$$f|_{x=1} = -\zeta, \quad (2.17)$$

$$f'|_{x=0} = 0, \quad (2.18)$$

$$f'|_{x=1} = 0. \quad (2.19)$$

В условии (2.17) величина

$$\zeta = \frac{m}{\eta} h = \frac{\lambda (T_w - T_{sat})}{\Lambda \cdot \eta}. \quad (2.20)$$

Величина  $\zeta$  является безразмерным параметром задачи, характеризующим интенсивность парообразования. Оценки показывают, что в широком диапазоне изменения давления и перегревов стенки относительно температуры насыщения, представляющих практический интерес, параметр  $\zeta$  принимает значения в интервале 0.2–0.8.

Величины  $\zeta$ ,  $\gamma$  и const связаны между собой

$$\gamma = -\text{const} \cdot \zeta^2. \quad (2.21)$$

Как можно видеть, граничных условий для уравнения (2.15) четыре, в то время как само уравнение третьего порядка. Следовательно, при интегрировании (2.15) в нашем распоряжении окажутся только три константы. Четвертой константой, необходимой для удовлетворения условий (2.17)–(2.19), является величина  $\gamma$ .

## 2.2. Подход к численному решению

При численном решении уравнения (2.15) с указанными условиями необходимо ввести дополнительное условие на вторую производную

$$f''|_{x=0} = \beta, \quad (2.22)$$

где  $\beta$  – вспомогательный параметр. Для заданной величины  $\beta$  находится решение уравнения (2.15) с граничными условиями (2.16), (2.18) и (2.22), что не составляет проблемы, поскольку эти граничные условия определены на одном и том же конце рассматриваемого интервала  $x = 0$ . При нахождении решения величина  $\gamma$  в правой части (2.15) должна рассматриваться как варьируемый параметр. Этот параметр подбирается таким образом, чтобы выполнялось условие (2.19), относящееся к противоположному концу интервала  $x = 1$ .

С использованием найденного решения вычисляется значение функции  $f$  при  $x = 1$ , т.е. величина  $-\zeta$ , которая пока рассматривается как свободный параметр.

Таким образом, для заданного значения  $\beta$  определяются величины  $\gamma$  и  $\zeta$ . По найденным значениям  $\gamma$  и  $\zeta$  для заданного  $\beta$

$$\begin{aligned}\gamma &= \gamma(\beta), \\ \zeta &= \zeta(\beta)\end{aligned}$$

можно построить параметрическую зависимость величины  $\gamma$  от  $\zeta$

$$\gamma = \gamma(\zeta). \quad (2.23)$$

Полученное решение удовлетворяет уравнению (2.15) и граничным условиям (2.16)–(2.19). Действительно, условия (2.16), (2.18) непосредственно использовались для решения уравнения (2.15); условие (2.19) выполняется вследствие надлежащего подбора величины  $\gamma$ . А связь (2.23) между величинами  $\gamma$  и  $\zeta$  обеспечивает выполнение условия (2.17).

Результаты численного решения уравнения (2.15) с граничными условиями (2.16)–(2.19) показаны на рис. 2–4. Функция  $f(x, \zeta)$ , а также ее первая и вторая производные по  $x$  представлены для значений параметра  $\zeta$ , указанных в табл. 1, где также приводятся соответствующие значения  $\gamma$  и  $\beta$ . Полученная зависимость величины  $\gamma$  от величины  $\zeta$  показана на рис. 5, а зависимость  $\beta$  от  $\zeta$  – на рис. 6.

**Таблица 1.**

$\zeta$	$\beta$	$\gamma$
0.197574	-1.2	2.43160
0.485280	-3	6.19395
0.793731	-5	10.52829

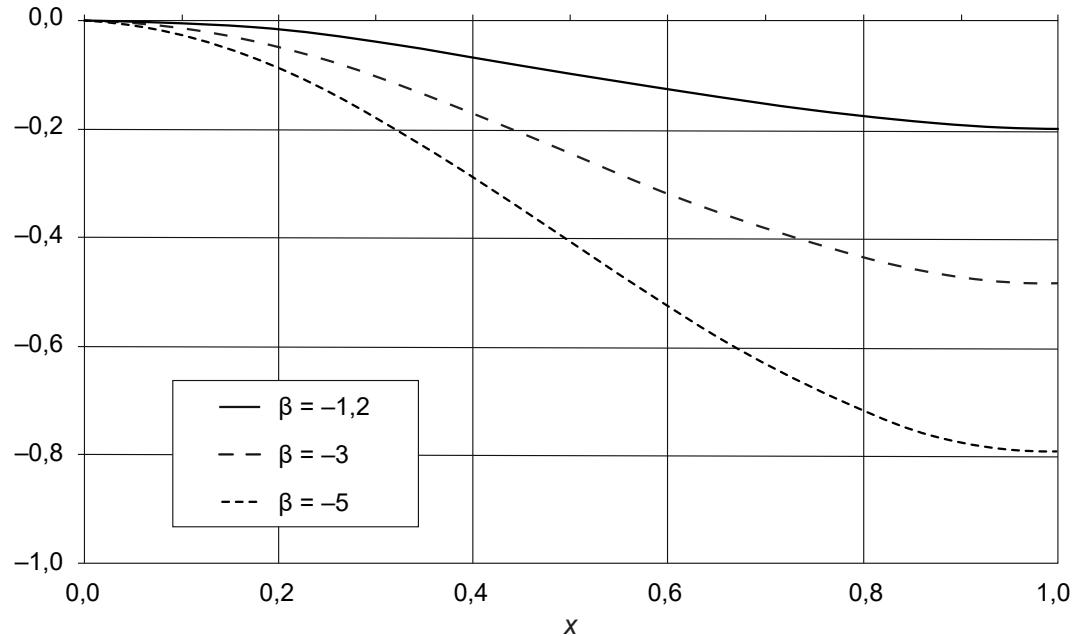
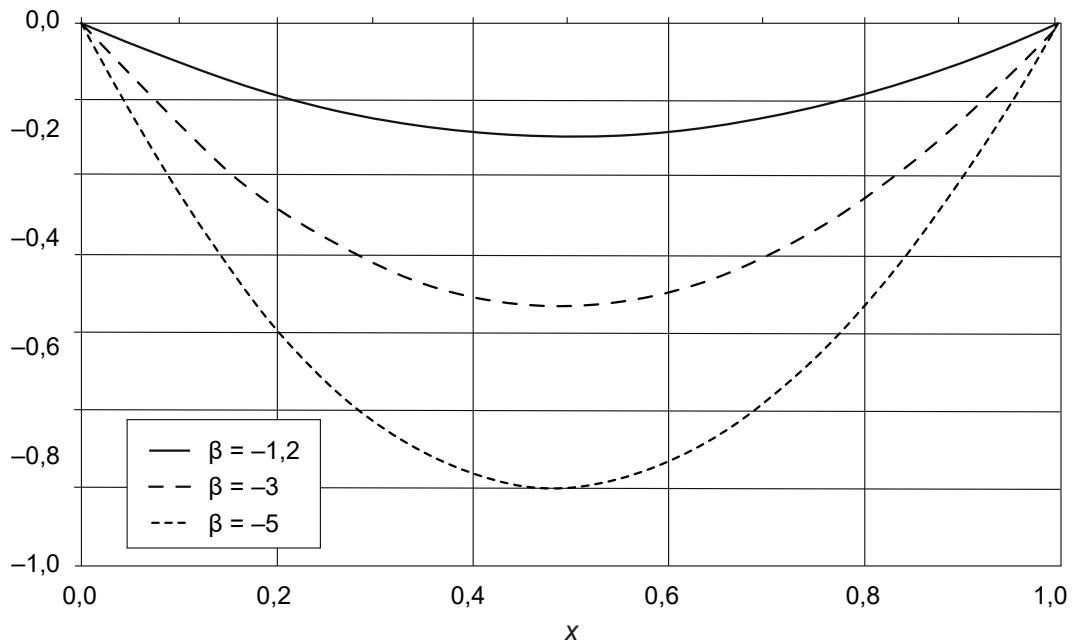
## 2.3. Решение в виде ряда

Решение уравнения (2.15) можно получить в виде ряда, следуя подходу, описанному в [10]:

$$F(x, \beta, \gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(\beta, \gamma) x^n}{(n-1)!}. \quad (2.24)$$

Граничное условие (2.16) для этого решения, очевидно, выполняется. Коэффициенты  $A_n = A_n(\beta, \gamma)$  определяются с использованием граничных условий (2.18) и (2.22):

$$\begin{aligned}A_1 &= 0; \quad A_2 = \beta; \quad A_3 = \gamma; \quad A_4 = 0; \quad A_5 = 0; \quad A_6 = \beta\gamma; \quad A_7 = \gamma^2; \quad A_8 = 0; \quad A_9 = 10\beta^2\gamma; \\ A_{10} &= 36\beta\gamma^2; \quad A_{11} = 36\gamma^3; \quad A_{12} = 280\beta^3\gamma; \quad A_{13} = 2230\beta^2\gamma^2; \quad A_{14} = 6306\beta\gamma^3; \\ A_{15} &= 15400\beta^4\gamma + 6306\gamma^4; \quad A_{16} = 220500\beta^3\gamma^2; \quad A_{17} = 1228260\beta^2\gamma^3 \quad \dots\end{aligned}$$

Рис. 2. Решение уравнения (2.15),  $f(x, \zeta)$ .Рис. 3. Решение уравнения (2.15),  $f'(x, \zeta)$ .

При этом связь между величинами  $\gamma$ ,  $\beta$  и  $\zeta$  определяется системой из двух алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(\beta, \gamma)}{(n-1)!} &= -\zeta, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(\beta, \gamma)}{n!} &= 0, \end{aligned} \tag{2.25}$$

соответствующих граничным условиям (2.17) и (2.19).

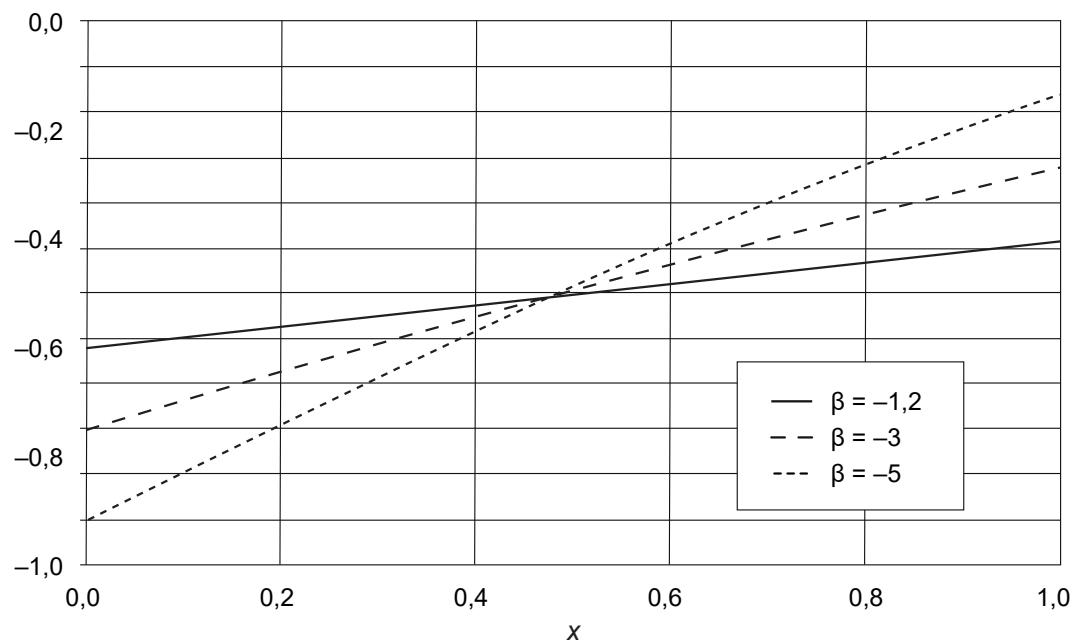


Рис. 4. Решение уравнения (2.15),  $f''(x, \zeta)$ .

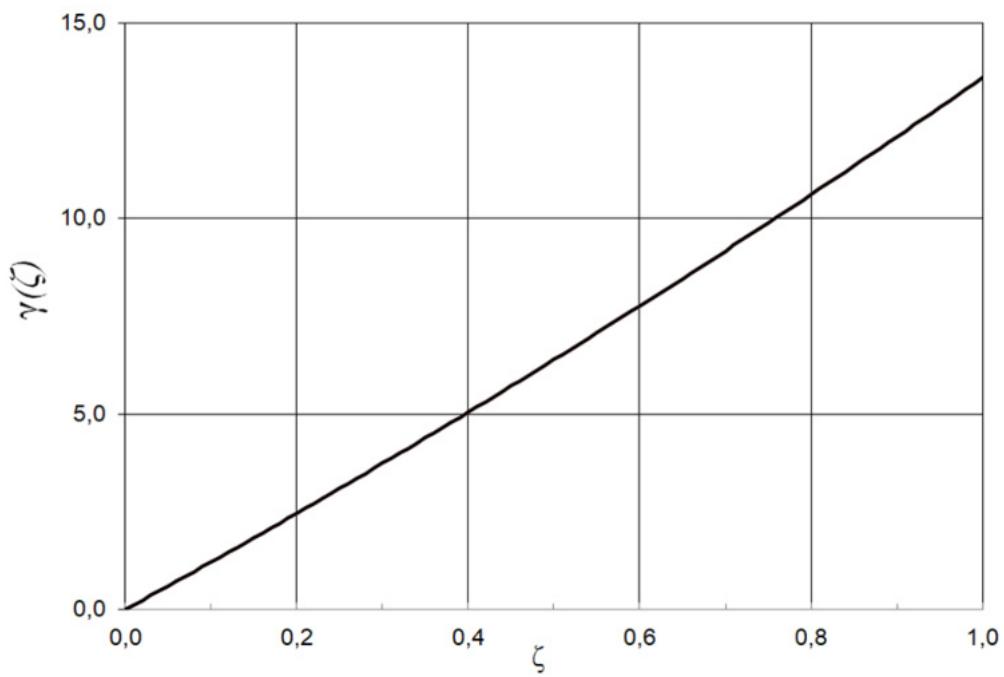


Рис. 5. Зависимость величины  $\gamma$  от величины  $\zeta$ .

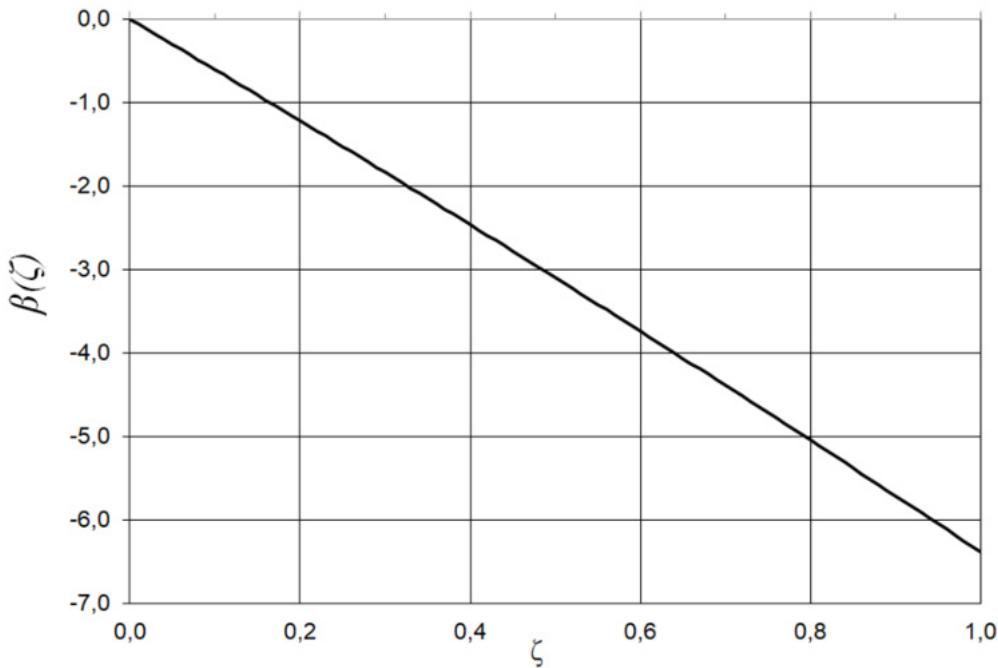


Рис. 6. Зависимость величины  $\beta$  от величины  $\zeta$ .

Полученные в результате решения системы уравнений (2.25) зависимости  $\gamma(\zeta)$  и  $\beta(\zeta)$  позволяют представить решение (2.24) как функцию переменной  $x$  и параметра задачи  $\zeta$ :

$$f(x, \zeta) = F(x, \beta(\zeta), \gamma(\zeta)).$$

#### 2.4. Представление полного решения задачи

Компонента скорости  $v_z$ , в соответствии с (2.13)–(2.14), выражается через найденное решение уравнения (2.15) следующим образом:

$$v_z(z, \zeta) = \frac{\eta}{\rho h} f(z/h, \zeta).$$

Для функции  $\varphi$  имеем, в соответствии с (2.4),

$$\varphi(z, \zeta) = -\tau \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\eta \Lambda}{\lambda \cdot (T_w - T_s)} f'(z/h, \zeta) = -\frac{1}{\zeta} f'(z/h, \zeta). \quad (2.26)$$

В соотношении (2.26) и ниже  $f'$  и  $f''$  обозначают первую и вторую производные функции  $f(x, \zeta)$  по переменной  $x$ . Как легко видеть, соотношение (2.2) для функции  $\varphi$  выполняется в силу граничного условия (2.17).

Компонента скорости  $v_r$ , в соответствии с (2.1), есть

$$v_r(r, z, \zeta) = r \frac{\varphi(z, \zeta)}{2\tau} = -\frac{\eta}{2\rho h^2} r f'(z/h, \zeta).$$

Уравнение (2.8) позволяет определить градиент давления по координате  $z$ :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\eta^2}{\rho h^3} [f''(z/h, \zeta) - f(z/h, \zeta) f'(z/h, \zeta)]. \quad (2.27)$$

Используя (2.10)–(2.11), (2.3) и (2.20)–(2.21) можно написать

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \text{const} \frac{\rho}{2\tau^2} \cdot r = -\frac{\eta^2}{2\rho h^4} \gamma(\zeta) \cdot r. \quad (2.28)$$

Как следует из соотношений для градиентов (2.27) и (2.28), распределение давления дается следующим выражением:

$$P = P_0 + \frac{\eta^2}{4\rho h^4} \gamma(\zeta) (R^2 - r^2) + \frac{\eta^2}{\rho h^3} \int [f''(z/h, \zeta) - f(z/h, \zeta) f'(z/h, \zeta)] dz,$$

где  $P_0$  – давление внешней среды.

### 2.5. О режиме течения

Оценим число Рейнольдса для течения в радиальном направлении:

$$\text{Re} = \frac{\rho v_r h}{\eta} = \frac{1}{2h} r f'(z/h, \zeta) \sim \frac{R}{h}, \quad (2.29)$$

поскольку  $f'(z/h, \zeta)$  порядка единицы (см. рис. 3). Необходимо оценить толщину парового слоя  $h$ .

Перепад давления между паровым слоем и окружающей средой оценим на основании (2.28) как

$$\Delta P \sim \frac{\eta^2 R^2}{\rho h^4} \gamma.$$

Для силы, действующей на каплю со стороны парового слоя за счет избыточного давления, можно написать

$$F \sim \Delta P R^2 \sim \frac{\eta^2 R^4}{\rho h^4} \gamma. \quad (2.30)$$

Капля падает на стенку со скоростью  $U$ , ее импульс есть

$$p \sim \rho_f R^3 U, \quad (2.31)$$

где  $\rho_f$  – плотность жидкости. Под действием силы  $F$  в ходе взаимодействия со стенкой за время  $\Delta t$  импульс капли меняется на противоположный. Поэтому можно написать:

$$F \Delta t \sim p. \quad (2.32)$$

Как указывалось выше, характерное время контакта с горячей стенкой определяется частотой собственных колебаний капли. Наименьшая возможная частота собственных колебаний капли равна [11]

$$\frac{1}{\Delta t} \sim \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_f R^3}}. \quad (2.33)$$

Подставляя (2.30), (2.31) и (2.33) в (2.32), получаем для толщины парового слоя

$$h \sim \frac{\eta^{1/2} \gamma^{1/4} R^{5/8}}{\sigma^{1/8} \rho^{1/4} \rho_f^{1/8} U^{1/4}}.$$

Соответственно, число Рейнольдса (2.29) есть

$$\text{Re} \sim \frac{\sigma^{1/8} \rho^{1/4} \rho_f^{1/8} U^{1/4} R^{3/8}}{\eta^{1/2} \gamma^{1/4}}.$$

Для характерного размера капли 1 мм, характерной скорости движения капель в закризисной области (10 м/с), и с учетом значений величины  $\gamma$  (порядка 10, см. рис. 5) для всего представляющего интерес диапазона давлений число Рейнольдса не превышает 50. Таким образом, течение в паровом слое является ламинарным, что и предполагалось при решении задачи.

Заметим также, что отношение времени взаимодействия капли со стенкой  $\Delta t$  (2.33) к характерному времени теплообмена  $\tau$  (2.3) составляет 5–10, в зависимости от давления и перегрева стенки. Это позволяет рассматривать стационарный режим течения пара.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена гидродинамическая задача о течении пара в щели между каплей жидкости и горячей стенкой, обусловленном испарением жидкости. Эта задача возникает, в частности, при моделировании закризисного теплообмена, когда капли из парожидкостного потока выпадают на нагреваемую поверхность и частично испаряются на ней, внося значительный вклад в теплопередачу. Получено точное решение рассматриваемой задачи. Также показано, что для всего представляющего интерес диапазона изменения параметров задачи течение является ламинарным.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кирилов П.Л., Богословская Г.П. Тепломассообмен в ядерных энергетических установках. М.: Энергоатомиздат, 2000. 456 с.
2. Kataoka I., MamoruIshii, Mishima K. Generation and size distribution of droplet in annular two-phase flow // J. Fluids Eng. 1983. V. 105. P. 231–238.
3. Wachters L.H.J., Westerling N.A.J. The heat transfer from a hot wall to impinging water drops in the spheroidal state // Chem. Eng. Sci. 1966. V. 21. P. 1047–1056.
4. Makino K., Michiyoshi I. The behavior of a water droplet on heated surfaces // Int. J. Heat Mass Transfer. 1984. V. 27. P. 781–791.
5. Ge Y., Fan L. S. Three-dimensional simulation of impingement of a liquid droplet on a flat surface in the Leidenfrost regime // Phys. Fluids. 2005. V. 17. P. 027104.
6. Tran T., Staat H.J.J., Susarrey-Arce A., Foertsch T.C., Van Houselt A., Gardeniers H.J.G.E., Prosperetti A., Lohse D., Sun C. Droplet impact on superheated micro-structured surfaces // Soft Matter. 2013. V. 9. P. 3272–3282.
7. Liang G., Mudawar I. Review of drop impact on heated walls // Int. J. Heat Mass Transfer. 2017. V. 106. P. 103–126.
8. Biance A.-L., Chevy F., Clanet C., Lagubeau G. and Quere D. On the elasticity of an inertial liquid shock // J. Fluid Mech. 2006. V. 554. P. 47–66.
9. Chatzikyriakou D., Walker S.P., Hale C.P., Hewitt G.F. The measurement of heat transfer from hot surfaces to non-wetting droplets // Int. J. Heat Mass Transfer. 2011. V. 54 P. 1432–1440.
10. Aerodynamic Theory, Volume III, Durand W.F., Editor-in-Chef, Berlin, Julius Springer, 1935. 354 с.
11. Ландау Л.Д., Либшиц Е.М. Теоретическая физика: Т. VI. Гидродинамика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 736 с.

## EXACT SOLUTION OF THE PROBLEM OF VAPOR FLOW THROUGH A GAP BETWEEN AN EVAPORATING DROPLET OF LIQUID AND A HOT WALL

A.V. Palagin<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>*Nuclear Safety Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

*\*e-mail: palagin@ibrae.ac.ru*

**Abstract**—Vapor flow in a gap between a liquid droplet and a hot wall caused by evaporation of liquid is considered. It is assumed that the wall temperature is higher than the minimum film boiling temperature, and there is no direct contact with liquid. In particular, the problem of such a flow arises in modeling post-crisis heat transfer, when droplets from a vapor-liquid flow fall onto the heated surface and partially evaporate on it, making a significant contribution to heat transfer. Within the framework of the problem under consideration, the gap between the droplet and the wall is assumed to be plane, and the vapor flow to be laminar and axisymmetric. An exact solution to the corresponding hydrodynamic problem is given.

**Keywords:** axisymmetric flow, plane gap between a liquid droplet and a hot wall, exact solution

# ПОГРУЖАЮЩИЙСЯ И ВСПЛЫВАЮЩИЙ ВИХРЬ В КАРТИНЕ ПЛАВНОГО ВТЕКАНИЯ СВОБОДНО ПАДАЮЩЕЙ КАПЛИ ЭТАНОЛА В ВОДУ

© 2024 г. Ю. Д. Чашечкин<sup>a,\*</sup>, А. Ю. Ильиных<sup>a,\*\*</sup>

<sup>a</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\*e-mail: chakin@ipmnet.ru

\*\*e-mail: ilynykh@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 22.07.2024 г.

После доработки 11.10.2024 г.

Принята к публикации 11.10.2024 г.

Проведена сравнительная видеорегистрация картины слияния медленно падающих капель 0.01% водного раствора перманганата калия и меньшей плотности 95% раствора этанола, кинетическая энергия которых меньше потенциальной поверхностной энергии. Капля раствора большей, чем у принимающей жидкости плотности, плавно втекает в толщу жидкости, каверна образуется с запаздыванием. Тонущая интрузия трансформируется в кольцевой вихрь, который подталкивает растущую каверну. Капля этанола также втекает в толщу жидкости, но образует всплывающую интрузию, искажающую форму запаздывающей каверны. С окончания заострения конической каверны максимальной глубины в толще жидкости выбрасывается небольшой вихрь, содержащий легкую жидкость. Размеры вихря, формирующего вторичную интрузию, практически не меняются при движении. Постепенно легкий вихрь останавливается и формирует вторичную интрузию. Центральная часть вторичной интрузии всплывает и трансформируется в вихревое кольцо. Размеры всплывающего под действием плавучести вихря увеличиваются со временем. Приведены графики эволюции размеров основных структурных компонентов.

**Ключевые слова:** капля, вихри, вихревое кольцо, эксперимент, интрузия, разница плотностей

**DOI:** 10.31857/S1024708424060074, **EDN:** FDXBQH

## ВВЕДЕНИЕ

Сохранение интереса к экспериментальным исследованиям процессов формирования вихревых колец при слиянии свободно падающей капли с покоящейся принимающей жидкостью, которые начали проводиться еще в середине XIX в [1], объясняется научной содержательностью темы и сложностью математического описания распространенного в природных и лабораторных условиях явления, которое все более активно используется в современных промышленных технологиях. Развитие исследований процессов эволюции вихрей в капельных течениях стимулировал научный успех статьи Томсона и Ньюэла [2], привлеченной для демонстрации физических основ распространенных явлений химической и биологической природы в обширном трактате [3]. Росту числа работ в середине прошлого века способствовало развитие осветительной техники [4] и создание аппаратуры высокоскоростной кино- и видеорегистрации [5, 6], позволяющей регистрировать тонкую структуру быстро эволюционирующих течений.

Выразительные фотографии вихревых колец, возникающих при выдавливании подкрашенной жидкости из сопла и слиянии свободно падающей капли [7, 8] привлекли внимание и теоретиков [9], и экспериментаторов. Основные геометрические параметры течения, вызванного падением капель различных жидкостей в бассейн, заполненный той же самой жидкостью, включая этанол и жидкий гелий в нормальной и сверхтекучей фазе, определены в [10].

Расчеты и измерения максимальной глубины каверны, сформированной каплей воды диаметром  $D_w = 3.5$  мм, упавшей с высоты 1.6 м, и этанола  $D_e = 2.3$  мм – с высоты  $3.3 < H < 160$  см, приведены в [11]. Визуализация картины слияния сталкивающихся в воздухе падающих капель воды и этанола выполнена в [12]. Граница между режимами растекания и разбрызгивания на плоскости чисел Онезорге и Рейнольдса для капель различных алканов и спиртов, включая этанол, падающих на твердую сухую поверхность и тонкий слой жидкости, построена по данным опытов в [13]. Эволюция картины растекания капли этанола, падающей на наклонный вращающийся диск, прослежена в [14]. Просачивание упавшей капли этанола в тонкую щель изучено экспериментально и рассчитано улучшенным методом конечного объема жидкости в [15].

Различие значений коэффициента преломления контактирующих сред позволило проследить эволюцию структуры течения в окрестности границы области слияния капли воды с тонким слоем этанола или метанола на стеклянной подложке с применением сверхбыстрой высокоразрешающей видеорегистрации [16]. В картине течения выделены тонкие радиальные струйки и азимутальные неоднородности границы области слияния, на которой собираются мелкие, постепенно растущие газовые пузырьки, образующие кольцевые полости. Обзор механизмов образования тонких струек (шипов) с вершин которых в воздухе выбрасываются мелкие капельки (брьзы) при слиянии свободно падающей капли с пленкой жидкости на твердой подложке приведен в [17]. Анализируется степень влияния глубины слоя принимающей жидкости на общую структуру течения и степень выраженности его отдельных компонентов. Видеорегистрация процесса слияния капель этанола диаметром  $D_e = 1.71, 1.83, 2.05, 2.10$  мм со слоем этанола в кювете, нагретого до температуры  $T_s = 25, 35, 45$  °C дополнена численным моделированием процесса в [18]. Время сохранения медленно внесенной на поверхность жидкости капли, оказалось меньше характерного диффузионного масштаба и убывающим с увеличением температуры, диаметра и скорости движения капли.

Тоновая визуализация картины образования и погружения кольцевого вихря, содержащего пигмент окрашенной капли воды, сливающейся с деминерализованной водой в кювете, проведена в [19]. Определено влияние формы и контактной скорости естественно осциллирующей капли на размеры каверны, геометрию и предельную глубину проникновения вихря, немонотонно зависящую от высоты ее свободного падения. Более детальные измерения зависимости глубины проникновения вихря от контактной скорости капли приведены в [20]. Визуализация течения, возникающего при контакте капли с принимающей жидкостью в момент отрыва от сопла, привлекалась при обсуждении механизма генерации завихренности в [21].

Развитие методик исследований формирования вихревых колец падающими каплями [22] и регистрации их движения, показало структурное подобие картин течения с кольцевым вихрем в небольшой кювете в лаборатории [19, 20, 23] и в газопылевом облаке при взрыве атомной бомбы в приземном слое атмосферы [24].

Визуализация картины течения с помощью рентгеновских лучей позволила предельно сократить длительность экспозиции и получить четкие изображения формирующихся кольцевых вихрей и вылетающих в воздух тонких конических струй при слиянии с водой капли этанола диаметром  $D = 1.9$  мм [25]. Изменения морфологии картины течения и кинематика кольцевых вихрей прослежены в [26] в широком диапазоне определяющих параметров процесса слияния – диаметра и скорости падающей капли. Обширный список публикаций результатов исследований кольцевых вихрей на начальном этапе скомпилирован в [27].

Асимптотические формулы для расчета скорости движения вихревого кольца в однородной жидкости выведены в [28]. Оценки изменений скорости движения и радиуса всплывающего вихревого кольца, содержащего более легкую жидкость, в однородной или устойчиво стратифицированной среде содержатся в [29]. Расчеты сравнивались с данными наблюдений движения небольшого всплывающего вихревого кольца, содержащего денатурированный спирт, в бассейне, заполненном стратифицированным раствором поваренной соли. Сравнения расчетов и результатов наблюдения движения вихревого кольца и термика (нагретого объема) в стратифицированной атмосфере приведены в [30].

Цветные фотографии повторяющегося процесса деформации погружающегося кольцевого вихря при слиянии капли, образования быстро погружающихся петель, на окончаниях которых формируются новые кольцевые вихри, зарисовки которого были впервые опубликованы в [2], приведены в [31]. Группы вторичных вихрей располагаются ярусами в картине расширяющегося вихревого течения. Одновременное формирование разнонаправленных вихрей наблюдались при падении капель на поверхность жидкости с бегущими капиллярными волнами [32]. Эволюция вихревой картины течения

чений и в интрузивном режиме слияния свободно падающей капли с жидкостью, и в волокнистом импактном режиме, прослежена в [33]. Выразительные фотографии каскадов вихревых систем, наблюдавшихся в воде при погружении капель раствора глицерина различной концентрации, имеющего большую плотность и вязкость, чем принимающая жидкость, приведены в [34].

В большинстве опытов по изучению динамики кольцевых вихрей, образующихся в покоящейся принимающей жидкости, плотность свободно падающей капли незначительно [2, 8, 23, 25, 31] или существенно [34] превосходила плотность принимающей среды. При этом импульс капли, градиент плавучести, обусловленный разностью плотностей контактирующих жидкостей, и градиент давления, создаваемый растущей каверной, действуют в одном направлении. Сформировавшийся вихрь плавно погружается и постепенно замедляется вследствие вязкой диссипации и вовлечения окружающей среды в расширяющееся вихревое течение. Картина вихревых течений при слиянии капли жидкости меньшей плотности, чем у принимающей среды, которая является целью данного исследования, ранее не изучалась.

В данной работе впервые приводятся результаты визуализации картины эволюции течения при слиянии смешивающихся жидкостей – капли менее плотного этанола с частично дегазированной водопроводной водой в интрузивном режиме, когда кинетическая энергия капли меньше или сравнима с ее доступной потенциальной поверхностной энергией (ППЭ). Картина течения отличается от традиционно изучаемой, когда медленно падающая капля жидкости большей плотности плавно втекает в толщу принимающей жидкости и формирует чечевицеобразную интрузию с внутренним тороидальным вихрем. Образующаяся с запаздыванием каверна проталкивает основную часть тонущей интрузии в принимающую жидкость в форме кольцевого вихря [35].

## 1. РАЗМЕРНЫЕ И БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ТЕЧЕНИЯ

Идеи описания природных явлений с учетом уравнений переноса полной энергии [36] получили существенное развитие в [37], где уже в издании 1944 г. в отдельной главе впервые были приведены все фундаментальные уравнения механики жидкостей – дифференциальные аналоги законов сохранения массы, импульса и энергии, с указанием замыкающего уравнений состояния. Полная энергия жидкости включает кинетическую, потенциальную и внутреннюю энергию, “которая”, термодинамический потенциал характеризует внутреннюю энергию. В качестве базовой характеристики состояния среды выбран потенциал Гиббса  $G$ , включающий внутреннюю, поверхностную, химическую и другие виды энергии немеханической природы [38]. Представления традиционных термодинамических величин – плотности, энтропии, давления, температуры, концентрация примесей в качестве производных термодинамических потенциалов приводятся в [38, 39]. В толще жидкости дифференциал потенциала Гиббса имеет вид  $dG = -s_e dT + VdP$  ( $s_e$  – энтропия,  $T$  – температура). Производная потенциала Гиббса  $G$  по давлению  $P$  определяет удельный объем  $V$  и плотность среды  $\rho = 1/V$ .

Дифференциал Гиббса на границах сред с контактной поверхностью площадью  $S_b$  и поверхностным натяжением  $\sigma$ , содержащих растворенные примеси с концентрацией  $S_i$  и химическим потенциалом  $\mu_i$ , имеет вид  $dG = -s_e dT + VdP + S_b d\sigma + \mu_i dS_i$ . При слиянии жидкостей свободная поверхность уничтожается, и компонента потенциальной поверхностной энергии (ППЭ)  $\Delta E = \sigma \Delta S_b$  переходит в другие формы – возмущения давления, температуры, распределения концентрации и энергию механического движения.

Детальные наблюдения в природных и лабораторных условиях позволили установить “зернистую” природу распределения термодинамических потенциалов и других физических величин на поверхности и в толще жидкостей. Вид и размеры элементов многофасеточной структуры – “зерен”, “ячеек”, “волокон” определяются свойствами атомно-молекулярного строения вещества и физическими условиями опытов. Различными экспериментальными методами в толще и на поверхности жидкости выделены ассоциаты – комплексы, клатраты, кластраты, бонды и другие связные объемы физико-химической природы [40–43]. Определены размеры, прослежены параметры естественных процессов формирования и трансформации ассоциатов. Время жизни отдельных элементов ассоциатов, зависящее от состава среды и физических условий опытов, меняется в широких пределах, картина распределения “зерен” постоянно перестраивается, однако собственно “зернистость” сохраняется.

Энергетика ассоциатов, образующих объемы с собственными границами площадью  $S_b^g$ , описывается, по аналогии с учетом свободной контактной поверхности жидкостей, введением дополнительных членов в выражении для дифференциала потенциала Гиббса  $dG_g = -s_e dT + VdP + S_b^g d\sigma_g + \mu_i dS_i$ ,

описывающих ППЭ границ элементов зернистой структуры  $dG_g = S_b^g d\sigma(\text{sub}) g$ . При уничтожении или перестройке элементов структуры поверхностная энергия ассоциатов переходит в другие формы, в том числе и в энергию механического движения жидкости самых малых масштабов (порядка толщины границ ассоциатов). Поперечные масштабы тонких течений быстро увеличиваются под действием диссипативных факторов – вязкости, температуропроводности, диффузии.

Включение потенциалов в систему фундаментальных уравнений позволяет учесть действия различных механизмов передачи энергии на структуру и динамику течений. В их число входят радиационный перенос, макроскопический с течениями или волнами, а также микроскопический – диссипативный и конверсионный. Последний механизм учитывает трансформацию ППЭ, часть которой прямо поступает в тонкие компоненты течений [44]. Функциональные связи между производными потенциала Гиббса  $G = G(\rho, P, T, S_i, S_b^g, \sigma, \sigma(\text{sub}) g)$ , в частности плотности  $\rho = \rho(P, T, S_i)$ , с другими термодинамическими величинами, образуют уравнения состояния, обеспечивающие замыкание системы фундаментальных уравнений [37, 44].

Полные решения линеаризованной системы фундаментальных уравнений механики жидкостей, в которой учитывается стратификация среды и действие диссипативных факторов – вязкости, температуропроводности и диффузии [37, 44], находятся методами теории сингулярных возмущений с контролем выполнения условия совместности [45]. Анализ полных решений системы фундаментальных уравнений в линейном и слабонелинейном приближении показывает, что периодические течения включают волны – крупномасштабные компоненты, которые описываются регулярными решениями дисперсионного соотношения, и лигаменты, определяемые сингулярными компонентами [44, 46]. Лицам соответствуют высокоградиентные волокна и прослойки, которые формируют тонкую структуру среды и характеризуются собственными масштабами. Полные решения составляют основу расширенной классификации структурных компонентов течений, включающей крупномасштабные волны, струи, вихри и тонкие лигаменты.

Молекулярный перенос импульса, температуры и вещества характеризуют коэффициенты динамической  $\mu_i$  и кинематической  $v = \mu/\rho$  вязкости, температуропроводности  $\kappa_T$  и диффузии  $\kappa_S$ . Большая теплоемкость жидкостей позволяет в ряде задач пренебречь температурными эффектами и получать экспериментально проверяемые решения редуцированной системы фундаментальных уравнений, учитывающих гетерогенность жидкости, которую обеспечивает неравномерное распределение концентрации примесей.

Соответственно, в число основных размерных параметров, характеризующих капельные течения, входят потенциалы Гиббса капли  $G_d$ , воздушной среды  $G_a$  и принимающей жидкости  $G_t$  (индексы отмечают принадлежность параметра), плотности  $\rho_{d,a,t}$ , кинематическая  $v_{d,a,t}$  и динамическая  $\mu_{d,a,t}$  вязкости; полные  $\sigma_d^a, \sigma_t^a$  и нормированные на плотность жидкости коэффициенты поверхностного натяжения контактирующих сред  $\gamma_d^a = \sigma_d^a/\rho_d, \gamma_t^a = \sigma_t^a/\rho_t, \text{ см}^3/\text{с}^2$ ; коэффициент диффузии окрашивающей каплю примеси в принимающей жидкости  $\kappa_d$ ; эквивалентный диаметр  $D$ , площадь поверхности  $S_d$ , объем  $V$ , масса  $M$ , высота свободного падения  $H$  и скорость капли  $U$  в момент первичного контакта; потенциальная поверхностная энергия (ППЭ)  $E_\sigma = \sigma S_d$ , кинетическая энергия  $E_k = MU^2/2$ , потенциальная энергия в гравитационном поле с ускорением свободного падения  $g$ .

Полная энергия падающей капли  $E_d = E_p + E_k + E_i + E_\sigma$  складывается из потенциальной энергии  $E_p$ , экстенсивной кинетической энергии с дифференциалом  $dE_k = 0.5\rho U^2 dV$ , внутренней  $E_i$  и ППЭ  $E_\sigma$ , заключенной в приповерхностном шаровом слое толщиной порядка размера молекулярного кластера  $\delta_\sigma \sim 10^{-6} \text{ см}$  объемом  $V_\sigma = \delta_\sigma S_d$  и массой  $M_\sigma = \rho V_\sigma$ . Оценка вклада ППЭ, определяемого изменениями поверхностной энергии структурных компонентов жидкостей физико-химической природы – комплексов, клатратов, кластратов, бондов, войдов и других [44–47], требующая детального изучения микроструктуры среды, здесь не приводится.

В экспериментах время передачи кинетической энергии  $E_k$  и импульса сливающейся с жидкостью капли  $\Delta t = D/U$  составляет несколько миллисекунд и на несколько порядков превышает время конверсии ППЭ  $\Delta t = (\delta_\sigma/U) \sim 10^{-8} \text{ с}$  при уничтожении приповерхностных слоев сливающихся жидкостей толщиной  $\delta_\sigma \sim 10^{-6} \text{ см}$ . Быстрые процессы преобразования ППЭ в другие формы на колышевой границе области слияния жидкостей играют определяющую роль в установлении режима течения [33] и формирования тонкой структуры течения в окрестности границы пятна контакта капли с принимающей жидкостью [16, 48, 49].

Отношения размерных коэффициентов системы фундаментальных уравнений образуют группу базовых временных и пространственных масштабов процесса. Первая группа линейных масштабов

включает капиллярно-гравитационный параметр  $\delta_g^\gamma = \sqrt{\gamma/g}$ , входящий в дисперсионное уравнение коротких поверхностных волн [37], и диссипативно-капиллярные масштабы  $\delta_\gamma^v = v^2/\gamma$ ,  $\delta_\gamma^k = k^2/\gamma$ . Группа линейных масштабов, зависящих от скорости капли, включает прандтлевы  $\delta_U^v = v/U$ ,  $\delta_U^k = k/U$  и капиллярный  $\delta_U^\gamma = \gamma/U^2$  масштабы.

Соответственно, одна часть временных масштабов задачи включает только параметры среды —  $\tau_g^\gamma = \sqrt[4]{\gamma/g^3}$ ,  $\tau_\gamma^k = k^3/\gamma^2$ ,  $\tau_\gamma^v = v^3/\gamma^2$ , другая — размер капли —  $\tau_\gamma = \sqrt{D^3/\gamma}$ ,  $\tau_\gamma^k = kD/\gamma$ ,  $\tau_\gamma^D = vD/\gamma$ , третья — ее скорость —  $\tau_U^D = D/U$ ,  $\tau_g^U = U/g$ . Отношения базовых масштабов длины и времени определяют характерную скорость  $U_v^\gamma = \delta_v^\gamma/\tau_\gamma^v = \gamma/v$ . Свойства дополнительных масштабов, которые появляются при анализе системы фундаментальных уравнений методами теории сингулярных возмущений [44, 47], здесь не обсуждаются.

Отношения однородных масштабов образуют набор безразмерных комбинаций, включающий традиционные числа: Рейнольдса, характеризующие движение капли  $Re_d = UD/v_d$  или течение со скоростью  $u_f$  и масштабом длины  $L_f$  в толще принимающей жидкости  $Re_f = u_f L_f / v_t$ , а также его диффузионный аналог  $Re_k = u_f L_f / k$ ; Фруда  $Fr_d = U^2/gD$ ; Вебера  $We_d = U^2 D / \gamma_d$ ; Бонда  $Bo = D^2 / (\delta_g^\gamma)^2 = gD^2 / \gamma_d^a$ ; Онезорге  $Oh = \sqrt{\delta_\gamma^v / D} = v / \sqrt{\gamma D}$  и так называемое капиллярное отношение  $Ca_U^\gamma = U_d / U_v^\gamma$ . В силу двойственности природы параметров описания свободной поверхности, число Вебера также является также мерой отношения кинетической и поверхностной энергии капли.

Различия физических свойств контактирующих сред характеризуются безразмерными отношениями, составленными по аналогии с числом Атвуда — относительной разностью плотностей  $R_\rho = \frac{\rho_t - \rho_d}{\rho_t + \rho_d}$ , коэффициентов поверхностного натяжения  $R_\sigma = \frac{\sigma_t - \sigma_d}{\sigma_t + \sigma_d}$  и динамических вязкостей  $R_\mu = \frac{\mu_t - \mu_d}{\mu_t + \mu_d}$ .

Степень выраженности влияния быстрых атомно-молекулярных процессов преобразования ППЭ и передачи кинетической энергии капли характеризуют отношения компонентов энергии  $R_E = \frac{E_k}{E_\sigma}$  и их плотностей  $R_W = \frac{E_k M_\sigma}{E_\sigma M}$ . Отношения компонентов энергии  $R_E$  в условиях опытов меняются в широких пределах, плотность поверхностной энергии  $W_\sigma = E_\sigma / V_\sigma$  — всегда большая величина в силу малости толщины области ее локализации  $\delta_\sigma$ .

Большое число безразмерных параметров задачи отражает сложность пространственной картины течений, эволюционирующей под действием нескольких одновременно протекающих процессов с различными временными и пространственными масштабами. При этом макромасштабы характеризуют размеры области наблюдения и длительность регистрации процесса, а базовые микромасштабы определяют требования к выбору пространственного и временного разрешения регистрирующей аппаратуры.

## 2. МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Опыты проведены на модифицированном Стенде для изучения тонкой структуры быстропротекающих процессов (ТБП), входящем в состав Уникальной исследовательской установки УИУ “ГФК ИПМех РАН” [50]. Прослежена эволюция картины течения, образующегося при слиянии с водой окрашенной капли 0.01% раствора электролита (перманганата калия  $KMnO_4$ ) или 95% раствора этанола в интрузивном режиме, когда контактная скорость падающей капли невелика и ее кинетическая энергия меньше ППЭ. Одиночная капля отрывалась от нормального среза сменного капилляра дозатора под действием собственного веса и падала в прозрачный бассейн размером  $10 \times 10 \times 7 \text{ см}^3$  или  $30 \times 30 \times 5 \text{ см}^3$ , заполненный частично дегазированной водопроводной водой. Значения физических параметров рабочих жидкостей приведены в табл. 1.

**Таблица 1.** Физические параметры рабочих жидкостей

	$T, ^\circ\text{C}$	$\rho, \text{г}/\text{см}^3$	$\sigma, \text{г}/\text{см}^2$	$\gamma, \text{см}^3/\text{с}^2$	$\mu, \text{г}/(\text{см} \times \text{с})$	$v, \text{см}^2/\text{с}$
Этанол (95 %)	20	0.81	22.7	28	0.014	0.017
Раствор $KMnO_4$ (0.01 %)	20	1.00	73	73	0.01	0.01

Область наблюдения освещали два многоточечных светодиодных осветителя Optronis MultiLED со световым потоком 7700 лм, световолоконный осветитель Schott KL2500LCD и прожектор ReyLab Xenos RH-1000 мощностью 1 кВт. При подготовке эксперимента внимание уделялось организации светового потока, позволяющего визуализировать тонкую структуру основных элементов течения – интрузии, каверны, вихрей, волн и распределения вещества капли в принимающей жидкости на всех этапах эволюции течения.

Цветная картина течения регистрировалась видеокамерой Optronis CR 300 × 2. Положение горизонтальной линии визирования выбиралось из условия наибольшей четкости границ компонентов регистрируемой картины. Расстояния от линзы до центра области течения выбирались в диапазоне от 12 до 40 см. Размеры пикселя в опытах лежали в диапазоне от 10 до 50 мкм. Выдержка подбиралась минимальной при задании уровня пространственного разрешения, размера регистрируемой области и требуемой освещенности. Во всех опытах скорость съемки составляла 4000 кадров/с. Перед каждым опытом проводилась регистрация масштабного маркера.

После настройки аппаратуры натекающая в капилляр жидкость формировалась на его срезе единичную каплю, которая отрывалась под действием собственного веса и свободно падала в принимающую жидкость. В полете капля перекрывала световой луч в фотодетекторе и запускала видеокамеру с регулируемой задержкой (временной шаг 1 мкс). Контактная скорость оценивалась по длительности задержки сигнала с фотоприемника и измерениям положения капли на трех последних кадрах видеофильма, предшествующих началу втекания капли в принимающую жидкость. Более подробно описание установки приводится в [33].

Регистрировалась начальная фаза течения – первичный контакт и вливание в толщу жидкости свободно падающей капли этанола, слабо подкрашенного спиртовым раствором бриллиантового зеленого, или 0.01% водного раствора перманганата калия  $\text{KMnO}_4$ . Рабочие среды характеризуются следующими значениями базовых параметров:  $R_E = 0.94$ ,  $R_p = 0.105$ ,  $R_\sigma = 0.52$  для капель спирта, и  $R_E = 0.41$ ,  $R_p = -0.001$ ,  $R_\sigma = -0.007$  для капель водного раствора перманганата калия.

### 3. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ КАРТИНЫ СЛИЯНИЯ КАПЛИ ТЯЖЕЛОЙ И ЛЕГКОЙ ЖИДКОСТИ

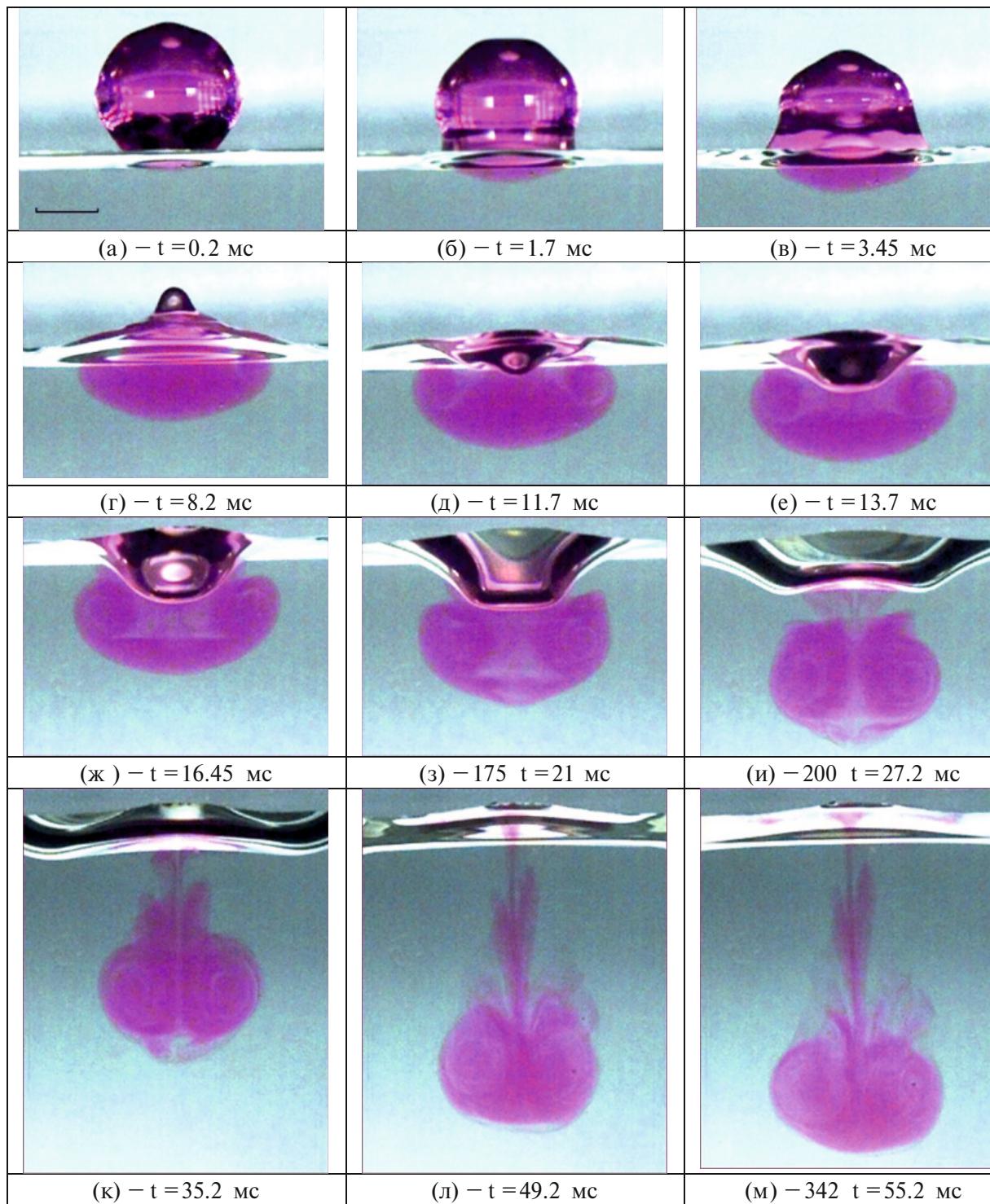
Для демонстрации влияния знака плотностных отношений  $R_p$  различных пар сливающихся смешивающихся жидкостей на структуру вихревого течения были последовательно визуализированы картины слияния с водой свободно падающих капель жидкостей различной плотности при близких условиях опытов. Из большого числа окрашенных прозрачных жидкостей большей, чем у воды плотности, следуя [51], выбран раствор перманганата калия, интенсивная окраска которого позволяет наблюдать эволюцию картины течения при низкой концентрации растворенного вещества – в данных опытах – 0.01% по массе. Этанол,  $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ , обладает меньшей, чем у воды, плотностью, растворяется в любых отношениях. Этанол химически взаимодействует с водой с образованием гидратов.

Проводилась цветная регистрация картины течения в боковой проекции с применением многоточечного освещения, позволяющего сохранить в плоском изображении особенности геометрии трехмерного осесимметричного течения.

#### *3.1. Формирование тороидального вихря в первичной интрузии в процессе слияния капли разбавленного раствора перманганата калия с водой*

Выборка из видеофильма, иллюстрирующего эволюцию картины слияния капли раствора  $\text{KMnO}_4$  с водой при контактной скорости  $U = 30 \text{ см/с}$ , приведена на рис. 1 (светлая поперечная полоса на изображении – образ капиллярного поднятия жидкости на стенке бассейна).

При первичном контакте верхние слои поверхности капли и принимающей жидкости ускоряются освобождающейся при слиянии ППЭ. Тонкий слой объединенных в процессе слияния поверхностных слоев контактирующих жидкостей радиально растекается по поверхности принимающей жидкости и образует окрашенный кольцевой слой, окружающий пятно контакта сливающихся жидкостей на рис. 1а. Оптический образ растекающегося слоя на приводимом рисунке – светлые пятнышки, примыкающие к темной границе окрашенного пятна слияния жидкостей. Объединенные контактные поверхности смешивающихся жидкостей выносятся тонкими быстрыми поверхностными течениями за пределы области слияния. Вылетающие в воздух тонкие струйки жидкости в импактном режиме визуализированы в [25].



**Рис. 1.** Эволюция картины слияния капли раствора  $\text{KMnO}_4$  (концентрация 0.01%) с дегазированной водопроводной водой:  $D = 4.0 \text{ мм}$ ,  $U = 0.3 \text{ м/с}$ ,  $E_\sigma = 3.7 \text{ мкДж}$ ,  $E_k = 1.5 \text{ мкДж}$ ,  $\text{Re} = 1200$ ,  $\text{Fr} = 2.3$ ,  $\text{We} = 5$ ,  $\text{Bo} = 2.15$ ,  $\text{Oh} = 0.0019$ ,  $R_E = 0.41$ ,  $R_\rho = -0.001$ . Длина маркера на (а) – 2 мм.

После удаления поверхностных слоев жидкости объединяются в единую систему, и капля начинает плавно втекать в толщу принимающей жидкости по всей радиально расширяющейся поверхности пятна контакта сред. Объединенная свободная поверхность капли и принимающей жидкости принимает выпуклую форму.

Площадь пятна контакта постепенно увеличивается по мере растекания капли. Плавно втекающая в толщу принимающей жидкости капля образует интрузию чечевичной формы с четкой внешней границей. Расширяющаяся граница контактного диска сливающихся сред формирует кольцевую капиллярную волну, гребень которой визуализирует кривая синяя линия на рис. 1б. Длина капиллярной волны на поверхности жидкости составляет  $\lambda_c^t = 0.7$  мм.

По мере слияния капля растекается, и ее основание на поверхности принимающей жидкости расширяется. На поверхности капли выделяются две темные окружности – гребни кольцевой капиллярной волны длиной  $\lambda_c^d = 0.3$  мм. Жидкость в остатке капли продолжает осциллировать – ее вершина, заостренная на рис. 1а, принимает плоскую форму на рис. 1б и вновь заостренную на следующем кадре. Втекающая в толщу жидкость капли сохраняется в форме чечевицеобразной интрузии (рис. 1в и [33]).

Со временем глубина и диаметр интрузии плавно увеличиваются. Одновременно растет число гребней волн, и на рис. 1г представлены три темных кольцевых линии, визуализирующие их гребни. Со временем бегущие от плоскости слияния вверх по капле кольцевые волны начинают терять аксиальную симметрию, на них появляются округлые впадины и гребни.

Плоская невозмущенная поверхность принимающей жидкости деформируется и выпучивается над областью интрузии (рис. 1г). В ее центре сохраняется остаток капли в форме выступающего столбика диаметром  $d_d^r = 1.31$  мм и высотой  $h_d^r = 1.05$  мм. Началу формирования каверны предшествует быстрое втягивание столбика в толщу жидкости (рис. 1д). Вследствие вовлечения в вихревое течение прозрачной принимающей жидкости окраска интрузии постепенно теряет однородность. В ней появляются два круга диаметром  $d_{cv}^l = 1.3$  и  $d_{cv}^r = 1.6$  мм на расстоянии  $R_{cv}^l = 4.5$  мм от центра до центра, соединенные светлой линией – оболочкой первичного тороидального вихря высотой  $h_{cv}^l = 1.87$  мм (рис. 1д). Появление прозрачных оболочек свидетельствует о захвате тонкого слоя принимающей жидкости в вихревое течение.

Постепенно в центре течения начинает формироваться каверна, которой соответствует темное коническое пятно над центром каверны, окруженное охватывающей депрессией на внутренней кромке разбегающегося поля капиллярных волн на рис. 1е. Размеры интрузии и диаметр ядра первичного тороидального вихря плавно увеличиваются.

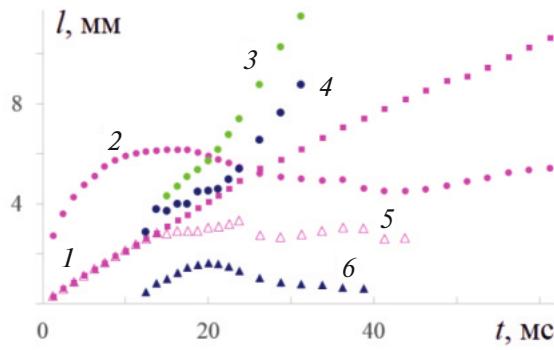
Форма дна каверны быстро меняется – из плоского на рис. 1е становится выпуклым на рис. 1ж и снова плоским на рис. 1з. В нижней части интрузии под основным вихрем начинает формироваться более тонкий дополнительный вихорек – в центре рис. 1з. Светлые прослойки визуализируют его оголовок и ножку. После отрыва от каверны, которая начинает схлопываться под действием плавучести и поверхностного натяжения, интрузия стягивается. Ось дополнительного вихря на подошве интрузии отклоняется от вертикали на угол  $\vartheta_a = 22^\circ$ .

Погружающийся первичный вихрь оставляет окрашенный волокнистый след конической формы. Поверхность жидкости все еще остается выпуклой на (рис. 1и). В данной технике визуализации дно каверны оконтурено светлой линией. Темная полоса под ней – образ депрессии, которая со временем расширяется.

Дополнительный вихорек на дне интрузии довольно быстро деградирует (рис. 1к). При этом спиральная структура светлых полос вовлеченной принимающей жидкости в основное вихревое движение в интрузии становится более контрастной. Около вершины интрузии начинает формироваться кольцевая коническая юбка, выраженная на фотографиях следа медленного кольцевого вихря в лаборатории [8] и быстрого вихревого течения в облаке взрыва в атмосфере [24].

Сформировавшийся первичный кольцевой вихрь с донными “фалдами”, сохраняющий слоистую и волокнистую структуру распределения вещества капли, продолжает погружаться, оставляя окрашенный конический след, отражающий положение области отрыва вещества его донной части. Из сравнения изображений на рис. 1л и рис. 1м следует, что его форма, как и размеры донных петель, несколько изменяются. В целом структура и мелкие особенности картины течения при погружении жидкости более высокой плотности, чем у принимающей среды, согласуются с наблюдаемыми ранее [8, 22, 23, 33].

Временная изменчивость геометрических параметров течения представлена на рис. 2. Нижняя кромка интрузии с постоянной скоростью  $u_{in} = 0.2$  м/с продвигается в толщу жидкости на интервале  $0 < t < 36$  мс и далее  $u_{in} = 0.14$  м/с после сглаживания возмущений свободной поверхности. Темп роста диаметра интрузии со временем падает  $d_{in}(t) = 2.2t^{1/2}$  мм при  $0 < t < 5$  мс или  $d_i(t) = 7.7t/(t + 3)$  мм на большем интервале  $0 < t < 15$  мс (рис. 2, кривая 2), его максимум достигается при  $t = 15$  мс. Далее интрузия несколько сжимается, затем вновь расширяется. Высота интрузии  $\Delta h_{in}$  – расстояние между



**Рис. 2.** Эволюция размеров основных компонентов течения при погружении капли раствора перманганата калия воду: кривая 1 – глубина погружения нижней кромки окрашенной интрузии  $h_{in}(t)$ ; 2 – диаметр интрузии  $d_{in}(t)$ ; 3 – ширина депрессии  $d_d(t)$ ; 4 – диаметр каверны  $d_{ca}(t)$ ; 5 – высота интрузии  $\Delta h_{in}$ ; 6 – глубина каверны  $h_{ca}(t)$ .

ее крайними точками вначале монотонно растет, а после отделения вихря от свободной поверхности меняется незначительно. Скачки в ее значении связаны с отделением слоев интрузии и их диффузией.

Каверна с плоским дном диаметром  $d_{ca}(t) = 2.86$  мм появляется с запаздыванием при  $t = 12$  мс. Со временем диаметр каверны плавно увеличивается  $d_{ca}(t) = 0.29t$  при  $t < 22$  мс,  $d_{ca}(t) = 0.54t$  при  $t > 22$  мс. Глубина каверны вначале растет линейно  $h_{ca}(t) = 0.18t$  при  $t < 12$  мс, затем более медленно  $h_{ca}(t) = 0.45t^{2/3}$  на интервале  $12 < t < 20$  мс, достигает максимума  $h_{ca}^m = 1.63$  мм при  $t = 20$  мс и далее неравномерно убывает  $h_{ca}(t) = 6t^{-1} + 0.2$  на интервале  $20 < t < 39$  мс. Увеличивающаяся со временем ширина депрессии  $d_d(t)$  аппроксимируется двумя отрезками:  $d_d(t) = 0.29t$  на интервале  $0 < t < 22$  мс и  $d_d(t) = 0.54t$  при  $t > 22$  мс.

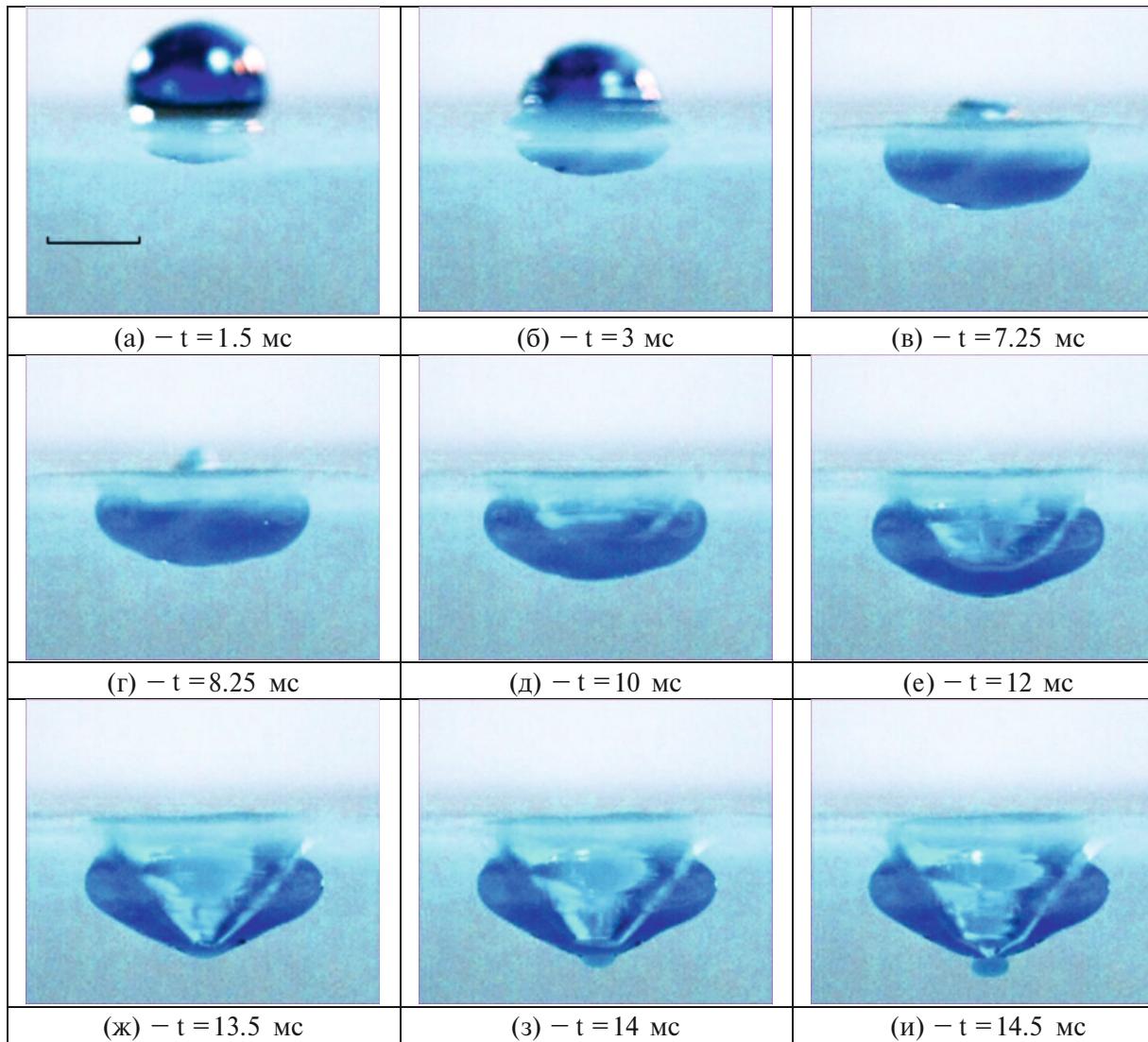
Закономерности эволюции размеров интрузии при растекании в воде капли водного раствора перманганата калия согласуются с измерениями параметров течений при растекании капли раствора чернил, где также отмечена задержка формирования каверны, обусловленная установлением единой выпуклой свободной поверхности на начальном этапе слияния капель смешивающихся жидкостей [33].

### 3.2. Трансформация погружающегося вихря, выброшенного с заостренного дна каверны при слиянии капли этанола с водой, во всплывающее вихревое кольцо

Эволюцию картины течения на начальном этапе слияния капли 95% раствора этанола, падающей в частично дегазированную водопроводную воду, иллюстрирует выборка из видеофильма, представленная на рис. 3. При первичном контакте капля начинает интенсивно растекаться, образуя круговое пятно на поверхности жидкости, и одновременно влияться в толщу принимающей жидкости по всему сечению области контакта (рис. 2а). Нижняя кромка интрузии этанола, химически взаимодействующего с водой с образованием гидратов, не является такой четкой, как при слиянии капли раствора перманганата калия на рис. 1а. На ней выделяется просветленная каемка толщиной  $\delta_{bi} = 0.34$  мм, в ее увеличенном изображении можно выделить более и менее плотно окрашенные короткие волокна толщиной  $\delta_f \sim 0.1$  мм. Размытость и просветленность контура прослеживается на всех последующих изображениях интрузии этанола в воду.

Вследствие задержки начала поступления жидкости и сокращения длительности процесса втекания с удалением от центра течения, интрузия принимает чечевицеобразную форму (схема течения приведена в [33]). Знак кривизны выпуклой нижней кромки формирующейся интрузии сохраняется в течение всего процесса слияния. Светлые пятна на поверхности капли – блики засветки. По мере втекания капли растут и ширина, и глубина интрузии, внешний диаметр которой на рис. 2б превышает диаметр капли контакта. Нерегулярности границы интрузии сохраняются и при формировании кольцевого вихря в ее верхней части, на что указывают просветленные пятна с элементами спиральных волокон на краях области втекающей жидкости (рис. 1в).

Плоское дно каверны появляется в поле наблюдения на рис. 3г. Здесь ядро первичного кольцевого вихря диаметром  $d_{cv}^1 = 0.92$  мм выделяется еще более отчетливо. Постепенно дно растущей каверны, окруженной кольцевым вихрем с диаметром ядра  $d_{cv}^1 = 0.95$  мм и расстоянием между центрами



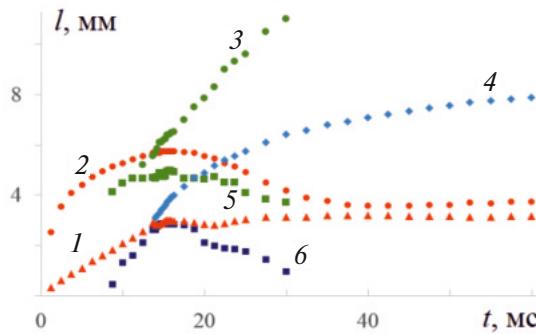
**Рис. 3.** Эволюция картины течения на начальном этапе слияния окрашенной капли 95% этанола с водопроводной водой:  $D = 3.5$  мм,  $U = 0.3$  м/с,  $E_\sigma = 0.87$  мкДж,  $E_k = 0.82$  мкДж,  $Re = 600$ ,  $Fr = 2.6$ ,  $We = 11$ ,  $Bo = 4.3$ ,  $Oh = 0.0055$ ,  $R_E = E_k/E_\sigma = 1.064$ ,  $R_\rho = 0.1$ ,  $R_\sigma = 0.007$ . Длина маркера на (а) – 2 мм.

дисков сечения  $2R_v^1 = 4.1$  мм, принимает сферическую форму (рис. 3д). Подтекающая принимающая жидкость начинает оттеснять верхнюю кромку интрузии от свободной поверхности.

Взаимодействие растущей каверны с окружающей интрузией легкой жидкости капли, приводит к существенному изменению картины течения на рис. 3г–е по сравнению со слиянием более тяжелой на рис. 1г–е. При погружении капли поверхность принимающей жидкости остается плоской. Растущая каверна принимает коническую форму с углом при вершине  $\varphi_{ca} = 107^\circ$  при  $t = 13$  мс. Нижняя кромка интрузии также приобретает коническую форму с углом при вершине  $\varphi_{in} = 125^\circ$ . В этой фазе существенно отличаются и формы легкой интрузии  $R_\rho > 0$  и типичной интрузии более тяжелой жидкости капли, когда  $R_\rho < 0$ , фотография которой приведена выше на рис. 1 и в [23, 25, 33].

Со временем углубляющаяся каверна заметно искажает геометрию облегающей интрузии, в верхней части которой сохраняется кольцевой вихрь, которому на рис. 3ж соответствуют просветленные диски диаметрами  $d_{cv}^l = 1.2$  мм слева и  $d_{cv}^r = 1.12$  мм справа. При этом толщина остатка интрузии – окрашенного слоя в центре течения, не превышает  $h_{in} = 0.25$  мм.

В распределении пигмента на стенках каверны заметны элементы кольцевых структур в верхней и вертикальных волокон в нижней части каверны. В тороидальном вихре, сохраняющимся в верхней части интрузии на рис. 3з, также выделены диски диаметрами  $d_{cv}^{1l} = 1$  мм слева и  $d_{cv}^{1r} = 0.9$  мм



**Рис. 4.** Эволюция размеров структурных компонентов картины слияния капли этанола с водой: линии 1, 2 – глубина  $h_{in}(t)$  и диаметр  $d_{in}(t)$  интрузии; 3 – диаметр депрессии  $d_d(t)$ ; 4 – глубина нижней кромки погружающегося объема  $h_{2d}(t)$ ; 5, 6 – диаметр  $d_{ca}(t)$  и глубина  $h_{ca}(t)$  каверны.

справа. При этом толщина окрашенного слоя – остатка интрузии в центре течения, не превышает  $h_{in} = 0.17$  мм.

Далее кромка конического дна начинающей стягиваться каверны уплощается и под ним в течение  $\Delta t = 0.5$  мс формируется компактный частично обесцвеченный объем жидкости диаметром  $d_{2s} = 0.9$  мм (рис. 3ж). Конус каверны глубиной  $h_{ca} = 2.86$  мм при этом несколько расширяется, угол при ее основании становится равным  $\varphi_{ca} = 118^\circ$ , угол раскрытия нижней конической поверхности интрузии равен  $\varphi_{in} = 124^\circ$  (рис. 3з). Диаметры сечений первичного тороидального вихря в верхней части интрузии практически не меняются и равны  $d_{cv}^l = 0.98$  мм,  $d_{cv}^r = 0.86$  мм. Далее окрашенный объем, принимающий сферическую форму, выталкивается вниз, в толщу жидкости.

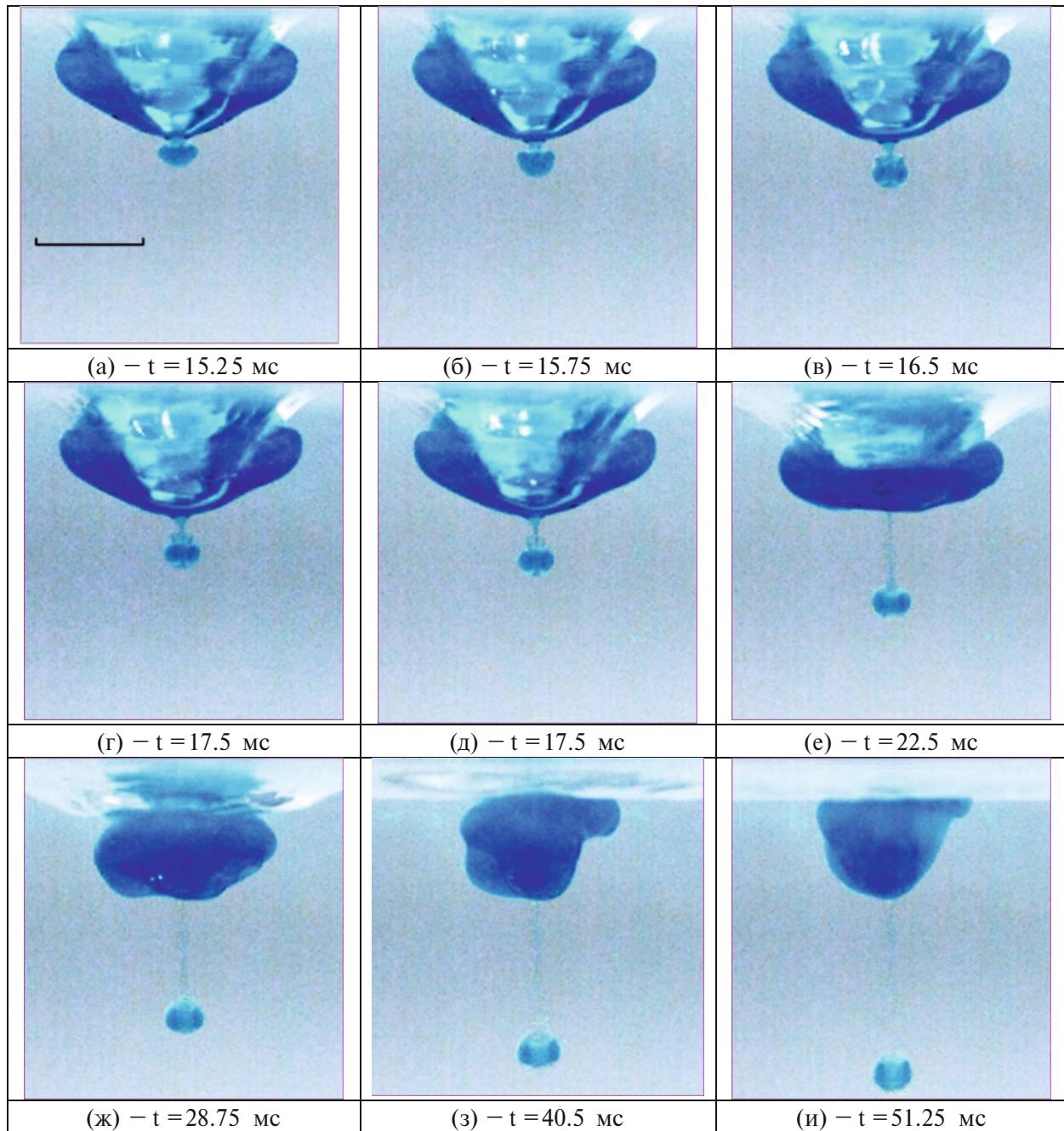
Временная изменчивость параметров геометрии течения представлена на рис. 4. Нижняя кромка интрузии продвигается в толщу жидкости с постоянной скорость  $u_{in} = 0.2$  м/с на интервале  $0 < t < 16$  мс. После достижения экстремума интрузия несколько стягивается, при  $t > 16$  мс ее высота почти стабилизируется  $h_{in}(t) = 0.01t + 2.6$  мм. Темп роста диаметра интрузии со временем падает, максимум ее размера  $d_{in}^{max}(t) = 5.76$  мм достигается при  $t = 16.5$  мс. Далее интрузия несколько сжимается  $d_{in}(t) = 90t^{-1} + 1.2$  мм, затем вновь расширяется. Высота интрузии – расстояние между ее крайними точками вначале монотонно растет, а после отделения вихря от свободной поверхности меняется незначительно.

Каверна с плоским дном диаметром  $d_{ca} = 4.14$  мм появляется с запаздыванием при  $t = 8.5$  мс. На интервале  $8.5 < t < 16$  мс ее диаметр неравномерно увеличивается, достигает максимума при  $t = 16$  мс и далее неравномерно убывает. Глубина растущей каверны достигает максимума при  $t = 16$  мс и далее медленно спадает.

На второй стадии эволюции картины течения, когда происходит коллапс каверны, начинается стягивание интрузии, и появляются новые структурные компоненты, форму которых иллюстрируют выборки из видеофильма, представленные на рис. 5. В этой фазе формы легкой интрузии при  $R_p > 0$  и типичной интрузии более тяжелой жидкости капли, представленной на рис. 1 ( $R_p < 0$ ) заметно отличаются. В ходе дальнейшей эволюции в картине течения наблюдается погружение и остановка компактного объема легкой жидкости, образующего вторичную легкую интрузию.

Здесь коническая каверна с углом при вершине  $\varphi_{ca} = 118^\circ$  окружена деформированным остатком интрузии, нижняя кромка которой также приобретает коническую форму с углом раскрытия  $\varphi_{in} = 139^\circ$  (рис. 5а). Высота интрузии продолжает увеличиваться, угол при основании нижней кромки интрузии равен  $\varphi_{in} = 137^\circ$  (рис. 5б). В распределении пигmenta на стенках конической каверны выделены кольцевые структуры в верхней и вертикальные в нижней части изображения (рис. 5а, б).

Сформировавшийся объем жидкости полностью отделяется от кромки дна каверны при  $t = 15.25$  мс (рис. 5а). С удалением погружающийся объем принимает типичную форму вихря на толстой ножке с выпуклым оголовком диаметром  $d_{2v} = 0.9$  мм и плоским дном. С интрузией вихрь соединяет тонкий цилиндрический след, который, в силу оптической прозрачности, на приводимых фотографиях представлен двумя тонкими вертикальными полосами на краях, где лучи света проходят по касательной к окрашенной поверхности. Ширина следа в сужении за погружающимся легким вихрем не превышает  $\delta_w < 0.15$  мм.



**Рис. 5.** Эволюция картины течения на этапе погружения выброшенного со дна каверны легкого окрашенного вихря с этанолом на интервале  $15.25 < t < 51.25$  мс. Параметры опыта приведены на рис. 3. Длина маркера на (а) – 2 мм.

После достижения максимальной глубины  $h_{ca}(t) = 2.87$  мм дно каверны и нижняя кромка интрузии начинают скругляться (рис. 5в). Постепенно распределение краски в погружающемся объеме с двумя темными ядрами и прозрачной оболочкой принимает вид, типичный для сферического вихря. Между погружающимся сферическим объемом и дном каверны остается окрашенная цилиндрическая “шейка” высотой  $h_{ne} = 0.3$  мм и диаметром  $d_{ne} = 0.13$  мм (рис. 5г).

С началом схлопывания каверны оболочка, оконтуривающая первичную интрузию, все более просветляется. Диффузность границы области интрузии этанола подчеркивает различие процессов слияния раствора вещества, химически реагирующего с принимающей жидкостью, и химически нейтрального раствора электролита [33].

При коллапсе дно каверны скругляется, диаметр увеличивается. При этом всплывающая вместе с каверной более легкая интрузия, на периферии которой все еще прослеживаются два круга диаметром  $d_{cv}^l = 0.8$  мм,  $d_{cv}^r = 0.93$  мм, подтекает под дно каверны (рис. 5д). Вокруг каверны начинает формироваться коническая депрессия.

Постепенно погружающийся объем принимает вид деформированного сферического вихря диаметром  $d_{vs} = 0.9$  мм с выпуклой головной частью и вогнутой донной, к которой примыкает цилиндрический след диаметром  $d_{vw} = 1.5$  мм (рис. 5е). В поперечном распределении красителя в погружающемся вихре четко выражены две оптически более плотные области, которые можно интерпретировать как сечения внутреннего вихревого кольца. Погружающийся вихорек практически не увеличивается в размерах, медленно теряет пигмент и оставляет быстро исчезающий след (рис. 5е). При этом перестраивающаяся первичная интрузия собирается в плоский вертикальный цилиндр с остатком вихревого кольца во внешней части, примыкающий к плоскому дну каверны. Горизонтальный размер конической депрессии быстро увеличивается.

По мере схлопывания каверны охватывающая ее интрузия деформируется все сильнее и теряет аксиальную симметрию. Плотность окраски интрузии теряет однородность, в ней выражена более симметричная центральная часть – окрашенный образ каверны. Движение погружающегося вихря начинает замедляться (рис. 5ж).

В процессе коллапса каверны первичная интрузия стягивается и преобразуется в компактный конический объем в центре картины течения (рис. 5з). Верхнюю часть интрузии заполняет остаток вихря, а в нижней – воспроизводится образ каверны.

Погружающийся вихорек останавливается на расстоянии  $H_{2i} = 4.87$  мм от нижней кромки интрузии и образует вторичную интрузию диаметром  $d_{2i} = 0.5$  мм и высотой  $h_{2i} = 0.28$  мм, внешняя часть которой имеет форму, близкую к цилиндрической (рис. 5и). Остаток легкой жидкости в центре постепенно вытягивается и отделяется от оболочки.

Колеблющаяся первичная интрузия, форма которой непрерывно изменяется, растекается вдоль свободной поверхности жидкости.

Картины эволюции течения дополняются данным измерений размеров погружающегося вихря, представленными на рис. 6. После отделения от каверны на интервале  $14 < t < 15.5$  мс размеры вихря линейно растут со временем, диаметр  $d_{sv} = 0.11t$  и высота  $h_{sv} = 0.18t$  достигают своих максимальных значений  $d_{sv}^m = 0.96$  мм,  $h_{sv}^m = 0.69$  мм при  $t = 15.25$  мс и далее нерегулярно меняются возле средних значений  $\bar{d}_s = 0.91$  мм,  $\bar{h}_s = 0.66$  мм.

При этом диаметр вихря увеличивается незначительно (кривая 1 на рис. 6), а высота – довольно заметно (кривая 2 на рис. 6). Во время погружения вихрь нерегулярно осциллирует при этом его диаметр несколько уменьшается ( $d_{sv}(t) = -0.004t + 1$  мм при  $t > 37$  мс), а нестационарно меняющаяся высота увеличивается ( $h_{sv}(t) = 0.013t + 0.57$  мм при  $t > 32$  мс). Слабая и нерегулярная изменчивость размеров погружающегося вихря не согласуется с оценками для плавучих вихрей, приведенными в [29].

Из вида графиков на рис. 7 следует, что глубина погружения нижней кромки выброшенного вихря монотонно растет со временем и аппроксимируется выражением  $h_{2d}(t) = 3.1t^{1/4}$ .

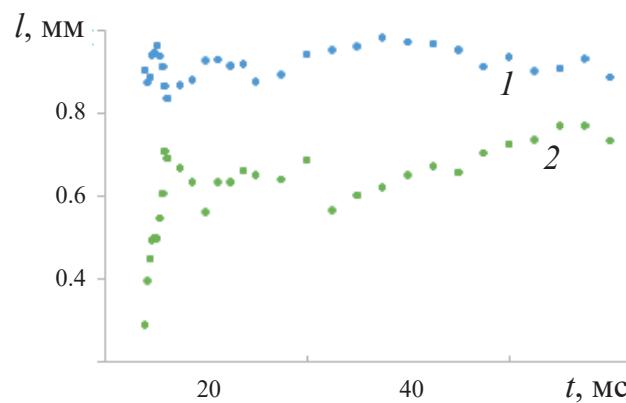


Рис. 6. Эволюция размеров погружающегося вихря: кривые 1, 2 – диаметр  $d_{sv}$  и высота  $h_{sv}$ .

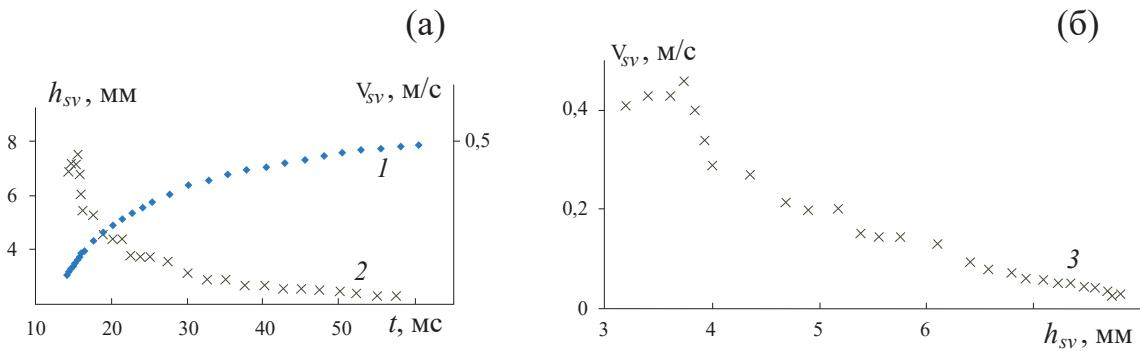


Рис. 7. Параметры движения погружающегося вихря: (а) зависимости глубины  $h_{sv}$  (1) и скорости погружения нижней кромки  $v_{sv}$  (2) от времени  $h_{2d}(t) = 3.1t^{1/4}$ ; (б) зависимость скорости погружения  $v_{sv}$  от глубины  $h_{sv}$ .

Скорость погружения вихря в течение нескольких первых микросекунд его движения несколько увеличивается, а далее убывает под влиянием действия плавучести, обусловленной разностью плотностей жидкостей в содержащем этанол вихре и окружающей воде. В зависимости скорости погружения вихря от глубины, приведенной на рис. 7б, выражен рост и крутое падение на начальном участке и монотонное уменьшение на основной траектории.

Выборки из видеофильма, иллюстрирующие картину течения на заключительной стадии всплытия и растекания интрузии вдоль свободной поверхности, формирования всплывающего объема легкой жидкости и его трансформации в растущий кольцевой вихрь, приведены на рис. 8 (масштаб изменен).

В остатке первичной интрузии овальной формы, примыкающей к свободной поверхности, выражена внешняя слабо окрашенная оболочка толщиной до  $\delta_{en} = 0.3$  мм и более плотно окрашенное ядро. Остановившийся погружающийся объем более легкой жидкости образует вторичную интрузию сферической формы, в которой выражены две темные прослойки — образы окрашенного цилиндра высотой  $h_{2in} = 0.62$  мм и диаметром  $d_{2in} = 0.87$  мм, содержащие легкую жидкость, содержащуюся в деформированном ядре погружающегося вихря (рис. 8а).

Со временем ширина светлой оболочки основной приповерхностной интрузии растет и через  $\Delta t = 16.5$  мс ее толщина достигает  $\delta_{en} = 0.5$  мм (рис. 8б). Из центра вторичной интрузии под действием плавучести начинает выдавливаться более легкая жидкость. В донной части интрузии образуется прозрачная впадина, а на вершине появляется окрашенный выступ конической формы (рис. 8б).

Далее высокоградиентные прослойки вторичной интрузии раскрываются и принимают коническую форму (рис. 8в). В верхней части всплывающего объема формируется плотно окрашенный объем, содержащий этанол. Первичная интрузия разделяется на два более плотно окрашенных объема, разделенных областью слабоокрашенной жидкости с элементами тонких более плотно окрашенных петель.

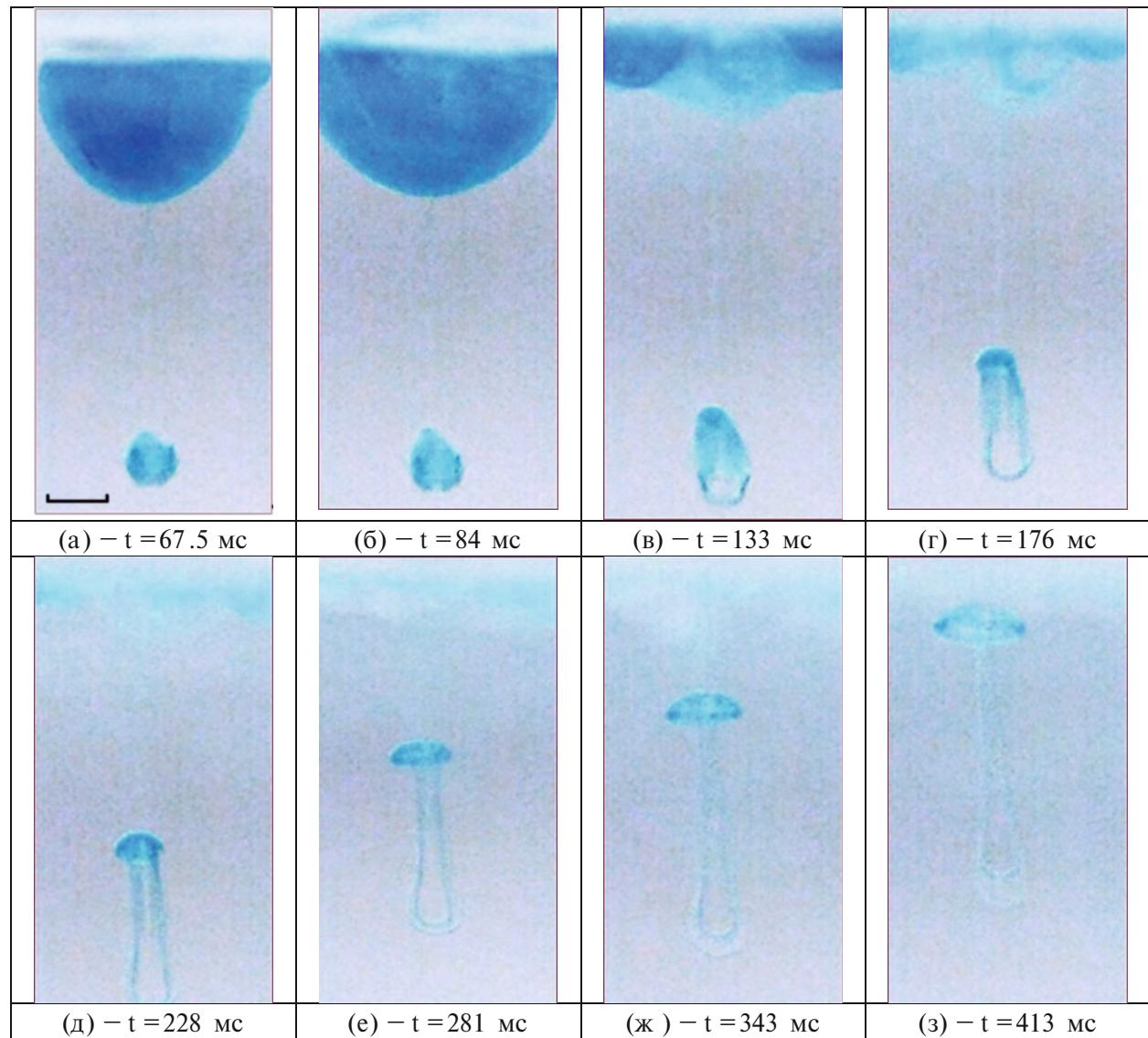
По мере движения в головной части всплывающего объема начинает формироваться кольцевой вихрь с выпуклой вершиной, цилиндрическая оболочка которого остается связанный с коническим остатком вторичной интрузии (рис. 8г). Центральная область течения окрашена менее плотно, чем оболочка.

Первичная интрузия продолжает активно растекаться в тонком слое под свободной поверхностью, в котором присутствуют окрашенные петли.

Картина всплывающего течения преобразуется от кадра к кадру на рис. 8в—е — головная часть приобретает грибообразную форму с выпуклой передней и вогнутой задней кромкой, медленно всплывающая оболочка вторичной интрузии — бутылкообразную. Оба элемента течения связывает цилиндрический след за головным вихрем.

Диаметр цилиндрического следа в области контакта с головным вихрем прогрессивно уменьшается (рис. 8д—е). В то же время диаметр остатка оболочки интрузии, образующий основания следа, форма которого становится все более симметричной, увеличивается.

На заключительной стадии процесс слияния капли этанола с водой, представленной на рис. 8ж, з, растекающаяся первичная интрузия смешивается с принимающей жидкостью. Полная толщина окрашенного слоя, содержащего пигмент, уменьшается, окраска просветляется. Толщина диффузной



**Рис. 8.** Заключительная стадия процесса слияния капли 95% раствора этанола с водой: растекание первичной интрузии вдоль свободной поверхности и всплытие вихря, оставляющего окрашенный цилиндрический след. Длина маркера на (а) – 1 мм.

границы, оконтуривающей более плотно окрашенные части интрузии, неравномерно увеличивается. Сравнения структуры и геометрии: высоты, формы нижней границы первичной интрузии, интенсивности окраски на заключительных кадрах, приведенных на рис. 5 и 8 иллюстрируют сложность многомасштабных гидродинамических и физико-химических процессов, одновременно протекающих в области контакта этанола с водой.

Выброшенное в жидкость кольцо практически неизменного размера замедляется, останавливается и образует вторичную интрузию, (кривая 1, рис. 9) которая после некоторой паузы начинает всплывать с постоянной скоростью (кривая 2, рис. 9).

Далее головная часть всплывающей вторичной интрузии, последовательно меняющая свою форму, отделяется от оболочки вторичной интрузии и перестраивается во всплывающее вихревое кольцо. Диаметр головного вихря со временем равномерно увеличивается (кривая 3, рис. 9) и аппроксимируется функцией  $d_{rv}(t) = 0.004t$  мм или  $d_{rv}(t) = 8 \cdot 10^{-6}t^2 + 0.37$  мм. Увеличивающаяся толщина вихря, которая аппроксимируется функцией  $\delta_{rv}(t) = 0.0018t$  (кривая 4, рис. 9,) меняется менее регулярно.

Изменение высоты окрашенной границы области всплывающей жидкости на рис. 8 г–з подчеркивает различие скоростей движения головного кольцевого вихря и донной части остатка интрузии легкой жидкости, которая постепенно принимает бутылкообразную форму.

Эволюцию положения нижней кромки остатка интрузии иллюстрирует кривая 1, рис. 10, которая аппроксимируется функцией  $h_l(t) = -0.008(t) + 8.3$  мм при  $t > 127$  мс, Положение верхней кромки всплывающего вихря показывает кривая 2, рис. 9, которая представляется функцией  $h_{rv}(t) = -0.02(t) + 6.7$  мм при  $t > 102$  мс).

В центре следа формируется прозрачное ядро, образованное захватываемой вихрем принимающей жидкости. В структуре оболочки следа выражен плотно окрашенный внутренний слой с высоким содержанием этанола и более прозрачный внешний слой, отделенные четкими границами. Толщины слоев со временем растут. Выпуклая фронтальная оболочка всплывающего вихря постепенно просветляется, кольцевое ядро остается темным. Общий контраст окрашенной и фоновой частей течения падает вследствие диффузии веществ и химической реакции этанола с водой.

В зависимости скорости всплытия вихря  $u_{sv}$ , формирующегося из вторичной интрузии, от глубины  $h_{sv}$ , приведенной на рис. 11, отмечается быстрое ускорение на начальном участке трансформации

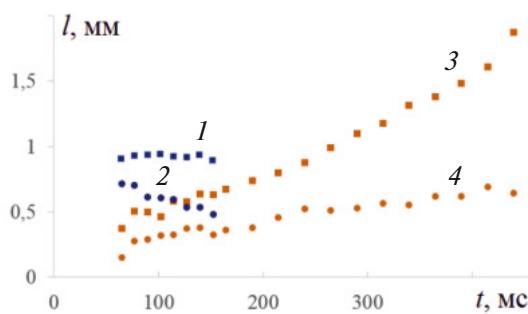


Рис. 9. Геометрия всплывающего вихря: 1, 2 – диаметр  $d_{2in}$  и высота  $h_{2in}$  вторичной интрузии; 3, 4. – диаметр  $d_{rv}$  и толщина  $\delta_{rv}$  всплывающего вихревого кольца.

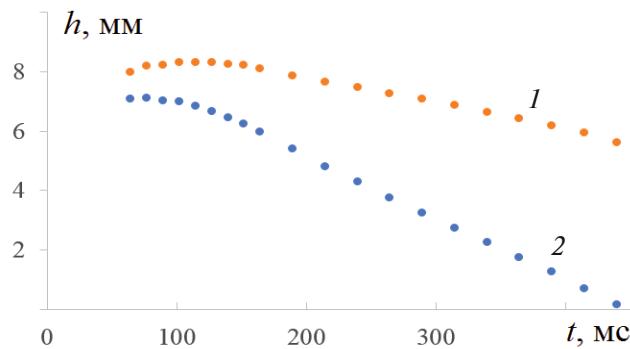


Рис. 10. Параметры движения всплывающего вихря и вторичной интрузии: зависимости глубины нижней кромки интрузии  $h_l$  (1) и глубины вершины вихря  $h_{rv}$  (2) от времени.

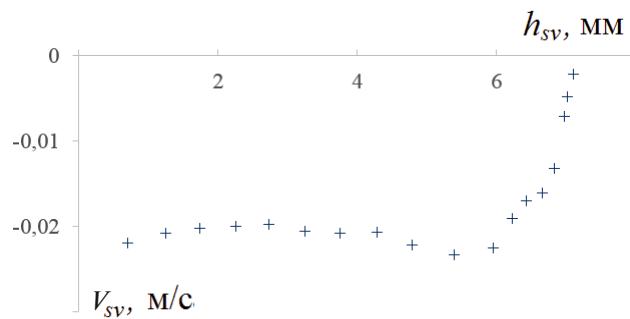


Рис. 11. Зависимость скорости всплытия вихревого кольца от глубины.

легкого объема в вихревое кольцо и незначительные вариации около постоянного значения по мере всплытия с увеличением диаметра вихря  $d_{rv}$ .

Зависимости основных параметров движения кольца — диаметра  $d_{rv}$  и скорости всплытия  $u_{sv}$  также отличаются от приведенных в [29].

#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Состав контактирующих жидкостей, преобразования термодинамических потенциалов и знак плотностного отношения  $R_p$  существенно влияют на динамику и структуру течения, формирующуюся при слиянии свободно падающей капли с покоящейся принимающей жидкостью в интрузивном режиме при  $R_E < 1$ .

Слияние с водой капель более плотной жидкости (в данных опытах — разбавленного раствора перманганата калия, в ранее выполненных опытах использовались растворы родамина [8], пищевого красителя [19], перманганата калия KMnO<sub>4</sub> [20], флюоресцеина [22, 26], ализариновых чернил [31–33]) происходит по традиционному сценарию. Процесс слияния начинается с выноса контактной поверхности за границу пятна втекания капли и образования общей выпуклой свободной поверхности жидкостей. Втекающая в толщу принимающей жидкости капля образует интрузию, в которой формируется торOIDальный вихрь, частично захватывающий принимающую жидкость. Каверна, формирующаяся с запаздыванием, имеет вначале плоское, позднее округлое дно. Образующийся кольцевой вихрь, захватывает вещество интрузии и погружается под действием избыточной плотности, инерции и градиента давления, создаваемого деформируемой поверхностью жидкости. По мере погружения размеры вихревого кольца монотонно растут.

Свободно падающая капля 95% этанола, смешивающегося и химически реагирующего с принимающей средой, при слиянии с водой также втекает в толщу жидкости и образует всплывающую интрузию с торOIDальным вихрем. Начальный этап формирования вихря визуализирован в [25]. Интрузия легкой жидкости стремится примкнуть к свободной поверхности и деформирует каверну, которая принимает коническую форму. С окончания конической каверны в толщу жидкости выбрасывается компактный объем, содержащий легкий этанол. Объем постепенно преобразуется в погружающийся вихрь, размеры которого практически сохраняются во время движения. Вихрь оставляет тонкий слабо окрашенный след. Постепенно вихрь останавливается и трансформируется во вторичную интрузию с неравномерным распределением окраски. Далее центральная часть интрузии выдавливается из оболочки, начинает всплывать и трансформируется в кольцевой вихрь. Цилиндрический след вихря образует единую систему с остатком оболочки вторичной интрузии, принимающей бутылкообразную форму. Диаметр всплывающего кольцевого вихря практически линейно растет со временем. Первичная интрузия энергично растекается вдоль свободной поверхности и растворяется в принимающей жидкости.

Свойства движущегося по инерции погружающегося вихря, содержащего этанол, и всплывающего, сформировавшегося из покоящейся интрузии после его остановки, заметно отличаются. Вынужденно движущийся вихрь сохраняет свои размеры и оставляет тонкий слабо окрашенный след. Всплывающий вихрь энергично расширяется и оставляет более плотно окрашенный цилиндрический след.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методом скоростной цветной видеорегистрации при многоточечном освещении прослежена эволюция картины течения при слиянии в интрузивном режиме капель 0.01% раствора перманганата калия и 95% этанола, подкрашенного бриллиантовым зеленым.

Основным элементом картины течения при слиянии капли раствора перманганата калия является погружающийся в толщину жидкости вихрь, формирующийся из тонущей первичной интрузии, ранее неоднократно изученный экспериментально для различных пар веществ, растворы которых имеют большую плотность, чем принимающая жидкость.

В более сложной картине течения при слиянии капли этанола формируется всплывающая интрузия, включающая кольцевой вихрь. Интрузия обжимает растущую каверну, которая принимает коническую форму. При достижении максимальной глубины с окончания каверны в толщу жидкости выбрасывается объем легкой жидкости, трансформирующийся в погружающийся вихрь. Вынужденно

погружающийся вихрь практически сохраняет свои размеры. Остановившийся вихрь образует вторичную интрузию, из центра которой начинает всплывать легкая жидкость. Постепенно всплывающая жидкость трансформируется в вихревое кольцо. Диаметр и толщина всплывающего вихря линейно растут со временем.

Представляет интерес более детальное изучение перестройки распределений термодинамических потенциалов и их производных – термодинамических величин, на структуру и динамику течений при слиянии свободно падающей капли и в интрузивном, и в других режимах течений.

Работа выполнена на модернизированных стендах Уникальной исследовательской установки “ГФК ИПМех РАН” в рамках государственного задания, номер госрегистрации: 124012500442-3.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rogers W.B.* On the formation of rotating rings by air and liquids under certain conditions of discharge // Amer. J. Sci., Second Ser. 1858. V. 26. P. 246–258. <https://biodiversitylibrary.org/page/36868460>
2. *Thomson J.J., Newall H.F.* On the formation of vortex rings by drops falling into liquids, and some allied phenomena // Proc. R. Soc. London. 1885. V. 29. P. 417–436. <https://doi.org/10.1098/rspl.1885.0034>
3. *Thompson D. W.* On Growth and Form. Cambridge University Press. Cambridge. UK. 1917. 793 p.
4. *Edgerton H.E., Killian Jr. J.R. Flash.* Hale, Cushman and Flint: Boston, USA, 1939. 203 p.
5. *Thoroddse, S.T.; Etoh T.G.; Takehara K.* High-speed imaging of drops and bubbles // Ann. Rev. of Fluid Mech. 2008, 40(1), 257–285. DOI:10.1146/annurev.fluid.40.111406.102215.
6. *Versluis M.* High-speed imaging in fluids // Exp. Fluids. 2013. V.54(2). P. 1–35.
7. *Okabe J., Inoue S.* The Generation of Vortex Ring. Kyushu Univ., Rep. Res. Inst. Appl. Mech. 1960, 8(32), 91–101.
8. *Okabe J.; Inoue S.* The generation of vortex rings, II. Rep. Res. Inst. Appl. Mech., Kyushu Universit. 1961, V. 9. P. 147–161
9. *Batchelor G. K.* An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge University Press. Cambridge UK. 1967. 615 p.
10. *Chapman D., Critchlow P.* Formation of vortex rings from falling drops // J. of Fluid Mech. 1967. V. 29(1). P. 177–185.
11. *Brutin D.* Drop impingement on a deep liquid surface: study of a crater's sinking dynamics. C. R. Mecanique. 2003. V. 331. P. 61–66. DOI:10.1016/S1631-0721(02)00014-1
12. *Gao T.-C., Chen R.-H., Pu J.-Y., Lin T.-H.* Collision between an ethanol drop and a water drop // Experiments in Fluids. 2005. V. 38. P. 731–738 DOI 10.1007/s00348-005-0952-1.
13. *Wal R.L.V., Berger G.M., Mozes S.D.* The splash/non-splash boundary upon a dry surface and thin fluid film // Experiments in Fluids. 2006. V.40. P. 53–59. DOI 10.1007/s00348-005-0045-1
14. *Zen T.-S., Chou F.-C., Ma J.-L.* Ethanol drop impact on an inclined moving surface // ICHMT. 2010. V. 37. P. 1025–1030. doi:10.1016/j.icheatmasstransfer.2010.05.003.
15. *Bouchard D. J., Andredaki M., Georgoulas A., Marengo M., Chandra S.* Penetration characteristics of a liquid droplet impacting on a narrow gap: Experimental and numerical analysis // Phys. Fluids. 2022. V. 34, 057111; <https://doi.org/10.1063/5.0091045>
16. *Thoraval M.-J., Takehara K., Etoh T. G., Thoroddsen S.T.* Drop impact entrapment of bubble rings // J. Fluid Mech. 2013. V. 724. P. 234–258. DOI:10.1017/jfm.2013.147
17. *Liang G., Mudawar I.* Review of mass and momentum interactions during drop impact on a liquid film // Int. J. Heat Mass Transf. 2016. V.101. P. 577–599. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.05.062>
18. *Kirar P.K., Alvarenga K., Kolhe P., Sahu K.C.* Coalescence of drops on the free-surface f a liquid pool at elevated temperatures // Phys. Fluids. 2020. V. 32, 052103. DOI: 10.1063/5.0007402
19. *Rodriguez F., Mesler R.* The penetration of drop-formed vortex rings into pools of liquid // J. of Colloid and Interface Sc. 1988. V. 121(1). P. 121–129
20. *Durst F.* Penetration length and diameter development of vortex rings generated by impacting water drops // Experiments in Fl. 1996. V. 21. P. 110–117
21. *Dooley B., Warncke A., Gharib M. et al.* Vortex ring generation due to the coalescence of a water drop at a free surface // Experiments in Fl. 1997. V. 22. P. 369–374

22. Peck B., Sigurdson L., Faulkner B., Buttar I. An apparatus to study drop-formed vortex rings // Meas. Sci. Technol. 1995. V. 6(10). P. 1538–1545
23. Peck B., Sigurdson L. The three-dimensional vortex structure of an impacting water drop // Phys. of Fluids. 1994. V. 6(2). P. 564–576
24. Sigurdson L. Atom bomb/water drop (P. 78). In: Samimy M., Breuer K. S., Leal L.G., Steen P. H. A Gallery of Fluid Motion. Cambridge University Press. Cambridge, UK. 2003. 128 p.
25. Lee J.S., Park S.J., Lee J.H., Weon B.M., Fezzaa K., Je J.H. Origin and dynamics of vortex rings in drop splashing // Nature Commun. 2015. V. 6(1). DOI:10.1038/ncomms9187
26. Saha A., Wei Y., Tang X., Law C. K. Kinematics of vortex ring generated by a drop upon impacting a liquid pool // J. of Fluid Mech. 2019. V. 875, P. 842–853. DOI:10.1017/jfm.2019.503
27. Meleshko V., Aref H. A bibliography of vortex dynamics 1858–1956 // Advances in Applied Mechanics. 2007. V. 41. P. 197–292. DOI:10.1016/s0065-2156(07)41003-1.
28. Fukumoto Y., Moffatt H.K. Motion and expansion of a viscous vortex ring. Part 1. A higher-order asymptotic formula for the velocity // J. Fluid Mech. 2000. V. 417. P. 1–45. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112000008995>.
29. Turner, J. S. Buoyant Vortex Rings. Proceedings of the Royal Society A. 1957. V. 239(1216). P. 61–75. doi:10.1098/rspa.1957.0022
30. Turner, J. S. Buoyancy effects in fluids. 1980. Cambridge University Press. Cambridge, UK. 412 p.
31. Степанова Е.В., Чашечкин Ю.Д. Перенос маркера в составном вихре // МЖГ. 2010. №6. С. 12–29 Stepanova E. V., Chashechkin Yu. D., Marker transport in a composite vortex // Fluid Dyn. 2010. V. 45 (6). P. 843–858. DOI: 10.1134/S0015462810060025
32. Чашечкин Ю. Д. Перенос вещества окрашенной капли в слое жидкости с бегущими плоскими гравитационно–капиллярными волнами // Известия РАН. ФАО. 2022. Т. 58, № 2. С. 218–229. DOI: 10.31857/S0002351522020031 Chashechkin Yu. D. Transfer of the substance of a colored drop in a liquid layer with travelling plane gravity–capillary waves // Izvestiya, AOP. 2022. V. 58 (2). P. 188–197. DOI: 10.1134/S0001433822020037
33. Chashechkin Yu. D., Ilinykh A. Y. Intrusive and impact modes of a falling drop coalescence with a target fluid at rest // Axioms. 2023. V. 12 (4). P. 374. DOI:10.3390/axioms12040374
34. Zhang Y., Mu Z., Wei Y., Jamil H., Yang Y. Evolution of the heavy impacting droplet: Via a vortex ring to a bifurcation flower // Phys. of Fluids. 2021. V. 33. P. 113603. <https://doi.org/10.1063/5.0064072>
35. Чашечкин Ю. Д., Ильиных А. Ю. Задержка формирования каверны в интрузивном режиме слияния свободно падающей капли с принимающей жидкостью // Доклады РАН. 2021. Т. 496 (1). С. 45–50. DOI: 10.31857/s268674002101003x Chashechkin Yu. D., Ilinykh A. Y. The delay in cavity formation in the intrusive coalescence of a freely falling drop with a target fluid // Doklady Physics. 2021. V. 66 (1). P. 20–25. DOI: 10.1134/S102833582101002X
36. Thomson W., Tait P.G. A Treatise on Natural Philosophy. Clarendon Press, Oxford, UK. 1867. 727 p.
37. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 736 с. Landau L.D., Lifshitz E.M. Fluid Mechanics. V. 6. Course of Theoretical Physics, Pergamon Press: Oxford, UK, 1987; 560 p.
38. Feistel R. Thermodynamic properties of seawater, ice and humid air: TEOS-10, before and beyond // Ocean Sciences. 2018. V. 14. P. 471–502. <https://doi.org/10.5194/os-14-471-2018>
39. Harvey A. H., Hraby J., Meier K. Improved and always improving: reference formulations for thermophysical properties of water // J. of Phys. and Chem. Ref. Data. 2023. V. 52. P. 011501. doi: 10.1063/5.0125524.
40. Eisenberg D., Kauzmann W. The Structure and Properties of Water (Oxford Classic Texts in the Physical Sciences). Oxford University Press: Oxford, UK. 2005. 308p.
41. Teschke O., de Souza E.F. Water molecule clusters measured at water/air interfaces using atomic force microscopy // Phys. Chem. Chem. Phys. 2005. V. 7(22). P. 3856–3865. DOI: <https://doi.org/10.1039/B511257E>
42. Bunkin N.F., Suyazov N.V., Shkirin A.V., Ignat'ev P.S., Indukayev K.V. Study of Nanostructure of highly purified water by measuring scattering matrix elements of laser radiation // Phys. Wave Phenom. 2008. V. 16. P. 243–260. DOI: 10.3103/S1541308X08040018
43. Malenkov G. G. Structure and dynamics of surfaces of thin films and water microdroplets // Colloid Jour. 2010. V. 72(5). P. 649–659. DOI: 10.1134/S1061933X1005011X.
44. Chashechkin Y.D. Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // Axioms. 2021. V. 10(4). P. 286. <https://doi.org/10.3390/axioms10040286>

45. *Naifeh A.* Introduction to Perturbation Methods. New York. Wiley-VCH. 1981. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир. 1984. 532 с.
46. *Chashechkin Yu.D.* Conventional partial and new complete solutions of the fundamental equations of fluid mechanics in the problem of periodic internal waves with accompanying ligaments generation // Mathematics. 2021. V. 9(6). P. 586. <https://doi.org/10.3390/math9060586>.
47. *Chashechkin Y.D., Ochirov A.A.* Periodic flows in a viscous stratified fluid in a homogeneous gravitational field // Mathematics. 2023. V. 11. P. 4443. <https://doi.org/10.3390/math11214443>
48. *Li E.Q., Thoraval M.-J., Marston J.O., Thoroddsen S.T.* Early azimuthal instability during drop impact // J. Fluid Mech.. 2018. V.848. P. 821–835. doi:10.1017/jfm.2018.383
49. *Chashechkin Yu.D., Il'nykh A.Yu.* Fine Flow Structure at the Miscible Fluids Contact Domain Boundary in the Impact Mode of Free-Falling Drop Coalescence // Fluids. 2023. 8(10). P. 269. <https://doi.org/10.3390/fluids8100269>.
50. УИУ “ГФК ИПМех РАН”: Гидрофизический комплекс для моделирования гидродинамических процессов в окружающей среде и их воздействия на подводные технические объекты, а также распространения примесей в океане и атмосфере. Сайт: <http://www.ipmnet.ru/uniqueequip/gfk/#equip>.
51. *Rayleigh L.* Some applications of photography // Nature. 1891. V. 44. P. 249–254.

## SUBMERGING AND FLOATING-UP VORTICES IN THE PICTURE OF SMOOTH INFLOW OF A FREE-FALLING ETHANOL DROP INTO WATER

**Yu. D. Chashechkin<sup>a,\*</sup> and A. Yu. Il'nykh<sup>a,\*\*</sup>**

*<sup>a</sup>Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Moscow, 119526 Russia*

*\*e-mail: chakin@ipmnet.ru*

*\*\*e-mail: ilnykh@ipmnet.ru*

**Abstract**—The comparative videorecording of the coalescence pictures of free falling drops of 0.01% water solution of potassium permanganate and 95% ethanol solution of smaller density is performed. The kinetic energy of both fluids is smaller than the potential surface energy. The drop of the solution, whose density is greater than that of the receiving fluid, flows smoothly into the fluid thickness, while a cavity is formed with retardation. The submerging intrusion transforms into an annular vortex, which is pushed by a growing cavity. The ethanol drop also flows into the fluid thickness but forms a floating-up intrusion, which distorts the shape of the retarding cavity. When the conical cavity stops to sharpen and attains a maximum depth, a small vortex, which contains the light fluid, is thrown into the fluid thickness. The dimensions of the vortex forming the secondary intrusion remain almost the same during the motion. The light vortex stops gradually and forms the secondary intrusion. The central region of the secondary intrusion floats up and transforms into a vortex ring. The dimensions of the buoyancy-driven floating-up vortex increase with time. The time dependences of the dimensions of the basic structural components are presented.

**Keywords:** drops, vortices, vortex ring, experiments, intrusion, density difference

# РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ РАЗВИТИЯ ДВУМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЭЛЕЯ–ТЕЙЛОРА И ИХ ПЕРЕХОДА К ТУРБУЛЕНТНОСТИ

© 2024 г. Е. В. Бодров<sup>a</sup>, Д. О. Кочетков<sup>a</sup>, Е. В. Левкина<sup>a,\*</sup>, Н. В. Невмержицкий<sup>a,\*\*</sup>,  
В. П. Стаценко<sup>a</sup>, Ю. В. Третьяченко<sup>a</sup>, И. Р. Фарин<sup>a</sup>, Ю. В. Янилкин<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский  
институт экспериментальной физики, Саров, Россия

\*e-mail: EVLevkina@vniief.ru

\*\*e-mail: postmaster@ifv.vniief.ru

Поступила в редакцию 25.06.2024 г.

После доработки 08.10.2024 г.

Принята к публикации 08.10.2024 г.

Приводятся результаты экспериментальных и расчетных исследований развития двумерных детерминированных возмущений при неустойчивости Рэлея–Тейлора и перехода течения в турбулентную стадию на границе газ–жидкость. Эксперименты проводились на легкогазовой пушке. Возмущения на границе веществ создавались колебаниями пушки при помощи специального устройства. Длина волн возмущений варьировалась от 5.4 до 8.8 мм, амплитуда – от 0.3 до 0.4 мм, величина ускорения жидкого слоя – от 5.2 до 18.8 мм/мс<sup>2</sup>. В качестве жидкости использовалась вода, в качестве газа – сжатый воздух. Получены экспериментальные данные по переходу возмущений в турбулентную стадию. Эксперименты сопровождаются численным моделированием по коду ЭГАК. Предложены критерии перехода неустойчивости в стадию турбулентного перемешивания.

**Ключевые слова:** начальные возмущения, неустойчивость Рэлея–Тейлора, турбулентное перемешивание, вибрационная установка, турбулентная стадия, численное моделирование

**DOI:** 10.31857/S1024708424060084, **EDN:** FDWVNQ

## ВВЕДЕНИЕ

В мишенях управляемого инерциального термоядерного синтеза развитие гидродинамических неустойчивостей Рэлея–Тейлора, Рихтмайера–Мешкова, Кельвина–Гельмгольца [1–4] и вызванное ими турбулентное перемешивание (ТП) веществ приводит к нарушению симметрии схождения мишени, засорению термоядерного горючего материалом ее оболочки, что не позволяет получить зажигание горючего. В настоящее время замкнутой теории турбулентности нет. Поэтому создаются отдельные расчетные программы (модели, коды), при помощи которых выбирается конструкция мишеней термоядерного синтеза с минимальным влиянием неустойчивостей и турбулентности на процесс имплозии. При этом программы должны быть всесторонне протестированы на точных экспериментальных данных.

В области исследований физики неустойчивостей в настоящее время до конца не решена одна из основных задач – не определено время перехода возмущений в турбулентную стадию. Это создает трудности при численном моделировании этих сложнейших течений, так как рост возмущений описывается одними уравнениями, а рост зоны перемешивания – другими. В работе [5] приведены некоторые экспериментальные и расчетные исследования в этом направлении: разработан способ создания “чистых” (без сеток, пленок и т.д.) периодических колышевых двумерных возмущений на контактной границе воздух–вода (КГ) методом вибрации газовой пушки. Но колышевые возмущения не позволяют фотографическим методом строго определить их динамику из-за затенения внутренних колец

возмущений наружными. Поэтому авторами разработан новый метод создания “чистых” протяженных периодических 2D-возмущений на поверхности жидкого слоя методом раскачивания пушки с квадратным внутренним сечением.

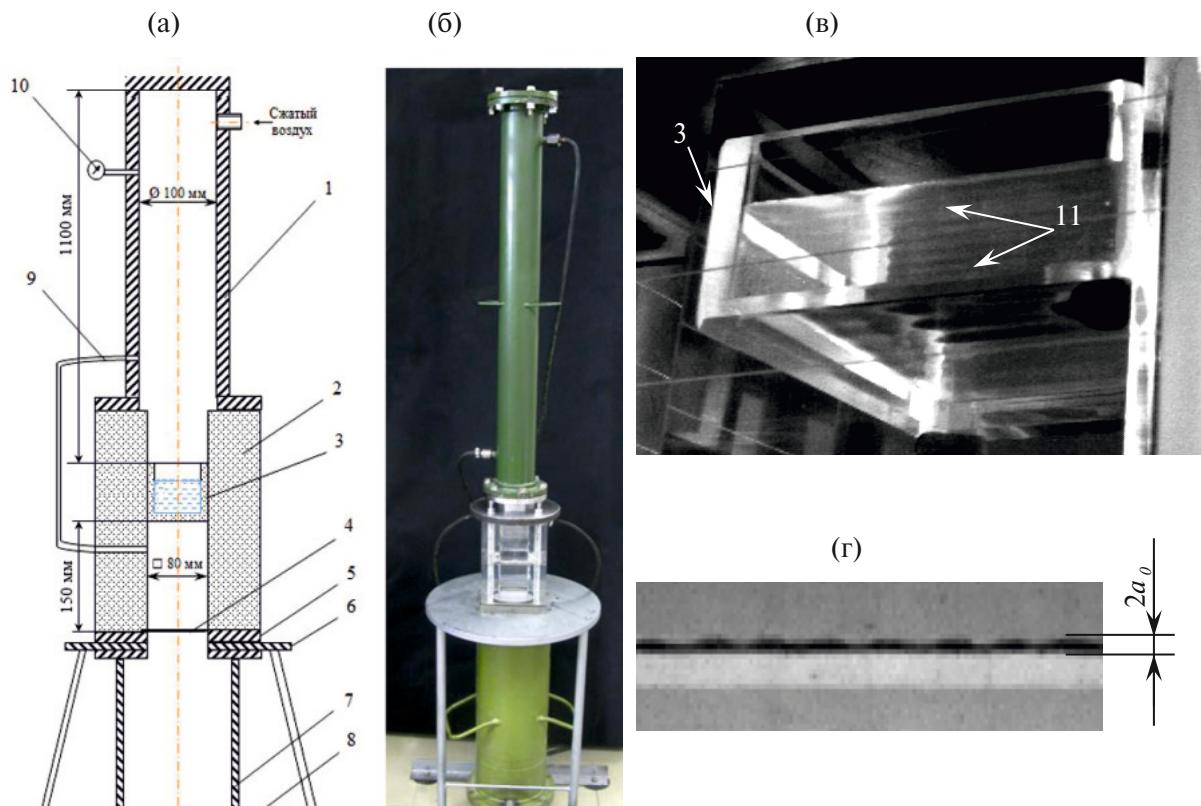
В данной статье приводятся результаты экспериментальных исследований перехода неустойчивости Рэлея–Тейлора (заданных возмущений) в турбулентную стадию на границе газ–жидкость, результаты численного моделирования течения по коду ЭГАК и теоретический анализ развития возмущений.

## 1. ТЕХНИКА ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Исследования перехода 2D-возмущений в турбулентную стадию проводились на легкогазовой пушке ЛГП-100М. Схема пушки представлена на рис. 1. Пушка состоит из драйвера, изготовленного из стальной трубы с внутренним диаметром 100 мм, прозрачной измерительной секции (из оргстекла) с внутренним сечением  $80 \times 80$  мм, глушителя в виде стальной трубы диаметром 204 мм и лавсановой диафрагмы, отделяющей секцию от глушителя.

Слой жидкости наливался в прозрачный контейнер, который крепился внутри секции при помощи специальных подвижных упоров (на рисунках упоры не показаны). Внутреннее сечение контейнера составляло  $70 \times 70$  мм, глубина – 35 мм.

Для создания начальных возмущений на поверхности жидкого слоя разработан специальный механизм для раскачивания пушки в горизонтальном направлении: на свободной поверхности жидкости образовывались “чистые” периодические синусоидальные 2D-возмущения (см. рис. 1в, г). Амплитуда начальных возмущений составляла  $a_0 = 0.3\text{--}0.4$  мм, длина волны  $\lambda = 5.4\text{--}8.8$  мм. В экспериментах  $\lambda$  и  $a_0$  определялись на фотографии по фронтальной проекции. Погрешность определения  $\lambda$  оценивается в 10 %,  $a_0$  – в 20 %. После создания возмущений внутренние объемы пушки над и под



**Рис. 1.** Вид легкогазовой пушки ЛГП-100М (а, б) и 2D-возмущений (в, г): (а) схема пушки; (б) фотография пушки; (в) фотография под углом контейнера с возмущениями; (г) вид возмущений во фронтальной проекции; 1 – драйвер; 2 – измерительная секция; 3 – контейнер с жидкостью; 4 – мембрана; 5 – фланец; 6 – подставка; 7 – глушитель; 8 – механизм раскачивания пушки; 9 – перепускной канал; 10 – манометр; 11 – возмущения;  $a_0$  – начальная амплитуда возмущений.

контейнером заполнялись сжатым воздухом до определенного давления. При достижении давления выше критического происходил саморазрыв мембранны – газ из-под контейнера быстро выходил в глушитель, контейнер с жидкостью ускорялся вниз, граница газ-жидкость становилась неустойчивой по Рэлею–Тейлору, возмущения начинали развиваться, со временем они приводили течение на границе в стадию ТП. Регистрация течения проводилась скоростной видеокамерой во фронтальной (вид спереди), профильной (вид сбоку) и в горизонтальной (вид сверху) проекции. Скорость видеосъемки – 10000 кад/с, экспозиция кадра – 14.5 мкс. Подсветка процесса производилась галогенной лампой.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Процесс развития неустойчивости (возмущений) условно разбивают на 4 стадии: 1) линейную, 2) нелинейную, 3) стадию перехода к ТП и 4) развитую стадию ТП (подробно см. [5, 6]). В данной работе нас интересовала, в основном, третья стадия.

В табл. 1 представлены некоторые условия и результаты экспериментов. Величина ускорения  $g$  определялась по тангенсу угла наклона линейной части экспериментальной зависимости  $2S(t^2)$  к оси абсцисс, где  $S$  – смещение контейнера,  $t$  – время.

На рис. 2, 3 представлены кинограммы некоторых экспериментов и результаты обработки одного из опытов (№ 9): зависимости глубины проникновения легкого вещества в тяжелое  $h_l$ , тяжелого вещества в легкое  $h_h$  и полной ширины зоны перемешивания  $H = h_l + h_h$  от двойного смещения контейнера; зависимости интегрального числа Рейнольдса от времени. Число Рейнольдса определяется как

$$Re = H \cdot \frac{dH}{dt} / v_c,$$

где  $v_c = 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с – коэффициент кинематической вязкости воды.

Число Атвуда в этих опытах было близко к единице. Погрешность представленных в табл. 1 значений  $t_i$  и  $Re_i$  оценивается в 10 %. По кинограммам видно, что развитие возмущений происходит классическим образом: впадины проникают в воду в виде пузырей, выступы в воздух – в виде струй. Со

**Таблица 1.** Некоторые условия и результаты экспериментов

№ опыта	возмущения	P, атм	m, г	g, мм/мс <sup>2</sup>	t <sub>con</sub> , мс	t <sub>mix</sub> , мс	Re <sub>con</sub> , 10 <sup>6</sup>	Re <sub>mix</sub> , 10 <sup>6</sup>	a <sub>l</sub>
9	$a_0 = 0.4$ мм	2.15	239	5.2	4.8	6	1	2	0.06
22	$a_0 = 0.4$ мм	6	200	17.9	2	2.9	1	3	0.07
8	$a_0 = 0.4$ мм	2.45	239	5.7	2.8	–	2.4	–	–
32	$a_0 = 0.4$ мм	2.2	245	5.3	4.9	–	0.5	–	–
33	$a_0 = 0.4$ мм	5	245	10.8	2.25	2.85	2.2	4.7	0.05
36	$a_0 = 0.5$ мм	2.2	197.9	7	3.7	4.4	0.58	1.1	0.05
37	$a_0 = 0.4$ мм	5	219	12.4	2.3	3.1	0.63	1.8	0.05
39	$a_0 = 0.3$ мм	4.8	215	12.4	2	2.3	2	2.8	0.07
40	$a_0 = 0.4$ мм	6.8	219.2	16.8	1.5	1.7	1.8	2.4	0.07

Примечание:

$P$  – избыточное давление в драйвере;

$t_{con}$  – время начала переходной стадии развития перемешивания;

$t_{mix}$  – время начала стадии турбулентного перемешивания;

Re<sub>con</sub> – число Рейнольдса начала перехода неустойчивости в стадию ТП;

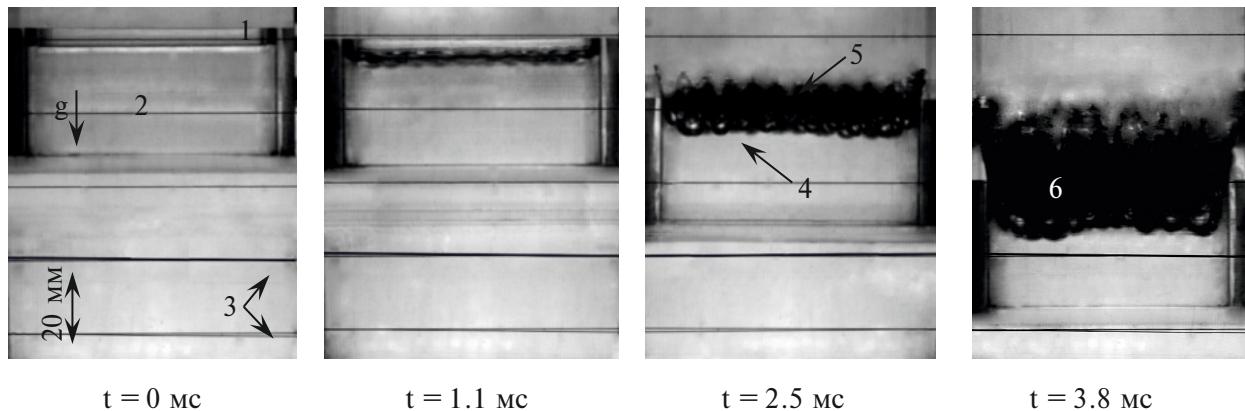
Re<sub>mix</sub> – число Рейнольдса начала стадии турбулентного перемешивания;

$m$  – масса слоя с контейнером;

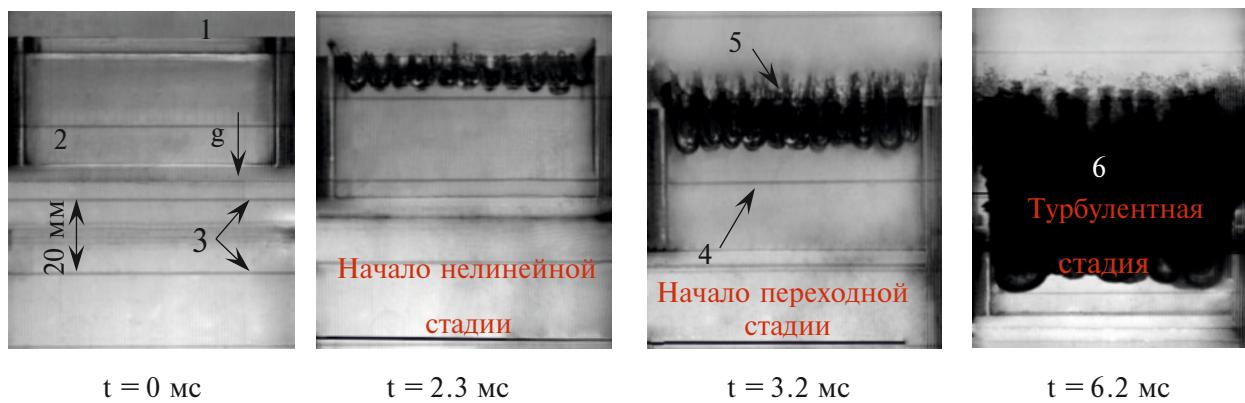
$a_l$  – коэффициент скорости проникновения легкого вещества в тяжелое;

$g$  – величина ускорения контейнера со слоем жидкости.

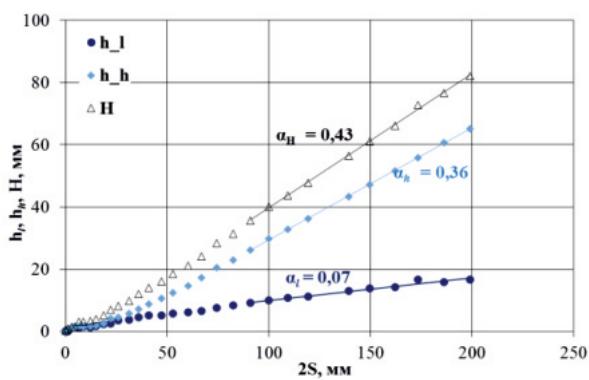
(а)



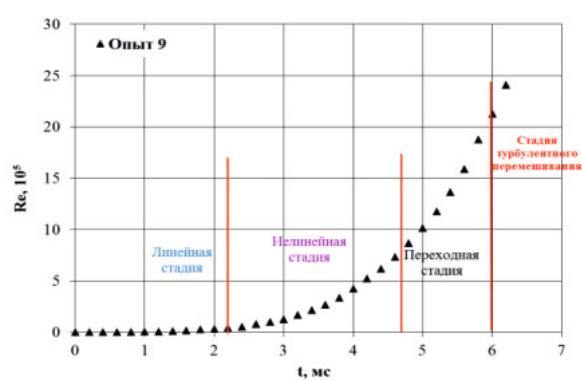
(б)



(в)



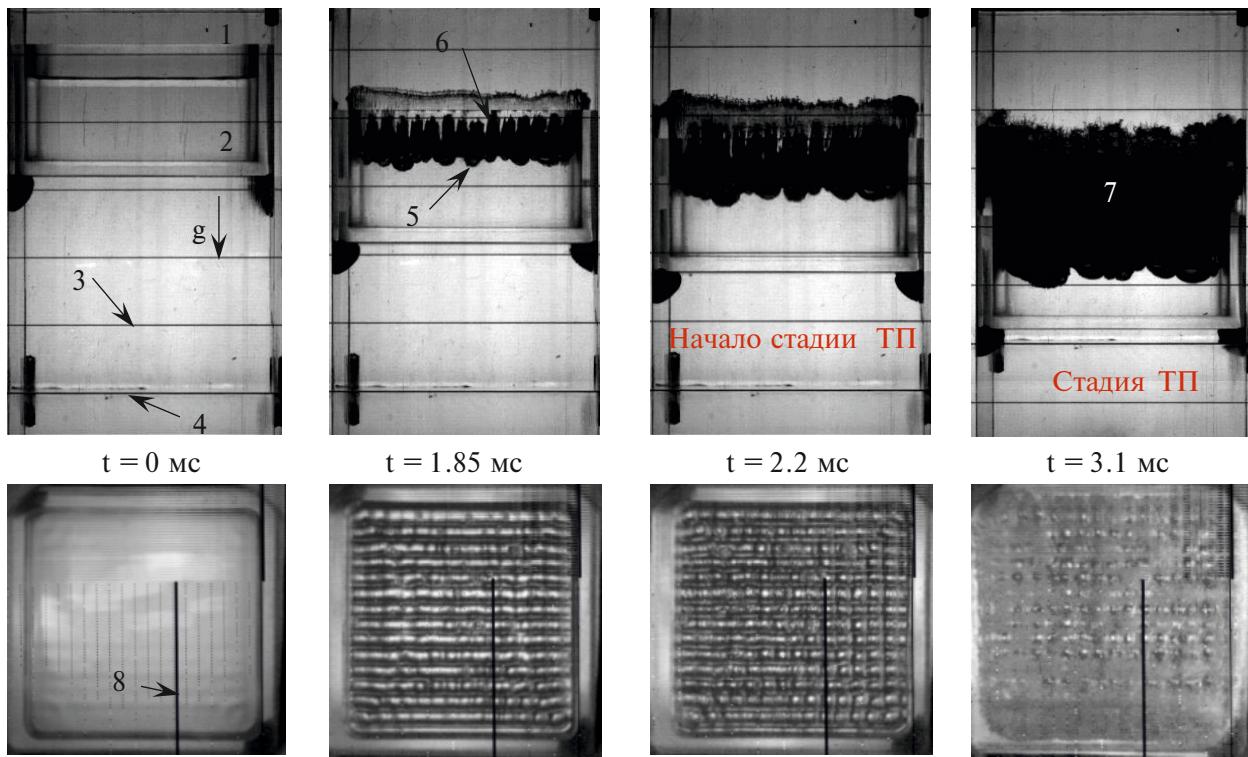
(г)



**Рис. 2.** Результаты экспериментов: (а) кинограмма опыта № 8 (профильная проекция); (б) кинограмма опыта № 9 (фронтальная проекция); (в) зависимости  $h_l(2S)$ ,  $h_h(2S)$ ,  $H(2S)$ ; (г) зависимость  $Re(t)$ ; 1 – воздух; 2 – вода; 3 – репер; 4 – пузыри; 5 – струи; 6 – зона турбулентного перемешивания;  $g$  – направление ускорения.

временем струи начинают распадаться, а пузыри сливаются, затем происходит хаотизация течения и переход в турбулентности.

В опытах № 32, 36, 37, 39 на горизонтальной проекции (сверху) видно, что по длине 2D-возмущения распадаются на 3D, и их количество и форма близки к возмущениям, зарегистрированным во фронтальной проекции. Это говорит о том, что 2D-возмущения распадаются на 3D, длина



**Рис. 3.** Кинограмма развития неустойчивости в опыте № 37: 1 – воздух; 2 – жидкость; 3 – репер; 4 – технологический стык; 5 – пузыри; 6 – струи; 7 – зона турбулентного перемешивания; 8 – дефект видеокамеры;  $g$  – направление ускорения.

волны и амплитуда которых близки к длине волн и амплитуде заданных возмущений. Ниже дано объяснение этому процессу.

Известно, что при ламинарном течении жидкости трубы тока не пересекаются, при турбулентном – пересекаются. Исходя из этого, принималось, что переход возмущений в стадию ТП (в третью стадию) начинается тогда, когда струи возмущений начинают распадаться, а пузыри – частично сливаться, то есть, когда начинает нарушаться ламинарная картина течения. Момент этого времени определялся визуально по кинограммам экспериментов.

В качестве критерия этого перехода выбрано указанное выше число Рейнольдса. За развитую турбулентную стадию (четвертую стадию) принимался режим перемешивания, при котором безразмерная скорость проникновения фронта пузырей на зависимости  $h_l(2S)$  выходила на постоянное значение, равное  $\alpha_l = \Delta h_l / \Delta 2S = 0.05–0.07$ .

По результатам экспериментов установлено, что при увеличении ускорения жидкого слоя и/или уменьшении длины волны возмущения время перехода неустойчивости в стадию перемешивания уменьшается (см. рис. 4). Переход в стадию ТП происходит при среднем значении интегрального числа Рейнольдса  $Re \approx 1.3 \cdot 10^6$ , а развитая стадия ТП начинается при  $Re \approx 2.5 \cdot 10^6$ , т.е. значения  $Re$  близкие (см. табл. 1).

### 3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

#### 3.1. Постановка расчетов

Геометрия системы: высота слоя воды – 3.5 см, высота слоя воздуха – 3.5 см ( $z$ ), ширина системы – 7 см ( $x$ ), длина – 7 см ( $y$ ). Расчеты проводились в 2D- и 3D-постановках по коду ЭГАК [7] с вязкостью и без вязкости жидкости в опыте № 9. В 2D-расчетах варьировалась счетная сетка, в 3D-расчете сетка соответствовала грубой 2D-сетке. Проведение расчета на более подробной сетке требует неоправданно большого объема ресурсов компьютера.

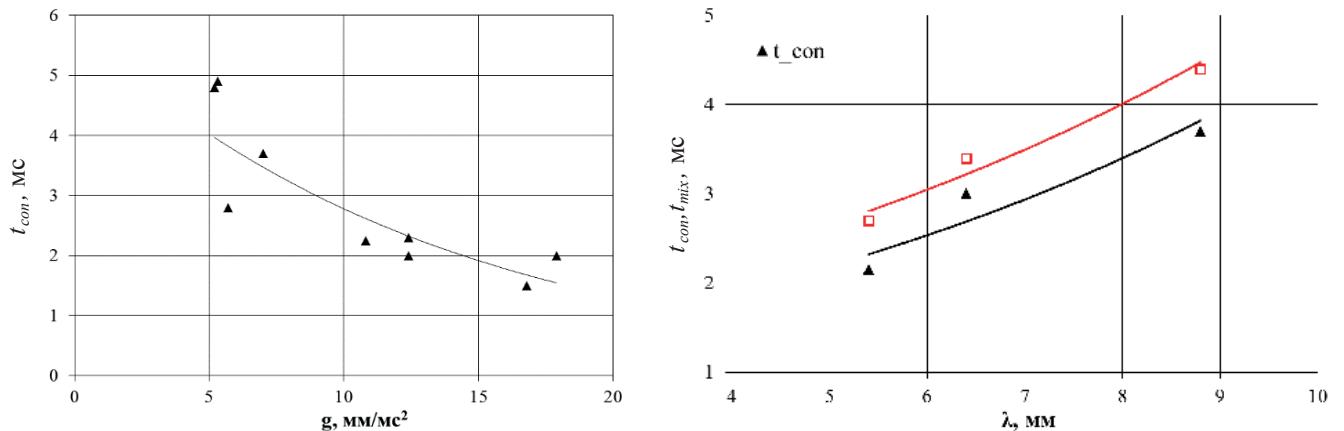


Рис. 4. Зависимости  $t_{\text{con}}(g)$  и  $t_{\text{con}}$  и  $t_{\text{mix}}$  от длины волны  $\lambda$  возмущений.

Ускорение слоя составляло  $g = 0.52 \text{ см}/\text{мс}^2$ . Заметим, что в расчетах ускорение системы направлено вверх (в отличие от эксперимента). В расчете с вязкостью использовались следующие коэффициенты вязкости:  $\nu = 10^{-5} \text{ см}^2/\text{мс}$  для воды и  $\nu = 1.5 \cdot 10^4 \text{ см}^2/\text{мс}$  – для воздуха. На поверхности воды заданы гармонические возмущения поверхности:

$$y = a_0 \cos(kx), \quad \text{где } k = 2\pi/\lambda, \quad a_0 = 0.04 \text{ см}, \quad \lambda = 0.64 \text{ см}.$$

Кроме этого, в двух 3D-расчетах на КГ задавались случайные мелкомасштабные возмущения в  $\pm 5\%$  объемных концентраций веществ.

Начальная температура  $T = 3000 \text{ К}$ . Начальное давление всюду  $P_0 = 2.15 \text{ атм}$ . Начальная плотность воздуха  $\rho_{a0} = 2.7 \cdot 10^{-3} \text{ г}/\text{см}^3$ , плотность воды  $\rho_w = 1 \text{ г}/\text{см}^3$ , начальное давление:  $P = P_0 + \rho_w g z$ , при  $z \leq 3.5$  (в воде);  $P = (P_0 + 3.5\rho_w g) \exp((z - 3.5)\rho_{a0} g)$ , при  $z > 3.5$  (в воздухе), где  $\rho_w = 1 \text{ г}/\text{см}^3$ , а  $\rho_a = \rho_{a0} \cdot (P/P_0)^{1/\gamma}$ ,  $\gamma = 1.4$ .

Границные условия: “жесткая стенка” на всех гранях счетной области.

Счетная сетка: 1) сетка  $N$  ( $N_x \times N_y = 350 \times 350$ ); 2) сетка  $4N$  ( $N_x \times N_y = 1400 \times 1400$ ); 3) сетка  $0.4N$  ( $N_x \times N_y = 140 \times 140$ ). 3D-расчеты выполнены на сетке  $N$  ( $N_x \times N_y \times N_z = 350 \times 350 \times 350$ ).

В табл. 2 приводятся постановки проведенных расчетов.

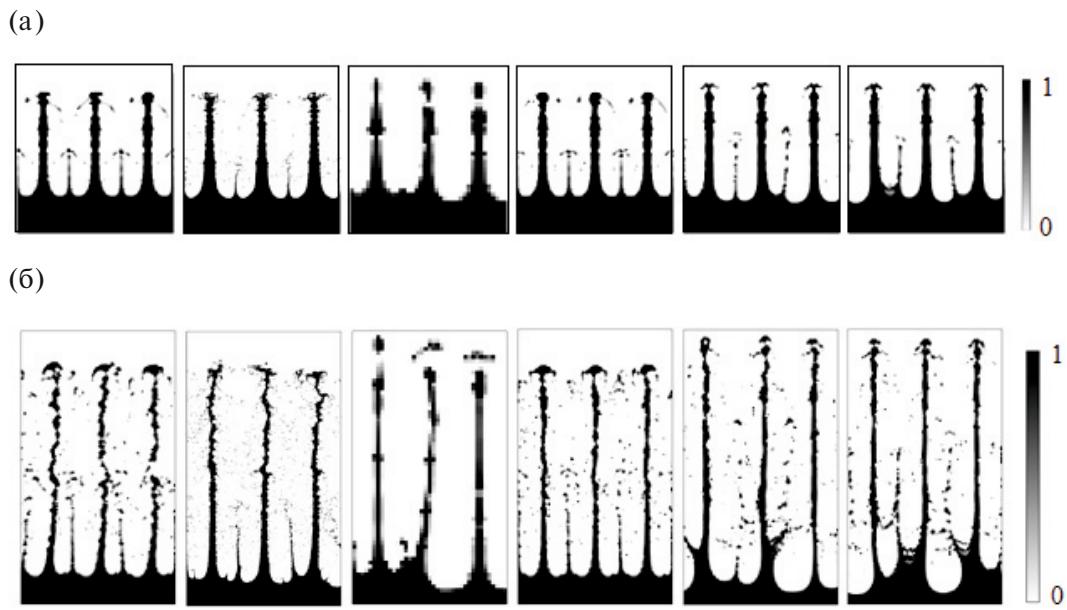
### 3.2. Результаты расчетов

**3.2.1. Картинами течения.** Развитие возмущений в эксперименте начинается после прохождения определенного пути  $2S \approx 1.5 \text{ см}$ , что соответствует сдвигу по времени  $t_0 \sim 0.5 \text{ мс}$ , по-видимому, за это время происходит установление необходимого экспоненциального профиля давления. Поэтому расчетные времена должны быть сдвинуты относительно экспериментальных на указанную величину.

На рис. 5 приводятся фрагменты полученных в расчетах с учетом отмеченной сдвигу по времени растровых картин объемной концентрации тяжелого вещества. Из рис. 5 видно, что 2D-расчеты на

Таблица 2. Постановка расчетов

Номер расчета	Размерность геометрии	Сетка	Размер ячейки (см)	Учет вязкости	Возмущения в направлении $y$
1	2D	$N$	0.02	нет	нет
2	2D	$4N$	0.005	нет	нет
3	2D	$0.4N$	0.05	нет	нет
4	3D	$N$	0.02	нет	нет
5	3D	$N$	0.02	нет	есть
6	3D	$N$	0.02	есть	есть



**Рис. 5.** Растворные картины течения: (а)  $t = 2.3$  мс; (б)  $t = 3.5$  мс; слева направо: расчеты 1–6, для 3D-расчетов; двумерный разрез  $y = \text{const}$ .

сетках  $N$  и  $4N$  дают близкие результаты. Анализируя эти рисунки, отметим появление в расчетах  $N$  и  $4N$  промежуточных струек более тонкой толщины на головке пузырей. Физическая природа их появления связана с кумуляцией при стечении воздуха вдоль струй воды в сторону головки пузыря. Однако в расчете  $0.4N$  промежуточные струйки почти не возникают. Заметим, что в опытах дополнительные струи не наблюдаются, поэтому было высказано предположение, что они подавляются физической вязкостью или поверхностным натяжением.

Расчет  $0.4N$  фактически подтверждает эту гипотезу, в этом расчете схемная вязкость существенно больше по сравнению с двумя другими расчетами, что и приводит к отсутствию дополнительной струйки. Но в расчете  $N$  схемная вязкость больше, чем в расчете  $4N$ , а струйки более отчетливые, поскольку в расчете  $4N$  их верхняя часть дробится на более мелкие фрагменты благодаря тому, что струйки подвержены фрагментации из-за сдвиговой неустойчивости на КГ. Таким образом, сетка существенно сказывается на развитии дополнительных струек воды.

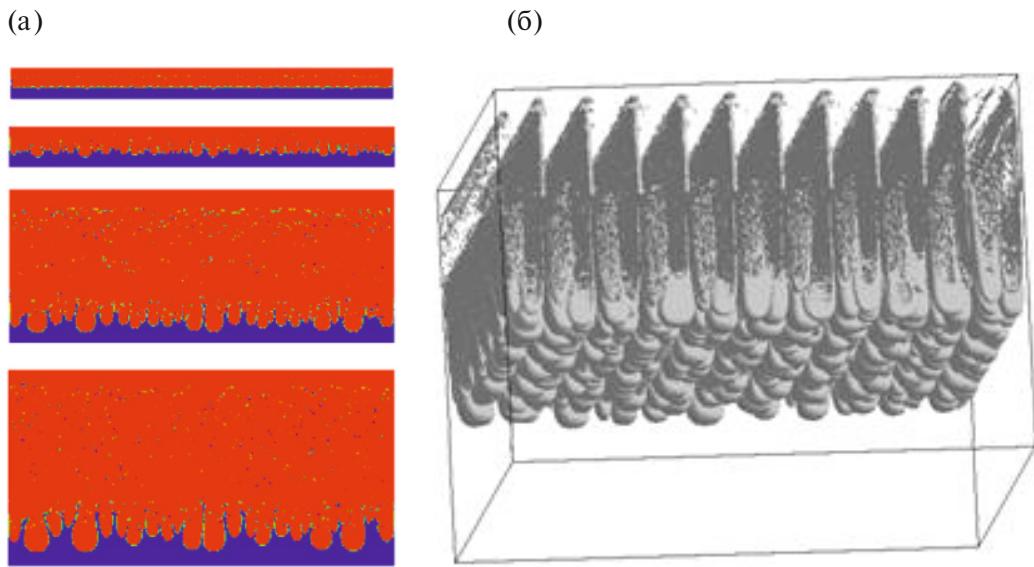
На рис. 5 хорошо видно, что картина течения из 3D-расчета 4 (без дополнительных возмущений КГ) хорошо согласуется с 2D-расчетами на подробных сетках, как по амплитуде основных возмущений, так и по наличию дополнительной струйки. Однако, как показал анализ течения, никакие заметные возмущения в направлении в этом расчете не развиваются.

Рассмотрим результаты 3D-расчетов с заданными дополнительными возмущениями на КГ в направлении оси  $y$ . На рис. 6 приводятся растворные картины в двумерных разрезах  $x = \text{const}$  на несколько моментов времени и изоповерхность концентрации воды на  $t = 3.5$  мс, полученные в расчете 6.

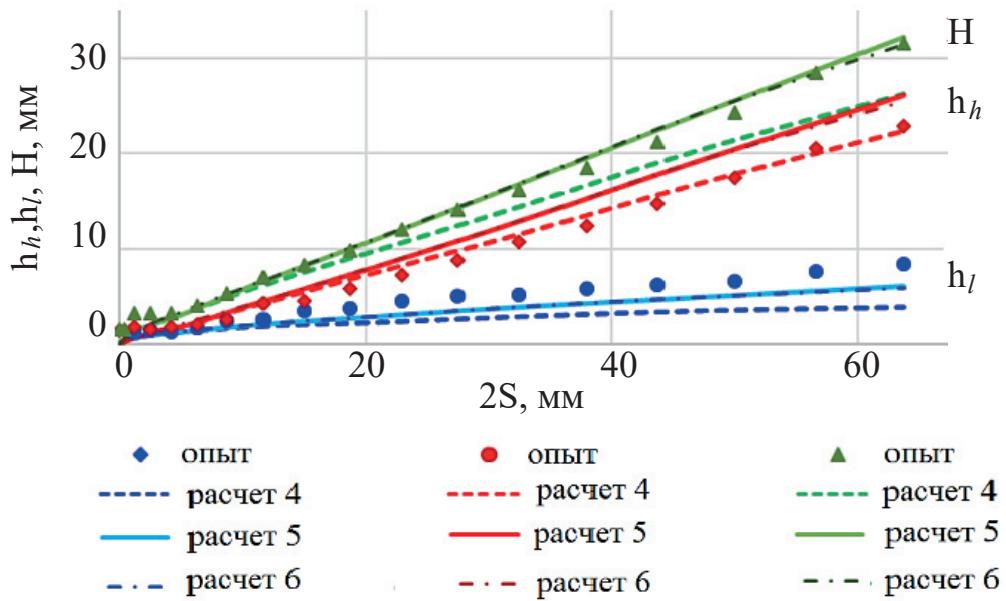
На рис. 7 приводятся зависимости от двойного пройденного пути ширины ЗТП и зон проникания легкого вещества в тяжелое (пузырей) и тяжелого в легкое (струй).

Отметим, что границы ЗТП в расчетах сильнее развиваются в сторону легкого газа и слабее в сторону тяжелого сравнительно с экспериментом, в то же время полные ширины ЗТП в расчетах и эксперименте близки. Это говорит о том, что в процессе счета происходит движение всей ЗТП в сторону пузырей. Эта разница объясняется отмеченным выше отличием в постановке расчетов и эксперимента, в расчете распределение давления задается уже в начальный момент времени в соответствии с заданным ускорением, а в эксперименте оно устанавливается в процессе движения контейнера. Кроме того, развитие струй в эксперименте происходит в более широкую область воздуха по сравнению с расчетом. Не исключена и погрешность измерений в опыте.

Отметим почти совпадение результатов расчетов с дополнительными возмущениями (5 и 6) между собой, то есть вязкость на этот параметр практически не влияет. Имеется хорошее согласие расчетных



**Рис. 6.** Результаты 3D-расчета 6: (а) растровые картины в сечении  $x = \text{const}$  (сверху вниз:  $t = 1.3; 2.3; 3.0; 3.5$  мс); (б) изоповерхность концентрации воды на  $t = 3.5$  мс.



**Рис. 7.** Зависимости ширины ЗТП, струй и пузырей от двойного пройденного пути:  $h_l$  – ширина зоны проникновения легкого вещества в тяжелое;  $h_h$  – ширина зоны проникновения тяжелого вещества в легкое;  $H$  – полная ширина ЗТП.

данных с дополнительными возмущениями КГ (расчеты 5 и 6) с экспериментальными данными по полной ширине ЗТП.

**3.2.2. Переход к турбулентности.** Как показано в [5], в качестве критерия перехода течения в турбулентный режим можно использовать интегральную степень гомогенности смеси во всей ЗТП. В соответствии с [8, 9] ее можно определить по формуле:

$$\Theta = \frac{\int (\langle \beta_i \rangle - \langle \beta_i^2 \rangle) \cdot dz}{\int (\langle \beta_i \rangle \cdot (1 - \langle \beta_i \rangle)) \cdot dz}, \quad (3.1)$$

где  $\beta_i$ , объемная концентрация одного из смешивающихся веществ.

Однако значения интегральной степени гомогенности  $\Theta$  близки друг к другу для всех расчетов и малы. Это означает, что турбулентность в целом для всей ЗТП недостаточно развита. Большой смысл имеет исследование гомогенности в каждом слое ячеек по (2D) или  $z$  (3D). В 3D-случае осреднение производим по горизонтальной плоскости площадью  $S = \sum \Delta x \cdot \Delta y$ . Тогда согласно [8] среднюю величину степени гомогенного смешения определим, как

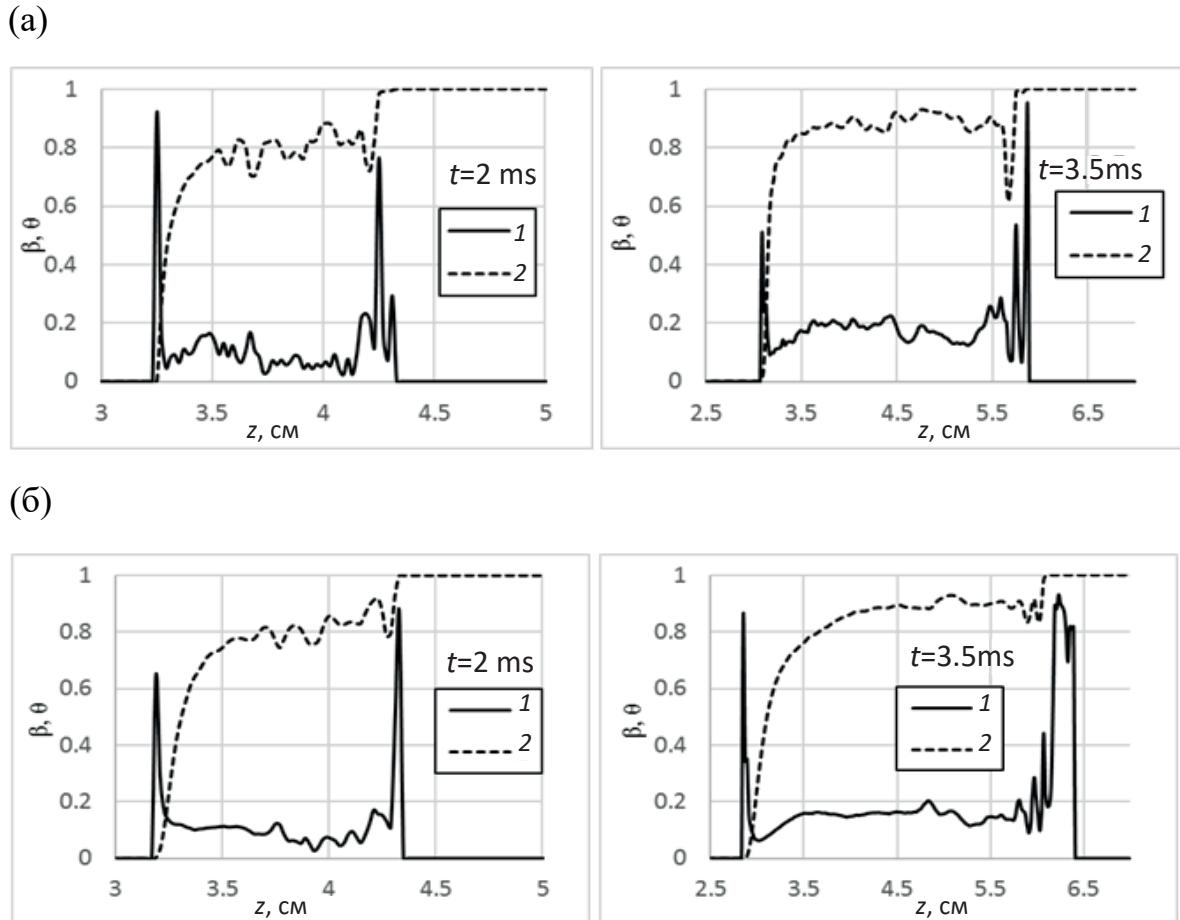
$$\theta = \frac{S \sum \beta_1(1 - \beta_1)\Delta x \cdot \Delta y}{(\sum \beta_1\Delta x \cdot \Delta y) \cdot (\sum (1 - \beta_1)\Delta x \cdot \Delta y)}. \quad (3.2)$$

В случае 2D-моделирования вместо площади  $S$  осреднение производится по отрезку  $L = \sum \Delta x$ , а вместо выражения (3.2) имеем

$$\theta = \frac{L \sum \beta_1(1 - \beta_1)\Delta x}{(\sum \beta_1\Delta x) \cdot (\sum (1 - \beta_1)\Delta x)}.$$

Расчетные профили  $\theta(z)$  по формуле (3.1) и осредненных объемных концентраций воздуха приведены для нескольких моментов времени на рис. 8 для 3D-расчетов 4 и 6 (расчет 5 мало отличается от расчета 6).

Сначала отметим, что скачки степени гомогенности на краях ЗТП происходят фактически вне ЗТП, в этих областях концентрации воздуха близки к 1 или 0. Если отвлечься от этих областей, то из рис. 8 видно, что в нижней области ЗТП, занятой пузырями, степень гомогенности на последний момент времени во всех расчетах не превышает величину порядка  $\theta = 0.05-0.1$ , что говорит о том, что в этой области развитое турбулентное перемешивание фактически отсутствует, что хорошо видно



**Рис. 8.** Вертикальные профили коэффициента гомогенности и объемных концентраций воздуха: (а) расчет 4; (б) расчет 6; 1 – степень гомогенности; 2 – объемная концентрация.

и по растровым картинам. В остальной части ЗТП величина  $\theta$  постепенно растет, приближаясь к значению  $\theta = 0.2$ . Отметим, что для гравитационного перемешивания несмешивающихся веществ в [5] степень гомогенности в ЗТП на стадии развитой турбулентности составляет величину  $\theta = 0.2\text{--}0.3$ . Интересно отметить, что в расчетах 5 и 6 с заданием дополнительных возмущений КГ на последние моменты времени величина  $\theta$  на высоте  $z = 3.5\text{--}4.5$  ниже по сравнению с расчетом 4. Напрашивается объяснение этого факта – растущие гармоники в этих расчетах регуляризуют течение.

Интересна оценка времени перехода к турбулентности результатов опыта по величине интегрального числа Рейнольдса. Значение  $Re = 1.3 \cdot 10^6$ , определенное в опыте как точка перехода к турбулентному перемешиванию, незначительно отличается от определенного выше времени достижения степени гомогенности значения 0.2.

**3.2.3. Аналитическое рассмотрение задачи.** На все моменты времени в задаче в поперечном направлении присутствует гармоника  $n = 11$ , соответствующая начальному числу гармоник на КГ с длиной волны  $\lambda_x$  по  $x$ . Это объясняется тем, что наиболее благоприятные условия для роста имеют трехмерные возмущения с длиной волны  $\lambda_y$  по  $y$ , равной  $\lambda_x$ . Действительно, возмущение с длинами  $\lambda_x = \lambda_y = L/n$ , соответствует возмущению, близкому к всплывающей полусфере радиусом  $\lambda_x/4$ , имеющей присоединенную массу:

$$m = \frac{2\pi}{3} \left( \frac{\lambda_x}{4} \right)^3 \cdot \left( \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \right).$$

На нее действует сила Архимеда

$$\Phi = \frac{2\pi}{3} \left( \frac{\lambda_x}{4} \right)^3 \cdot (\rho_2 - \rho_1) \cdot g.$$

В итоге масса получает ускорение

$$a = \frac{\Phi}{m} = \frac{2(\rho_2 - \rho_1) \cdot g}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (3.3)$$

В то же время случай двумерной гармоники, то есть близкий к основному начальному возмущению, соответствует всплывающему цилиндру радиусом  $\lambda_x/4$ .

На нее соответственно действует аналогичная сила, которая вызывает ускорение

$$a_0 = \frac{\Phi_0}{m_0} = \frac{(\rho_2 - \rho_1) \cdot g}{\rho_1 + \rho_2}.$$

Оно оказывается вдвое меньше, чем для трехмерного пузыря. Последний случай соответствует  $\lambda_y/\lambda_x \rightarrow \infty$ . Естественно предполагать, что для  $\lambda_y > \lambda_x$  ускорение также будет меньше, чем (3.3).

Таким образом, в задаче быстрее всего будут расти трехмерные гармоники той же длины волны, что и  $\lambda_x$  по  $x$ . Именно поэтому в эксперименте через некоторое время в течении в направлении оси  $u$  появляются гармоники с длиной волны основного детерминированного возмущения. Это имеет место и в расчетах, в которых созданы условия для развития возмущений в поперечном направлении, а именно, в расчетах 5 и 6 с заданными начальными случайными малыми возмущениями КГ.

Отметим, что на вершине пузырей с течением времени появляются дополнительные струйки с  $\lambda_x/2$ . То же самое имеет место и для других радиусов, то есть имеем иерархический процесс для всех уровней дробления исходной струи  $\lambda_x/m$ , где  $m = 2, 4, 8, \dots$ . При этом скорость роста 3D-пузырей одна и та же, независимо от радиуса пузыря, однако, по времени начало появления пузырей обратно пропорционально зависит от их размера. Поэтому амплитуды пузырей должны быть больше для более длинных волн.

На рис. 8б приводятся двумерные сечения из 3D-расчета 6. Они наглядно демонстрируют процесс развития возмущений в направлении  $u$ , видно, что с течением времени размеры возмущений в этом направлении увеличиваются и достигают начальных длин  $\lambda_x/2$  к моменту времени  $t = 3.5$  мс.

**3.2.4. Фурье-анализ течения.** Развитие неустойчивостей можно исследовать по фурье-анализу турбулентной энергии в направлениях  $x$  и  $y$ .

Далее исходим из массива величины скорости, усредненной по плоскостям  $yz$  и  $xz$ , то есть

$$\langle u_i \rangle(x) \equiv \langle u_i(x, y, z) \rangle|_{xz}, \quad \langle u_i \rangle(y) \equiv \langle u_i(x, y, z) \rangle|_{yz}.$$

Соответственно, введем турбулентную энергию

$$k(x) \equiv \sum_{y,z} m(y, z) \cdot \langle u_i - \langle u_i \rangle \rangle^2 / 2,$$

$$k(y) \equiv \sum_{x,z} m(x, z) \cdot \langle u_i - \langle u_i \rangle \rangle^2 / 2,$$

где  $m$  — масса ячейки, а значения  $z$  удовлетворяют условию  $0.01 \leq \alpha(z) \leq 0.99$ . Здесь  $\alpha$  — массовая концентрация легкого вещества.

На рис. 9 приводится фурье-спектр  $N_0(n)$  пульсаций турбулентной энергии  $k(x)$  и  $k(y)$  на различные моменты времени как функция числа длин волн  $n$  гармоники по направлению  $x$  и  $y$ , соответственно, на размере счетной области

$$N_0 = \varphi \cdot \varphi^k.$$

Здесь  $\varphi = \text{FFT}(k)$ , где FFT — быстрое фурье-преобразование,  $\varphi^k$  — комплексно-сопряженная величина. Фурье-спектры пульсаций турбулентной энергии дают возможность проанализировать развитие процесса роста возмущений и перемешивания при заданных дополнительных возмущениях КГ.

На все моменты времени в спектре присутствует 4–5 гармоник, кратные  $n = 11$ , соответствующей начальному числу гармоник на контактной границе с длиной волны  $\lambda_x$  по  $x$ . Ведущей гармоникой в начальный период времени ( $t = 0.5$  мс) является основная  $n = 11$  (см. рис. 9а). При этом видно, что все гармоники с вязкостью имеют меньшие амплитуды, то есть вязкость тормозит развитие возмущений, что естественно.

На  $t = 1.3$  мс по оси  $x$  имеются заметные гармоники  $n = 22$  и  $33$ . Это происходит вследствие появления вторичных струек и развития сферических пузырей (см. выше) с такой же длиной волны. При этом видно, что все гармоники с вязкостью имеют меньшие амплитуды, т. е. вязкость все также тормозит развитие возмущений. Поперечные возмущения в основном носят хаотический характер, тем не менее, в спектре просматриваются гармоники, кратные  $n = 11$ . При этом возмущения по величине амплитуды принимают вид колокола.

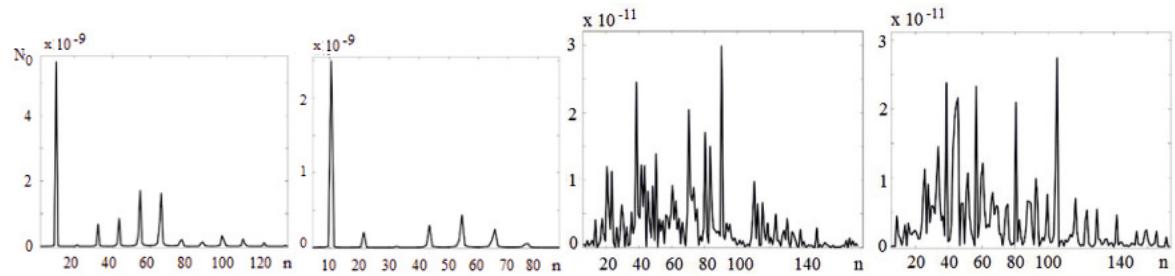
На  $t = 2.3$  мс по сечению  $x$  основная гармоника уже не является ведущей, остальные 3 гармоники имеют сравнимые амплитуды. В расчете с вязкостью амплитуды меньше в 3–4 раза. Поперечные возмущения в основном носят хаотический характер, при этом амплитуды возмущений в двух расчетах сравнимы.

На  $t = 3.5$  мс в расчете без вязкости по направлению  $x$  ведущей гармоникой стала  $n = 22$ , в то время как в расчете с вязкостью ведущая гармоника  $n = 11$ . Как и выше все гармоники с вязкостью имеют меньшие амплитуды, кроме  $n = 22$ , амплитуда которой практически одинакова с расчетом без вязкости.

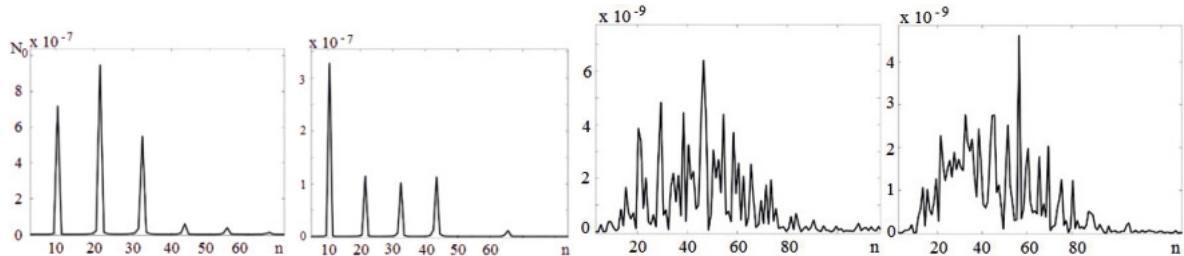
Исходя из фурье-анализа, картина течения представляется следующей. В начале в течении развиваются цилиндрические возмущения с длиной волны  $\lambda_x$ . Затем в течении начинают появляться гармоники, кратные исходной, сначала с длиной волны  $\lambda_x/2$ , далее  $\lambda_x/4$  и др. На фоне этих процессов развиваются сферические пузыри, вначале с радиусом  $\lambda_x/2$ , далее  $\lambda_x/4$  и т.д. Развитие именно таких пузырей обусловлено, как показано выше, их большей скоростью перед любыми другими возмущениями. В начальный момент мы имеем цилиндрические гармоники длиной  $\lambda_x$ , следовательно, наиболее возможным сферическим пузырем будет пузырь с такой же длиной волны, любая другая волна не будет сферической и, соответственно, будет иметь меньшую скорость роста. Дополнительные двумерные струйки порождают соответствующие сферические пузыри. Таким образом, в течении присутствуют всевозможные двумерные и трехмерные гармоники, которые проявляются спектром турбулентной энергии.

Вязкость, естественно, играет стабилизирующую роль для всех гармоник, но в особенности для мелкомасштабных. Поэтому на последние моменты времени в расчетах с вязкостью ведущей гармоникой остается исходная, в то время как в расчете без вязкости ведущей становится дополнительная гармоника.

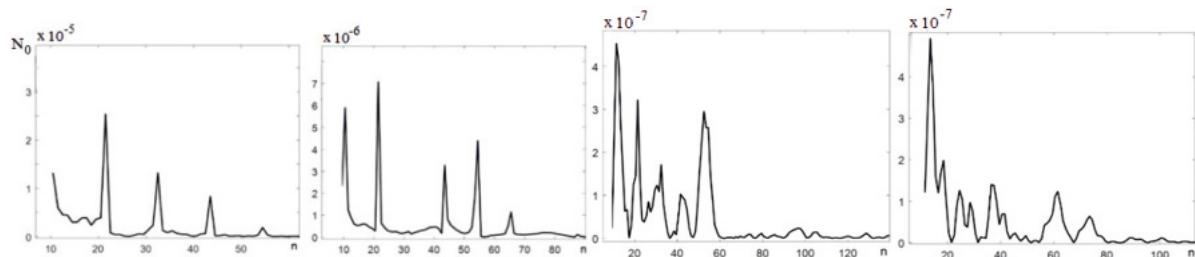
(а)



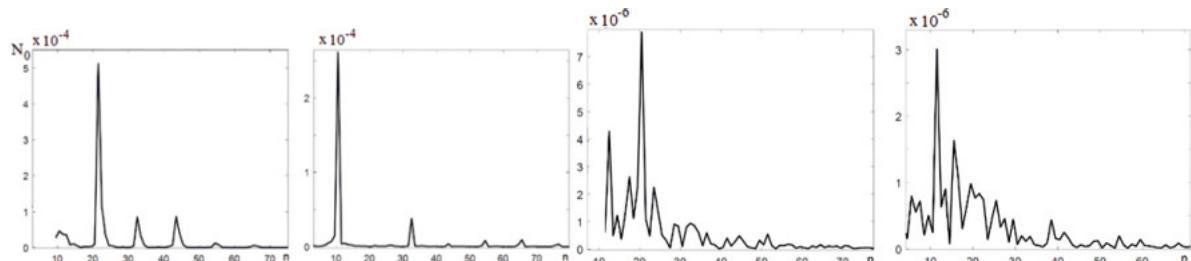
(б)



(в)



(г)



**Рис. 9.** Фурье-спектр пульсаций турбулентной энергии: (а)  $t = 0.5$ ; (б)  $t = 1.3$ ; (в)  $t = 2.3$ ; (г)  $t = 3.5$  мс; слева направо:  $k(x)$  расчет 5,  $k(x)$  расчет 6,  $k(y)$  расчет 5,  $k(y)$  расчет 6.

Наконец отметим, что в обоих расчетах имеет место увеличение со временем амплитуды Фурье максимальной в спектре гармоники, то есть, гармоники в целом растут. Этот анализ подтверждается также приведенными выше рисунками.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведены расчетно-экспериментальные исследования перехода в турбулентную стадию “чистых” периодических 2D-возмущений на поверхности жидкого слоя, ускоряемого сжатым газом, при неустойчивости Рэлея–Тейлора.

Теоретически показано, что наиболее неустойчивыми модами в этом случае будут сферические возмущения с радиусом, равным половине исходной длины волны возмущения. Поэтому через опре-

деленное время в течении проявляются именно такие возмущения, которые приводят к распаду 2D-возмущений на 3D с длинной волны, равной первоначальной.

В экспериментах получено, что время перехода неустойчивости в турбулентную стадию происходит при достижению интегрального числа Рейнольдса значения  $Re = 1.3 \cdot 10^6$ , что согласуется с временем, полученным в расчетах по критерию достижения степени гомогенности значения 0.2.

Результаты численного моделирования ширины зоны турбулентного перемешивания удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена в рамках научной программы Национального центра физики и математики по Государственному контракту № Н.4ц.241.4Д.23.1085.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Taylor G.I.* The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. I. // Proc. Roy. Soc. A. 1950. V. 201. P. 192–196.
2. *Richtmyer R.D.* Taylor instability in shock acceleration of compressible fluids // Commun. Pure Appl. Math. 1960. V. 13. № 2. P. 297–319.
3. *Мешков Е.Е.* Неустойчивость границы раздела двух газов, ускоряемой ударной волной. Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 5. С. 151–158.
4. *Helmholtz H.L.F.* Über discontinuirliche Flüssigkeits-Bewegungen // Monatsberichte Konigl. Preus. Akad. Wiss. Berlin. 1868. V. 23. P. 215–228.
5. *Брагин М.Д., Гуськов С.Ю., Змитренко Н.В., Кучугов П.А. и др.* Экспериментальное и численное исследование динамики развития неустойчивости Рэлея–Тейлора при числах Атвуда, близких к единице // Матем. моделир. 2023. Т. 35. № 1. С. 5982.
6. *Невмержицкий Н.В.* Гидродинамические неустойчивости и турбулентное перемешивание веществ. Лабораторное моделирование. / Под ред. д.т.н. А.Л. Михайлова. Саров: ФГУП “РФЯЦ-ВНИИЭФ”. 2018. 246 с.
7. *Янилкин Ю.В., Беляев С.П., Бондаренко Ю.А., Гаврилова Е.С., Гончаров Е.А., Горбенко А.Д., Городничев А.В., Губков Е.В., Гужкова А.Р., Дегтяренко Л.И., Журова Г.В., Колобянин В.Ю., Софронов В.Н., Стадник А.Л., Ховрин Н.А., Чернышова О.Н., Чистякова И.Н., Шемяков В.Н.* Эйлеровы численные методики ЭГАК и ТРЭК для моделирования многомерных течений многокомпонентной среды // Тр. РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2008. Вып. 12. С. 54–65.
8. *Linden P.F., Redondo J.M., Youngs D.L.* Molecular mixing in Rayleigh-Taylor instability // J. Fluid Mech. 1994. V. 265. P. 97–124.
9. *Dimonte G., Youngs D. L., Dimits A. et al.* A comparative study of the turbulent Rayleigh-Taylor instability using high-resolution three-dimensional numerical simulations: The Alpha-Group collaboration // Phys. Fluids. 2004. V. 16. N. 5. P. 1668–1693.

**NUMERICAL AND EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF THE  
DEVELOPMENT OF TWO-DIMENSIONAL DISTURBANCES  
IN THE CASE OF RAYLEIGH–TAYLOR INSTABILITY  
AND TRANSITION TO TURBULENCE**

**E. V. Bodrov<sup>a</sup>, D. O. Kochetkov<sup>a</sup>, B. V. Levkina<sup>a,\*</sup>, N. V. Nevmerzhitskii<sup>a, \*\*</sup>, V. P. Statsenko<sup>a</sup>,  
Yu. V. Tretyachenko<sup>a</sup>, I. R. Farin<sup>a</sup> and Yu. V. Yanilkin<sup>a</sup>**

*<sup>a</sup>Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Science and Research Institute of Experimental Physics,  
Sarov, Russia*

*\*e-mail: EVLevkina@vniief.ru*

*\*\*e-mail: postmaster@ifv.vniief.ru*

**Abstract**—The results of experimental and numerical investigations of the development of two-dimensional deterministic disturbances in the case of Rayleigh–Taylor instability and transition to turbulence on the gas–liquid interface are presented. The experiments were performed on a light-gas gun. Disturbances at the interface were produced by means of gun oscillations using a special device. The disturbance wavelength varied from 5.4 to 8.8 mm, their amplitude from 0.3 to 0.4 mm, and the liquid layer acceleration from 5.2 to 18.8 mm/ms<sup>2</sup>. Water was used as a fluid and compressed air as a gas. The experimental data on the disturbance transition to the turbulent stage are obtained. The experiments are accompanied by the numerical modeling using the EGAK code. The criteria of instability transition to the turbulent stage are proposed.

**Keywords:** initial disturbances, Rayleigh–Taylor instability, turbulent mixing, vibrational setup, turbulent stage, numerical modeling

УДК 532.525.2

## ВЛИЯНИЕ АКУСТИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА СТАЛКИВАЮЩИЕСЯ ЛАМИНАРНЫЕ МИКРОСТРУИ

© 2024 г. Ю. А. Литвиненко<sup>a,\*</sup>, А. А. Смяцких<sup>a</sup>, М. В. Литвиненко<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия  
\*e-mail: litur@itam.nsc.ru

Поступила в редакцию 29.05.2024 г.

После доработки 18.08.2024 г.

Принята к публикации 11.10.2024 г.

Представлены результаты исследований процесса формирования струи при взаимодействии двух соударяющихся осесимметричных ламинарных воздушных микроструй. Оси симметрии трубок лежат в одной плоскости и пересекаются под углом 60°. Расстояние между ближними концами трубок 4 мм. Истечение осуществлялось с равными скоростями. В результате эксперимента выявлены особенности формирования вторичной струи при естественных условиях и при воздействии внешнего периодического возмущения. Установлено, что результирующая струя формируется в ортогональной к трубкам плоскости. При естественных условиях вторичная струя формируется с большим более 115° углом раствора и представляет собой уплощённую струю. В случае внешнего воздействия периодическим акустическим сигналом после взаимодействия микроструй возникает незначительное уплощение с развитием вторичных колебаний в ортогональной плоскости с последующим поворотом к плоскости расположения трубок.

**Ключевые слова:** соударение воздушных микроструй, управление струйным течением, акустическое воздействие, ламинарные микроструи

**DOI:** 10.31857/S1024708424060094, **EDN:** FDUNZN

Понимание протекающих процессов и управление струйным смешиванием имеет фундаментальное и практическое значение во множестве технических приложений, таких как смешивание компонентов и газов, шумоподавление струйных течений, диффузионное горение, увеличение подъемной силы вторичными струями, теплопередача и химические реакторы. В тоже время развитие методов исследований и технологий производства приводит к активному освоению научно-технических процессов связанных с микромасштабами. Микротечения нашли свое применение в различных областях от производства микроэлектроники до тепломассобменных процессов. Например, жидкостные микропрессоры используют сталкивающиеся микроструи для формирования пелены, в которой происходит быстрое смешение и контакт компонентов с образованием продуктов реакции [1]. Столкновение газовых микроструй при определенных условиях также протекает с образованием области уплощения (пелены), которая в значительной мере определяет характер развития течения. Использование таких струй в процессах смешения и горения представляет большой интерес в связи с интенсификацией и стабилизацией процессов диффузионного горения, как было показано в [2]. Вышеупомянутая область представляет собой квазиплоскую вторичную струю большого удлинения. Создание такой струи напрямую из плоского сопла значительно увеличивает размеры генерирующей установки, а также снижает возможности по управлению структурой струи. Активное манипулирование струями имеет потенциал для достижения более гибких и значительных модификаций потока. Это большое преимущество перед пассивными, хотя зачастую и эффективными методами.

В качестве управляющего воздействия в данных исследованиях использовались внешние периодические акустические колебания. Механизм акустического управления развитием струйного течения достаточно широко использовался и ранее. Было предложено и исследовано множество активных методов, включая акустическое возбуждение [3–5], синтетические струйные приводы [6], сочетание осевого и окружного возбуждения на выходе из сопла для создания раздвоенных и расширяющихся

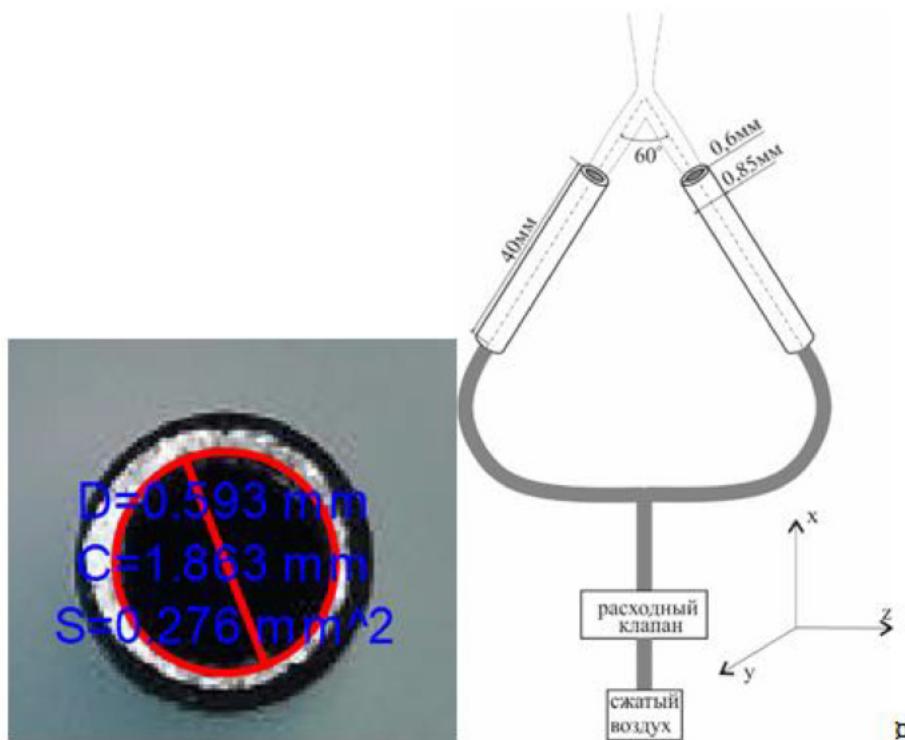
струй [7]. В данных же исследованиях акустическое воздействие осуществляется на сами сталкивающиеся микроструи. Предполагается, что воздействие на частоте собственных колебаний приведет к трансформации структуры течения в области взаимодействия струй.

Развитие струйных течений связано с возникновением различных типов гидродинамической неустойчивости. Струи, сформированные в каналах малого удлинения, способствуют развитию в них неустойчивости Кельвина–Гельмольца варикозного или синусоидального типа с ранней турбулизацией. Для струй, сформированных каналами с большим удлинением, такая неустойчивость не реализуется, и струя имеет протяженный ламинарный участок [8]. Данные особенности проявляются и при реализации соударяющихся струй.

Целью данной работы явилось определение основных характеристик течения в области взаимодействия двух сталкивающихся ламинарных микроструй, истекающих в затопленное воздушное пространство при естественных условиях и при воздействии внешнего периодического акустического сигнала.

### 1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА И МЕТОДИКА

Все экспериментальные исследования проводились в Институте теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН на струйной установке. Установка состояла из двух идентичных цилиндрических трубок длиной 40 мм и внутренним диаметром 0.6 мм, расположенных под углом 60° между осями симметрии сопел. Расстояние между срезами сопел 4 мм. Схема установки представлена на рис.1. Сжатый воздух подавался из баллона на регулятор массового расхода MKS MASS FLOW, после чего разделялся тройником на две трассы подводящие газ к микросоплам. Управление регулятором массового расхода осуществлялось через двухканальный модуль MKS PR4000B. Расход воздуха контролировался с точностью  $\pm 0.7\%$ . Перед регулятором массового расхода создавалось избыточное давление 6 атм. Истечение осуществлялось в воздушное пространство при 20 °C и атмосферном давлении. Расход воздуха через каждое сопло соответствовал 1/2 устанавливаемого расхода на регуляторе и был равен  $5.2 \times 10^{-7} \text{ м}^3/\text{с}$ . Учитывая диаметр сопла 600 мкм, расчетная скорость газа,



**Рис. 1.** Схема струйной установки. Фото торца трубы. Диаметр трубы: внешний — 0.85 мм, внутренний — 0.6 мм, длина трубок — 40 мм.

истекающего через каждое сопло,  $U_1 = U_2 = 10$  м/с, что соответствовало числу  $Re = 400$ , вычисленному по диаметру сопла. Измерения выполнялись с использованием термоанемометрического метода. В ходе измерений регистрировалась продольная к плоскости симметрии двух струй компонента скорости —  $U(t)$  с частотой дискретизации 10 кГц. По полученным данным вычислялось стандартное отклонение пульсаций скорости  $u' = \sqrt{\sum (U_i - \bar{U})^2 / i}$ . Волластоновая нить датчика с диаметром проволоки 5 мкм и длиной 0.4 мм использовалась при коэффициенте перегрева 1:8. Калибровка датчика для всех экспериментальных исследований производилась в потенциальном течении круглой струи, для чего была изготовлена отдельная установка. Непосредственно перед измерением датчик перемещался координатным устройством к соплу установки, после тарировки возвращался на место измерений. Погрешность тарировочной кривой составляла менее 0.5% для всех точек в измерительном диапазоне. Автоматизированное координатное устройство для перемещения датчика термоанемометра управлялось компьютером и позволяло проводить длительные экспериментальные съемки по заранее заданной трехмерной геометрической сетке точек измерения. В данных экспериментах измерялась область размерами  $(x \times y \times z) = 20 \times 20 \times 10$  мм соответственно, время считывания данных в каждой из точек 0.5 с, частота 10000 точек/с. Для повышения точности позиционирования на каждом из трех линейных модулей перемещения устанавливались магнитные линейки, поддерживающие точность до 5 мкм в абсолютной системе координат. Сигнал с термоанемометра подавался на 12-разрядный аналогово-цифровой преобразователь National Instruments NI-6023E, установленный на материнской плате компьютера. Коммутация термоанемометра и АЦП осуществлялась через вспомогательный соединительный модуль BNC-2120. Данные эксперимента сохранялись на жестком диске компьютера и обрабатывались в программной среде MatLab.

Для детального изучения процесса взаимодействия и возможности управления развитием двух сталкивающихся микроструйных течений использовались преимущества контролируемого эксперимента с введением контролируемых возмущений. Периодические во времени возмущения возбуждались динамиком, расположенным в плоскости трубок на расстоянии порядка 300 мм от области пересечения струй. Диффузор динамика был ориентирован также на область пересечения струй. Сигнал для динамика контролируемой частоты и амплитуды генерировался платой аналогового выхода компьютера и внешним усилителем. Частота искусственных возмущений составляла 1500 Гц с интенсивностью до 97 дБ на оси симметрии динамика, и была выбрана по результатам предварительных измерений естественного спектра течения. Измерения проводились с синхронизацией фазы акустического сигнала по выбранному фронту возмущения и момента начала записи осциллограммы скорости. После проведения процедуры тарировки, в программу сбора данных вносились указания по каждой из трех координатных осей, величине шага и количестве шагов, длительности сбора данных и т.д., после чего процесс измерения происходил в автоматическом режиме. Как уже упоминалось целью исследований являлась именно область взаимодействия двух микроструй, но не начальный участок вблизи среза сопел, тем более что исследование этой области вызывает определенные сложности, вызванные малым диаметром микротрубок и положением нити датчика относительно направления струйного течения. Но поскольку начальные условия в виде профиля скорости, несомненно, играют важную роль, были выполнены расчеты течения в ANSYS Fluent в трехмерной постановке для микротрубки с такими же как в эксперименте геометрическими размерами. Расчеты выполнены с использованием модели ламинарного течения. На входе в трубку задавалась равная по всему сечению трубки скорость  $U_{\text{нач}} = 6$  м/с, на стенке трубы ставилось условие прилипания, на выходе — outflow.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

На рис. 2 представлен рассчитанный профиль скорости, реализующийся на срезе сопла. На выходе из микротрубки длиной 40 мм профиль скорости трансформировался к параболическому с максимальным значением скорости на выходе из трубы  $U_{\text{max}} = 10.8$  м/с, отношение  $U_{\text{max}}/U_{\text{нач}} = 1.8$  соответствует практически развитому ламинарному течению Пуазеля при  $Re = (U_{\text{нач}} \cdot d)/v = 430$ . Учитывая полученные расчетные данные в экспериментальных исследованиях, устанавливалась также скорость на выходе из каждого микроканала.

Как упоминалось выше, измерения производились в границах трехмерной области, по продольной координате  $x$  и вертикальной  $y$  — 41 точка, по поперечной  $z$  — 21 точка, всего 35301 точка измерений с равным для всех направлений шагом 0.5 мм. Отсчет продольной координаты  $x$  проводился с отступом порядка 1.5 мм от средней линии среза сопел. Изменения максимальных значений продольной

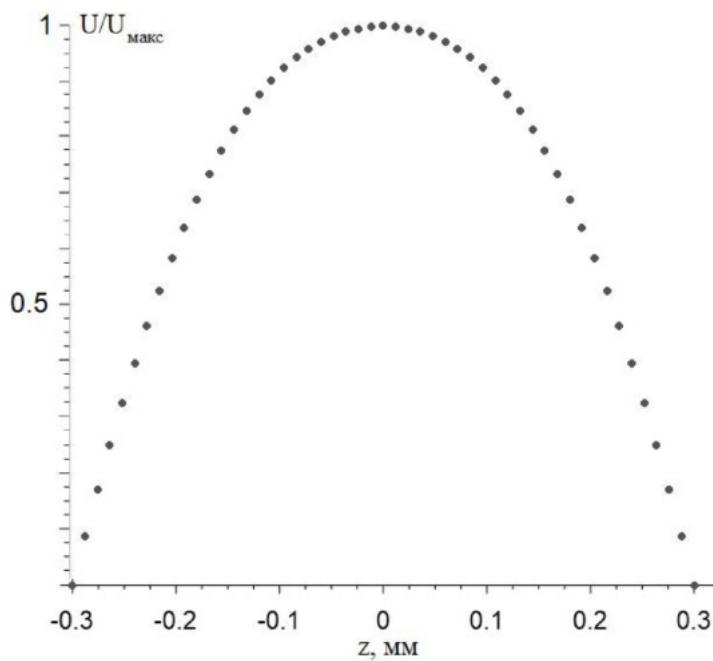


Рис. 2. Рассчитанный в AnsysFluent профиль скорости на выходе из микротрубки.

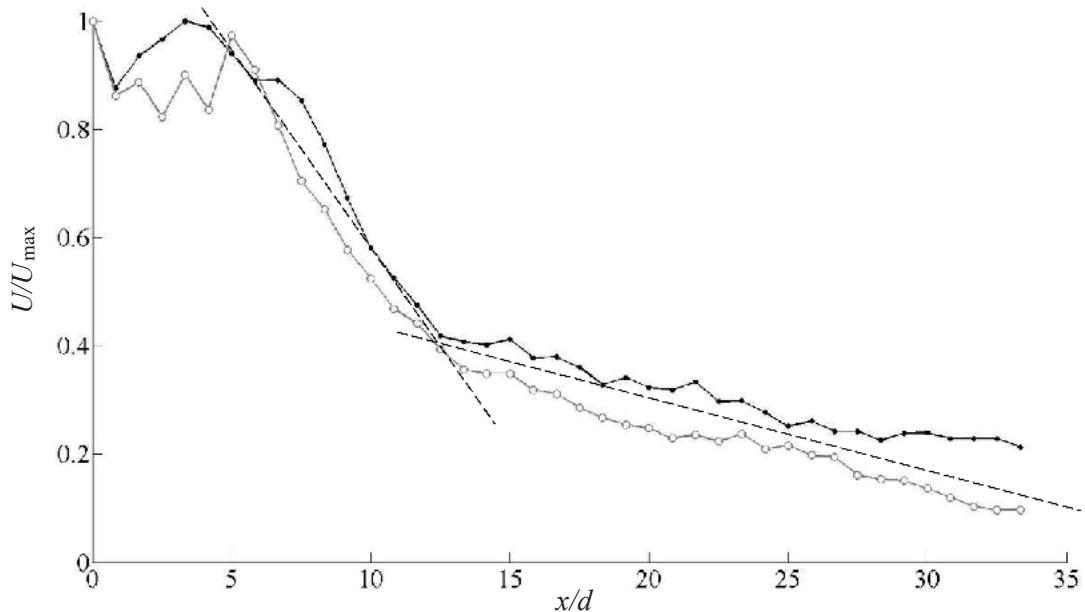
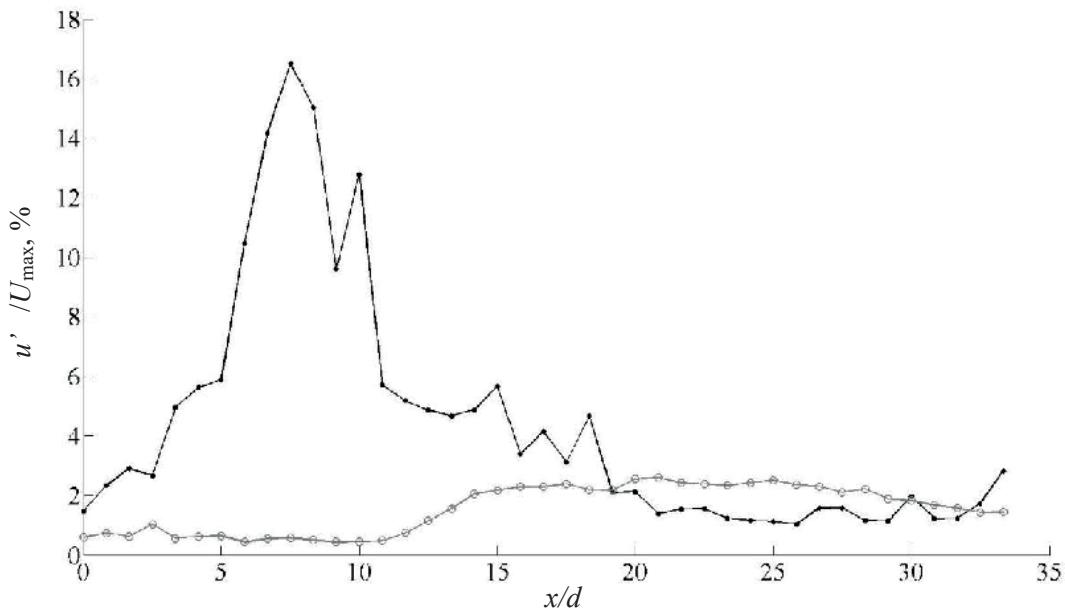


Рис. 3. Изменение максимальной скорости по продольной координате:  $\circ$  – естественный случай;  $\bullet$  – 1500 Гц.

компоненты скорости  $U/U_{\max}$ , полученных в каждом поперечном сечении уз в зависимости от продольной координаты обезразмеренной на диаметр выходного отверстия микротрубки  $x/d$  представлен на рис. 3. Данные свидетельствуют о незначительном отличии продольной скорости для случая естественного истечения и при воздействии внешних акустических колебаний. Начиная с  $x/d = 5$ , наблюдается область значительного линейного падения продольной скорости, показанная пунктирной линией, далее с  $x/d = 12$  происходит излом, и дальнейшее снижение скорости замедляется также близко к линейному закону. Область значительного падения скорости соответствует области взаимодействия двух микроструй и развитию вторичной (результирующей) струи. На рис. 4. представлены максимальные значения пульсаций скорости от безразмерного расстояния  $x/d$ . Для естественных условий флуктуации скорости возрастают незначительно с 0.5%  $U_{\max}$  до 3%  $U_{\max}$ . При воздействии внешнего аку-

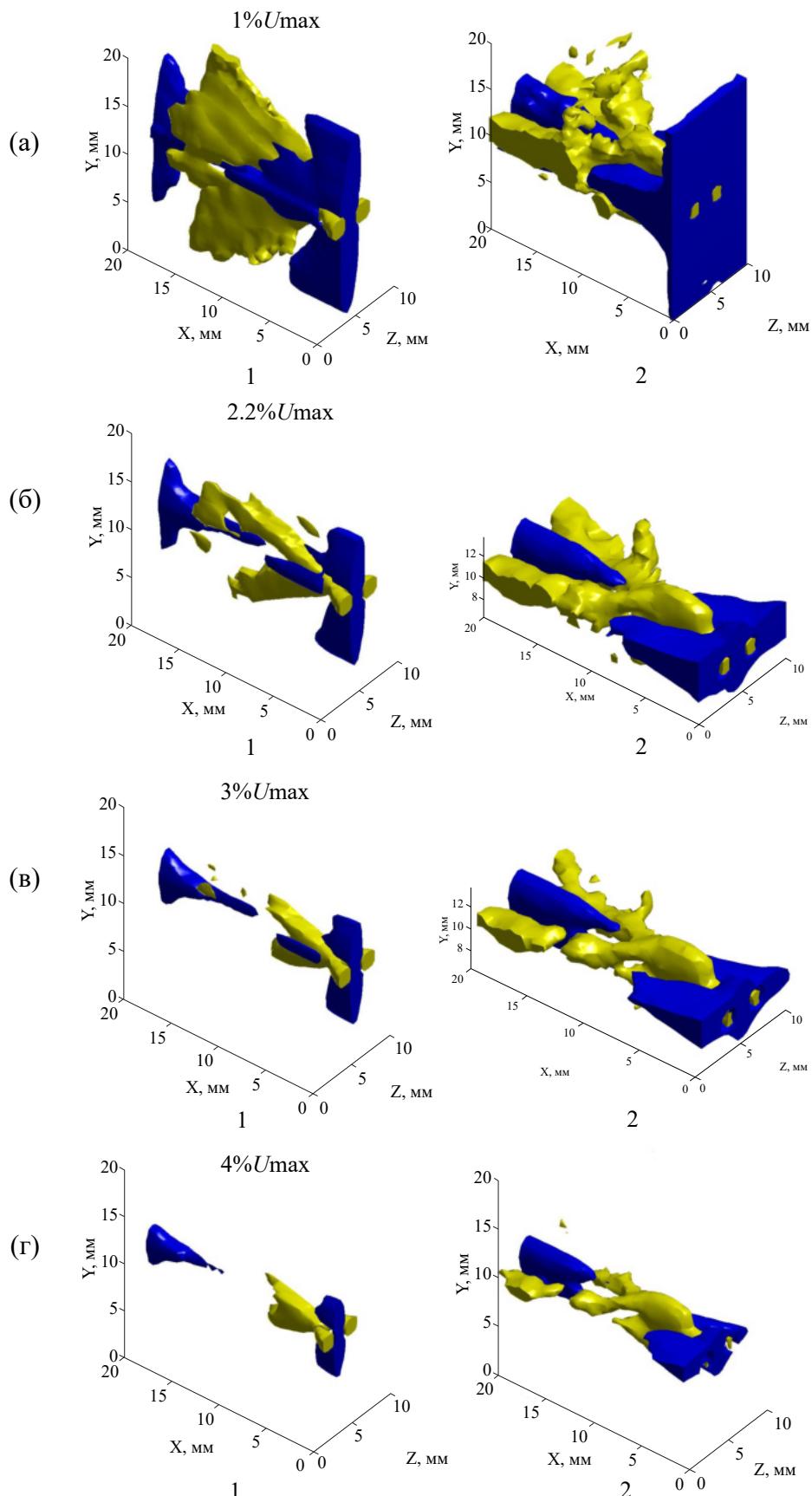


**Рис. 4.** Распределение максимальных значений среднеквадратичных пульсаций по продольной координате:  $\circ$  – естественный случай;  $\bullet$  – 1500 Гц.

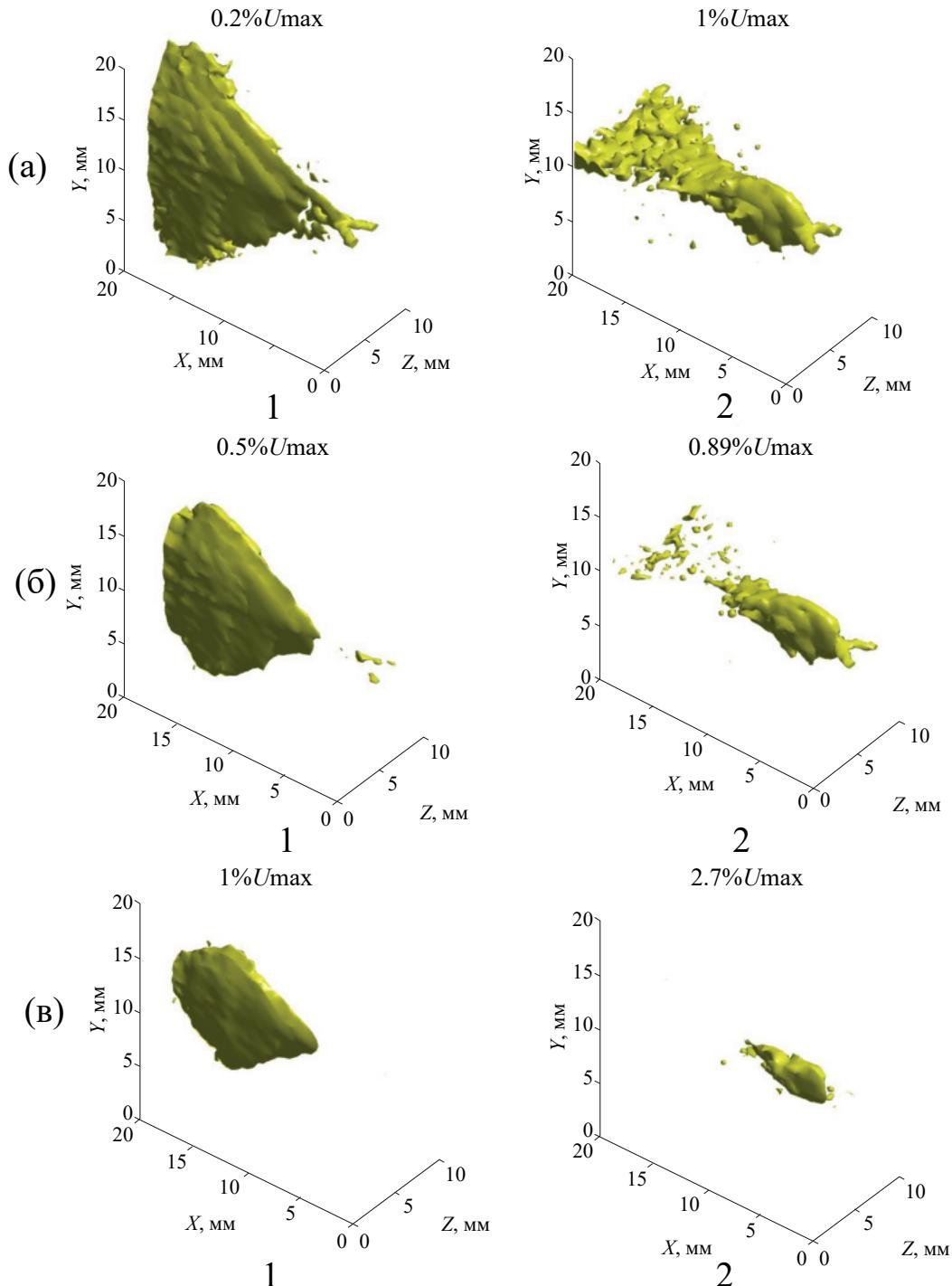
стического возмущения отмечается резкий рост пульсаций с  $1\% U_{max}$  до  $17\% U_{max}$ . Следует отметить, что области роста флюктуаций для микроструй сталкивающихся при естественных условиях и при воздействии возмущения локализованы в разных областях. В случае акустического воздействия, максимальный рост пульсаций приходится на начало области столкновения микроструй, а в естественном случае на центральную область образовавшейся квазиплоской струи. Необходимо отметить, что результирующие струи для двух случаев значительно отличаются, как по структуре течения, так и по характерным размерам.

На рис. 5. представлены изоповерхности отклонения мгновенной скорости от осредненной по времени скорости для сталкивающихся микроструй при естественных условиях – 1, при внешнем акустическом воздействии с частотой 1500 Гц – 2. Амплитуда изоповерхностей составляла  $a = 1\% U_{max}$ ,  $2\% U_{max}$ ,  $3\% U_{max}$  и  $4\% U_{max}$ . Превышение средней скорости показано светлым полутоном, дефект средней скорости показан темным полутоном. В естественном случае после точки столкновения микроструй формируется область превышения скорости в виде квазиплоской структуры большого поперечного размера, при этом структура расположена ортогонально по отношению к плоскости расположения микротрубок. Более скоростные отклонения концентрируются по оси симметрии микротрубок. Ниже по течению продольная составляющая скорости значительно снижается, течение турбулизуется. В случае акустического воздействия с частотой 1500 Гц, развитие неустойчивости протекает по другому сценарию. Ниже области столкновения при всех амплитудах отклонения от средней скорости в ортогональной плоскости образуется незначительная область уплощения, превышающая осредненные по времени значения скорости. При столкновении микроструй при естественных условиях поперечный размер результирующей струи по меньшей мере в 2 раза больше чем в случае с акустическим воздействием. При этом, в случае с акустическим воздействием, высокоскоростная область с ортогональным уплощением перестраивается второй раз, возвращаясь к начальной плоскости истечения микроструй, как показано светлыми полутонами.

На рис. 6 представлены изоповерхности стандартного отклонения пульсаций скорости для уровней пульсаций  $1\% U_{max}$ ,  $2.2\% U_{max}$ ,  $3\% U_{max}$  для естественного случая, и  $0.4\% U_{max}$ ,  $0.89\% U_{max}$ ,  $2.7\% U_{max}$  при акустическом воздействии. Анализ полученных данных показал, что пространственное положение повышенного уровня флюктуаций скорости совпадает с локализацией областей превышения скорости представленных на рис. 5. В целом изоповерхности пульсаций скорости также демонстрируют отличия в развитии естественного случая столкновения двух микроструй и случая с акустическим воздействием. Для первого характерна большая поперечная область сосредоточения пульсаций, для второго пульсации локализованы в гораздо меньшей области, отличия в объеме областей для сопоста-

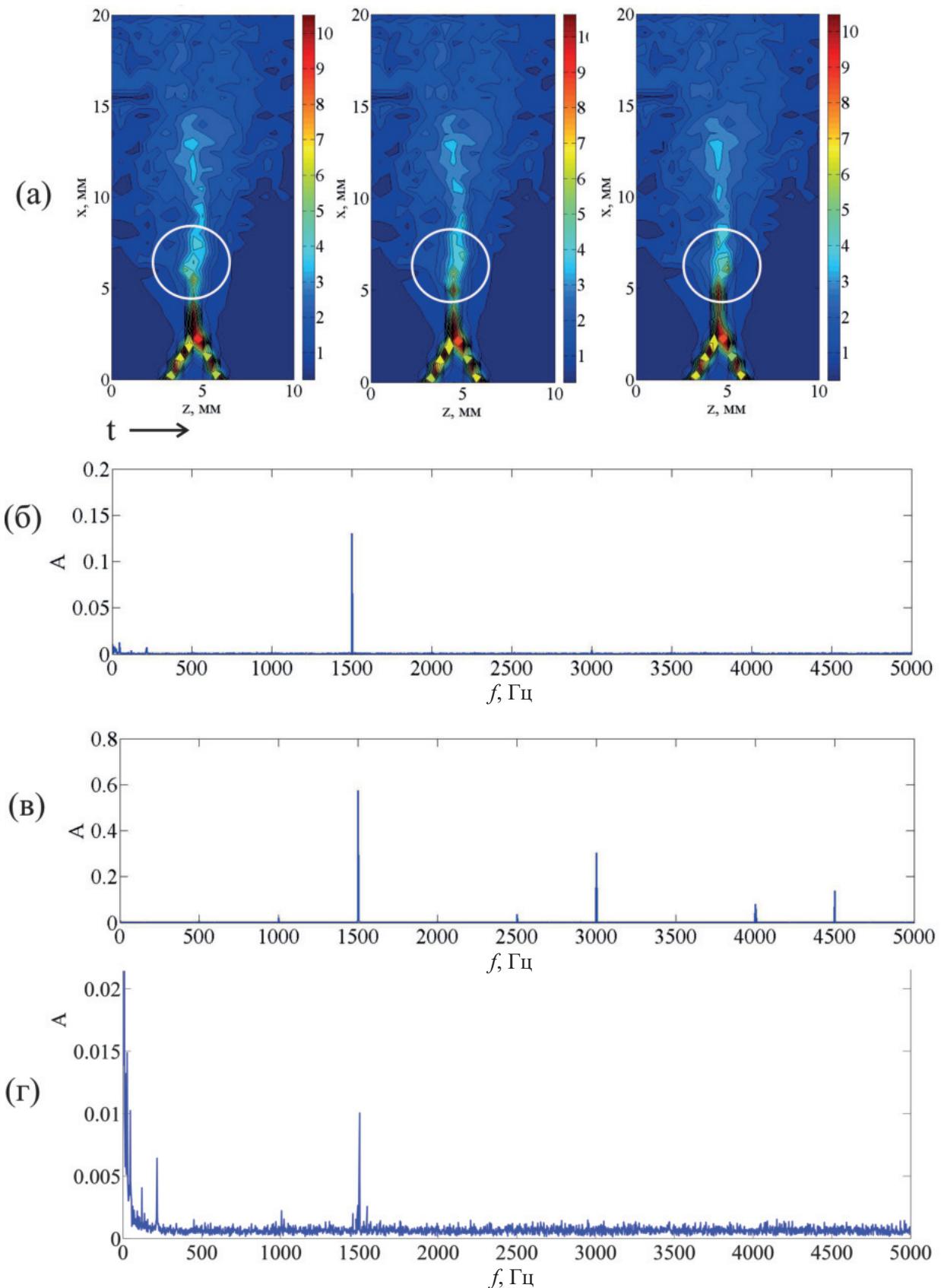


**Рис. 5.** Изоповерхности отклонения мгновенной скорости от средней скорости: (а) –  $1\% U_{\max}$ ; (б) –  $2.2\% U_{\max}$ ; (в) –  $3\% U_{\max}$ ; (г) –  $4\% U_{\max}$ ; 1 – естественный случай, 2 – 1500 Гц; светлое – превышение средней скорости, темное – дефект средней скорости.



**Рис. 6.** Изоповерхность стандартного отклонения пульсаций продольной компоненты скорости. 1 – естественный случай: (а) –  $0.2\% U_{\max}$ ; (б) –  $0.5\% U_{\max}$ ; (в) –  $1\% U_{\max}$ ; 2 –  $1500$  Гц; (а) –  $0.4\% U_{\max}$ ; (б) –  $0.89\% U_{\max}$ ; (в) –  $2.7\% U_{\max}$ .

вимых амплитуд возмущений более чем в 2 раза. В случае с акустическим возмущением рис. 6б имеет место развитие вторичного колебания, развивающегося с ортогональной области уплощения (в плоскости  $xy$ ) и переходящего далее в плоскость  $zx$ . Данный факт подтверждается гармоническим колебанием областей равной скорости на рис. 7а, где представлены три графика с шагом  $1 \times 10^{-4}$  с по времени. Частота вторичных колебаний соответствует частоте акустического воздействия. На рис. 7б–г представлены амплитудные спектры пульсаций скорости при воздействии акустического возмущения  $f = 1500$  Гц, (б) – точка находится в струе вблизи среза микрострушки, (в) – точка находится



**Рис. 7.** (а) — Распределение изолиний равной скорости в плоскости  $xz$ ,  $y = 10.5$  мм. Шаг по времени  $1 \times 10^{-4}$  с. Амплитудные спектры пульсаций скорости в точке (б) —  $x = 0.5$ ,  $z = 6$  мм, (в) —  $x = 6$ ,  $z = 4.5$  мм — при акустическом воздействии  $f = 1500$  Гц; (г) — область столкновения — естественный случай.

в области столкновения микроструй, (г) – область столкновения микроструй без воздействия. Установлено, что в амплитудном спектре пульсаций скорости при естественном истечении сталкивающихся микроструй как обычно заполнена низкочастотная часть спектра, а также существует локальный максимум амплитуды на частоте 1500 Гц (рис. 6в), данная частота является собственной частотой естественного возмущения. При воздействии акустического возмущения с частотой 1500 Гц в области до взаимодействия микроструй (рис. 7б) в спектре выделяется одна несущая частота, соответствующая частоте акустического воздействия, в спектре, полученном в области взаимодействия микроструй (рис. 7в), отмечается значительный рост амплитуды пульсаций с появлением двух гармоник.

Сравнивая два исследованных случая развития сталкивающихся микроструй, можно утверждать, что влияние акустического возмущения существенно меняет структуру струйного течения. Использование таких струй при контролируемых возмущениях в процессах диффузионного струйного горения может способствовать более качественному смешению компонентов или формированию определенного вида факела. Кроме того, учитывая значительное увеличение площади квазиплоской струи в естественном случае, такая структура может использоваться как преграда для разрушения более масштабных структур, например, располагаясь на срезе сопла разрушать осесимметричные вихри.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенных исследований взаимодействия воздушных микроструй при внешнем акустическом воздействии были получены следующие результаты. Получены сценарии развития результирующей струи при столкновении двух воздушных микроструй в естественных условиях и в условиях внешнего акустического воздействия. Установлена возможность управления развитием струйного течения акустическим воздействием.

В результате взаимодействия двух микроструй, в естественном случае, реализуется квазиплоская результирующая струя большой относительной ширины. При акустическом воздействии ширина значительно уменьшается. Также меняется структура течения, происходит повторный разворот уплощенной области (превышение средней скорости) к плоскости расположения микротрубок.

Акустическое воздействие способствует развитию вторичного колебания развивающегося в области уплощения с частотой акустического возбуждения.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-19-00151, <https://rscf.ru/project/22-19-00151/>)

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абиев Р.Ш., Альмяшева О.В., Гусаров В.В., Изотова С.Г. Способ получения нанопорошков феррита кобальта и микрореактор для его реализации // Патент на изобретение № RU 2625981 2017. С1. 20.07.2017
2. Kozlov V.V., Litvinenko Y.A., Katasonov M.M. et al Distinctive Features of Plume Formation on Collision of Two Laminar Gas Jets // Fluid. Dyn. 2023. V 58. № 4. P. 634–639. <https://doi.org/10.1134/S0015462823700076>
3. Cohen J., Wygnanski I. The evolution of instabilities in the axisymmetric jet // J. Fluid. Mech. 1987. V. 176. P. 191–219.
4. Ginevsky A. S., Vlasov Y. V., Karavosov R. K. Acoustic Control of Turbulent Jets // Springer. 2004. 235 p.
5. Kozlov V.V., Grek G.R., Litvinenko Yu.A. Visualization of Conventional and Combusting Subsonic Jet Instabilities // Dordrecht: Springer International Publishing. 2016. 126p. (Springer Briefs in Applied Sciences and Technology).
6. Smith B.L., Glezer A. Jet vectoring using synthetic jets // J. Fluid. Mech. 2002. V. 458. P. 1–34.
7. Reynolds W.C., Parekh D.E., Juvet P.J.D., Lee M.J.D. Bifurcating and blooming jets // Annu. Rev. Fluid Mech. 2003. V. 35. P. 295–315.
8. Гrek Г.Р., Козлов В.В., Литвиненко Ю.А. Устойчивость дозвуковых струйных течений и горение // Учеб. пособ. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2013. 240 с.

# EFFECT OF ACOUSTIC EXCITATION ON COLLIDING LAMINAR MICROJETS

**Yu. A. Litvinenko<sup>a,\*</sup>, A. A. Smyatskikh<sup>a</sup>, and M. V. Litvinenko<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch  
of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

\*e-mail: [litur@itam.nsc.ru](mailto:litur@itam.nsc.ru)

**Abstract**—The results of studies of the jet formation process during the interaction of two colliding axisymmetric laminar air microjets. The axes of symmetry of the tubes lie in the same plane and intersect at an angle of  $60^\circ$ . The distance between the near ends of the tubes is equal to 4 mm. The outflow with identical velocities was implemented. As a result of the experiment, the distinctive features of the secondary jet formation under natural conditions and under the impact of an external periodic disturbance were revealed. It was found that the resulting jet is formed in the plane orthogonal to the tubes. Under natural conditions, a secondary jet with a beam angle greater than  $115^\circ$  is formed and represents a flattened jet. In the case of the external impact by a periodic acoustic signal, after the interaction of the microjets, a slight flattening appears with the development of secondary oscillations in the orthogonal plane and subsequent rotation with respect to the plane of the tubes.

**Keywords:** air microjets collision, jet flow control, acoustic excitation, laminar microjets

## МОДЕЛЬ ПОДЪЕМА ПОРШНЯ В ДОЗАТОРЕ НА ОСНОВЕ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

© 2024 г. Д. А. Пелевина<sup>a,\*</sup>, Д. И. Меркулов<sup>a</sup>, И. И. Меркулова<sup>a</sup>,  
В. А. Турков<sup>a</sup>, В. А. Налетова<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*e-mail: pelevina.daria@gmail.com

Поступила в редакцию 01.08.2024 г.

После доработки 20.09.2024 г.

Принята к публикации 11.10.2024 г.

Предложена теоретическая модель насоса-дозатора на основе магнитной жидкости, содержащей тело из намагничивающегося материала, который управляет приложенным переменным однородным магнитным полем. Модель учитывает нелинейную зависимость намагченности магнитной жидкости от магнитного поля, что позволяет рассмотреть случай любых (в том числе и больших) полей. В рамках данной модели проведены расчеты подъема поршня, разделяющего магнитную и перекачиваемую жидкости, в различных однородных магнитных полях. Проведено сравнение расчетов на основе предложенной модели с проведенным ранее и новыми экспериментами. Получено хорошее совпадение теории и эксперимента.

**Ключевые слова:** магнитная жидкость, насос-дозатор, однородное магнитное поле

**DOI:** 10.31857/S1024708424060106, **EDN:** FDQXGL

Магнитная жидкость — это коллоидный раствор ферромагнитных частиц нано-размеров в несущей жидкости, стабилизированный поверхностью активным веществом. Основы физики и гидродинамики магнитной жидкости изложены в [1–3].

Основным свойством магнитной жидкости является то, что она течет в область большого магнитного поля. Однако течением и физическими характеристиками магнитной жидкости можно управлять также при помощи внешних однородных магнитных полей. Ряд работ посвящены исследованию этого явления. Например, в [3] показано, что однородное магнитное поле может изменить эффективную вязкость магнитной жидкости. В [4] теоретически показано, что однородным магнитным полем можно повлиять на устойчивость течения Куэтта в магнитной жидкости. Облако магнитной жидкости во вращающемся однородном магнитном поле может быть использовано для создания циркуляционных течений в каналах [5].

Известно множество прототипов насосов и дозирующих устройств на основе магнитной жидкости, управляемых неоднородными переменными магнитными полями. Например, предложены следующие полезные модели такого типа устройств [6–11]. Насосы, в которых капли магнитной жидкости, управляемые магнитным полем постоянных магнитов и электромагнитов, используются как клапаны и поршни, описаны в [6–8]. При помощи объема магнитной жидкости можно повысить надежность и производительность электромагнитных мембранных насосов [9]. Смеситель-дозатор с магнитожидкостными управляющими элементами для автоматического смешивания компонентов в требуемых пропорциях предложен в [10]. В [11] предложен дозатор для малых объемов газов с перегородкой из магнитной жидкости, формирующейся в поле катушки с током.

В отличие от [6–11], в [12] предложен прототип насоса-дозатора, управляемый однородным магнитным полем. Использование однородного управляющего магнитного поля позволяет создать

насосы-дозаторы малых размеров для перекачивания небольших объемов жидкости, когда использование обычных больших дозаторов невозможно. В [12] описан прототип, в котором поршень разделяет перекачиваемую жидкость и магнитную жидкость, содержащую тело из намагничивающегося материала, в цилиндрическом сосуде. В статье [12] предложена математическая модель движения поршня, которая не учитывает зависимость магнитной проницаемости магнитной жидкости от магнитного поля. Эта модель применима при достаточно малых магнитных полях.

Известно, что намагченность магнитной жидкости, а также ее магнитная восприимчивость существенно зависят от магнитного поля. Магнитные свойства магнитных жидкостей подробно рассмотрены, например в [2, 3]. Магнитная восприимчивость убывает при увеличении поля, а намагченность выходит на насыщение. Учет этого эффекта может значительно улучшить совпадение теоретических и экспериментальных результатов, как это показано, например, в [13].

В связи с этим в данной статье предлагается математическая модель насоса-дозатора, учитывающая нелинейную зависимость намагченности магнитной жидкости от величины магнитного поля. На основе этой модели численно исследовано движение поршня, разделяющего магнитную и немагнитную жидкости при включении приложенного однородного магнитного поля. Вычислена зависимость высоты подъема поршня от времени при различных магнитных полях. Проведены сравнения рассчитанных и экспериментально измеренных зависимостей положения поршня от времени при разных магнитных полях. Таким образом, в данной работе исследуется возможность перекачивания и дозирования жидкостей с помощью исследуемого прототипа, а также адекватность предложенной математической модели. Исследуемый прототип имеет ряд преимуществ: он управляемый дистанционно при помощи внешнего магнитного поля; такое управление позволяет менять скорость дозирования и дозировать жидкости с высокой точностью, особенно когда размеры дозатора достаточно малы.

## 1. ЭКСПЕРИМЕНТ

Магнитная жидкость находится в закрытом сверху цилиндрическом сосуде  $f$  радиуса  $R_v = 0.615$  см, полностью покрывает сферическое тело из намагничивающегося материала с магнитной проницаемостью  $\mu_b = 100$ , радиусом  $R_b = 0.6$  см, закрепленное в центре на дне сосуда, а также полностью смачивает поршень (массой  $m_p = 0.25$  г, площадью  $S_p$ , радиусом  $R_p = R_v$ , толщиной  $d_p = 0.3$  см), разделяющий магнитную и немагнитную жидкости, см. рис. 1.

Подробное описание прототипа насоса-дозатора, параметры и методика проведения эксперимента изложены в [12]. Введем вертикальную ось  $z$ , которая совпадает с осью цилиндрического сосуда  $f$ . В центре сферического тела  $z = 0$ . Далее индексы  $p, b, s, f$  обозначают параметры поршня, сферического тела, перекачиваемой жидкости, магнитной жидкости, соответственно.

Цилиндрический сосуд  $f$  помещается в однородное вертикальное магнитное поле катушек Гельмгольца. Кювета  $ff$ , заполненная магнитной жидкостью и соединенная с  $f$  каналом (2), находится вне действия магнитного поля катушек. При включении магнитного поля уровень магнитной жидкости

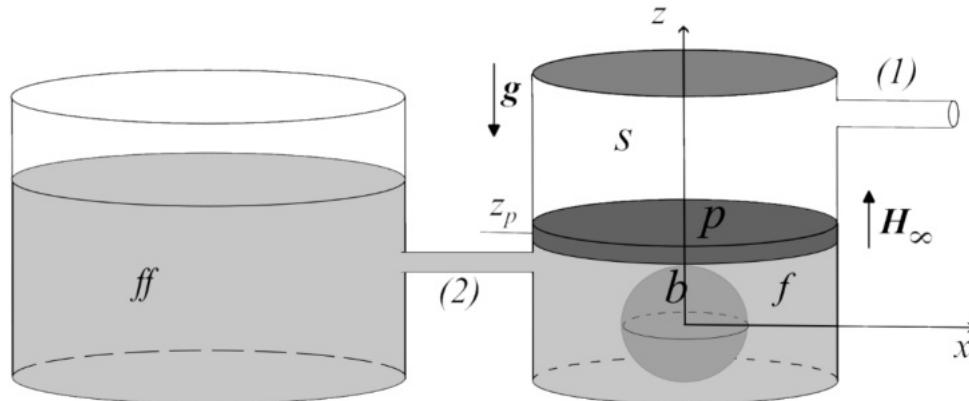


Рис. 1. Схема прототипа насоса-дозатора [12].

в сосуде  $f$  над сферическим телом увеличивается из-за притока магнитной жидкости из кюветы  $ff$ , поршень поднимается, немагнитная жидкость вытекает по каналу ( $I$ ).

### *Измерение магнитных свойств магнитной жидкости*

В эксперименте была использована магнитная жидкость плотностью  $\rho_f = 1.1 \text{ г}/\text{см}^3$  на основе воды с магнетитовыми нано-частицами. Объемная концентрация ферромагнитных частиц 2 %. В качестве перекачиваемой немагнитной жидкости использовано вазелиновое масло плотностью  $\rho_s = 0.87 \text{ г}/\text{см}^3$ . Магнитные свойства магнитной жидкости, в частности намагниченность, нелинейно зависят от магнитного поля. Намагниченность была измерена экспериментально с использованием метода, изложенного в [13]. В данном методе магнитные свойства вычисляются по измерениям того, как цилиндрический сосуд с магнитной жидкостью искажает известное однородное приложенное магнитное поле. На рис. 2 точками приведена экспериментальная зависимость намагниченности магнитной жидкости от магнитного поля, вертикальным отрезком обозначен экспериментальный разброс.

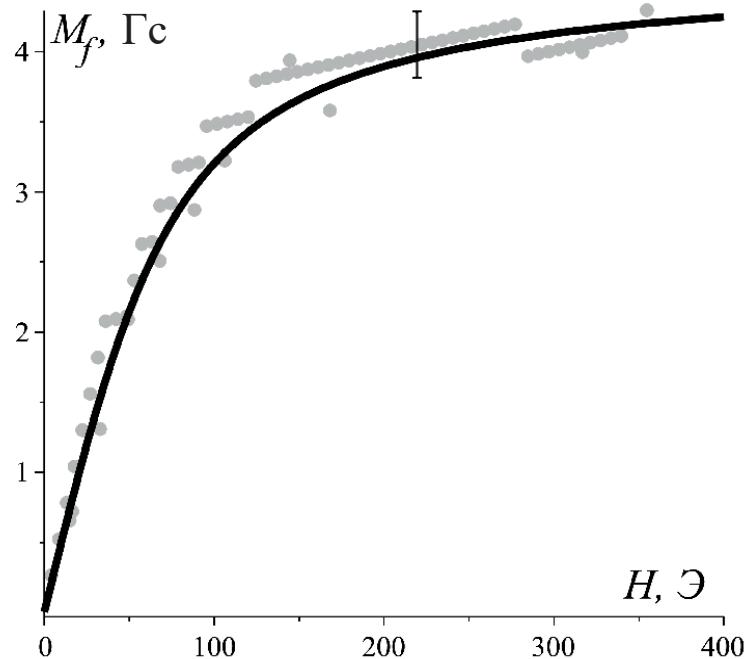
Экспериментально полученные точки могут быть аппроксимированы функцией Ланжевена, представленной на рис. 2 линией; при намагниченности насыщения  $M_{fs} = 5 \text{ Гс}$  и начальной магнитной восприимчивости  $\chi_{f0} = 0.03$

$$M_f = M_{fs}L(\xi), \quad L(\xi) = \coth(\xi) - \frac{1}{\xi}, \quad \xi = \xi' H, \quad \xi' = \frac{3\chi_{f0}}{M_{fs}}. \quad (1.1)$$

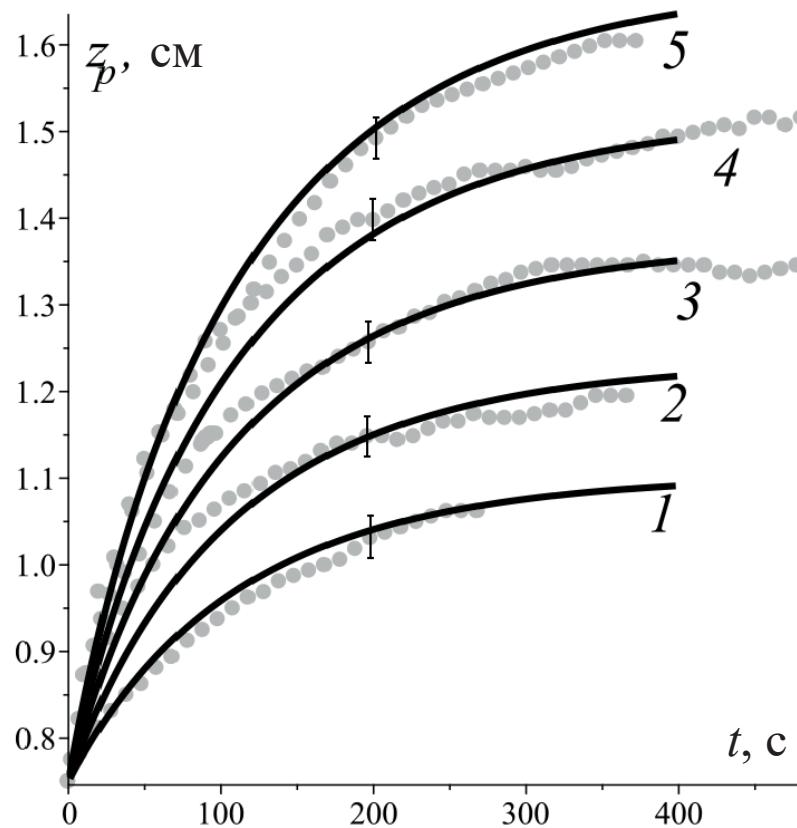
Такая аппроксимация экспериментальных данных используется при теоретическом описании и численных расчетах подъема поршня.

### *Постоянное магнитное поле*

При включении постоянного однородного магнитного поля магнитная жидкость поступает в кювету  $f$ , поршень начинает подниматься. Рассмотрены различные величины приложенного магнитного поля в диапазоне  $H_\infty = 100\text{--}200 \text{ Э}$ . Процесс подъема поршня фиксируется камерой. В начальный



**Рис. 2.** Зависимость намагниченности магнитной жидкости  $M_f$ , используемой в эксперименте, от магнитного поля  $H$ : точки – экспериментальные данные, линия – аппроксимация эксперимента функцией Ланжевена (1.1).



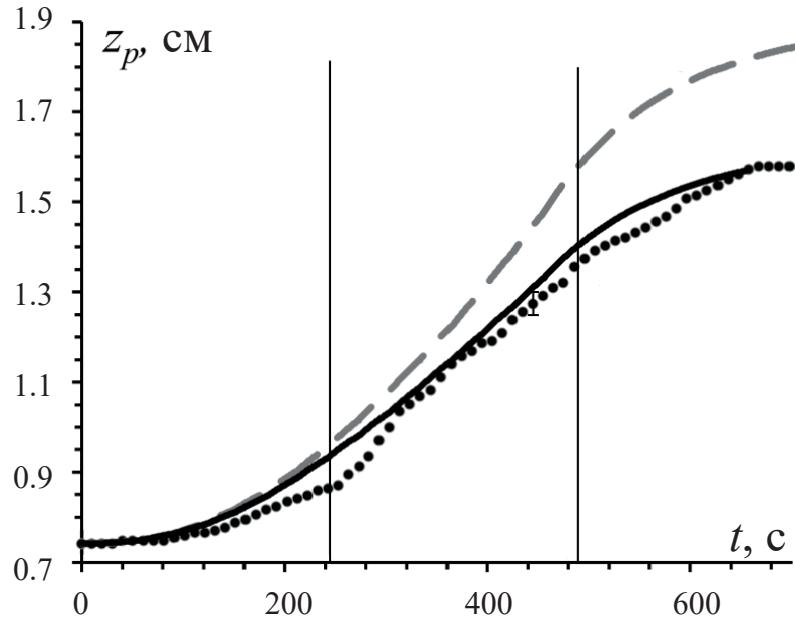
**Рис. 3.** Зависимость координаты поршня  $z_p$  от времени  $t$  в эксперименте (точки) и теории (линии) при включении различных постоянных магнитных полей  $H_\infty$ : 1–5 –  $H_\infty = 100, 125, 150, 175, 200$  Э.

момент времени  $t = 0$  скорость поршня равна нулю  $v_p = 0$  и приобретает свое максимальное значение за время менее  $t < 0.1$  с. Далее скорость поршня  $v_p$  уменьшается со временем. С использованием алгоритмов компьютерного зрения были построены графики зависимости положения поршня  $z_p$  от времени  $t$ , которые изображены на рис. 3 точками (1 – 100 Э, 2 – 125 Э, 3 – 150 Э, 4 – 175 Э, 5 – 200 Э). Погрешность измерения положения поршня не превышает  $\pm 0.25$  мм. Получено, что скорость движения поршня и высота, на которую поднимется поршень, возрастают при увеличении приложенного магнитного поля. С ростом поля возрастает и объем дозируемой немагнитной жидкости (объем магнитной жидкости при достижении поршнем равновесного положения).

#### Ступенчатое магнитное поле

В этой серии экспериментов использовалось переменное ступенчатое магнитное поле: постоянное магнитное поле удерживается в течение  $\Delta t = 30$  с, затем увеличивается на  $\Delta H_\infty = 12.4$  Э. Магнитное поле увеличивалось до значения  $H_c = 198.4$  Э, при котором поршень достигает уровня сливного отверстия. В результате обработки экспериментального видео с использованием алгоритмов компьютерного зрения, построена экспериментальная зависимость вертикальной координаты поршня  $z_p$  от времени  $t$ , эта зависимость обозначена точками на рис. 4. За счет постепенного включения магнитного поля получен более плавный подъем поршня в начале движения. На рис. 4 вертикальными линиями отмечены моменты времени, в которые  $H_\infty = 100$  Э и  $H_\infty = 198.4$  Э, соответственно.

Таким образом, экспериментально показана возможность использования магнитной жидкости, содержащей тело из намагничивающегося материала, для перекачивания и дозирования немагнитной жидкости, а также возможность управления работой прототипа с помощью однородного вертикального магнитного поля.



**Рис. 4.** Зависимость координаты поршня  $z_p$  от времени  $t$  в ступенчатом переменном магнитном поле  $H_\infty(t)$ : точки – эксперимент; линия – расчет при нелинейной зависимости  $M_f(H)$  (1.1); пунктируя линия – расчет при  $M_f = \chi_{f0}H$ . Вертикальные линии обозначают моменты времени, в которые приложенное магнитное поле равно 100 и 198.4 Гц соответственно.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ПОРШНЯ

Рассмотрим задачу о движении поршня, разделяющего магнитную и немагнитную жидкости, в приложенном однородном вертикальном магнитном поле  $H_\infty$ . В начальный момент времени включается однородное вертикальное магнитное поле напряженностью  $H_\infty$ . При включенном поле поршень из-за магнитных сил начинает двигаться вверх, тем самым выталкивая немагнитную жидкость в сливной канал (1). Положение поршня в любой момент времени определяет координата его контакта с магнитной жидкостью –  $z_p$ .

В отличие от [12] в данной статье считаем, что намагниченность магнитной жидкости нелинейно зависит от напряженности магнитного поля  $M_f = Mf(H)$ ,  $\chi_f(H) = M_f/H$  ( $\mu_f = 1 + 4\pi\chi_f$ ).

Остальные предположения совпадают с предположениями в работе [12]. Окружающая среда и материал поршня не намагничиваются  $M_s = 0$ ,  $\chi_s = 0$ ,  $M_p = 0$ ,  $\chi_p = 0$ . Намагниченность тела линейно зависит от напряженности магнитного поля  $M_b = \chi_b H$ ,  $\chi_b = \text{const}$  ( $\mu_b = 1 + 4\pi\chi_b$ ). Задача решается с учетом силы тяжести, в безиндукционном приближении  $4\pi M_f/H \ll 1$ . В тонких каналах 1, 2 (см. рис. 1) формируется течение Пуазейля. Жидкости считаются несжимаемыми, поэтому расход в сосудах  $f$ ,  $ff$  и тонких каналах 1, 2 одинаковый.

Закон движения поршня имеет вид ( $d_p$  – толщина поршня)

$$m_p \ddot{z}_p = -m_p g + \int_{S_p} (p_{zz}^s(z = z_p + d_p) - p_{zz}^f(z = z_p)) dS. \quad (2.1)$$

Тензор напряжений в жидкостях имеет вид

$$p_{ij} = -pg_{ij} + \tau_{ij}, \quad \tau_{ij} = \frac{H_i B_j}{4\pi} - \frac{H^2}{8\pi} g_{ij}. \quad (2.2)$$

Здесь  $g_{ij} = (e_i \cdot e_j)$  – компоненты метрического тензора. С учетом (2.2) для скачка напряжений в (2.1) получим ( $p_i$ ,  $i = s, f$  – давления в жидкостях)

$$p_{zz}^s(z = z_p + d_p) - p_{zz}^f(z = z_p) = p_f(z = z_p) - p_s(z = z_p + d_p) + \Delta\tau_{zz}, \quad (2.3)$$

$$\Delta\tau_{zz} = \tau_{zz}^s(z = z_p + d_p) - \tau_{zz}^f(z = z_p) = \tau_{zz}^s(z_p + d_p) - \tau_{zz}^p(z_p) + [\tau_{zz}]_f^p(z = z_p). \quad (2.4)$$

Так как материал поршня немагнитный  $M_p = 0$ , то, используя теорему Остроградского-Гаусса ( $\nabla^j \tau_{ij} e^i = M_p \nabla H = 0$ ), с учетом осевой симметрии сосуда  $f$  получим

$$\int_{S_p} (\tau_{zz}^s(z = z_p + d_p) - \tau_{zz}^p(z = z_p)) dS = 0. \quad (2.5)$$

На поверхности раздела магнитной жидкости и поршня при  $z = z_p$  за счет скачка магнитных свойств среды существует скачок тензора Максвелловских напряжений [2]

$$[\tau_{zz}]_f^p(z = z_p) = -2\pi [M_z^2]_f^p = 2\pi M_{fz}^2. \quad (2.6)$$

С учетом (2.5), (2.6) верно равенство

$$\int_{S_p} \Delta \tau_{zz} dS = 2\pi \int_{S_p} M_{fz}^2 dS. \quad (2.7)$$

До момента включения магнитного поля жидкости находятся в покое и в равновесии. Координату поршня  $z_p$ , координату поверхности жидкости в кювете  $ff$  и скорость поршня в начальный момент  $t = 0$  обозначим следующим образом:

$$t = 0 : z_p = z_0, \quad h_{ff} = h_{ff0}, \quad \dot{z}_p = 0. \quad (2.8)$$

Отметим, что  $h_{ff0}$  зависит от начального положения поршня  $z_0 \geq R_b$ , высоты сливного отверстия  $h_c$ , до которого налита немагнитная жидкость, и других параметров задачи следующим образом:

$$h_{ff0} = z_0 \left( 1 - \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) + (h_c - d_p) \frac{\rho_s}{\rho_f} + \frac{m_p}{\rho_f S_p}. \quad (2.9)$$

При расчетах в сосудах  $ff$  и  $f$  пренебрегаем течением жидкостей, так как скорость жидкостей в данных сосудах мала, а радиус сосудов достаточно большой ( $R_{ff} > R_v \gg \max(r_1, r_2)$ ,  $\partial v / \partial t \ll g$ , где  $r_1, r_2$  – радиусы каналов (1) и (2)). Уравнения гидростатики жидкостей в сосуде  $f$  имеют вид

$$-\nabla p_i + \rho_i g + M_i \nabla H = 0, \quad i = f, s. \quad (2.10)$$

Проинтегрировав уравнения (2.10) с учетом  $M_s = 0$ ,  $M_f = M_f(H)$ , получим формулы для давлений в жидкостях в сосуде  $f$

$$p_s = C_s - \rho_s g z, \quad p_f = C_f - \rho_f g z + U_m, \quad U_m = \int_0^H M_f dH. \quad (2.11)$$

Здесь  $U_m$  – потенциал магнитной силы. Отметим, что в случае малых магнитных полей [13] ( $H \leq 100 \text{ Э}$ )  $M_f = \chi_{0f} H$ ,  $\mu_f = \mu_{0f} = \text{const}$  и потенциал магнитной силы имеет вид:  $U_m = \chi_{0f} H^2 / 2 = (\mu_{0f} - 1) H^2 / 8\pi$ . В случае очень больших магнитных полей  $M_f = M_{fs} = \text{const}$ ,  $\mu_f = 1 + 4\pi M_{fs} / H$  и потенциал магнитной силы имеет вид  $U_m = M_{fs} H$ . Если намагниченность задана формулой Ланжевена (1.1), тогда

$$U_m = M_{fs} (\ln(\sinh \xi) - \ln(\xi)) / \xi' \quad (2.12)$$

Выражение (2.12) будет использоваться в дальнейших численных расчетах.

С учетом (2.2)–(2.4), (2.7), (2.11) в безындукционном приближении ( $2\pi M_{fz}^2 \ll U_m$ ) уравнение движения поршня (2.1) будет иметь вид

$$m_p \ddot{z}_p = -m_p g - g S_p (\rho_f z_p - \rho_s (z_p - d_p)) + (C_f - C_s) S_p + \int_{S_p} U_m dS. \quad (2.13)$$

Считается, что на выходе из канала (1) на рис. 1 давление равно атмосферному  $p_s = p_A$ . В сосуде  $ff$  (в частности, на входе в канал (2)) магнитное поле отсутствует  $H = 0$ . На поверхности магнитной жидкости в кювете  $ff$  при  $z = h_{ff}$  давление равно атмосферному  $p_f(z = h_{ff}) = p_A$ . При этом константы  $C_f$  и  $C_s$  в формулах (2.11) определяются из граничных условий

$$C_s = p_A + \rho_s g h_c + \dot{z}_p \frac{S_p k_1}{S_1}, \quad C_f = p_A + \rho_f g h_{ff} - \dot{z}_p \frac{S_p k_2}{S_2}. \quad (2.14)$$

Здесь  $\dot{z}_p > 0$  скорость движения поршня вверх;  $k_1 = 8\pi\eta_s l_1/S_1$  и  $k_2 = 8\pi\eta_f l_2/S_2$ ;  $l_i$  и  $S_i$  ( $i = 1, 2$ ) – длины и площади сечения каналов (1), (2);  $\eta_s$  и  $\eta_f$  – коэффициенты динамической вязкости немагнитной и магнитной жидкости, соответственно. Подставляя в закон движения (2.13) выражения (2.14), с учетом начальных условий (2.8), (2.9) получим следующее дифференциальное уравнение относительно  $z_p$  ( $\rho_f^* = \rho_f + \rho_f S_p/S_{ff}$ )

$$m_p \ddot{z}_p = -S_p^2 \left( \frac{k_2}{S_2} + \frac{k_1}{S_1} \right) \dot{z}_p + S_p g (\rho_s - \rho_f^*) (z_p - z_0) + F_M, \quad F_M(z_p, t) = \int_{S_p} U_m(z = z_p) dS. \quad (2.15)$$

Выражение для модуля магнитного поля вне сферического намагничивающегося тела в безиндукционном приближении имеет вид [14]

$$H = |\nabla \varphi|, \quad \varphi = H_\infty z + D \frac{H_\infty z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad D = R^3 \frac{\mu_s - \mu_b}{2\mu_s - \mu_b}. \quad (2.16)$$

Интеграл  $F_M$  назовем магнитной силой, эта сила нелинейно зависит от координаты поршня  $z_p$ . Уравнение движения поршня вверх (2.15) в магнитном поле (2.16) является нелинейным и решается численно методом Рунге–Кутта с учетом начальных условий. Все расчеты проведены при экспериментальных параметрах  $\rho_f = 1.1 \text{ г/см}^3$ ,  $\eta_f = 0.02 \text{ П}$ ,  $\rho_s = 0.87 \text{ г/см}^3$ ,  $\eta_s = 0.7 \text{ П}$ ,  $h_c = 2.5 \text{ см}$ ,  $z_0 = 1.35 \text{ см}$ ,  $S_{ff} = 11.9 \text{ см}^2$ ,  $l_1 = 3.2 \text{ см}$ ,  $l_2 = 27.5 \text{ см}$ ,  $r_{1,2} = 0.1 \text{ см}$ .

### 3. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ

#### *Численные расчеты в случае постоянного магнитного поля*

Рассмотрим случай включения постоянного магнитного поля  $H_\infty = \text{const}$ . В этом случае магнитная сила  $F_M$ , действующая на поршень, может быть численно получена, как функция координаты поршня  $z_p$ . Графики зависимостей  $F_M(z_p)$  при  $H_\infty = 100 \text{ Э}$  (линия 2) и при  $H_\infty = 200 \text{ Э}$  (линия 3) приведены на рис. 5. Чем ближе поршень к сферическому телу  $z_p \approx R_b$ , которое искажает приложенное поле, тем действующая на поршень сила больше. Сила  $F_M(z_p)$  значительно увеличивается при увеличении приложенного поля.

В отсутствие намагничивающегося тела, за счет разности магнитного поля в кюветах  $f$  и  $ff$ , на поршень также будет действовать магнитная сила, но величина магнитной силы будет существенно меньшей, чем при наличии тела. Сила  $F_M$  в отсутствие тела не зависит от положения поршня и при  $H_\infty = 100 \text{ Э}$  показана на рис. 5 (пунктирная линия 1). Подъем поршня в отсутствие тела заметно ниже.

Важно отметить, что при достаточно больших полях величина силы, полученная с учетом нелинейной ланжевеновской зависимости  $M_f(H)$  (1), заметно меньше, чем сила при линейной зависимости [12]. Это объясняет значительное расхождение теории и эксперимента при магнитных полях более 100 Э в [12]. Теория, предложенная в текущей работе, существенно улучшает совпадение теории и эксперимента. На рис. 6 представлены зависимости координаты поршня от времени при  $H_\infty = 200 \text{ Э}$  в эксперименте (точки) и полученные численно: сплошная линия – с учетом нелинейной зависимости  $M_f(H)$ , пунктирная линия – расчет при линейной зависимости  $M_f = \chi_{f0} H$ .

Графики зависимости координаты поршня  $z_p$  от времени  $t$  при различных  $H_\infty$  приведены на рис. 3 сплошными линиями. Чем больше приложенное магнитное поле  $H_\infty$ , тем больше скорость и, соответственно, расход жидкости. Согласно расчетам, скорость поршня возрастает от 0 до максимального значения за время  $t \sim 0.001 \text{ с}$ . Далее скорость поршня и расход жидкости уменьшаются и стремятся к нулю с течением времени. Поршень асимптотически стремится к равновесному положению  $z_{ps}$ .

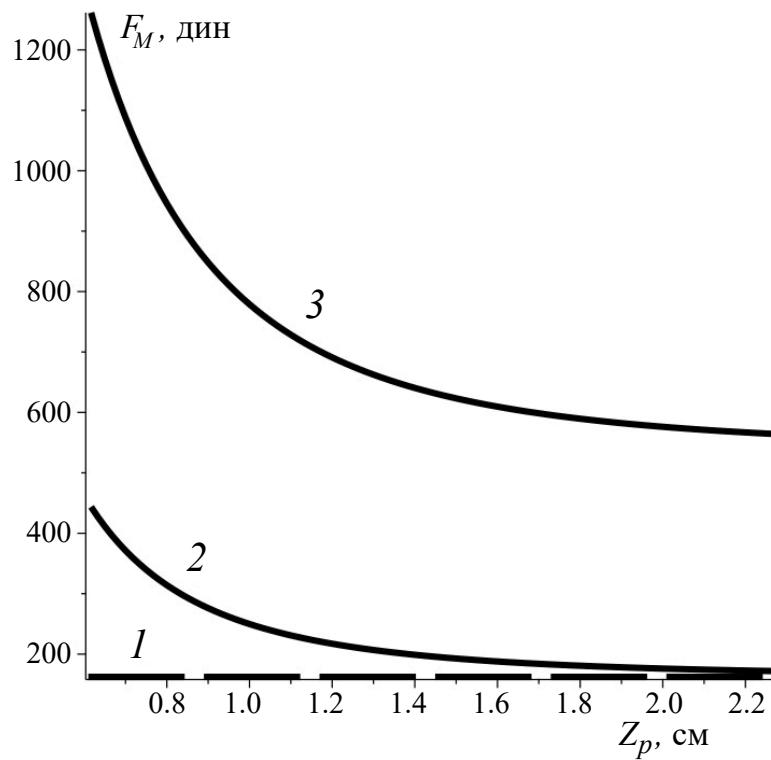


Рис. 5. Зависимость магнитной силы  $F_M$  от координаты поршня  $z_p$  в постоянном магнитном поле  $H_\infty$ : 1 —  $H_\infty = 100$  Э без тела; 2, 3 —  $H_\infty = 100, 200$  Э.

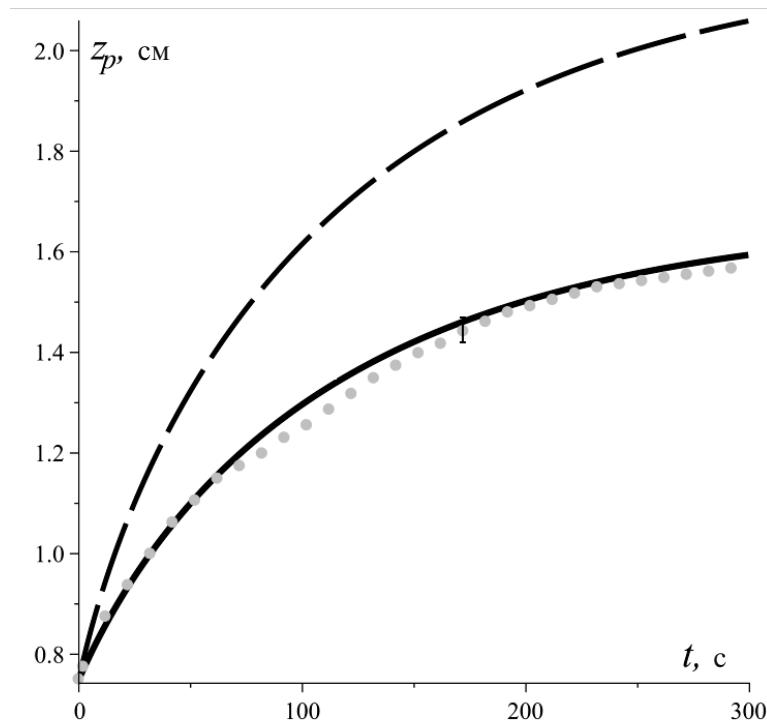


Рис. 6. Зависимость координаты поршня  $z_p$  от времени  $t$  при включении магнитного поля  $H_\infty = 200$  Э: точки — эксперимент; линия — расчет движения с учетом нелинейной зависимости  $M_f(H)$  (1.1); пунктирная линия — расчет при  $M_f = \chi_f H$ .

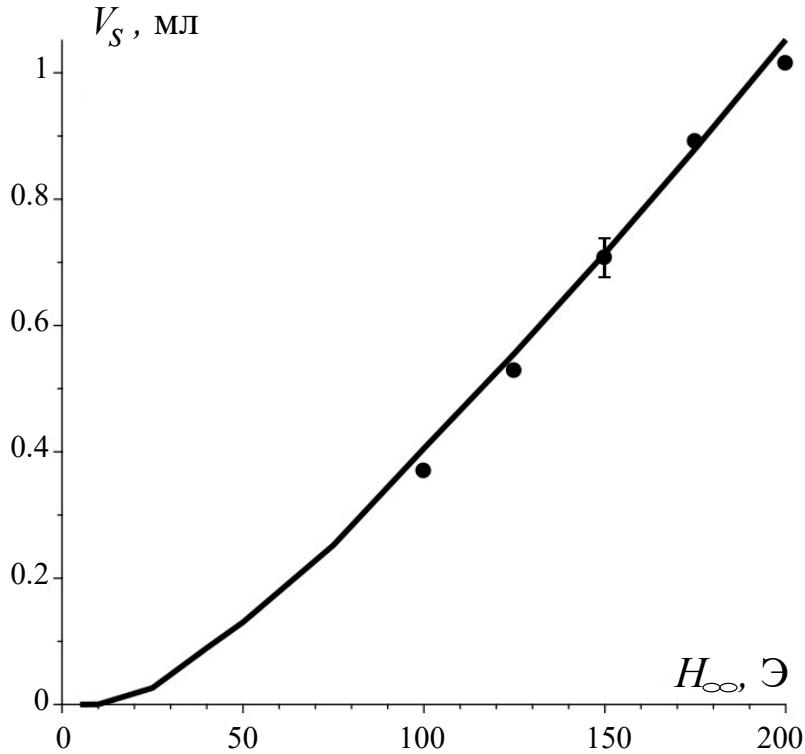


Рис. 7. Зависимость дозируемого объема  $V_s$  от поля  $H_{\infty}$  в эксперименте (точки) и теории (линия).

Равновесное положение поршня  $z_{ps}$  может быть получено при различных значениях  $H_{\infty}$  из уравнения (2.15) при  $z_p > z_0$ ,  $\dot{z}_p = 0$

$$S_p g (\rho_s - \rho_f^*) (z_{ps} - z_0) + F_M (z_{ps}) = 0.$$

Объем дозируемой жидкости  $V_s$ , получаемый при достижении стационарного положения  $z_p = z_{ps}$ , линейно зависит от  $z_{ps}$ :  $V_s = S_p (z_{ps} - z_0)$ . Зависимость  $V_s$  от приложенного поля в теории (линия) и эксперименте (точки) приведена на рис. 7. Видно хорошее соответствие теории и эксперимента во всем диапазоне полей.

#### Численные расчеты в случае ступенчатого магнитного поля

Теоретически рассмотрен случай ступенчатого приложенного вертикального магнитного поля:  $H_{\infty}(t) = \Delta H [t/\Delta t]$ , при  $t < t_c$ ,  $H_{\infty}(t) = H_c$ , при  $t \geq t_c$ , где  $[t/\Delta t]$  – целая часть числа. Ступенчатое магнитное поле позволяет дозировать поток перекачиваемой жидкости, а также обеспечить более равномерный расход жидкости. В эксперименте рассмотрен случай  $\Delta H = 12.5 \text{ Э}$ ,  $\Delta t = 30 \text{ с}$ ,  $H_c = 198.4 \text{ Э}$ ,  $t_c = 450 \text{ с}$ .

На рис. 4 сплошной линией изображена зависимость  $z_p$  от времени  $t$  для ступенчатого поля. При  $t < 250$  снабжается небольшое (не более 8 %) отклонение теории и эксперимента, которое может быть объяснено влиянием трения поршня о стенки сосуда, которым пренебрегается в теоретическом моделировании. Тем не менее, на рис. 4 видно хорошее совпадение теории, предложенной в данной статье, и эксперимента при всех временах (во всем диапазоне магнитных полей), в отличие от теоретических результатов [12] (см. рис. 4 пунктирная линия) при  $M_f = \chi_{f0} H$ ,  $\chi_{f0} = \text{const}$ , где хорошее соответствие теории и эксперимента получено только в малых магнитных полях  $H_{\infty} < 100 \text{ Э}$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследован прототип насоса-дозатора на основе взаимодействия тела из намагничивающего материала и магнитной жидкости в однородном магнитном поле. Экспериментальное исследование движения вверх поршня насоса-дозатора показало возможность дозировать немагнитную жидкость, управляя дозируемым объемом с помощью величины и характера изменения приложенного магнитного поля.

Получены уравнения, описывающие движение поршня, разделяющего магнитную и перекачиваемую жидкости в предложенном прототипе, при включении вертикального магнитного поля и учитывающие нелинейную зависимость намагниченности магнитной жидкости от поля.

Проведены расчеты магнитной силы, действующей на поршень. Показано, что наличие тела из намагничивающегося материала в магнитной жидкости существенно увеличивает эту силу.

Рассчитаны зависимости положения поршня от времени при разных значениях магнитного поля. Расчеты, как для достаточно малых, так и для больших магнитных полей хорошо совпадают с данными эксперимента.

Управление процессом перекачивания происходит бесконтактно с помощью однородного магнитного поля. Это позволяет уменьшать размеры устройства, которые не ограничиваются характерными масштабами изменения магнитного поля.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда проект № 20-71-10002, <https://rscf.ru/project/23-71-50001/>.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Neuringer J.L., Rosensweig R.E.* Ferrohydrodynamics // Phys. Fluids. 1964. V. 7. № 12. P. 1927–1937.
2. Розенцвейг Р. Феррогидродинамика. Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 357 с.
3. Шлиомис М.И. Магнитные жидкости // УФН. 1974. Т. 112. № 3. С. 427–458.
4. Altmeier S. Усложнение течения при нестационарной модуляции течения Куэтта магнитной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2022. № 3. С. 135–150.
5. Мусихин А.Ю., Зубарев А.Ю. К теории магнитоиндукционных циркуляций в тромбированных каналах // Изв. РАН. МЖГ. 2023. № 3. С. 12–21.
6. Кубасов А.А. Способ работы магнитожидкостного насоса: Патент. RU 2120566 C1. МПК F04B 43/12. 1998. 9 с.
7. Кубасов А.А. Универсальный объемный насос: Патент. RU 2075648 C1. МПК F04B 17/04. 1997. 9 с.
8. Манташьян П.Н. Магнитный насос: Патент. RU 2472277 C1. МПК H02K 44/02. 2011. 4 с.
9. Найгерт К.В., Тутынин В.Т. Смеситель-дозатор с магнитожидкостными управляющими элементами: Патент. RU 2639906 C1. МПК B01F 13/08. 2017. 12 с.
10. Емельянов С.Г., Полунин В.М., Кобелев Н.С., Ряплов П.А., Шабанова И.А. Дозатор газа: Патент. RU 101818 U1, МПК G01F 11/00. 2010. 14 с.
11. Сайкин М.С., Заякина А.А. Электромагнитный мембранный насос: Патент. RU 145770 U1, МПК F04B 17/04. 2014. 5 с.
12. Волкова У.В., Меркулов Д.И., Калмыков С.А., Пелевина Д.А., Налетова В.А. Движение поршня, разделяющего магнитную и немагнитную жидкости, в магнитном поле // Изв. РАН. МЖГ. 2023. № 1. С. 115–126.
13. Pelevina D.A., Sharova O.A., Turkov V.A., Nal'etova V.A. Levitation of a spherical magnet in a magnetic fluid drop on a horizontal plane // JMMM. 2023. V. 587. P. 171252.
14. Ландай Л.Д., Лишинц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 632 с.

# MODEL OF LIFTING A PISTON IN A METERING DEVICE BASED ON MAGNETIC FLUID IN A MAGNETIC FIELD OF AN ARBITRARY STRENGTH

D. A. Pelevina<sup>a,\*</sup>, D. I. Merkulov<sup>a</sup>, I. I. Merkulova<sup>a</sup>, V. A. Turkov<sup>a</sup> and V. A. Naletova<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Moscow State University, Moscow, Russia*

\*e-mail: pelevina.daria@gmail.com

**Abstract**—A theoretical model of a metering pump based on magnetic fluid containing a body of magnetizable material controlled by an applied variable uniform magnetic field is proposed. The model takes into account the nonlinear dependence of the magnetization of the magnetic fluid on the magnetic field. This makes it possible to consider the case of any (including strong) magnetic fields. Within the framework of this model, calculations of lifting a piston separating the magnetic and pumped fluids in various uniform magnetic fields are performed. The calculations based on the proposed model are compared with previous and new experiments. A good agreement between theory and experiment is obtained.

**Keywords:** magnetic fluid, metering pump, uniform magnetic field

# РЕАКЦИЯ ЗАМЕЩЕНИЯ МЕТАНА УГЛЕКИСЛЫМ ГАЗОМ В ГИДРАТЕ ПРИ ИНЖЕКЦИИ ЖИДКОЙ УГЛЕКИСЛОТЫ В ПЛАСТ

© 2024 г. Г. Г. Цыпкин<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\*e-mail: tsypkin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 09.10.2024 г.

После доработки 11.10.2024 г.

Принята к публикации 11.10.2024 г.

Рассмотрена задача о закачке жидкой фазы углекислоты в пласт, содержащий гидрат метана, воду и метан в свободном состоянии. Оценки основных параметров показывают, что реакция замещения гидрата метана гидратом углекислого газа без подтока тепла извне возможна только при наличии в породах воды в свободном состоянии. На основе анализа термодинамической диаграммы фазового состояния компонент сформулирована математическая модель закачки жидкого CO<sub>2</sub>, сопровождающаяся реакцией замещения метана углекислым газом в гидрате. Предполагается, что область разложения гидрата метана и образования гидрата углекислого газа может быть аппроксимирована узким фронтом. Найденное асимптотическое решение сводит задачу к численному исследованию трансцендентных уравнений. По результатам численных экспериментов представлены характерные режимы инжекции жидкой углекислоты, допускающие реализацию реакции замещения.

**Ключевые слова:** пористая среда, гидрат, метан, углекислота в жидкой фазе, вода, реакция замещения, фронт конверсии

**DOI:** 10.31857/S1024708424060118, **EDN:** FDKUZE

В работе [1] был предложен способ утилизации углекислого газа в истощенные месторождения метана с одновременным стимулированием отбора остаточного газа, в том числе находящегося в гидратном состоянии. Предполагалось, что при закачке углекислоты происходит замещение метана в гидрате, а высвободившийся метан вытесняется из пласта. В случае инжекции углекислого газа, как показывают оценки, такой режим можно реализовать без внешнего притока тепла. Этот факт объясняется тем, что энергия, выделяемая при образовании гидрата CO<sub>2</sub>, рассчитанная на единицу объема, больше, чем энергия, необходимая для разложения гидрата метана [2]. В [3–5] были исследованы режимы преобразования гидрата метана в гидрат углекислого газа в лабораторных условиях. Режим самоподдерживающейся реакции замещения, когда отсутствует подкачка энергии извне, был экспериментально реализован в работе [5].

В [6] проведены численные расчеты в широком диапазоне параметров конверсии гидрата метана в гидрат углекислого газа в осадочных породах. В основу математической модели положены интегральные законы сохранения, что позволило авторам проводить вычисления без выделения поверхностей раздела фаз. Полученные результаты, по мнению авторов, свидетельствуют о сложности математической модели, которая содержит нелинейные уравнения неизотермической фильтрации и учитывает фазовые переходы. Математическая формулировка задач образования – разложения гидратов может быть упрощена, если ввести поверхности фазовых превращений.

В [7] была представлена модель образования гидрата углекислого газа при его закачки в истощенное месторождение метана. В работе [8] рассматривалась задача о закачке углекислого газа в пласт, содержащий гидрат метана и метан в свободном состоянии, с учетом теплового воздействия закачивающей скважины. Для среды с невысокой проницаемостью формируются две поверхности фазовых

переходов – фронт диссоциации гидрата метана и фронт образования углекислого газа. Эта формулировка описывает медленную инжекцию CO<sub>2</sub>. Если скорость закачки достаточно велика, то прогревается только небольшая область вокруг закачивающей скважины и процесс замещения метана углекислым газом в гидрате может поддерживаться только энергией, выделяемой при образовании гидрата углекислого газа. При интенсивной закачке фронты диссоциации метана и образования углекислого газа сближаются и при крупномасштабном моделировании можно использовать единую поверхность конверсии гидрата метана в гидрат углекислого газа [9,10]. В аналогичной постановке решена задача инжекции углекислого газа в пласт, насыщенный гидратом метана, метаном и водой [11]. Рассмотрение инжекции газообразного CO<sub>2</sub> налагает существенные ограничения на давление инжекции, поскольку при высоких давлениях углекислота существует в жидкой фазе. Утилизация жидкой углекислоты, сопровождающаяся испарением, в глубоко залегающие породы моделировалась в работе [12].

В [13, 14] экспериментально исследовались скорости замещения метана углекислым газом в гидрате, когда CO<sub>2</sub> находится как в газообразном, так и в жидким состоянии в диапазоне температур от 273.2 до 277 К. Найдено, что формирующийся гидрат углекислоты захватывает всю воду, которая высвобождается из гидрата метана. Процесс образования гидрата CO<sub>2</sub> при закачке жидкой углекислоты в породы для создания трещин гидроразрыва может играть негативную роль, препятствуя проникновению проппанта [15]. С другой стороны, образование гидрата CO<sub>2</sub> играет позитивную роль при утилизации парниковых газов [16]. Обзоры технологии извлечения метана из гидратного состояния с одновременной утилизацией углекислого газа, представлены в работах [17–19].

В настоящей работе исследуется инжекция углекислоты в жидкое состояние в пласт, насыщенный гетерогенной смесью воды, свободного метана и гидрата метана в состоянии термодинамического равновесия. Представлена математическая модель реакции замещения метана углекислым газом в гидрате. Получено автомодельное решение задачи. Показано, что наличие свободной воды оказывает существенное влияние на процесс конверсии.

## 1. ФИЗИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Метод замещения метана углекислым газом в газовом гидрате предполагалось использовать для истощенных месторождений природного газа, содержащих метан в свободном состоянии и гидрат метана. С одной стороны, дополнительные объемы метана высвобождаются из гидратного состояния, а с другой – пласт используется для утилизации CO<sub>2</sub>. Основная возникающая проблема связана с термодинамикой реакции замещения, с необходимостью доставлять энергию для разложения гидрата метана. В работе [9] был определен диапазон параметров, в котором можно реализовать самоподдерживающую реакцию при закачки углекислоты в газообразном состоянии.

Недостатком этого способа является низкая интенсивность закачки CO<sub>2</sub>, поскольку при низких температурах, соответствующих условиям существования гидрата метана, давление инжекции должно быть невелико. В противном случае давление инжекции будет соответствовать давлению, при котором углекислота находится в жидким состоянии. Для этого случая оценим баланс энергии при реализации реакции замещения.

Разность между плотностями энталпии жидкой углекислоты и углекислого газа представляет собой теплоту фазового перехода жидкость – газ и равна  $q_{lg} = 2.1 \cdot 10^5$  Дж/кг. Соответственно, на эту величину уменьшится энергия  $q_{hcl}$ , выделяемая при образовании гидрата CO<sub>2</sub> при контакте воды и жидкой углекислоты. В результате  $q_{hcl} = 2.04 \cdot 10^5$  Дж/кг. Поэтому, если разница между теплотой  $Q_c$  образования гидрата углекислого газа и теплотой  $Q_m$  разложения гидрата метана, рассчитанная на единицу объема, была положительной [20–22]  $\delta Q = Q_c - Q_m = \rho_{hc} \cdot q_{hc} - \rho_{hm} \cdot q_{hm} = = 1.1 \cdot 10^3 \cdot 4.14 \cdot 10^5 - 0.9 \cdot 10^3 \cdot 4.27 \cdot 10^5 = 0.711 \cdot 10^8$  Дж/м<sup>3</sup>, то в случае жидкой углекислоты  $\delta Q = Q_{cl} - Q_m = \rho_{hc} \cdot q_{hcl} - \rho_{hm} \cdot q_{hm} = -1.6 \cdot 10^8$  Дж/м<sup>3</sup>.

Это означает, что существует дефицит энергии, требуемой для разложения гидрата метана, а выделившейся энергии при образовании гидрата углекислого газа для этого недостаточно. Следовательно, при закачке жидкой углекислоты в пласт, содержащий метан в свободном и гидратном состояниях, самоподдерживающаяся реакция замещения метана углекислым газом в гидрате невозможна. Для этого требуется дополнительная энергия, подкачка которой в пласт на значительном удалении от закачивающей скважины весьма проблематична. Однако эта дополнительная энергия может существовать, если помимо гидрата метана и метана в свободном состоянии в пласте имеется свободная вода. Тогда

при контакте жидкой углекислоты с водой при соответствующих термодинамических условиях происходит образование гидрата углекислого газа, сопровождающееся выделением тепла.

Если в начальном состоянии пласт содержит гетерогенную смесь метана в свободном состоянии, гидрата метана и воды, то это означает, что смесь находится в состоянии термодинамического равновесия, когда температура и давление лежат на кривой диссоциации гидрата метана (кривая 3 на рис. 1) на плоскости  $(T, P)$  и начальные давление  $P_0$  и температура  $T_0$  связаны соотношением

$$P_0 = P_a \exp \left( A_m + \frac{B_m}{T_0} \right), \quad A_m = 36.09, \quad B_m = -8995 \text{ K}. \quad (1.1)$$

Следует отметить, что такая гетерогенная смесь могла не существовать на начальном этапе разработки газового месторождения, содержащего гидрат, насыщенность которого равна  $S_{h0}$ , а образоваться в процессе отбора газа. Если давление понижается и достигает давления диссоциации гидрата при данной температуре пласта, то начинается процесс разложения и  $S_{h0}$  уменьшается. При этом температура падает вместе с давлением и переходом воды и газа в свободное состояние. При дальнейшем снижении давления и сопутствующего падения температуры увеличивается доля воды. Тогда начальным состоянием пласта для инъекции углекислоты в жидкой фазе может быть состояние с гидратонасыщенностью  $S_h$ , лежащей в интервале  $0 < S_h < S_{h0}$ .

Кривая диссоциации для гидрата углекислоты определяется из уравнения

$$P = P_a \exp \left( A_c + \frac{B_c}{T} \right), \quad A_c = 39.39, \quad B_c = -10091. \quad (1.2)$$

Представленная на рис. 1 кривая 1 является кривой разложения – образования гидрата углекислого газа (1.2), ниже которой гидрат углекислого газа не существует.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕАКЦИИ ЗАМЕЩЕНИЯ

Пусть в начальном состоянии пласт содержит гетерогенную смесь метана, его гидрата и воды. При контакте воды и углекислоты в соответствующих термодинамических условиях происходит образование гидрата углекислого газа с выделением тепла. Это тепло расходуется на прогрев матрицы пористой среды и разложение гидрата метана на газ и воду, которая также реагирует с  $\text{CO}_2$ , образуя гидрат. Решение задачи о закачке углекислоты в газовой фазе показало [9], что характерный размер области реакции, где происходит разложение гидрата  $\text{CH}_4$  и образование гидрата  $\text{CO}_2$ , мало по сравнению с характерным размером задачи. Этот факт позволяет заменить область реакции на узкий фронт замещения метана углекислым газом в гидрате. Поскольку узкая зона реакции характеризуется большим градиентом температуры, то математическая модель конверсии гидрата метана в гидрат углекислого газа допускает скачок температуры на поверхности фазового превращения.

Перед поверхностью раздела пласт насыщен гетерогенной смесью метана, гидрата метана и водой. Содержание воды невелико и считаем ее неподвижной, также как гидрат и матрицу пористой среды. В обеих областях выполняются законы сохранения массы, энергии, закон Дарси и уравнения состояния. Система основных уравнений сводится в области 1, содержащей метан, воду и гидрат, к виду:

$$\begin{aligned} \phi S_m \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_m \mathbf{v}_m &= 0, \quad (\rho C)_1 \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_m C_{pm} \mathbf{v}_m \cdot \operatorname{grad} T = \lambda_1 \Delta T, \\ \mathbf{v}_m &= -\frac{k f(S_m)}{\mu_m} \operatorname{grad} P, \quad P = \rho_m R_m T, \quad S_w = \text{const}, \quad S_{hm} = \text{const}, \\ \lambda_1 &= \phi S_m \lambda_m + \phi S_{hm} \lambda_{hm} + \phi S_w \lambda_w + (1 - \phi) \lambda_s, \quad S_m = 1 - S_w - S_{hm}, \\ (\rho C)_1 &= \phi S_m \rho_m C_m + \phi S_{hm} \rho_{hm} C_{hm} + \phi S_w \rho_w C_w + (1 - \phi) \rho_s C_s. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Область 2 расположена между закачивающей скважиной и фронтом конверсии. Можно показать, что характерное время движения фронта много больше характерного времени перераспределения давления из-за слабой сжимаемости углекислоты в жидком виде. Поэтому с высокой степенью точности можно считать углекислоту несжимаемой жидкостью. В результате получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_{cl} = 0, \quad (\rho C)_2 \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_{cl} C_{pcl} \mathbf{v}_{cl} \cdot \operatorname{grad} T = \lambda_2 \Delta T,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{cl} &= -\frac{k f(S_{cl})}{\mu_{cl}} \operatorname{grad} P, \quad S_{hc} = \text{const}, \\ \lambda_2 &= \phi S_{cl} \lambda_{cl} + \phi S_{hc} \lambda_{hc} + (1 - \phi) \lambda_s, \quad S_{cl} = 1 - S_{hc}, \\ (\rho C)_2 &= \phi S_{hc} \rho_{cl} C_{pcl} + \phi S_{hc} \rho_{hc} C_{hc} + (1 - \phi) \rho_s C_s. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь  $T$  – температура,  $P$  – давление,  $S$  – насыщенность,  $\phi$  – пористость,  $k$  – проницаемость,  $\mu$  – вязкость,  $\rho$  – плотность,  $\mathbf{v}$  – вектор скорости фильтрации,  $f$  – относительная фазовая проницаемость,  $R$  – газовая постоянная,  $C$  – удельная теплоемкость,  $\lambda$  – теплопроводность. Индексы:  $m$ ,  $c$ ,  $s$ ,  $l$  – метан, углекислота, скелет пористой среды и жидкость. 1 и 2 – области гидрата метана и гидрата углекислого газа.

В рамках предположения, что разложение гидрата метана и образование гидрата углекислоты происходит в узкой зоне, моделируемой поверхностью разрыва, получаем условие баланса массы  $\text{CO}_2$

$$\left[ 1 - S_{hc} + S_{hc} \frac{\rho_c^{ef}}{\rho_{cl}} \right] V_n = -\frac{k f(S_{cl})}{\phi \mu_{cl}} (\operatorname{grad} P)_{n-}, \quad (2.3)$$

баланса массы  $\text{CH}_4$

$$\left[ 1 - S_w + S_{hm} \frac{\rho_m^{ef}}{\rho_{m*}} \right] V_n = -\frac{k f(S_m)}{\phi \mu_m} (\operatorname{grad} P)_{n+}, \quad (2.4)$$

баланса массы воды с учетом ее неподвижности и равенства эффективных плотностей воды в гидратах метана и углекислоты  $\rho_w^{hc} = \rho_w^{hm} = \rho_w^h$

$$S_{hc} = S_{hm} + S_w \frac{\rho_w}{\rho_w^h} \quad (2.5)$$

и закон сохранения энергии

$$\begin{aligned} &[\phi S_{hm}(\rho_{hc} q_{hcl} - \rho_{hm} q_{hm}) + \phi(S_{hc} - S_{hm})\rho_{hc} q_{hcl}] V_n = \\ &= \lambda_1 (\operatorname{grad} T)_{n+} - \lambda_2 (\operatorname{grad} T)_{n-} + (1 - \phi) \rho_s C_s (T_- - T_+) V_n. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь  $V$  – скорость фронта,  $q$  – теплота фазового превращения,  $P_a = 10^5$  Па – атмосферное давление. Индексы:  $ef$  – эффективная плотность газа в гидрате,  $n$  – нормаль,  $*$  – величины на фронте, плюс и минус – значения на фронте справа и слева.

Левая часть уравнения энергии (2.6) содержит два слагаемых, первое из которых отрицательно и отражает разницу между выделяемой энергией при образовании гидрата  $\text{CO}_2$  и энергией, которая поглощается при разложении гидрата  $\text{CH}_4$ . Второе слагаемое представляет собой тепло, выделяющееся при образовании гидрата углекислого газа из воды в свободном состоянии.

Пусть пласт, имеющий начальную температуру  $T_0$ , содержит гидрат метана и воду в свободном состоянии, насыщенность которых соответственно  $S_{hm}$  и  $S_w$ . Оставшуюся часть порового пространства  $1 - S_{hm} - S_w$  занимает метан. Поскольку гетерогенная смесь находится в состоянии термодинамического равновесия, то начальное давление  $P_0$  определяется из соотношения (1.1). Температура  $T_{inj}$  и давление  $P_{inj}$  инъекции в закачивающей скважине представляют собой граничные условия.

### 3. АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

В линейном приближении основные уравнения в областях 1 и 2 имеют вид соответственно

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \kappa_1 \Delta P, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a_1 \Delta T, \quad \kappa_1 = \frac{k P_0}{\phi \mu_m}, \quad a_1 = \frac{\lambda_1}{(\rho C)_1} \quad (3.1)$$

и

$$\Delta P = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a_2 \Delta T, \quad a_2 = \frac{\lambda_2}{(\rho C)_2}. \quad (3.2)$$

Рассмотрим одномерный процесс инжекции углекислоты в жидкой фазе в полубесконечный пласт  $0 < x < \infty$ , где  $x = 0$  соответствует закачивающей скважине. Если начальные и граничные значения являются постоянными, то задача имеет автомодельное решение

$$P = P(\zeta), \quad T = T(\zeta), \quad \zeta = \frac{x}{2\sqrt{a_1 t}}, \quad V(t) = \sqrt{\frac{a_1}{t}} \gamma. \quad (3.3)$$

Автомодельное решение уравнений (3.1) и (3.2) имеет вид

$$\gamma < \zeta < \infty : \quad T(\zeta) = T_0 + (T_+ - T_0) \frac{\operatorname{erfc}(\zeta)}{\operatorname{erfc}(\gamma)}, \quad (3.4)$$

$$P(\zeta) = P_0 + (P_* - P_0) \frac{\operatorname{erfc}(\zeta \sqrt{a_1/\kappa_1})}{\operatorname{erfc}(\gamma \sqrt{a_1/\kappa_1})}, \quad (3.5)$$

$$0 < \zeta < \gamma : \quad T(\zeta) = T_{inj} + (T_- - T_{inj}) \frac{\operatorname{erf}(\zeta \sqrt{a_1/a_2})}{\operatorname{erf}(\gamma \sqrt{a_1/a_2})}, \quad (3.6)$$

$$P(\zeta) = P_{inj} + \frac{P_* - P_{inj}}{\gamma} \zeta. \quad (3.7)$$

Подставляя решения (3.4)–(3.7) в уравнения (2.3)–(2.6) и учитывая уравнение (1.1) получаем систему трансцендентных уравнений в безразмерной форме для определения параметров  $\gamma$ ,  $T_+$ ,  $T_-$ ,  $P_*$ , которая замыкается алгебраическим выражением (2.5) для насыщенности  $S_{hc}$  гидрата углекислого газа.

$$\left[ 1 - S_w + S_{hm} \left( \frac{\rho_m^{ef} R_m T_0}{P_{inj}} - 1 \right) \right] \gamma = \sqrt{\frac{\kappa_1}{\pi a_1}} S_m \left( \frac{P_*}{P_0} - 1 \right) \frac{\exp(-\gamma^2 a_1/\kappa_1)}{\operatorname{erfc}(\gamma \sqrt{a_1/\kappa_1})}, \quad (3.8)$$

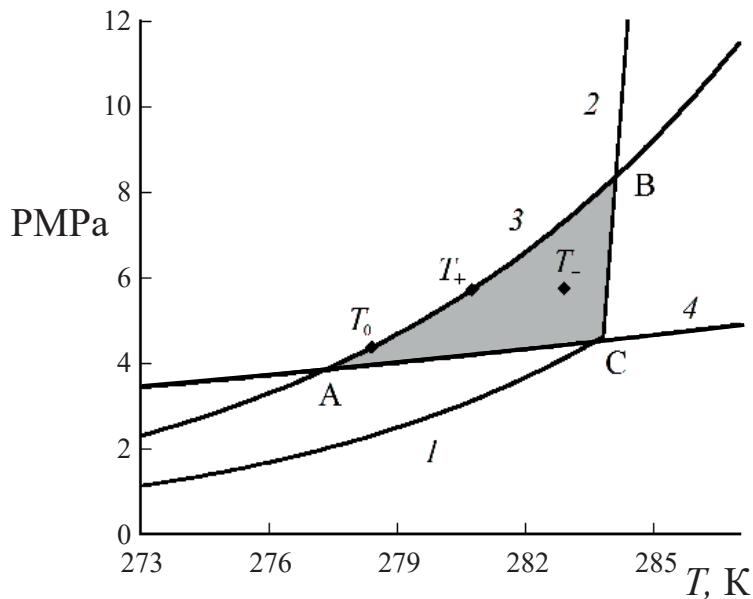
$$\left[ 1 - S_{hc} + S_{hc} \frac{\rho_c^{ef}}{\rho_{cl}} \right] \gamma + \frac{\kappa_2}{2a_1} S_{cl} \left( \frac{P_*}{P_{inj}} - 1 \right) = 0, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \phi \frac{\sqrt{\pi} a_1}{\lambda_1 T_0} \left( S_{hm} \Delta Q + S_w \frac{\rho_w}{\rho_w^h} q_{hc} \rho_{hc} \right) - \frac{\sqrt{\pi}(1-\phi) a_1 \rho_s C_s}{\lambda_1} \left( \frac{T_-}{T_0} - \frac{T_+}{T_0} \right) = \\ = \left( \frac{T_+}{T_0} - 1 \right) \frac{\exp(-\gamma^2)}{\gamma \operatorname{erfc}(\gamma)} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \left( \frac{T_-}{T_0} - \frac{T_{inj}}{T_0} \right) \frac{\exp(-\gamma^2 a_1/a_2)}{\gamma \operatorname{erf}(\gamma \sqrt{a_1/a_2})}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\ln \frac{P_*}{P_a} = 36.09 - \frac{8995}{T_+}. \quad (3.11)$$

Заметим, что в балансовом соотношении на поверхности раздела (3.8) для массы метана также, как и в основном уравнении, использовалась линеаризация и плотность газообразного метана аппроксимировалась выражением  $\rho_{m*} \approx R_m T_0 / P_{inj}$ . Давление на фронте близко к давлению инжекции поскольку фронт конверсии движется медленно, а изменения начальной температуры невелики, т.к. значительная часть энергии расходуется на диссоциацию гидрата метана и нагрев горных пород. Уравнение Клаузиуса–Клапейрона, связывающее температуру и давление образования гидрата  $\text{CO}_2$  не учитывается, поскольку значения давления  $P_*$  и температуры  $T_*$  на фронте конверсии всегда соответствуют условиям существования гидрата углекислого газа.

Задача в линейной постановке существенно упрощает метод решения, поскольку система трансцендентных уравнений (3.8)–(3.11) расщепляется. В результате автомодельная скорость движения  $\gamma$  и давление  $P_*$  находятся в процессе решения уравнений (3.8), (3.9) независимо от уравнения энергии. Затем из последнего уравнения системы определяется температура  $T_+$  диссоциации гидрата метана, а из уравнения энергии (3.10) вычисляется температура образования гидрата углекислого газа  $T_-$ . Были проведены также расчеты для нелинейной задачи, которые показали, что при данном методе линеаризации решения линейной и нелинейной задачи мало отличаются друг от друга. Это свидетельствует о том, что управляющим фактором процесса, являются гидродинамические процессы.



**Рис. 1.** Термодинамическая диаграмма существования гидратов метана и углекислого газа: 1 – кривая диссоциации гидрата  $\text{CO}_2$  на газ и воду; 2 – кривая диссоциации гидрата  $\text{CO}_2$  на жидкую углекислоту и воду; 3 – кривая диссоциации гидрата  $\text{CH}_4$ ; 4 – кривая кипения жидкой углекислоты. Область существования гидрата  $\text{CO}_2$  расположена над кривой 1 и левее кривой 2.

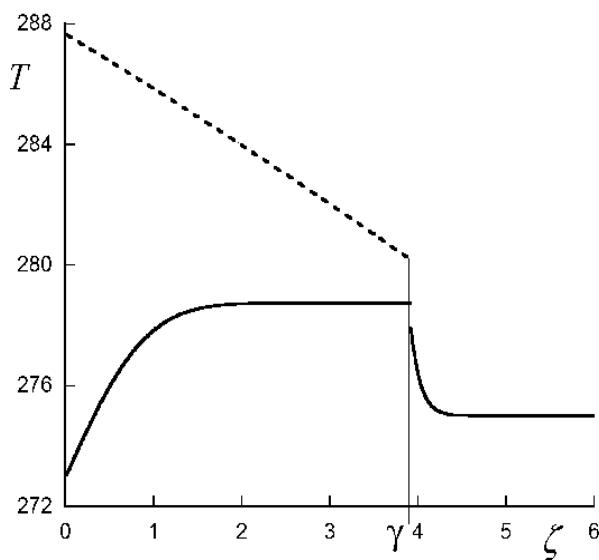
#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Анализ термодинамической диаграммы (рис. 1) позволяет предсказать область начальной температуры и начального давления, для которой может реализовываться реакция замещения метана углекислотой в гидрате. В начальном состоянии гетерогенная смесь гидрата метана, газообразного метана и воды находится в состоянии термодинамического равновесия, поэтому точка  $T_0$ , соответствующая начальному состоянию, лежит на кривой 3 и может располагаться как выше, так и ниже точки A. Предполагается, что гидрат метана разлагается под действием тепла, которое выделяется при образовании гидрата  $\text{CO}_2$ . Поэтому точка  $T_+$  будет лежать выше на кривой 3, чем точка  $T_0$  и определяться значением давления на фронте реакции. Для осуществления подтока тепла из области гидрата углекислого газа в область гидрата метана необходимо, чтобы  $T_- > T_+$ . Соответственно точка  $T_-$  будет иметь более высокую температуру при таком же давлении и располагаться правее. Температура  $T_0$  не может быть слишком большой, чтобы точка  $T_-$  не вышла за пределы существования гидрата  $\text{CO}_2$ , который ограничен кривыми 1 и 2. Таким образом, условие реализации реакции замещения при закачки жидкой углекислоты состоит в том, чтобы точка  $T_-$  располагалась внутри заштрихованного треугольника ABC.

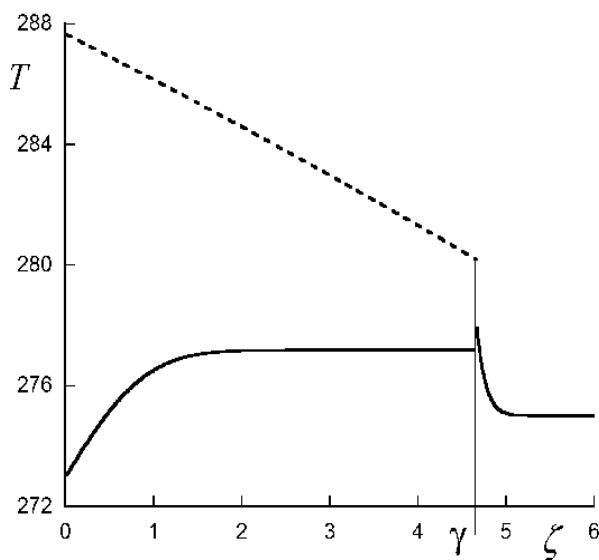
Проведенные расчеты показали, что реализации реакции замещения способствует высокая пористость горных пород и значительные объемы воды в свободном состоянии. На рис. 2 представлено характерные распределения температур за и перед фронтом реакции, а также температуры кипения углекислоты, как функции давления [22], для случая существования реакции замещения. Решение корректно, т.к. температура за фронтом в области углекислоты больше, чем температура в области перед фронтом и меньше чем температура кипения жидкой углекислоты.

С скачком температуры на фронте реакции отражает существование переходной зоны с большим градиентом температуры, который возникает из-за того, что характерное время течения определяется диффузионным коэффициентом  $k$  в уравнении для давления, который много больше коэффициентов температуропроводности  $a$ . Поэтому с большой степенью точности эта градиентная зона может быть заменена на поверхность разрыва температуры [9].

При уменьшении пористости с  $\phi = 0.3$  до  $\phi = 0.2$  увеличивается масса горных пород, поглощающих энергию и падает масса свободной воды, переход которой в гидратное состояние происходит с выделением тепла (рис. 3). Поэтому вычисления дают результат  $T_+ > T_-$ , который противоречит постановке задачи, где предполагалось, что диссоциация гидрата метана происходит за счет выделения



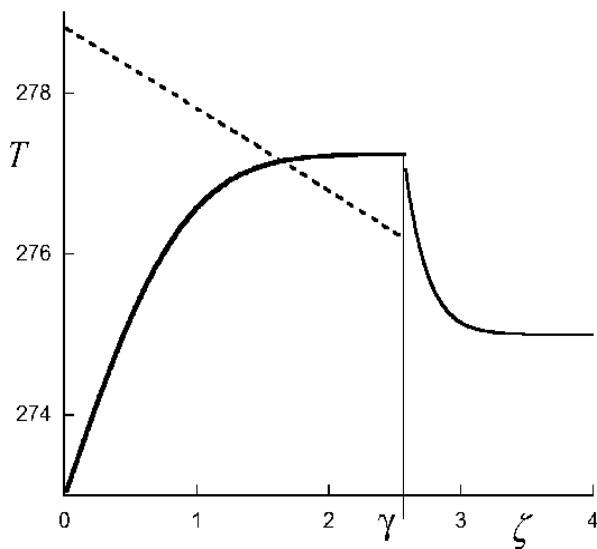
**Рис. 2.** Характерное распределение температуры при конверсии гидрата метана в гидрат углекислого газа (сплошная кривая). Точечная линия соответствует температуре жидкой углекислоты, вычисленной по распределению давления.  $\phi = 0.3$ ,  $k = 10^{-15} \text{ м}^2$ ,  $S_{hm} = 0.2$ ,  $S_w = 0.22$ ,  $T_0 = 275 \text{ К}$ ,  $T_{inj} = 273 \text{ К}$ ,  $P_{inj} = 5 \text{ МПа}$ .



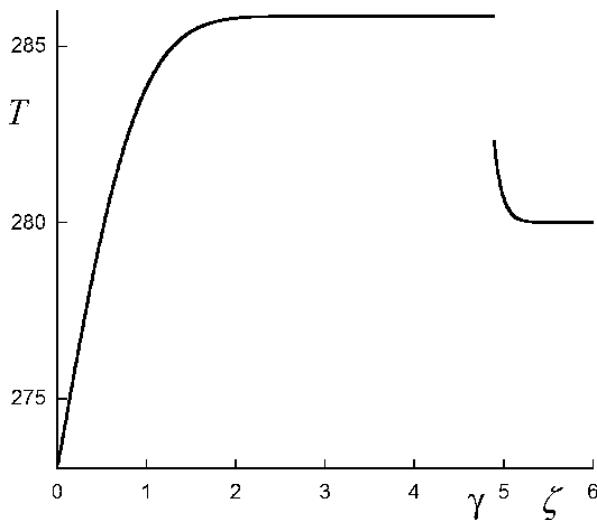
**Рис. 3.** Распределение температуры при недостатке энергии для реализации реакции замещения.  $\phi = 0.2$ . Остальные параметры как на рис. 2.

тепла при образовании гидрата углекислоты. Следовательно, при таких параметрах без притока тепла извне реакция конверсии гидрата метана в гидрат углекислого газа невозможна.

Уменьшение давления инжекции в закачивающей скважине приводит к качественному изменению режима, представлено на рис. 4. Температура  $T_-$  образования гидрата  $\text{CO}_2$  становится больше температуры  $T_+$  диссоциации гидрата  $\text{CH}_4$ , что свидетельствует о допустимости реакции замещения. Падение температуры  $T_+$  объясняется снижением давления инжекции и, соответственно, давления на фронте, которое является давлением диссоциации метана. Однако снижение давления в области за фронтом вызывает другой эффект, заключающийся в снижении температуры кипения жидкой углекислоты. В результате, в окрестности фронта, как показывают расчеты, температура углекислоты становится выше температуры кипения и жидкую фазу находится в перегретом состоянии. Для корректного описания этого режима конверсии требуется модифицировать математическую модель и ввести за фронтом область кипения жидкой углекислоты.



**Рис. 4.** Распределение температуры свидетельствует о перегреве жидкой углекислоты и её кипении в окрестности фронта.  $P_{inj} = 4$  МПа. Остальные параметры как на рис. 3.



**Рис. 5.** Распределение температуры при избыточном выделении энергии для реализации реакции замещения.  $\phi = 0.25$ ,  $S_w = 0.25$ ,  $P_{inj} = 8$  МПа,  $T_0 = 280$  К. Остальные параметры как на рис. 2.

При высокой начальной температуре пласта, больших значениях пористости и водонасыщенности вычисления свидетельствуют о высокой температуре за фронтом  $T_- = 285.86$  К (рис. 5). Из фазовой диаграммы (рис. 1) видно, что это значение температуры лежит правее кривой 2, соответственно вне зоны существования гидрата углекислоты. Следовательно, при таких значениях параметров реакция замещения метана в гидрате углекислым газом не реализуется.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача о замещении метана углекислым газом в гидрате при инжекции жидкой фазы  $\text{CO}_2$  в пласт, насыщенный гетерогенной смесью гидрата метана, метана и воды. Предложена математическая модель процесса, в предположении, что область перехода гидрата метана в гидрат углекислого газа мала и может быть заменена поверхностью замещения. Из законов сохранения выведены условия на поверхности конверсии. Представлена термодинамическая диаграмма процесса, позво-

ляющая предсказать основные свойства решений. В автомодельном приближении задача сводится к численному исследованию системы трансцендентных уравнений на поверхности раздела.

Показано, что при инжекции жидкого CO<sub>2</sub> конверсия гидрата метана в гидрат углекислого газа при отсутствии подтока тепла извне возможна только при наличии в пласте свободной воды. Если водонасыщенность мала, то энергии для диссоциации гидрата метана недостаточно. Для относительно высокой водонасыщенности при образовании гидрата CO<sub>2</sub> из свободной воды происходит выделение избыточного тепла, препятствующего полному переходу углекислоты в гидрат. Также расчеты показывают, что при невысокой интенсивности инжекции жидкой углекислоты формируется режим течения с испарением и образованием углекислого газа. Реализации реакции замещения способствует высокая пористость пласта и небольшая теплоемкость горных пород. Режимы конверсии проиллюстрированы графически.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации: 124012500442-3).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ohgaki K., Takano K., Sangawa H.* Methane exploitation by carbon dioxide from gas hydrates-phase equilibria for CO<sub>2</sub>-CH<sub>4</sub> mixed hydrate system // J. Chem. Eng. Jpn. 1996. V. 29. P. 478–483.
2. *Goel N.* In situ methane hydrate dissociation with carbon dioxide sequestration: Current knowledge and issues // J. Petrol. Sci. Eng. 2006. V. 51. P. 169–184.
3. *Zhou X, Fan S, Liang D, Du J.* Determination of appropriate condition on replacing from hydrate with carbon dioxide // Energy Convers. Manag. 2008. V. 49. P. 2124–2129.
4. *Rossi F., Gambelli A.M., Sharma D.K., Castellani B., Nicolini A., Castaldi M.J.* Experiments on methane hydrates formation in seabed deposits and gas recovery adopting carbon dioxide replacement strategies // Appl. Therm. Eng. 2019. V. 148. P. 371–381.
5. *Gambelli A.M., Rossi F.* Natural gas hydrates: comparison between two different applications of thermal stimulation for performing CO<sub>2</sub> replacement // Energy. 2019. V. 172. P. 423–434.
6. *White M.D., Wurstner S.K., McGrail B.P.* Numerical studies of methane production from Class 1 gas hydrate accumulations enhanced with carbon dioxide injection // Marine Petrol. Geol. 2011. V. 28. P. 546–560.
7. Цыпкин Г.Г. Образование гидрата углекислого газа при его инжекции в истощенное месторождение углеводородов // Изв. РАН. МЖГ. 2014. № 6. С. 101–108.
8. Хасанов М.К. Математическая модель образования гидрата диоксида углерода при инжекции углекислого газа в метаногидратный пласт // Теоретические основы химической технологии. 2017. Т. 51. № 5. С. 499–509.
9. Цыпкин Г.Г. Термодинамические условия образования гидрата CO<sub>2</sub> при инжекции углекислоты в пласт, содержащий гидрат метана // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 5. С. 103–112.
10. Tsypkin G.G. Analytical study of CO<sub>2</sub>–CH<sub>4</sub> exchange in hydrate at high rates of carbon dioxide injection into a reservoir saturated with methane hydrate and gaseous methane // Energy. 2021. V. 233. 121115.
11. Цыпкин Г.Г. Математическая модель замещения метана в гидрате углекислым газом при его инжекции в пласт, насыщенный смесью гидрата, метана и воды // Труды МИАН им. В.А. Стеклова. 2023. Т. 322. С. 233–240.
12. Afanasyev A.A. Multiphase compositional modelling of CO<sub>2</sub> injection under subcritical conditions: The impact of dissolution and phase transitions between liquid and gaseous CO<sub>2</sub> on reservoir temperature // Int. J. Greenhouse Gas Control. 2013. V. 19. P. 731–742.
13. Hirohama S., Shimoyama Y., Wakabayashi A., et al. Conversion of CH<sub>4</sub>-hydrate to CO<sub>2</sub>-hydrate in liquid CO<sub>2</sub> // J. Chem. Eng. Japan. 1996. V. 29. N 6. P. 1014–1020.
14. Ota M., Morohashi K., Abe Y., et al. Replacement of CH<sub>4</sub> in the hydrate by use of liquid CO<sub>2</sub> // Energy Convers. Manag. 2005. V. 46. P. 1680–1691.
15. Sun X., Wang Z., Sun B., Wang W. Research on hydrate formation rules in the formations for liquid CO<sub>2</sub> fracturing // J. Nat. Gas Sci. Eng. 2016 V. 33. P. 1390–1401.
16. Agrawal R., Kumar Y., Sarkhel R., et al. Enhancing the CO<sub>2</sub> sequestration potential in subsea terrain by hydrate formation from liquid CO<sub>2</sub> // Energy and Fuels. 2023. V. 37. N 19. P. 14961–14976.
17. Majid A.A.A. Gas hydrate technological applications: From energy recovery to carbon capture and storage // Gas Sci. Eng. 2024. V. 131. 205455.

18. Wilson I., Saini S., Sreenivasan H., et al. Review and Perspectives of Energy-Efficient Methane Production from Natural Gas Hydrate Reservoirs Using Carbon Dioxide Exchange Technology // Energy and Fuels. 2023. V. 37. N. 14. P. 9841–9872.
19. Mwakipunda G.Ch., Abelly E.N., Mgimba M.M., et al. Critical Review on Carbon Dioxide Sequestration Potentiality in Methane Hydrate Reservoirs via CO<sub>2</sub>-CH<sub>4</sub> Exchange: Experiments, Simulations, and Pilot Test Applications // Energy and Fuels. 2023. V. 37. N 15. P. 10843-10868.
20. Anderson G.K. Enthalpy of dissociation and hydration number of methane hydrate from the Clapeyron equation // J. Chem. Thermodyn. 2004. V. 36. P. 1119–1127.
21. Anderson G.K. Enthalpy of dissociation and hydration number of carbon dioxide hydrate from the Clapeyron equation // J. Chem. Thermodyn. 2003. V. 35. P. 1171–1183.
22. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. Наука. ФИЗМАТЛИТ. Москва. 1972. 270 с.

## REACTION OF METHANE REPLACEMENT WITH CARBON DIOXIDE IN HYDRATE DURING INJECTION OF LIQUID CARBON DIOXIDE INTO FORMATION

G. G. Tsypkin<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

*\*e-mail: tsypkin@ipmnet.ru*

The problem of liquid carbon dioxide injection into a formation containing methane hydrate, water and free methane is considered. Estimates of the main parameters show that the reaction of methane hydrate substitution by carbon dioxide hydrate without external heat influx is possible only in the presence of free water in the rock. Based on the analysis of the thermodynamic diagram of the phase state, a mathematical model of liquid CO<sub>2</sub> injection accompanied by the reaction of methane substitution by carbon dioxide in the hydrate is formulated. It is assumed that the region of methane hydrate decomposition and carbon dioxide hydrate formation can be approximated by a narrow front. The found asymptotic solution reduces the problem to a numerical study of transcendental equations. Based on the results of numerical experiments, characteristic regimes of liquid carbon dioxide injection are presented, allowing the substitution reaction to occur.

**Keywords:** porous medium, hydrate, methane, liquid carbon dioxide, water, substitution reaction, front of conversion

## СТРУКТУРА ТЕЧЕНИЯ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ ИСПАРЕНИЯ

© 2024 г. В. Ю. Левашов<sup>a,\*,\*\*</sup>, А. П. Крюков<sup>a</sup>, А. Л. Кусов<sup>a</sup>

<sup>a</sup> МГУ им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия

\*e-mail: vyl69@mail.ru

\*\*e-mail: levashovvy@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 02.08.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята к публикации 11.10.2024 г.

Методом совместного решения кинетического уравнения Больцмана и уравнений механики сплошной среды исследовано течение пара вблизи межфазной поверхности при испарении. Показано, что формирующаяся в этом процессе структура течения представляет собой совокупность нескольких зон: неравновесная кинетическая область (слой Кнудсена); область равномерного потока, в которой скорость, плотность и температура не изменяются по координате; контактный разрыв и область с равномерным потоком за замыкающей ударной волной. Предложен подход, позволяющий построить структуру течения при нестационарном испарении без решения кинетического уравнения Больцмана. Результаты применения этого подхода сравниваются с численными расчетами, выполненными с помощью метода совместного решения кинетического уравнения Больцмана и уравнений механики сплошной среды, а также путем прямого статистического моделирования Монте-Карло.

**Ключевые слова:** испарение, ударная волна, контактный разрыв, кинетическое уравнение Больцмана, метод прямого статистического моделирования Монте-Карло

**DOI:** 10.31857/S1024708424060129, **EDN:** FDKROS

Процесс испарения активно используется как в различных технических приложениях таких, например, как охлаждение микроэлектроники [1], системы кондиционирования воздуха [2], опреснение воды [3], так и наблюдается в различных природных явлениях, например, испарение воды с поверхности водоемов и почвы [4–7]. Как отмечается в [8], систематическое изучение процесса испарения было впервые начато работами Стефана [9, 10] и продолжается до настоящего времени. Исследования в данном направлении ведутся как с использованием расчетно-теоретических, так и экспериментальных методов исследований. Теоретические исследования процесса испарения осуществляются в настоящее время методами механики сплошной среды, молекулярно-кинетической теории и методами молекулярно-динамического моделирования [11–15]. В [16] рассмотрение задачи об испарении материала с поверхности заданной температуры осуществлялось с использованием метода прямого статистического моделирования Монте-Карло, а также решения уравнений Эйлера для задачи о распаде разрыва. В результате моделирования обнаружено, что при невязком распаде разрыва с последующим истечением газа в среду с малой плотностью за головной ударной волной образуется горячий слой газа с температурой, существенно превосходящей начальную температуру толкающего газа и независящей от плотности газа перед волной расширения. В [17] рассматривалась задача об испарении с плоской поверхности при внезапном повышении ее температуры. Основное внимание уделялось влиянию коэффициента испарения на картину движения газовой среды. Результаты решения получены на базе кинетического уравнения с S-модельным оператором столкновений. Было показано, что при коэффициенте конденсации равном единице на некотором удалении от границы раздела фаз “формируется равномерный поток, который через размытый контактный разрыв сопрягается с равномерным потоком за ударной волной, распространяющейся с постоянной скоростью по невозмущенному газу”.

В настоящей работе на базе метода совместного решения кинетического уравнения Больцмана и уравнений механики сплошной среды [18, 19] анализируется структура течения вблизи испаряющейся поверхности. Показано, что при определенных условиях формируется структура течения, аналогичная [17].

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается одномерная задача об испарении с плоской поверхности в область, заполненную неподвижным паром того же вещества, испарение которого реализуется. Пар занимает полупространство  $x > 0$  и находится в термодинамическом равновесии с конденсированной фазой, расположенной в полупространстве  $x < 0$ . Поверхность раздела фаз жидкость-пар представляет собой плоскость, расположенную на координате  $x = 0$ . Считается, что в начальный момент времени параметры пара (числовая плотность  $n_0$  и температура  $T_0$ ), находящегося около поверхности испарения, известны. Считается также, что вдали от поверхности испарения параметры пара остаются неизменными и равными  $n_0$  и  $T_0$ . В начальный момент времени температура поверхности увеличивается, становится равной  $T_w$  и остается неизменной в течение всего процесса. Температуре  $T_w$  соответствует числовая плотность испаряющегося вещества  $n_w$ , определяемая кривой насыщения. Рассматривается случай, когда  $T_w/T_0 = 1.1$ . Величина  $n_w$  варьируется в диапазоне от  $1.1 \leq n_w/n_0 \leq 4.3$ . Необходимо определить структуру течения, а также значения макропараметров (плотность, температуру, скорость) в каждой области этой структуры. Такая ситуация возможна на начальной стадии лазерной абляции. В обзоре [20] отмечается, что «русский тезаурус понятий “утрата”, “потеря” содержит слова “испаряться”, “улетучиваться”, имеющие непосредственное отношение к процессу абляции». В этой же работе при рассмотрении тепловой модели абляции (модели приповерхностного испарения) показана возможность формирования при определенных условиях стационарной волны испарения, параметры которой рассчитываются, и утверждается, «что в наносекундном диапазоне результаты расчетов, основанных на тепловой модели, хорошо согласуются с экспериментальными данными». Поскольку плотность жидкости значительно больше плотности пара, а характерные времена рассматриваемого процесса малы, предполагается, что поверхность раздела фаз пар-жидкость остается неподвижной.

Далее все величины представлены в безразмерном виде. Безразмерная температура вводится делением размерной величины на  $T_0$ , безразмерная плотность (концентрация) делением на  $n_0$ , безразмерная скорость на  $u_0 = \sqrt{RT_0}$ , где  $R$  – удельная газовая постоянная, а безразмерный поток массы на  $j_0 = n_0 u_0$ . Масштаб времени, характерный для процессов, описываемых уравнением Больцмана, определяется следующим условием:  $t_0 = \lambda_0/u_0$ , где  $\lambda_0$  – средняя длина свободного пробега молекул пара при параметрах  $n_0$  и  $T_0$ . Безразмерная координата определяется делением размерной величины на  $\lambda_0$ .

В качестве основного метода решения, в настоящей работе использован метод совместного решения кинетического уравнения Больцмана и уравнений механики сплошной среды. Подробное описание этого подхода изложено в [19]. Применение данного подхода для исследования процессов испарения в парогазовую среду представлено в [18]. Здесь приведем лишь краткое описание метода. Известно [см., например, 21–24], что вблизи поверхности испарения/конденсации существует тонкий неравновесный слой (слой Кнудсена), в котором параметры пара претерпевают существенные изменения в результате межмолекулярных столкновений. В методе совместного решения кинетического уравнения Больцмана и уравнений механики сплошной среды поведение пара в слое Кнудсена описывается кинетическим уравнением Больцмана, которое для одномерной нестационарной постановки имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial f}{\partial x} = J. \quad (1.1)$$

Здесь  $f(x, t, \xi)$  – функция распределения молекул по скоростям для пара,  $x$  – декартова координата,  $t$  – время,  $\xi$  – молекулярная скорость,  $J$  – интеграл столкновений, описывающий изменение функции распределения в результате межмолекулярных столкновений.

Как отмечается в [25, 19, 11], для решения (1.1) должны быть известны функции распределения по скоростям молекул, “летящих” внутрь кинетической области, т.е. на межфазной поверхности жидкость-пар ( $x = 0$ ) должна быть известна (задана) функция распределения по скоростям при  $\xi_x > 0$ , а на границе слоя Кнудсена при  $\xi_x < 0$ . На внешней границе слоя Кнудсена в качестве такой функции используется функция Чепмена–Энскога, рассчитанная по параметрам из первой расчетной точки

области сплошной среды. На межфазной поверхности в качестве граничной функции используется распределение Максвелла с температурой равной температуре поверхности ( $T_w$ ), числовой плотностью  $n_w$  и нулевой переносной скоростью [11]. Внешняя граница слоя Кнудсена располагалась на расстоянии  $10\lambda_0$  от поверхности испарения.

Результатом решения (1.1) является функция распределения молекул по скоростям. Макропараметры пара, такие как плотность, температура, давление, потоки массы, энергии и другие моменты функции распределения определяются интегрированием по трехмерному пространству скоростей [25]. За пределами слоя Кнудсена описание системы базируется на уравнениях механики сплошной среды, которые для одномерной постановки имеют следующий вид [26]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial \rho eu}{\partial x} &= -p \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial q}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $\rho = m_0 n$  – плотность (количество вещества в единице объема),  $p$  – давление,  $q$  – поток тепла,  $e$  – внутренняя энергия,  $\mu$  – коэффициент вязкости,  $m_0$  – масса молекулы.

На границе слоя Кнудсена осуществляется процедура “сшивания” полученных решений. При этом результаты решения кинетического уравнения Больцмана используются в качестве граничных условий для уравнений механики сплошной среды [19].

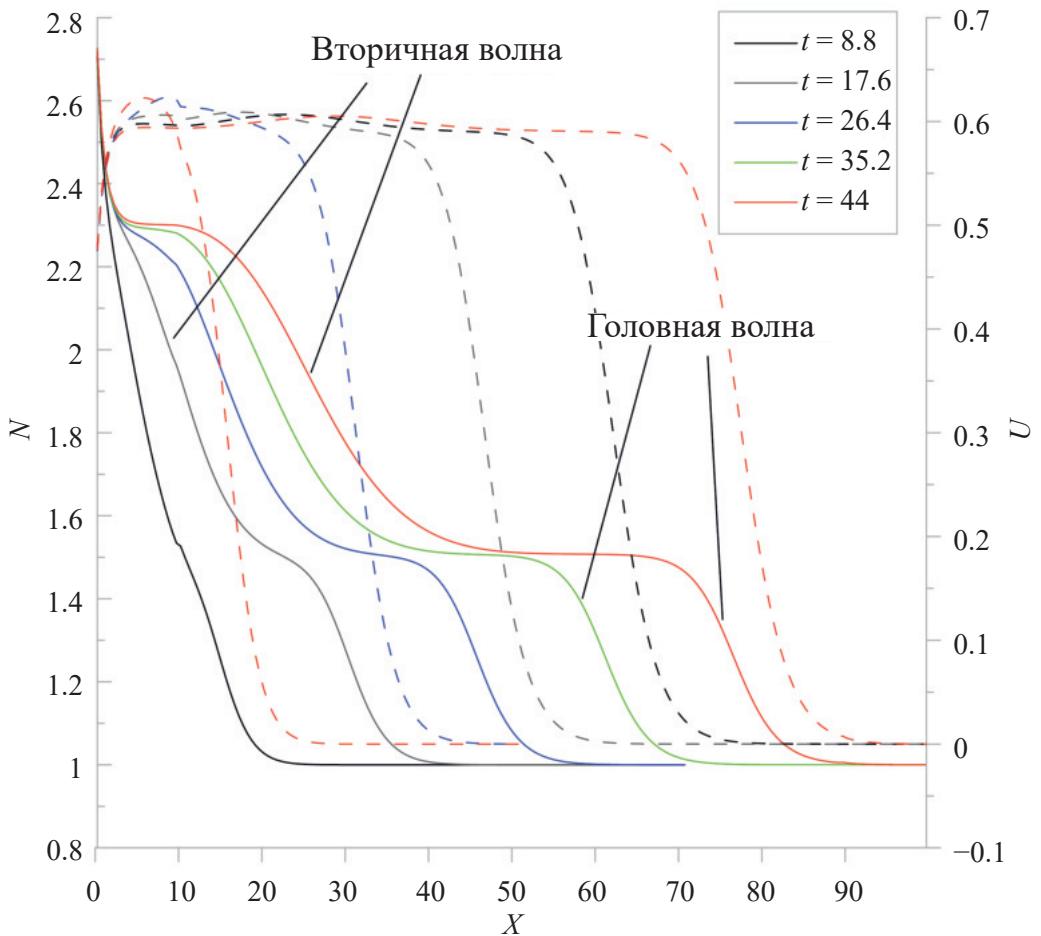
Применение данного подхода позволяет, с одной стороны, “обеспечить” уравнения механики сплошной среды корректными граничными условиями, учитывающими неравновесные процессы вблизи межфазной поверхности, а с другой стороны существенно сокращает время вычислений.

В качестве другого подхода в настоящей работе использовался метод прямого статистического моделирования Монте-Карло [27], основанном на имитации движения молекул газа, столкновений их между собой и взаимодействия молекул с границами расчетной области. Подробно применение метода прямого статистического моделирования Монте-Карло к исследованию задач с испарением представлено в [16, 28].

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Распределения макропараметров, формирующихся вблизи поверхности испарения, для различных моментов времени представлены на рис. 1–5.

На рис. 1 представлены данные по изменениям скорости и концентрации пара вдоль координаты для различных моментов времени для случая  $n_w/n_0 = 4.3$ ,  $T_w/T_0 = 1.1$ . Анализ рис. 1 показывает, что на нестационарной стадии процесса испарения структура течения пара имеет вид, который схематично представлен на рис. 2 (для удобства анализа, значения безразмерных плотности  $N$ , скорости  $U$  и температуры  $T$  отнесены к соответствующим максимальным величинам  $N_{\max}$ ,  $U_{\max}$  и  $T_{\max}$ ). Вдали от поверхности испарения расположена область невозмущенного пара – область VI на рис. 2. В этой области параметры пара постоянны. Слева от нее располагается область V, параметры в которой претерпевают резкое изменение от параметров невозмущенного пара, до параметров области IV. Стоит отметить, что в области IV параметры пара (плотность, температура, скорость) остаются неизменными. Как следует из результатов, представленных на рис. 1, эта область начинает формироваться в первые моменты времени после начала процесса, и ее ширина постепенно увеличивается. Существует также еще одна область постоянных параметров – область II, левая граница которой находится на расстоянии нескольких длин свободного пробега от поверхности испарения. Положение этой левой границы не изменяется во времени. В то же время, правая граница области II, движется от поверхности испарения, т.е. ширина зоны II возрастает. При этом параметры пара в этой области также остаются неизменными. Между областями II и IV находится зона III, в которой некоторые параметры пара (плотность и температура) претерпевают резкое изменение. Причем, в отличие от V, где все параметры возрастают, в III наблюдается увеличение плотности и спад температуры. Скорость же в областях II, III, и IV остается примерно постоянной. Вблизи поверхности испарения существует узкая



**Рис. 1.** Профили безразмерной плотности  $N$  (сплошные линии) и безразмерной скорости  $U$  (пунктирные линии) для  $n_w/n_0 = 4.3, T_w/T_0 = 1.1$ .

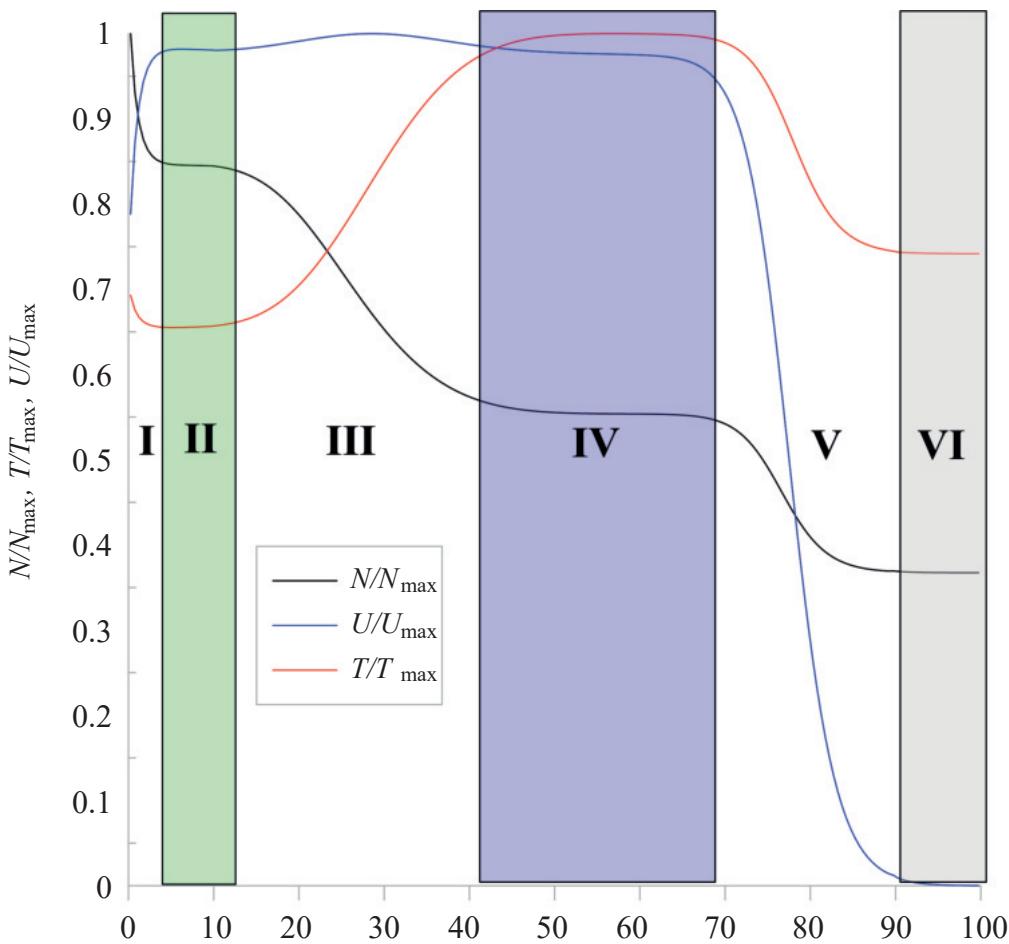
область I (слой Кнудсена), в которой наблюдается резкое изменение макропараметров – уменьшение плотности и температуры, рост скорости.

На рис. 3 представлены результаты расчетов профилей макропараметров – температура (а), скорость (б) и давление (в) – для случая  $n_w/n_0 = 4.3, T_w/T_0 = 1.1$ , полученных методами прямого статистического моделирования Монте-Карло (на рисунке обозначены пунктиром) и методом совместного решения кинетического уравнения Больцмана и уравнений механики сплошной среды (сплошные линии) для разных моментов времени.

Из рис. 3 видно, что через некоторое время вблизи поверхности испарения формируется стационарная структура течения, аналогичная структуре, представленной на рис. 2. При этом параметры потока в областях II и IV остаются неизменными. Таким образом, в процессе испарения формируется структура течения в виде двух волн – головная волна, вторичная волна и области постоянных параметров за этими волнами, см. рис. 1.

Более наглядное представление о типе реализующейся структуры течения позволяют получить данные, представленные в виде ( $x$ - $t$ ) диаграмм.  $X$ - $t$  диаграммы макропараметров для случая  $n_w/n_0 = 4.3, T_w/T_0 = 1.1$  представлены на рис. 4.

Из анализа данных рис. 4 видно, что головная волна представляет, согласно классификации [29], разрыв второго типа, т.е. ударную волну, движущуюся с постоянной скоростью  $W_{sw} = 1.74$  (скорость волны может быть определена по углу наклона на  $x$ - $t$  диаграмме плотности). При этом видно, что фронт волны не претерпевает изменений. За головной волной реализуется поверхность разрыва первого типа (согласно [29]) – контактный разрыв. Из рис. 4 видно, что контактный разрыв с течением времени становится все более “размытым”. Средняя скорость движения контактного разрыва для рассматриваемого случая составляет  $W_{cb} \approx 0.62$ .



**Рис. 2.** Схематичное изображение структуры течения.

Анализ структуры течения позволяет записать соответствующие законы сохранения на каждой поверхности разрыва. В безразмерном виде в системе координат, связанной с фронтом ударной волны, эти соотношения можно записать следующим образом [29]:

*Головная волна*

$$n_{VI}W_{sw} = n_{IV}(W_{sw} - u_{IV}), \quad (2.1)$$

$$n_{VI}T_{VI} + n_{VI}W_{sw}^2 = n_{IV}T_{IV} + n_{IV}(W_{sw} - u_{IV})^2, \quad (2.2)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}T_{VI} + \frac{1}{2}W_{sw}^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1}T_{IV} + \frac{1}{2}(W_{sw} - u_{IV})^2. \quad (2.3)$$

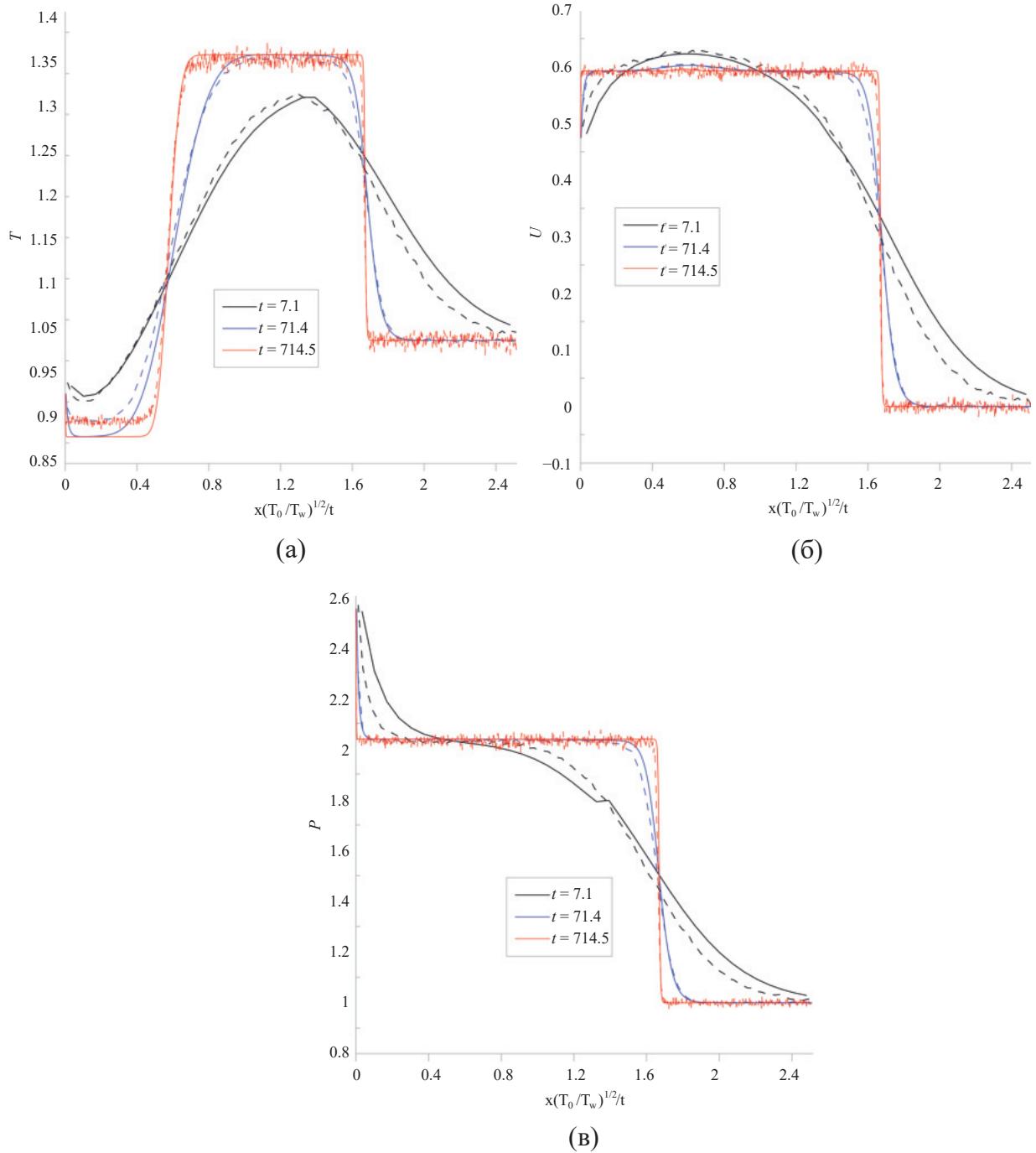
*Контактный разрыв*

$$\begin{aligned} u_{IV} &= u_{II}, \\ p_{IV} &= p_{II} \rightarrow n_{IV}T_{IV} = n_{II}T_{II}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь нижний индекс обозначает величины макропараметров в соответствующей области структуры (см. рис. 2).

Согласно [24] существует взаимосвязь между потоком массы испаряющегося вещества ( $n_{II}u_{II}$ ), плотностью испаряющегося вещества ( $n_w$ ) и плотностью пара на внешней границе слоя Кнудсена ( $n_{II}$ ). Для рассматриваемой в настоящей работе ситуации эта взаимосвязь имеет следующий вид:

$$n_{II}u_{II} = 0.6\sqrt{2T_S}(n_w - n_{II})\sqrt{\frac{n_{II}}{n_w}} \quad (2.5)$$

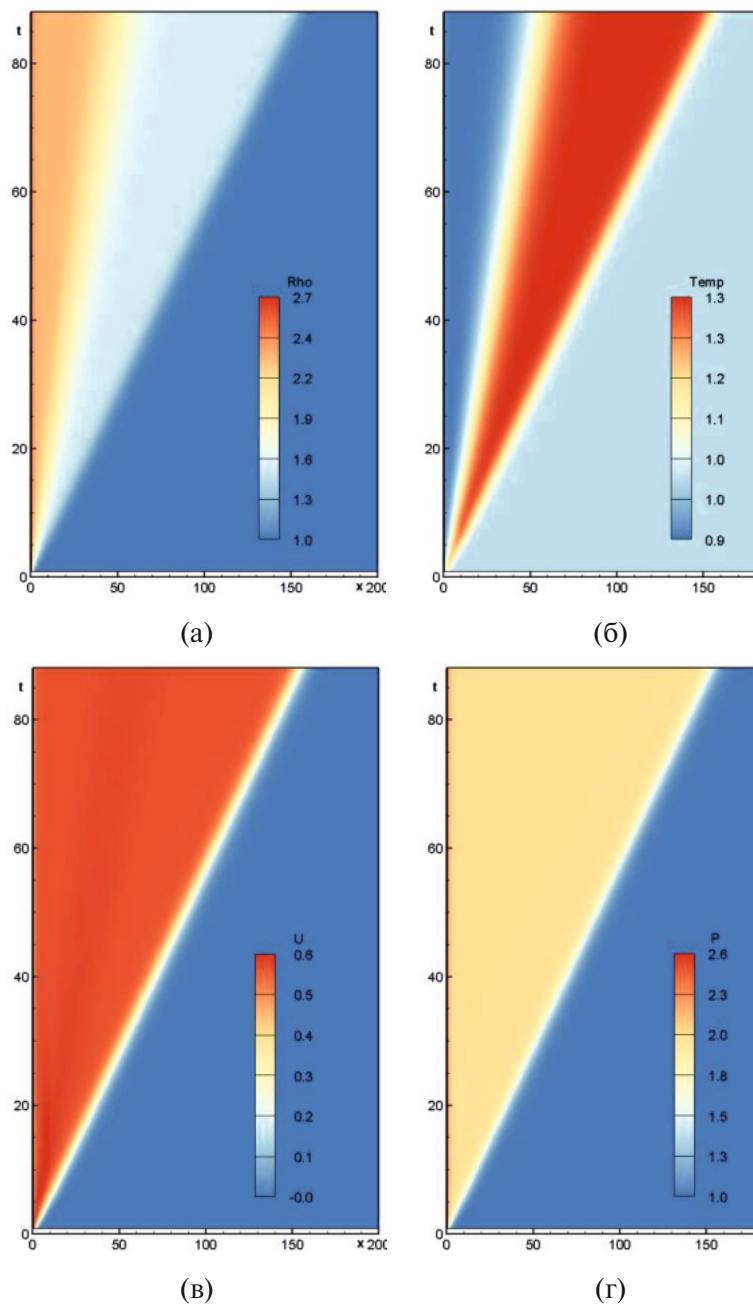


**Рис. 3.** Профили макропараметров для разных моментов времени при  $n_w/n_0 = 4.3$ ,  $T_w/T_0 = 1.1$ : (а–в) – температура, скорость, давление. Сплошные линии – метод совместного решения кинетического уравнения Больцмана и уравнений механики сплошной среды, пунктирные линии – метод прямого статистического моделирования Монте-Карло.

Также можно воспользоваться соотношением [24] между интенсивностью испарения и скачком температуры. Для рассматриваемого случая эта взаимосвязь будет иметь вид:

$$\frac{T_w - T_{II}}{T_S} = 0.265 \frac{n_w - n_{II}}{\sqrt{n_w n_{II}}} \quad (2.6)$$

Таким образом, имеем систему шести уравнений (2.1)–(2.6), содержащую (при заданных  $n_{VI}$ ,  $T_{VI}$ ,  $T_w$  и  $n_w$ ) 6 неизвестных величин:  $n_{IV}$ ,  $v_{IV}$ ,  $T_{IV}$ ,  $W_{sw}$ ,  $n_{II}$ ,  $T_{II}$ .



**Рис. 4.**  $X-t$  диаграммы течения ( $n_w n_0 = 4.3$ ,  $T_w T_0 = 1.1$ ): (а–г) – плотность, температура, скорость, давление.

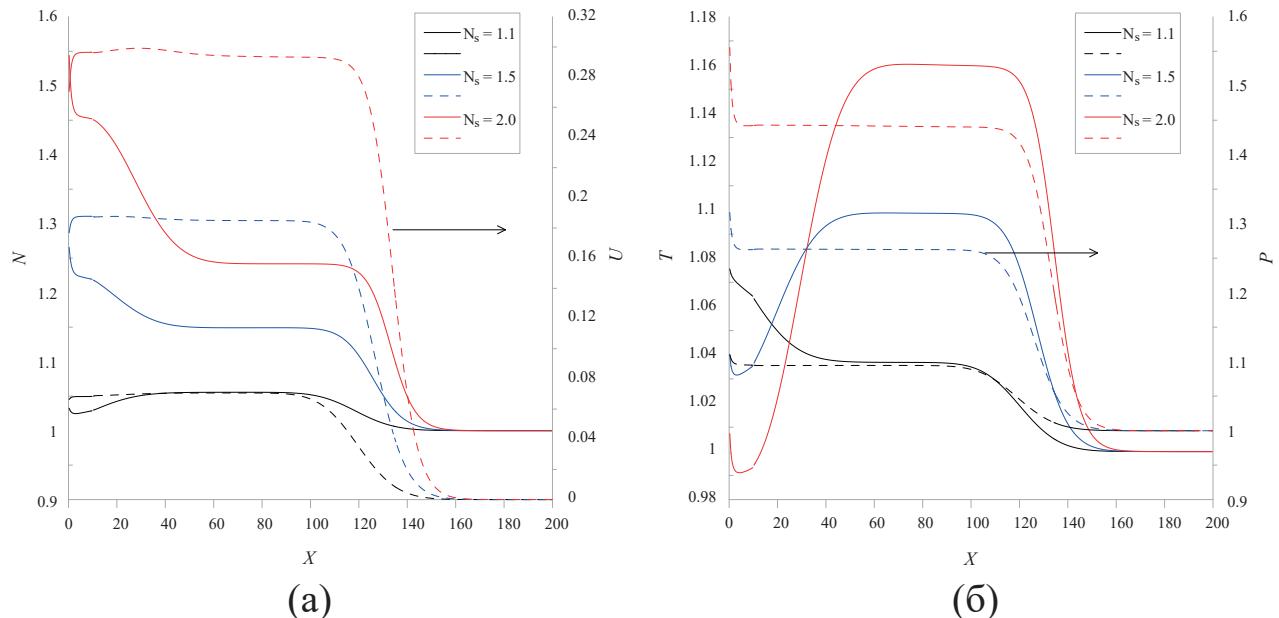
Результаты решения системы (2.1)–(2.6) и сравнение с расчетами, выполненными на базе метода совместного решения кинетического уравнения Больцмана и уравнений механики сплошной среды (КУБ&УМСС), представлены в табл. 1.

Из таблицы видно, что результаты решения системы (2.1)–(2.6) близки к данным, полученным путем более точного сшивного решения.

При использовании системы (2.1)–(2.6) важно знать, всегда ли структура течения соответствует схеме, представленной на рисунках 2 и 4. Для ответа на этот вопрос были проведены расчеты нестационарных стадий процесса испарения для различных отношений  $n_w/n_0$ . Результаты расчетов представлены на рис. 5. Анализ рис. 5 позволяет сделать следующий вывод. При отношении  $n_w/n_0 \approx 1.1$  наблюдаются различия в структуре течения по сравнению с другими значениями  $n_w/n_0$ . Так, например, для этого случая плотность пара за слоем Кнудсена уменьшается, а температура за контактным разрывом больше, чем в области за ударной волной (в отличие от варианта  $n_w/n_0 \geq 1.5$ ). Тем не менее,

Таблица 1. Параметры пара в различных зонах

	Начальные параметры	
	КУБ&УМСС	Система (2.1)–(2.6)
$T_w$	1.1	1.1
$n_w$	4.3	3.0
$T_{VI}$	1.0	1.0
$n_{VI}$	1.0	1.0
$v_{VI}$	0.0	0.0
	Результаты решения	
	КУБ&УМСС	Система (2.1)–(2.6)
$T_{IV}$	1.35	1.34
$n_{IV}$	1.51	1.51
$V_{IV}$	0.59	0.59
$T_{II}$	0.88	0.91
$n_{II}$	2.31	2.24
$V_{II}$	0.59	0.59
$W_{sw}$	1.72	1.74

Рис. 5. Зависимости  $N$ ,  $U$  (а) и  $T$ ,  $P$  (б) от координаты при  $n_w/n_0 = 1.1, 1.5, 2.0$  и  $T_w = 1.1$  для момента времени  $t = 88.0$ .

анализ данных по изменению скорости, давления и температуры позволяет сделать вывод о существовании двух разрывов – ударной волны и контактного и в этом случае, т.е. при  $n_w/n_0 \approx 1.1$ . Результаты сравнения расчетов по системе (2.1)–(2.6) и методом совместного решения кинетического уравнения Больцмана и уравнений механики сплошной среды (КУБ&УМСС) для отношения  $n_w/n_0 \approx 1.1$  представлены в табл. 2.

**Таблица 2.** Параметры пара в различных зонах при  $n_w/n_0 = 1.1$  и  $T_w = 1.1$ 

Начальные параметры		
$T_w$	1.1	
$n_w$	1.1	
$T_{VI}$	1.0	
$n_{VI}$	1.0	
$v_{VI}$	0.0	
Результаты решения		
	КУБ&УМСС	Система (2.1)–(2.6)
$T_{IV}$	1.037	1.05
$n_{IV}$	1.056	1.07
$V_{IV}$	0.071	0.094
$T_{II}$	1.06	1.08
$n_{II}$	1.03	1.04
$V_{II}$	0.07	0.094
$W_{sw}$	1.36	1.36

Из таблицы видно, что результаты решения системы (2.1)–(2.6) удовлетворительно совпадают с более точным решением. Наибольшие различия этих расчетов получаются при определении скоростей за контактным разрывом и за ударной волной.

Таким образом, можно считать, что в первом приближении система (2.1)–(2.6) предоставляет возможность установить структуру течения при нестационарном испарении с плоской поверхности без решения системы (1.1), (1.2) или метода прямого статистического моделирования Монте-Карло, а также позволяет определить интенсивность процесса массопереноса при испарении с плоской поверхности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ результатов решения задачи о нестационарном испарении в среду собственного пара методами совместного решения кинетического уравнения Больцмана и уравнений механики сплошной среды, а также метода прямого статистического моделирования Монте-Карло показал, что в рассмотренном в работе диапазоне отношений температур и числовых плотностей, наблюдается формирование вблизи испаряющейся поверхности структуры, состоящей из областей постоянных параметров, ударной волны и контактного разрыва.

Показано, что упрощенный подход, базирующийся на уравнениях сохранения на ударной волне и контактном разрыве, дополненный кинетическими соотношениями для потока массы испаряющегося вещества и скачка температуры позволяет установить структуру течения при нестационарном испарении без решения кинетического уравнения Больцмана совместно с уравнениями механики сплошной среды или метода прямого статистического моделирования Монте-Карло.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-19-00044. Авторы благодарят П.Ю. Георгиевского за помощь в подготовке x-t диаграмм и анализ структуры возникающего течения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lu. Z., Salamon T.R., Narayanan S., Bagnall K.R., Hanks D. F., Antao Dion. S., Barabadi B., Sircar J., Simon M.E., Wang E. N. Design and Modeling of Membrane-Based Evaporative Cooling Devices for Thermal Management

- of High Heat Fluxes // IEEE. Trans. Compon. Packaging. Manuf. Technol. 2016. V. 6. № 7. P. 1056–1065. DOI:10.1109/TCPMT.2016.2576998
2. Amer O., Boukhanouf R., Ibrahim H.G. A Review of Evaporative Cooling Technologies // IJESD. 2015. 6. 111. DOI:10.7763/IJESD.2015.V6.571
  3. Humplik T., Lee J., O'Hern S.C., Fellman B.A., Baig M.A., Hassan S.F., Atieh M.A., Rahman F., Laoui T., Karnik R., Wang E.N. Nanostructured materials for water desalination // Nanotechnology. 2011. 22(29).292001. doi: 10.1088/0957-4484/22/29/292001.
  4. Gimeno L., Nieto R., Drumond A., Duran-Quesada A.M. Ocean Evaporation and Precipitation . In: Meyers, R.A. (eds) Encyclopedia of Sustainability Science and Technology. New York. :Springer, 2012.[https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0851-3\\_734](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0851-3_734)
  5. Chiu L., Gao S., Shie C. Oceanic Evaporation: Trends and Variabilities, In book: Remote Sensing – Applications. 2012. DOI: 10.5772/36503.
  6. Zhang Yanqun, Wang Jiandong, Gong S., Wu Z. Measuring and modeling of soil evaporation for winter wheat with drip irrigation //TCSAE. 2014. 30. 91–98. DOI:10.3969/j.issn.1002-6819.2014.07.011.
  7. Solovev D., Соловьев А. Актуальные проблемы в исследовании переноса тепла и влаги в приводном слое атмосферы // Процессы в геосредах. 2015. № 4 (4). С. 55–63.
  8. Кнаке О., Странский И.Н. Механизм испарения // УФН. 1959. Т. LXVIII. Вып. 2. С. 261–305.
  9. Stefan J. VersucheUber die verdampfung. Sitzungsber. kais // Akad. Wiss. Wien. Math. 1873. V. 68. P. 385–423.
  10. Stefan J. Ubereinigeprobleme der theorie der warmeleitung // Sitzungber., Wien, Akad. Mat. Natur. 1889. V. 98. P. 473–484.
  11. Крюков А. П., Левашов В. Ю., Жаховский В. В., Анисимов С. И. Тепло и массоперенос на межфазных поверхностях конденсат—пар // УФН. 2021. 191(2). С.113–146. DOI: 10.3367/UFNr.2020.04.038749
  12. Stephan S., Schaefer D., Langenbach K., Hasse H. Mass transfer through vapour–liquid interfaces: a molecular dynamics simulation study // Mol. Phys. 2020. V. 119. P. 1-13. DOI:10.1080/00268976.2020.1810798.
  13. Frezzotti A., Barbante P. Simulation of shock induced vapor condensation flows in the Lennard-Jones fluid by microscopic and continuum models. // Phys. Fluids. 2020. 32 (12): 122106. <https://doi.org/10.1063/5.0032439>
  14. Zhakhovsky Vasily V., Kryukov Alexei P., Levashov Vladimir Yu, Shishkova Irina N., Anisimov Sergey I. Mass and heat transfer between evaporation and condensation surfaces: Atomistic simulation and solution of boltzmann kinetic equation // PNAS. 2019. 116(37). P. 18209–18217. DOI: 10.1073/pnas.1714503115
  15. Kobayashi K., Hori K., Kon M., Sasaki K., Watanabe M. Molecular dynamics study on evaporation and reflection of monatomic molecules to construct kinetic boundary condition in vapor–liquid equilibria // Heat and Mass Transfer. 2016. 52. DOI: 10.1007/s00231-015-1700-6.
  16. Кусов А. Л., Лунев В. В. О нестационарном разлете разреженного газа при испарении конденсированного материала с его перегретой поверхности // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 4. С. 130–144.
  17. Тимарев В.А. Шахов Е.М. Теплоотдача и испарение с плоской поверхности в полупространство при внезапном повышении температуры тела // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 1. С. 141–153.
  18. Kryukov A.P., Levashov V.Yu., Shishkova I.N. Evaporation-Condensation Problem In Vapour-Gas Mixtures // Proc. 25th Int. Symp. on RGD, Novosibirsk, 2007, p.1176–1181.
  19. Попов С.П., Черемисин Ф.Г. Совместное численное решение уравнений Больцмана и Навье–Стокса // Вычислительная динамика разреженного газа. 2000. М.: ВЦ РАН, с. 75–103
  20. Анисимов С.И., Лукьянчук Б.С. Избранные задачи теории лазерной абляции// УФН. 2002. Т. 172. № 3. С. 301–333.
  21. Муратова Т.М., Лабунцов Д.А. Кинетический анализ процессов испарения и конденсации // ТВТ. 1969. Т. 7. № 5. С. 959–967.
  22. Коган М.Н., Макашев Н.К. О роли слоя Кнудсена в теории гетерогенных реакций и в течениях с реакциями на поверхности// Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. №6. С. 3–11.
  23. Анисимов С.И., Рахматуллина А.Х. Динамика расширения пара при испарении в вакуум // ЖЭТФ. 1973. Т. 64. Вып. 3. С. 869–876.
  24. Labuntsov D.A., Kryukov A.P. Analysis of intensive evaporation and condensation // Int. J. Heat Mass Transfer. 1979. Vol. 22, P. 989–1002.

25. Коган М.Н. Динамика разреженного газа, М.: Наука, 1967. 440 с.
26. Лабунцов Д.А., Ягов В.В. Механика двухфазных систем: Учебное пособие для вузов, М.: Издательство МЭИ, 2000. 374 с.
27. Bird G.A. Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows. Oxford: ClarendonPress, 1994. 458 p.
28. Кусов А.Л., Лунев В.В. Применение метода прямого статистического моделирования Монте-Карло при решении задачи о нестационарном разлете разреженного газа в случае его испарения с перегретой поверхностью материала в вакуум // Космонавтика и ракетостроение, 2010. № 1(58). С. 36–45.
29. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.

## FLOW STRUCTURE NEAR AN EVAPORATION SURFACE

V. Yu. Levashov<sup>a,\*,\*\*</sup>, A. P. Kryukov<sup>a</sup>, and A. L. Kusov<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Moscow State University, Institute of Mechanics, Moscow, 119192 Russia*

\*e-mail: vyl69@mail.ru

\*\*e-mail: levashovvy@imec.msu.ru

**Abstract**—The vapor flow near an interphase surface is studied by solving jointly the kinetic Boltzmann equation and the equations of continuum mechanics in the case of evaporation. It is shown that the flow structure formed in this case represents the totality of several zones, namely, the kinetic nonequilibrium region (Knudsen layer), the uniform flow region, where the velocity, density, and temperature are coordinate-independent, the contact discontinuity, and a region of uniform flow behind a closing shock wave. An approach is proposed, which makes it possible to construct the flow structure in the case of time-dependent evaporation without solving the kinetic Boltzmann equation. The results of the application of this approach are compared with numerical calculations obtained using the joint solution of the kinetic Boltzmann equation and the continuum mechanics equations and also by means of the direct statistical Monte-Carlo simulation.

**Keywords:** evaporation, shock waves, contact discontinuities, kinetic Boltzmann equations, Monte-Carlo method of direct statistical simulation

# ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЙ МЕХАНИЗМ РАСШИРЕНИЯ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ В СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОМ ВАКУУМНОМ ПРОМЕЖУТКЕ

© 2024 г. А. О. Коковин<sup>a</sup>, В. Ю. Кожевников<sup>a,\*</sup>, А. В. Козырев<sup>a</sup>, Н. С. Семенюк<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Институт сильноточной электроники СО РАН, Томск, Россия

\*e-mail: Vasily.Y.Kozhevnikov@ieee.org

Поступила в редакцию 27.09.2024 г.

После доработки 08.10.2024 г.

Принята к публикации 08.10.2024 г.

Представлены результаты теоретического моделирования сферически симметричного разлета бесстолкновительной углеродной плазмы из компактного взрывоэмиссионного центра вакуумного разряда. Моделирование проведено на базе совместного решения кинетических уравнений Власова для электронов и ионов и уравнения Пуассона для электрического поля, записанных в сферической системе координат и усредненных по угловым переменным. Показано, что расчетные скорости расширения катодной плазмы в сферически симметричной геометрии заметно ниже, чем скорости расширения плазмы с теми же параметрами, получаемые при решении плоской задачи. Наблюдаемые скорости расширения плазмы катодного факела на уровне  $3.5 \cdot 10^6$  см/с могут быть объяснены в рамках бесстолкновительного механизма при выполнении критерия, накладываемого на соотношение эмиссионного тока к предельной току вакуумного промежутка.

**Ключевые слова:** вакуумный разряд, бесстолкновительная плазма, кинетическое уравнение Власова, виртуальный катод

**DOI:** 10.31857/S1024708424060133, **EDN:** FDIIWE

## ВВЕДЕНИЕ

За последние семьдесят лет теоретическое и экспериментальное исследования всех стадий формирования электрического разряда в вакууме (пробой, искра и дуга) легли в основу современной импульсной сильноточной электроники [1]. Наибольшее развитие получили области вакуумной и плазменной эмиссионной электроники как основы электроники больших мощностей и плотностей энергии. Спектр научных проблем, затрагивающих механизмы инициирования и развития первой стадии вакуумного разряда — пробоя вакуумного промежутка — стал решающим для улучшения вакуумной электроизоляции таких устройств, как импульсные генераторы, электронные и ионные ускорители, микроволновые устройства и импульсные рентгеновские генераторы [2]. Также до недавнего времени считалось, что дугообразование имеет второстепенное значение в устройствах термоядерного синтеза, поскольку оно ограничивается нестабильными фазами работы плазмы. Однако в последнее время эта проблема привлекла пристальное внимание [3, 4], в частности, из-за решения начать реализации работы токамака ИТЭР с использованием вольфрамового дивертора [5]. Все многочисленные приложения явления электрического разряда в вакууме требуют более глубокого понимания возможных физических механизмов развития вакуумного пробоя. Одним из широко обсуждаемых вопросов формирования первой стадии вакуумного разряда является явление, известное как “аномальное ускорение ионов”. Впервые оно было обнаруженное группой экспериментаторов [6] во главе с Плютто в плазменном диоде, это явление влечет за собой внезапное возникновение положительно заряженных ионных всплесков, испытывающих своеобразное ускорение от катода к аноду. В то время как распределение электрического потенциала в вакуумных диодах способствует ускорению электронов

катодной плазмы, более высокий потенциал анода, с точки зрения электродинамики, представляет собой потенциальный барьер для движения положительных ионов. Однако транспорт ионов от катода к аноду существует и его принято называет “аномальным ионным ускорением” [7–8]. Во время фазы вакуумного пробоя типичные скорости расширения плазмы достигают  $10^7$  см/с, а ионы приносят до 12% от общего заряда, транспортируемого через коллектор (анод). Типичные кинетические энергии ионов в диодах варьируются от десятков до тысяч электрон-вольт, что на порядки выше, чем тепловые энергии ионов катодной плазмы. Потоки ионов с высокими энергиями постоянно наблюдаются в вакуумных разрядах. Этот эффект был надежно подтвержден экспериментально и нашел широкое представление в литературе по вакуумному разряду [1].

Моделирование явления аномального ускорения ионов представляют собой существенную проблему с теоретической точки зрения. В настоящее время теоретические гипотезы о происхождении потока ионов от катода к аноду в целом подразделяются на три группы: эксплозивные (взрывные), столкновительные и бесстолкновительные (электродинамические) [9]. С абстрактно-теоретической точки зрения все три гипотезы можно считать обоснованными, однако, их выводы носили скорее качественный характер, а исходные предположения не всегда были согласованы с экспериментальными данными.

В теоретических работах [10–14] значительного прогресса в понимании физических механизмов пробоя удалось добиться благодаря применению ключевых принципов вычислительной физической кинетики. В этих работах с наиболее фундаментальной точки зрения рассматривалась относительно простая постановка задачи о том, что произойдет с квазинейтральной плазмой, если она образуется на поверхности катода в вакуумном диоде с приложенным напряжением? Для планарного [11] и осесимметричного [14] диодов было показано, что основной причиной нетеплового расширения катодной плазмы и аномального ускорения ионов является возникновение нестационарного немонотонного распределения электрического потенциала  $\varphi$  вблизи катода (подвижный виртуальный катод  $\Delta\varphi < 0$ ). Кинетические исследования выявили причину аномального ускорения ионов и позволили рассчитать средние скорости расширения плазмы различного зарядового состава. Также была показана незначительная роль рассеивающих столкновений в этом процессе. Удалось выяснить, что данный эффект целиком определяется параметрами центра эмиссии и не зависит от амплитуды приложенного к диоду напряжения  $U_0$  [14]. Кроме того, была продемонстрирована возможность возникновения “глубокой потенциальной ямы” вблизи катода  $|\Delta\varphi| > U_0$ .

В настоящей работе усилия по теоретическому моделированию сосредотачиваются на механизме расширения катодной плазмы в условиях сильных неоднородностей электрического поля и плазмы, которые имеют место вблизи катода малого радиуса в конфигурации сферически симметричного диода. Так как многомерные уравнения Власова представляют собой известную сложность для непосредственного численного решения в фазовом пространстве высокой размерности, то в данной работе предложено рассматривать одномерный вакуумный диод в сферических координатах как наиболее простой случай, реализующий нетривиальные моделируемые физические условия токопротекания на начальной стадии вакуумного пробоя. Если рассматривать катод как внутреннюю сферу малого радиуса, а в качестве анода рассматривать удаленную на значительном расстоянии внешнюю сферу, то в такой конфигурации напряженность электрического поля в отсутствии частиц обратно пропорциональна квадрату расстояния от центра симметрии. Изучая динамику катодной плазмы в такой конфигурации, можно сделать вывод об основных тенденциях поведения катодной плазмы и в более сложных геометрических конфигурациях диодов.

## 1. КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОГО ВАКУУМНОГО ПРОМЕЖУТКА

Рассмотрим в рамках одномерной геометрии сферически–симметричный вакуумный промежуток (диод) с радиусом катода  $r_c$  и межэлектродным расстоянием  $d = r_a - r_c$  ( $r_a > r_c$ ). Эмиссия заряженных частиц с катода моделируется поддержанием постоянного значения потока квазинейтральной плазмы в катодным сечении  $r = r_c$ . Для упрощения задачи полагаем, что катодная плазма состоит из электронов и однократно заряженных ионов, что является разумным предположением для катодов из лития, углерода, висмута и некоторых других материалов [15].

Основываясь на фундаментальных принципах физической кинетики, динамика плазмы будет описываться системой уравнений Власова–Пуассона. Без учета влияния магнитного поля кинети-

ческое уравнение Власова в сферической системе координат в одномерной постановке имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (v_r r^2 f) + \frac{\partial}{\partial v_r} \left[ \left( \frac{ze}{m} E_r + \frac{F_r}{m} \right) f \right] + \frac{\partial}{\partial v_\varphi} \left( \frac{F_\varphi}{m} f \right) + \frac{\partial}{\partial v_\theta} \left( \frac{F_\theta}{m} f \right) = 0, \quad (1.1)$$

где  $f(r, v_r, v_\varphi, v_\theta, t)$  – нестационарная функция распределения частиц плазмы, определенная на фазовом пространстве  $(r, v_r, v_\varphi, v_\theta)$ , где  $r$  – радиальная координата,  $v_r$  – радиальная скорость,  $v_\varphi$  – азимутальная скорость,  $v_\theta$  – меридиональная скорость,  $t$  – текущее время,  $m$  – масса частиц,  $e$  – элементарный заряд,  $z$  – зарядовое число,  $E_r$  – радиальная компонента вектора напряженности электрического поля,  $\mathbf{F} = m/r \cdot \{v_\varphi^2 + v_\theta^2, -v_\varphi v_\theta \operatorname{ctg} \theta - v_r v_\varphi, v_\varphi^2 \operatorname{ctg} \theta - v_r v_\theta\}$  – компоненты вектора силы инерции, вызванной криволинейностью системы координат.

Псевдоинерционные силы  $\mathbf{F}$  возникают из-за наличия ненулевых поперечных скоростей частиц. Они могут оказывать существенное влияние на процесс расширения плазмы в прикатодной области, заполненной квазинейтральной плазмой, где электрическая сила близка к нулю. При решении задачи радиального расширения плазмы можно отказаться от рассмотрения динамики распределения частиц по поперечным скоростям, усреднив кинетическое уравнение по угловым скоростям  $v_\varphi$  и  $v_\theta$  (при этом соответствующие производные по этим скоростям при усреднении обращаются в нуль)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{v_r}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f) + \frac{\partial}{\partial v_r} \left[ \left( \frac{ze}{m} E_r + \frac{\langle v_\varphi^2 + v_\theta^2 \rangle}{r} \right) f \right] = 0, \quad (1.2)$$

где  $\langle v_\varphi^2 + v_\theta^2 \rangle$  – среднеквадратичная угловая компонента скорости. Последнюю можно определить, воспользовавшись законом сохранения углового момента  $\mathbf{L} = \text{const}$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2 = m^2 (v_\varphi^2 + v_\theta^2) r^2 &= \text{const}, \quad \langle v_\varphi^2 + v_\theta^2 \rangle (r) = \left( \frac{r_c}{r} \right)^2 \cdot \langle v_\varphi^2 + v_\theta^2 \rangle (r = r_c) = \left( \frac{r_c}{r} \right)^2 \cdot 2eW/m, \\ f(r = r_c, v_\varphi, v_\theta) &= \frac{m}{2\pi e W} \exp \left\{ -\frac{m(v_\varphi^2 + v_\theta^2)}{2eW} \right\}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $f(r = r_c, v_\varphi, v_\theta)$  – максвелловская функция распределения эмиссионной плазмы по угловым скоростям на катоде,  $W$  – термодинамическая температура в эВ.

Таким образом, система кинетических уравнений Власова для плазменных компонент примет окончательный вид

$$\begin{cases} \frac{\partial f_e}{\partial t} + \frac{v_r}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_e) + \frac{e}{m_e} \left( -E_r + \left( \frac{r_c}{r} \right)^2 \frac{2W_e}{r} \right) \frac{\partial f_e}{\partial v_r} = 0, \\ \frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{v_r}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_i) + \frac{e}{m_i} \left( z_i E_r + \left( \frac{r_c}{r} \right)^2 \frac{2W_i}{r} \right) \frac{\partial f_i}{\partial v_r} = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

где  $f_e(r, v_r, t)$  и  $f_i(r, v_r, t)$  – функции распределения электронов (ФРЭ) и ионов (ФРИ),  $m_e$  и  $m_i$  – массы электронов и ионов,  $W_e$  и  $W_i$  – термодинамические температуры электронов и ионов в эмиссионной плазме на катоде соответственно. Данная система кинетических уравнений дополняется уравнением Пуассона для электростатического поля

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = \frac{\rho(r, t)}{\epsilon_0} = \frac{e(z_i n_i - n_e)}{\epsilon_0}, \quad E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad n_{e,i}(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{e,i}(r, v_r, t) dv_r, \quad (1.5)$$

где  $\rho$  – объемная плотность заряда,  $\epsilon_0$  – диэлектрическая постоянная,  $n_e$  и  $n_i$  – концентрация электронов и ионов соответственно,  $\varphi$  – электростатический потенциал. С учетом граничных условий Дирихле  $\varphi(r = r_c) = 0$  и  $\varphi(r = r_a) = U(t)$  данное уравнение имеет аналитическое решение в виде

квадратурных формул:

$$\begin{aligned} E_r(r, t) &= - \left[ U(t) + \frac{e}{\epsilon_0} \int_{r_c}^{r_a} \frac{1}{r'^2} \left\{ \int_{r_c}^{r'} r''^2 (z_i n_i - n_e) dr'' \right\} dr' \right] \frac{r_a \cdot r_c}{r_a - r_c} \frac{1}{r^2} + \frac{e}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \int_{r_c}^r r'^2 (z_i n_i - n_e) dr', \\ \varphi(r, t) &= \left[ U(t) + \frac{e}{\epsilon_0} \int_{r_c}^{r_a} \frac{1}{r'^2} \left\{ \int_{r_c}^{r'} r'^2 (z_i n_i - n_e) dr' \right\} \right] \frac{r - r_c}{r_a - r_c} \frac{r_a}{r} - \frac{e}{\epsilon_0} \int_{r_c}^r \frac{1}{r'^2} \left\{ \int_{r_c}^{r'} r''^2 (z_i n_i - n_e) dr'' \right\} dr', \end{aligned} \quad (1.6)$$

В данной задаче вакуумный промежуток подключен к электрической цепи, состоящей из идеализированного источника напряжения  $U_0(t)$  и параллельного диода балластного сопротивления  $R_b$ . Полный ток  $I(t)$ , протекающий через промежуток, и напряжение в промежутке  $U(t)$  можно определить исходя из уравнения электрической цепи и закона непрерывности плотности полного тока  $j_{total}(r, t) = -I(t)/S(r)$  в некотором поперечном сечении сферически симметричного промежутка  $S(r) = 2\pi r^2$ , которое в простом случае представляет собой полусферу

$$\begin{aligned} j_{total}(r, t) &= \epsilon_0 \frac{\partial E_r}{\partial t} + j_e(r, t) + j_i(r, t), \quad j_{e,i}(r, t) = z_{e,i} e \int_{-\infty}^{+\infty} v_r f(r, v_r, t) dv_r, \\ U_0(t) &= U(t) - I(t) R_b, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где  $j_e$  и  $j_i$  — плотности токов проводимости электронов и ионов соответственно. Чтобы перейти к уравнению для тока цепи уравнение баланса плотности тока следует усреднить по пространству

$$-\frac{I(t)}{2\pi r_a r_c} = -\frac{\epsilon_0}{r_a - r_c} \frac{dU}{dt} + \kappa(t), \quad \kappa(t) = \frac{1}{r_a - r_c} \int_{r_c}^{r_a} (j_e + j_i) dr, \quad (1.8)$$

которое с уравнением для напряжения приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка, имеющего точное решение в квадратурах

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} + \frac{I(t)}{\tau} &= \frac{r_a - r_c}{\epsilon_0 R_b} \left( \frac{\epsilon_0}{r_a - r_c} \frac{dU_0}{dt} - \kappa(t) \right), \quad \frac{1}{\tau} = \frac{r_a - r_c}{2\pi r_a r_c} \cdot \frac{1}{\epsilon_0 R_b} \Rightarrow \\ I(t) &= \frac{r_a - r_c}{\epsilon_0 R_b} \exp \left\{ -\frac{t}{\tau} \right\} \int_0^t \left( \frac{\epsilon_0}{r_a - r_c} \frac{dU_0}{dt'} - \kappa(t') \right) \exp \left\{ \frac{t'}{\tau} \right\} dt'. \end{aligned} \quad (1.9)$$

В качестве начальных условий для уравнений Власова в задаче о разлете плазмы были использованы нулевые начальные условия  $f_e(r, v_r, t = 0) = f_i(r, v_r, t = 0) = 0$  и постоянные граничные условия в катодном сечении в виде максвелловского распределения по скоростям для каждой компоненты эмиссионной плазмы

$$f_{e,i}(r = r_c, v_r, t) = n_0 \sqrt{\frac{m_{e,i}}{2\pi e W_{e,i}}} \exp \left\{ -\frac{m_{e,i} v_r^2}{2e W_{e,i}} \right\}, \quad (1.10)$$

где  $n_0$  — концентрация эмиссионной плазмы.

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Для получения численного решения вышеописанной задачи использовался так называемый полу-Лагранжевый метод решения [16]. Сначала выполнялось операторное разложение Странга второго порядка [17] для исходных уравнений Власова. При малом шаге по времени  $\Delta t$  формальное решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} f(t + \Delta t) &= \exp \left\{ \left( \widehat{R} + \widehat{V} \right) \Delta t \right\} f(t) \cong \exp \left\{ \widehat{R} \frac{\Delta t}{2} \right\} \exp \left\{ \widehat{V} \Delta t \right\} \exp \left\{ \widehat{R} \frac{\Delta t}{2} \right\} f(t) + O(\Delta t^2), \\ \widehat{R}f &= -\frac{v_r}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f), \quad \widehat{V}f = -a_r \frac{\partial f}{\partial v_r}, \quad a_r = \frac{e}{m} \left( zE_r + \left( \frac{r_c}{r} \right)^2 2W \right), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где операторы бесстолкновительных частей уравнения представляют собой сдвиговые уравнения по одной из координат фазового пространства

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{v_r}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f) = 0 &\Rightarrow f(r, \Delta t) = \frac{\chi(r - v_r \Delta t)}{r^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial t} + a_r \frac{\partial f}{\partial v_r} = 0 &\Rightarrow f(v_r, \Delta t) = \phi(v_r - a_r \Delta t), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\chi$  и  $\phi$  – произвольные функции, определяемые исходя из решения на предыдущем шаге.

Получающиеся в результате декомпозиции уравнения переноса имеют простые аналитические решения, которые в численной реализации требуют использования точных алгоритмов интерполяции для вычисления значений функций распределения в новых координатах. В качестве основного метода интерполяции использовался хорошо себя зарекомендовавший метод интерполяции кубическими сплайнами [18].

Особое внимание было уделено сеточному разбиению фазового пространства задачи. В осесимметричном диоде электрическое поле на катоде претерпевает многократное усиление по отношению к анодному значению, а распределение концентрации плазмы в прикатодной области обладает высокой пространственной неоднородностью. Ввиду этого необходимо использовать квазивременную сетку по радиальной координате  $r$ , которая монотонно сгущается вблизи поверхности катода. Одним из удобных способов такого разбиения является следующее выражение [19]

$$r(\xi) = r_c + (r_a - r_c) \frac{\exp\{c\xi\} - 1}{\exp\{c\} - 1}, \quad c > 0, \quad \xi \in [0, 1], \quad (2.3)$$

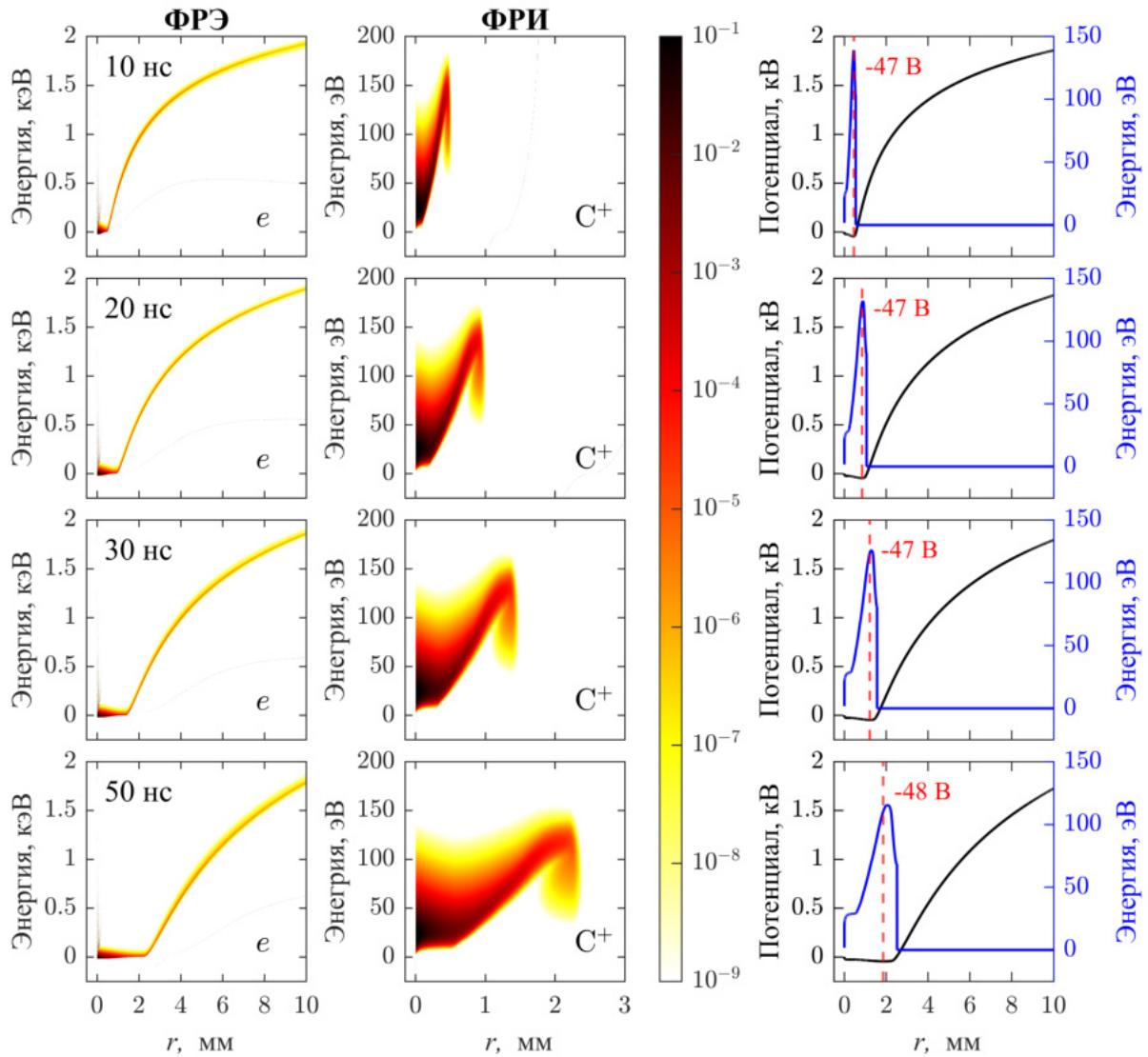
где  $\xi$  является параметром однородной сетки в интервале  $[0, 1]$ , а  $c$  – численный параметр, управляющий плотностью узлов сетки вблизи точки  $r = r_c$ . В рассматриваемой задаче значение параметра  $c = 3–10$  определяется исходя из требования того, чтобы минимальный размер расчетной сетки вблизи катода был в  $10–15$  раз меньше длины Дебая  $r_D = \sqrt{\epsilon_0 W_e / e n_0}$ . Для фазового пространства по обеим компонентам импульса использовалось однородное разбиение. Так как расчетное фазовое пространство всегда ограничено, то предельные значения импульсов подбирались таким образом, чтобы охватить их достаточно широкий динамический диапазон импульсов. Характерные размеры квазидородной сетки фазового пространства  $(r, v_r)$  составляли  $6000 \times 4001$  расчетных ячеек для электронов и  $6000 \times 2001$  для ионов.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ОБСУЖДЕНИЕ

Ниже, в качестве типичной иллюстрации, приводятся основные результаты численного моделирования начальной стадии вакуумного пробоя в рамках предложенной модели для следующих параметров сферически-симметричного вакуумного диода: радиус катода  $r_c = 100$  мкм, межэлектродное расстояние  $d = 1$  см, амплитуда напряжения  $U_0 = 2$  кВ (длительность фронта нарастания напряжения до амплитудного значения равна 0.1 нс), температура электронов  $W_e = 5$  эВ и ионов  $W_i = 1$  эВ (типичные значения для плазмы взрывоэмиссионных центров [1]). Балластное сопротивление  $R_b = 200$  Ом выбиралось таким, чтобы падение напряжения на промежутке  $\Delta U = I(t)R_b$  в любой момент времени не превышало 25 % от амплитудного значения  $U_0$ . Выбор шага по времени  $\Delta t$  ограничивался условием сходимости численного решения сдвиговых уравнений Куранта–Фридрихса–Леви, которое можно записать как  $\Delta t \ll r_D / \sqrt{2eW_e/m_e} \approx 10^{-13}$  с.

В качестве материала катода был выбран углерод ( $m_i = 12$  а.е.м.,  $z_i = 1$ ), для которого характерен именно двухкомпонентный состав плазмы из электронов и однозарядных ионов углерода  $C^+$  [15]. Ранее, именно для этого вещества и этих же исходных данных, была решена плоская задача [13], и появляется возможность количественно сравнить влияние геометрии промежутка на параметры процесса расширения плазмы. Моделирование проводилось для конечной, но достаточно высокой эмиссионной способности катодной плазмы. В приведенном ниже расчете при плотности катодной плазмы  $n_0 = 10^{22} \text{ м}^{-3}$  тепловой ток электронной эмиссии  $j_{em}$  на два порядка превышает ток Чайлда–Ленгмюра для вакуумного сферического диода  $j_{CL}$ :

$$j_{em} = \frac{1}{4} e n_0 \sqrt{\frac{8eW_e}{\pi m_e}} \approx 5.9 \times 10^7 \frac{\text{МА}}{\text{см}^2}, \quad j_{CL} = \frac{4\epsilon_0}{9} \sqrt{\frac{2e}{m_e}} \frac{U_0^{3/2}}{r_c^2 \cdot a^2 (r_a/r_c)} \approx 5.7 \times 10^5 \frac{\text{МА}}{\text{см}^2}. \quad (3.1)$$



**Рис. 1.** Пространственно–временная динамика ФРЭ (первый столбец), ФРИ (второй столбец) и радиальное распределение электростатического потенциала и средней энергии ионов (третий столбец) в разные моменты времени (вертикальная штриховая линия указывает положение виртуального катода и его потенциал).

Отметим, что при сравнимых величинах токов  $j_{em} \approx j_{CL}$  (например, при  $n_0 = 10^{20} \text{ м}^{-3}$ ) наблюдается ярко выраженная неустойчивость протекания электронного тока. При движении фронта плазменного сгустка по направлению к аноду наблюдаются периодические пространственные колебания границы квазинейтральной плазмы обратно к катоду. Это приводит к быстрым всплескам электронного тока с плотностью большей, чем в случае устойчивого режима при  $j_{em} \gg j_{CL}$ . Такой неустойчивый режим токопротекания в вакуумном разряде также отмечался в работе [20].

На рис. 1 показана пространственно–временная динамика функции распределения электронов (ФРЭ) и ионов (ФРИ) по кинетическим энергиям, а также приведены радиальные распределения электрического потенциала и локальных средних кинетических энергий ионов (в эВ) в промежутке, вычисленных по формуле

$$\langle \epsilon_i \rangle(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m_i v_r^2}{2e} f_i(r, v_r, t) dv_r \left/ \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(r, v_r, t) dv_r \right. \quad (3.2)$$

Аналогично случаю планарного диода, описанного в [10–13], за первые наносекунды в вакуумном промежутке устанавливается квазистационарный режим протекания электронного тока (см. фазо-

вый портрет ФРЭ на рис. 1). В этом режиме влияние ионного заряда мало, а электроны в промежутке ускоряются до энергий, равных анодному напряжению  $eU_0$ . После затухания релаксационных колебаний объемного заряда электронный ток ведет себя в соответствии с теорией Чайлда–Ленгмюра для сферически-симметричного диода [21].

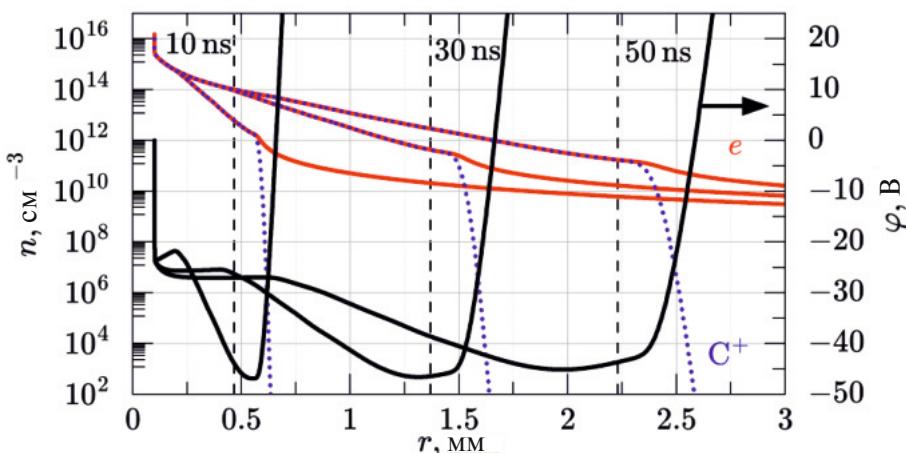
Непрерывная эмиссия квазинейтральной плазмы приводит к существенным особенностям дальнейшего расширения плазмы в вакуумном промежутке. На фоне установившегося распределения электронов в промежутке начинается движение ионов к аноду. Оно обеспечивается специфическим распределением потенциала в прикатодной области – наличием резкого ступенчатого спада потенциала от нуля у катода до значения порядка  $-25$  В на расстоянии, сравнимом с длиной Дебая. Спад определяется избыточным отрицательным зарядом электронов вследствие их высокой подвижности относительно тяжелых ионов. Величина отрицательного падения не зависит от приложенного напряжения  $U_0$  и определяется только плотностью избыточного отрицательного заряда у катода, то есть  $n_0$ .

Наличие отрицательного спада потенциала у катода обеспечивает начальное движение ионов к аноду. Последующее ускорение ионов происходит в согласованном электрическом поле, которое формирует избыточный электронный заряд на периферии катодного факела. При этом образуется виртуальный катод, который со временем продвигается к аноду и способствует дальнейшему ускорению ионов (см. фазовый портрет ФРИ и распределение потенциала на рис. 1).

Сравнение различных геометрий вакуумного промежутка (планарного диода, описанного в работе [12], коаксиального промежутка, описанного в [14], и сферического) показало следующие особенности расширения плазмы катодного факела. Во-первых, потенциал виртуального катода  $\Delta\varphi \approx -50$  В примерно одинаков для всех рассматриваемых геометрий промежутка. Во-вторых, в сферически-симметричном диоде наблюдаются минимальные средние кинетические энергии ионов в сечении виртуального катода ( $\approx 150$  эВ против  $\approx 250$  эВ в коаксиальном и  $\approx 350$  эВ в планарном промежутке).

В предыдущих работах авторов [13, 14] было показано, что ионы на фронте плазменного факела, двигающиеся синхронно с виртуальным катодом (потенциальной “я мой”), могут приобретать кинетическую энергию, много большую глубины потенциальной “ямы” (умноженной на элементарный электрический заряд). На рис. 2 отчетливо наблюдается ситуация, в которой сечение локализации виртуального катода не совпадает с локализацией плазменной границы (место, где нарушается квазинейтральность плазмы). Этот эффект ранее отмечался в работах [20] и [22], где рассогласованное движение этих сечений было связано с резким уменьшением скорости роста протекаемого тока в промежутке при непрекращающемся расширении плазменного факела. Несовпадение этих сечений приводит к тому, что эффекту постоянного ускорения в потенциальной яме подвергаются лишь часть ионов, находящиеся в виртуальном катоде, а на фронте плазменного факела ионы двигаются в тормозящем поле, что видно на фазовых портретах ФРИ на рис. 1.

Дальнейшее расширение плазменного факела может привести к тому, что ионы на фронте факела полностью остановятся и начнут обратное движение в сторону катода. Таким образом, в области меж-



**Рис. 2.** Пространственно-временная картина изменения концентрации электронов  $e$  и ионов  $C^+$  в логарифмическом масштабе и электростатического потенциала  $\varphi$  (вертикальная штриховая линия отмечает плазменную границу – сечения, в котором нарушаются квазинейтральность плазмы).

ду виртуальным катодом и плазменной границей образуется электростатическая ловушка, в которой положительные ионы оказываются заперты. При этом могут реализоваться две ситуации в зависимости от характеристик электрической цепи.

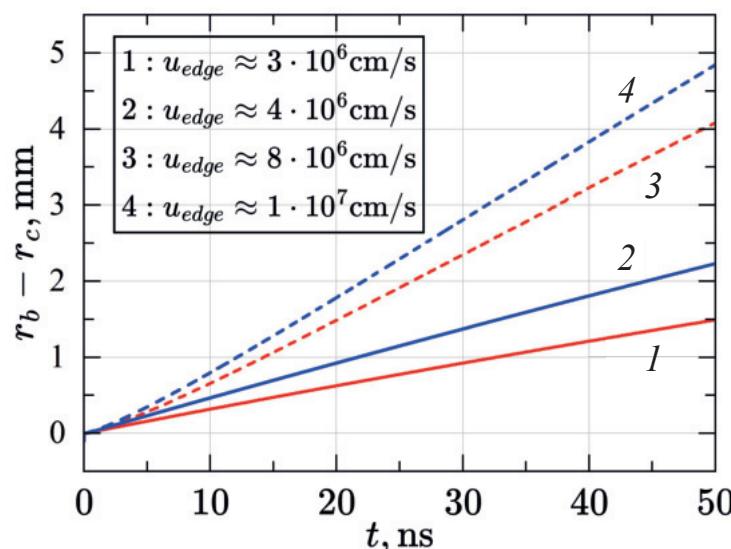
В первом случае (достаточно большого балластного сопротивления цепи), при достижении плазменным факелом анодной поверхности потенциал анода становится ниже средней кинетической энергии ионов (случай согласованного падения напряжения  $\Delta U \approx U_0$ ). Тогда ускоренные в промежутке ионы беспрепятственно достигнут анод, а в цепи будет протекать квазистационарный ионный ток.

Во втором случае, когда снижение напряжения на промежутке  $\Delta U$  мало ( $\Delta U \ll U_0$ ; например, из-за малого балластного сопротивления  $R_b$ ), реализуется ситуация, при которой ионы, дошедшие до анода, не могут преодолеть потенциальный барьер  $U_0 - \Delta U \gg \varepsilon_i$ . В этой ситуации ионы станут накапливаться в прианодной области, что приводит к локальному росту электрического потенциала внутри промежутка и формированию неустойчивости ионного токопереноса. При этом будут наблюдаться всплески ионного тока, амплитуда которых будет выше ионного тока, протекаемого в диоде при согласованном падении напряжения  $\Delta U$ . Количественные параметры этого режима в рамках нашей одномерной постановки задачи, по-видимому, не будут совпадать с результатами более детальной постановки и другими методами моделирования (PIC–МСС), представленными в работе [23].

Скорость расширения плазмы можно оценить по движению плазменной границы  $r_b$  (сечения, в котором выполняется условие  $|n_e - n_i|/n_e = 0.2$ ). На рис. 3 представлены графики перемещения плазменной границы  $r_b$  во времени при различных концентрациях эмиссионной плазмы  $n_0$ . В сферической геометрии вакуумного промежутка сохраняется наблюдаемая в планарном диоде тенденция увеличения скорости расширения плазмы при увеличении концентрации эмиссионной плазмы. Теоретическую оценку скорости расширения плазмы в плоском диоде, приведенную в работе [12], также удается распространить и для неоднородных вакуумных промежутков, если использовать выражение для плотности тока Чайлда–Ленгмюра для соответствующей геометрии диода:

$$u_{edge} \approx \sqrt{\frac{W_e + W_i}{m_i}} \ln \left( \frac{j_{em}}{j_{CL}} \right). \quad (3.3)$$

Это полуэмпирическое выражение неплохо (с точностью не хуже 30%) отражает влияние на среднюю скорость перемещения плазменной границы как концентрации катодной плазмы (входит в  $j_{em}$ ), так и приложенного к промежутку напряжения (входит в  $j_{CL}$ ) в начальной стадии разлета. Здесь же (на рис. 3 показаны аналогичные зависимости, полученные в [13] для тех же исходных данных в плоской задаче) видно, что сферическая геометрия приводит к существенно (примерно в 2 раза) меньшим



**Рис. 3.** Временная динамика положения виртуального катода  $r_b$  при различной концентрации эмиссионной плазмы  $n_0$ : кривые 1 и 3 –  $n_0 = 10^{21} \text{ м}^{-3}$ ; кривые 2 и 4 –  $n_0 = 10^{22} \text{ м}^{-3}$ . Штриховые кривые 3 и 4 соответствуют случаю планарного диода.

значениям скорости расширения плазмы, чем в плоском диоде. Но следует обязательно принять во внимание, что в плоской постановке отношение  $j_{em}/j_{CL} \sim 10^4$  было на два порядка выше, чем в сферической (см. уравнение (3.1)). Замечательно, что это отличие в скорости ( $\sim 2$  раза) верно отражается формулой (3.3).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе представлены результаты моделирования начальной стадии расширения плазменного факела в сферически-симметричном вакуумном промежутке при непрерывной эмиссии квазинейтральной плазмы с поверхности катода. Исследование является естественным развитием ранее предложенной плоской кинетической модели расширения плазмы, что позволяет более адекватно описать процессы, в вакуумном диоде с существенно неоднородной геометрической конфигурацией.

Расчеты показали, что физический механизм ускорения ионов во всех рассматриваемых геометриях вакуумного промежутка (планарный, коаксиальный и сферически-симметричный) одинаков. Расширению катодной плазмы способствует тот факт, что периферическая область катодного плазменного сгустка сразу после его инициирования (в результате, например, взрывного механизма) приобретает отрицательный объемный заряд. Это приводит к появлению подвижной области, характеризующейся спадающим профилем электрического потенциала и его локальным минимумом (виртуальный катод), что приводит к непрерывному ускорению ионной компоненты плазмы. Формирование виртуального катода обеспечивается согласованностью эмиссионного тока из плазмы и предельного электронного тока вакуумного диода. Расширение катодной плазмы происходит согласованно с пространственно-временным изменением электрического потенциала и соответствующими ему изменениями напряженности поля. Такая взаимно обусловленная эволюция электродинамических факторов на периферийной границе расширяющейся плазмы обеспечивает непрерывное воздействие ускоряющих сил на ионы.

В некотором смысле, механизм ускорения ионов в вакуумном промежутке схож с поляризационным механизмом формирования потоков убегающих электронов в газовом разряде [24], и представляет собой согласованное движение ионов в подвижной потенциальной “яме” виртуального катода. Независимо от геометрической конфигурации диода ионы могут приобретать “аномально” высокие кинетические энергии  $e_i > e|\Delta\varphi|$ , превосходящие как тепловые значения, так и нормированное значение анодного напряжения. Это происходит не по причине формирования квазистационарной глубокой потенциальной “ямы” вблизи катода, а из-за воздействия на ионы непрерывной ускоряющей электродинамической силы.

В работе показано, что в сферическом диоде формируются анодонаправленные потоки ионов со средними кинетическими энергиями, в 1.5–2 ниже случая планарного диода при номинально тех же концентрациях катодной плазмы. Но если принять во внимание иное соотношение эмиссионной способности такой плазмы и пропускной способности сферического вакуумного промежутка по сравнению с плоским промежутком, то наблюдаемые в экспериментах скорости разлета катодного факела хорошо согласуются с экспериментальными данными о концентрациях плазмы взрывоэмиссионного центра, вытекающими из представленных результатов теоретического моделирования.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23–29–00239).

## КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Месиц Г. А.* Взрывная электронная эмиссия. М.: Физматлит, 2011. 280 с.
2. *Месиц Г. А.* Импульсная энергетика и электроника. М.: Наука, 2004. 705 с.
3. *Herrmann A., Balden M., Laux M., Krieger K., Muller H. W., Pugno R., Rohde, V.* Arcing in ASDEX Upgrade with a tungsten first wall. // Journal of Nuclear Materials. 2009. 390–391. P. 747–750.

4. Rudakov D. L., Chrobak C. P., Doerner R. P., Krasheninnikov S. I., Moyer R. A., Umstadter K. R., Wampler W. R., Wong C. P. C. Arcing and its role in PFC erosion and dust production in DIII-D. // Journal of Nuclear Materials. 2013. V. 438. P. 805–808.
5. Pitts R. A., Bardin S., Bazylev B., van den Berg M. A., Bunting P., Carpentier-Chouchana S., Coenen J. W., Corre Y., Dejarnac R., Escourbiac F., Gaspar J., Gunn J. P., Hirai T., Hong S.-H., Horacek J., Iglesias D., Komm M., Krieger K., Lasnier C., ... Watkins J. G. Physics conclusions in support of ITER W divertor monoblock shaping. // Nuclear Materials and Energy. 2017. V. 12. P. 60–74.
6. Плютто А. А. Ускорение положительных ионов в расширяющейся плазме вакуумных искр. // ЖЭТФ. 1960. Т. 39. Вып. 6. С. 1589–1592.
7. Короп Е. Д., Плютто А. А. Ускорение ионов катодного материала при вакуумном пробое. // ЖТФ. 1970. Т. 40. Вып. 12. С. 2534–2537.
8. Короп Е. Д., Плютто А. А. Влияние плазмы на эмиссию острыйного катода. // ЖТФ. 1971. Т. 41. Вып. 5. С. 1055–1057.
9. Юшков Г. Ю., Бугаев А. С., Кринберг И. А., Окс Е. М. О механизме ускорения ионов в плазме вакуумного дугового разряда. // ДАН. 2001. Т. 46. № 5. С. 41–43.
10. Kozhevnikov V., Kozyrev A., Kokovin A., Semeniuk N. The Electrodynamical Mechanism of Collisionless Multicomponent Plasma Expansion in Vacuum Discharges: From Estimates to Kinetic Theory // Energies. 2021. V. 14. № 22. P. 7608.
11. Кожевников В. Ю., Козырев А. В., Семенюк Н. С., Коковин А. О. Электродинамический механизм ускорения ионов в начальной стадии вакуумного пробоя // Изв. вузов. Физика. 2023. Т. 66. № 6. С. 83–91.
12. Kozyrev A., Kozhevnikov V. Y., Semeniuk N. S., Kokovin A. O. Initial kinetics of electrons, ions and electric field in planar vacuum diode with plasma cathode. // Plasma Sci. Sources Technol. 2023. V. 32. № 10. P. 105010.
13. Кожевников В. Ю., Козырев А. В., Игумнов В. С., Семенюк Н. С., Коковин А. О. Кинетическая теория расширения двухкомпонентной плазмы в плоском вакуумном диоде // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2023. № 6. С. 183–191.
14. Козырев А. В., Кожевников В. Ю., Коковин А. О. Кинетическая теория расширения катодной плазмы в неоднородной геометрической конфигурации вакуумного диода // Изв. вузов. Физика. 2024. Т. 67. № 5. С. 35–45.
15. Anders A. Ion charge state distributions of vacuum arc plasmas: The origin of species // Physical Review E. 1997. V. 55. P. 969.
16. Besse N., Sonnendrucker E. Semi-Lagrangian schemes for the Vlasov equation on an unstructured mesh of phase space // Journal of Computational Physics. 2003. V. 191. P. 341–376.
17. Strang G. On the Construction and Comparison of Difference Schemes // SIAM J. Numer. Anal. 1968. V. 5. № 3. P. 506–517.
18. Kozhevnikov V. Yu., Kozyrev A. V., Semeniuk N. S. Modeling of Space Charge Effects in Intense Electron Beams: Kinetic Equation Method vs PIC-method // IEEE Trans. Plasma Sci. 2017. V. 45. № 10. P. 2762–2766.
19. Калиткин Н. Н., Альшин А. Б., Альшина Е. А., Рогов Б. В. Вычисления на квазиравномерных сетках. М.: Физматлит, 2005. 224 с.
20. Баренгольц С. А., Месяц Г. А., Перельштейн Э. А. Феноменологическая модель неустойчивой стадии вакуумного искрового разряда // Журнал технической физики. 2009. Т. 79. № 10. С. 45–52.
21. Torres-Cordoba R., Martinez-Garcia E. Analytical and exact solutions of the spherical and cylindrical diodes of Langmuir–Blodgett law // Phys. Plasmas. 2017. V. 24. P. 103113.
22. Баженов Г. П., Месяц Г. А., Чесноков С. М. О замедлении скорости движения эмиссионной границы катодного факела в диоде, работающем в режиме взрывной эмиссии // Радиотехника и электроника. 1975. Т. 20. С. 2413.
23. Шмелев Д. Л., Баренгольц С. А., Цвентух М. Численное моделирование разлета плазменного факела в искровой стадии вакуумной дуги // Изв. вузов. Физика. 2016. Т. 59. № 9/3. С. 164–167.
24. Аскарян Г. А. Самоускорение ионизирующих частиц в электрическом поле поляризующей ионизационной петли // Письма в ЖЭТФ. 1965. Т. 2. № 4. С. 179.

# ELECTRODYNAMIC MECHANISM OF EXPANSION OF TWO-COMPONENT PLASMA IN A SPHERICALLY SYMMETRIC VACUUM GAP

A.O. Kokovin<sup>a</sup>, V.Yu. Kozhevnikov<sup>a,\*</sup>, A.V. Kozyrev<sup>a</sup> and N.S. Semenyuk<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Institute of High-Current Electronics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk,  
Russia*

\*e-mail: Vasily.Y.Kozhevnikov@ieee.org

**Abstract**— The results of theoretical modeling of spherically symmetric expansion of collisionless carbon plasma from a compact explosive emission center of a vacuum discharge are presented. The modeling is based on the joint solution of the Vlasov kinetic equations for electrons and ions and the Poisson equation for the electric field, written in the spherical coordinate system and averaged over angular variables. It is shown that the calculated cathode plasma expansion velocities are significantly lower in the spherically symmetric geometry than the expansion velocities of plasma with the same parameters obtained by solving the plane problem. The observed expansion velocities of the cathode plume plasma at the level of  $3.5 \cdot 10^6$  cm/s can be explained within the framework of the collisionless mechanism when the criterion imposed on the ratio of the electric emission current to the limiting electric current in the vacuum gap is fulfilled.

**Keywords:** vacuum discharge, collisionless plasma, Vlasov kinetic equation, virtual cathode

## ЭВОЛЮЦИЯ ВОЛН ДАВЛЕНИЯ В ЖИДКОСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПОРИСТУЮ ПЕРЕГОРОДКУ, НАСЫЩЕННУЮ ПУЗЫРЬКОВОЙ ЖИДКОСТЬЮ

© 2024 г. И. К. Гималтдинов<sup>a,\*</sup>, А. С. Родионов<sup>a,\*\*</sup>, О. Ю. Валиахметова<sup>a,\*\*\*</sup>

<sup>a</sup>Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия

\*e-mail: iljas\_g@mail.ru

\*\*e-mail: artrodionov@mail.ru

\*\*\*e-mail: v9174121007@gmail.com

Поступила в редакцию 17.07.2024 г.

После доработки 08.10.2024 г.

Принята к публикации 08.10.2024 г.

Рассмотрены особенности динамики волн давления при наличии пористой перегородки (слоя), насыщенной пузырьковой жидкостью. Показано, что отражение волнового импульса от пористой перегородки, насыщенной пузырьковой смесью, в зависимости от параметров газированной смеси и пористой среды (объемного содержания газа, дисперсности пузырьков, пористости,) аналогично отражению от свободной границы или от жесткой стенки.

*Ключевые слова:* пористая среда, пузырьковая жидкость, волны, свободная граница

DOI: 10.31857/S1024708424060148, EDN: FDGWVM

Защита сооружений или подводной фауны от воздействия волновых импульсов, распространяющихся в воде с помощью различного рода преград (например, пузырьковые завесы, пористые среды) является актуальной проблемой [1–5]. Надежное функционирование систем защиты от воздействия волн давления требует углубленного изучения закономерностей распространения возмущений в экранирующих слоях среды. Проблеме экранирования волн, распространяющихся в жидкостях, посвящено множество исследований, обзор по которым приведен в [6–8]. Исследования по этим вопросам продолжаются до сих пор [9–11].

В данной работе численно исследуется эволюция импульса конечной длительности в жидкости при прохождении его через пористый слой, насыщенный жидкостью с пузырьками газа или “чистой” (без пузырьков) жидкостью.

### 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим задачу об эволюции плоско-одномерных волн в жидкости при прохождении через пористый слой, заполненный газированной жидкостью. Будем полагать, что пористая среда, скелет которой считается вязкоупругим, насыщена однородной газожидкостной смесью. Для описания движения насыщенной пористой среды принимаются следующие допущения: размеры частиц скелета пористой среды и пузырьков значительно больше молекулярно-кинетических масштабов и много меньше расстояний, на которых макроскопические параметры фаз меняются заметно; эффекты вязкости и теплопроводности существенны лишь в процессах межфазного взаимодействия; отсутствуют процессы межфазного массообмена и дробления пузырьков; деформации скелета малы; жидкость – акустически сжимаема; газ – калорически совершенный; внешние массовые силы отсутствуют; движение полагается одномерным, плоским и нестационарным. При сделанных предположениях запишем основные уравнения для пористой среды, поровое пространство которой занято газожидкостной

смесью. Уравнения баланса масс, числа пузырьков и импульсов имеют вид [12]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{l+g}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{l+g} v_l}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \frac{\partial \rho_s v_s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial n_b}{\partial t} + \frac{\partial n_b v_l}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \rho_{l+g} v_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{l+g} v_l^2}{\partial x} + \alpha_g \frac{\partial p_l}{\partial x} &= -F_\mu - F_m, \\ \frac{\partial \rho_s v_s}{\partial t} + \frac{\partial \rho_s v_s^2}{\partial x} + \alpha_s \frac{\partial p_l}{\partial x} &= \frac{\partial \sigma_{s^*}}{\partial x} + F_\mu + F_m, \\ \rho_i = \alpha_i \rho_i^0, \quad \rho_{l+g} &= \rho_l + \rho_g, \quad i = (s, l, g), \quad \alpha_s + \alpha_l + \alpha_g = 1, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\rho_j$ ,  $\rho_j^0 v_j$ ,  $\alpha_j$  — приведенная и истинная плотность, скорость, объемное содержание  $j$ -й фазы соответственно, нижние индексы  $s$ ,  $l$ ,  $l + g$  относятся к скелету пористой среды, к жидкости и к смеси жидкости и пузырьков соответственно;  $\sigma_{s^*}$ ,  $p_l$  — приведенное напряжение в скелете и давление в жидкости соответственно,  $n_b$  — число пузырьков в единице объема,  $F_\mu$  и  $F_m$  — силы вязкого трения и присоединенной массы. Скелет пористой среды предполагается вязкоупругим [13]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{s^*}}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{s^*} v_s}{\partial x} &= \sigma_{s^*} e_{s^*} + E_{f^*} e_{s^*} - \frac{\sigma_{s^*} - E_{e^*} \xi_{s^*}}{t_{s0}}, \\ e_{s^*} = \frac{d_s \xi_{s^*}}{dt} &= \frac{\partial v_s}{\partial x} \quad \left( \frac{d_s}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_s \frac{\partial}{\partial x} \right), \\ E_{f^*} &= \rho_{s0} D_{f^*}^2, \quad E_{e^*} = \rho_{s0} D_{e^*}^2, \end{aligned} \quad (1.2)$$

здесь  $\xi_{s^*}$ ,  $e_{s^*}$  — деформация твердой фазы и ее приведенная скорость,  $E_{f^*}$ ,  $E_{e^*}$  — динамический и статический модули упругости;  $D_{f^*}$ ,  $D_{e^*}$  — продольные динамическая и статическая скорости звука в скелете пористой среды,  $t_{s0}$  — время релаксации в скелете при его вязкоупругом деформировании.

Межфазное взаимодействие включает силы вязкого трения  $F_\mu$  и присоединенной массы  $F_m$  [12]

$$F_\mu = \eta_\mu \alpha_s \alpha_{l+g} \mu_l a_{s^*}^{-2} (v_l - v_s), \quad F_m = \frac{1}{2} \eta_m \alpha_s \rho_{l+g} \left( \frac{d_l v_l}{dt} - \frac{d_s v_s}{dt} \right), \quad (1.3)$$

где  $a_{s^*}$  — характерный размер зерен скелета,  $\mu_l$  — динамическая вязкость жидкости,  $\eta_\mu$ ,  $\eta_m$  — безразмерные коэффициенты взаимодействия фаз, зависящие от структуры среды. При описании радиального движения будем полагать, что скорость радиального движения  $w$  складывается из двух составляющих:  $w = w_A + w_R$ , где  $w_R$  определяется из уравнения Релея—Ламба для пористой среды,  $w_A$  — слагаемое, учитывающее сжимаемость жидкости [14]

$$\begin{aligned} \rho_{l0}^0 \left( a \dot{w}_R + \frac{3}{2} w_R^2 \right) &= p_g - p_l - \frac{2\Sigma}{a} - 4\mu_l \frac{w_R}{a} \left( 1 + \frac{1}{4} \alpha_s \eta_\mu \left( \frac{a}{a_{s^*}} \right)^2 \right), \\ w_A &= \frac{p_g - p_l}{\rho_{l0}^0 C_l x_{g0}^{1/3}}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $v_l$  — кинематическая вязкость жидкости,  $x_{g0}$  — объемная доля газа в пузырьковой жидкости,  $C_l$  — скорость звука в “чистой” жидкости.

Для давления в газовой фазе запишем уравнение в виде [6]

$$\frac{dp_g}{dt} = -\frac{3\gamma p_g}{a} w - \frac{3(\gamma - 1)}{a} q. \quad (1.5)$$

Здесь  $\gamma$  — коэффициент Пуассона для газа;  $q$  — межфазный тепловой поток (от газа к жидкости) через единицу площади контактной поверхности.

Будем полагать, что жидкость является акустически сжимаемой, газ — калорически совершенным, а скелет пористой среды — несжимаемым

$$p_l = p_0 + C_l^2 (\rho_l^0 - \rho_{l0}^0), \quad p_g = \rho_g^0 B T_g, \quad \rho_s^0 = \text{const}, \quad (1.6)$$

где  $B$  — газовая постоянная.

Интенсивность межфазного теплообмена между жидкостью и газом зададим в виде

$$q = \frac{\lambda_g \text{Nu} (T_g - T_0)}{2a}, \quad (1.7)$$

где температура жидкости  $T_0 = \text{const}$ .

Числа Нуссельта и Пекле имеют вид

$$\text{Nu} = \begin{cases} \sqrt{\text{Pe}}, \text{Pe} \geq 100 \\ 10, \text{Pe} < 100 \end{cases}, \quad \text{Pe} = 12(\gamma - 1) \frac{T_0}{|T_g - T_0|} \frac{a|w|}{\kappa_g}, \quad (1.8)$$

где коэффициент температуропроводности  $\kappa_g = \lambda_g / c_g \rho_g^0$ . Для замыкания системы используем следующие соотношения

$$\alpha_{g0} = \frac{4}{3} \pi a^3 n_b, \quad \rho_j = \rho_j^0 \alpha_j, \quad \rho_{l+g} = \rho_l + \rho_g. \quad (1.9)$$

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для численного решения системы уравнений (1.1)–(1.5) с определяющими соотношениями (1.6)–(1.9) введем в рассмотрение равномерную пространственную сетку размерности  $N$  с границами в точках  $x_i, i = \overline{0, N}$ . Будем считать, что скорости жидкости и скелета заданы на границах ячеек в точках  $x_i$ , а все остальные параметры — в центре ячеек в точках  $x_i = x_i - \Delta x/2$ , где  $\Delta x$  — шаг по пространству. Далее используется неявная схема, основанная на методе контрольного объема [15].

## 3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Рассматривается следующая задача: внутри области ( $0 \leq x \leq L$ ), заполненной водой, есть пористая перегородка ( $x^* \leq x \leq x^{**}$ ), насыщенная газированной водой или “чистой” (без пузырьков) водой. В начальный момент  $t = 0$  на границе  $x = 0$  задается импульсное давление. Требуется изучить эволюцию волнового импульса при прохождении пористой перегородки в зависимости от определяющих параметров пористой среды и газожидкостной смеси. Начальные условия для сформулированной задачи, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} p_l &= p_0, \quad \rho_l^0 = \rho_l^0, \quad v_l = 0, \quad \alpha_l = 1, \quad \alpha_g = 0, \quad \alpha_s = 0, \\ &(0 < x < x^*, \quad x^{**} < x \leq L); \\ p_g &= p_0, \quad \rho_g^0 = \rho_{go}^0, \quad T_g = T_0, \quad \alpha_g = \alpha_{g0}, \\ p_l &= p_0, \quad \rho_l^0 = \rho_{lo}^0, \quad v_l = 0, \quad w_R = 0, \quad w_A = 0, \quad \alpha_l = \alpha_{l0}, \\ v_s &= 0, \quad \sigma_{s^*} = 0, \quad \xi_{s^*} = 0, \quad e_{s^*} = 0, \quad \alpha_s = \alpha_{s0} = 1 - \alpha_{g0} - \alpha_{l0}, \\ &(x^* \leq x \leq x^{**}). \end{aligned}$$

Нижними индексами 0 отмечены невозмущенные параметры системы.

На границе  $x = 0$  давление задается следующим выражением:

$$p_l = \begin{cases} p_0 + \Delta p_{l0} \cdot e^{\left(-\left(\frac{t-t^*/2}{t^{**}}\right)^2\right)}, & t \leq t^* \\ p_0, & t > t^*, \end{cases}$$

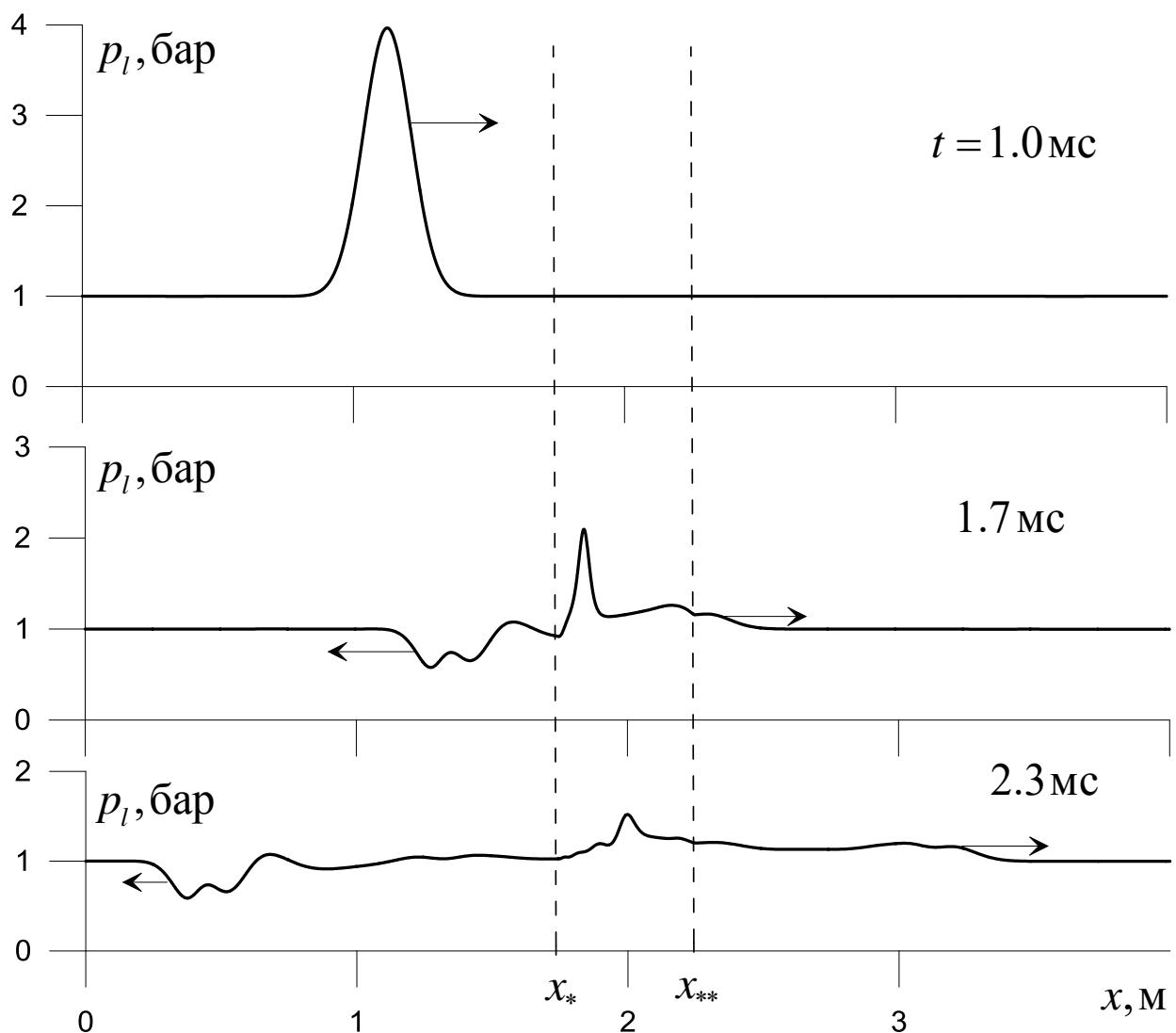
где  $\Delta p_{l0}$  — амплитуда начального возмущения,  $t^*$  — протяженность импульса,  $t^{**}$  — характерный параметр импульса.

На правой границе задаются условия, как на жесткой стенке

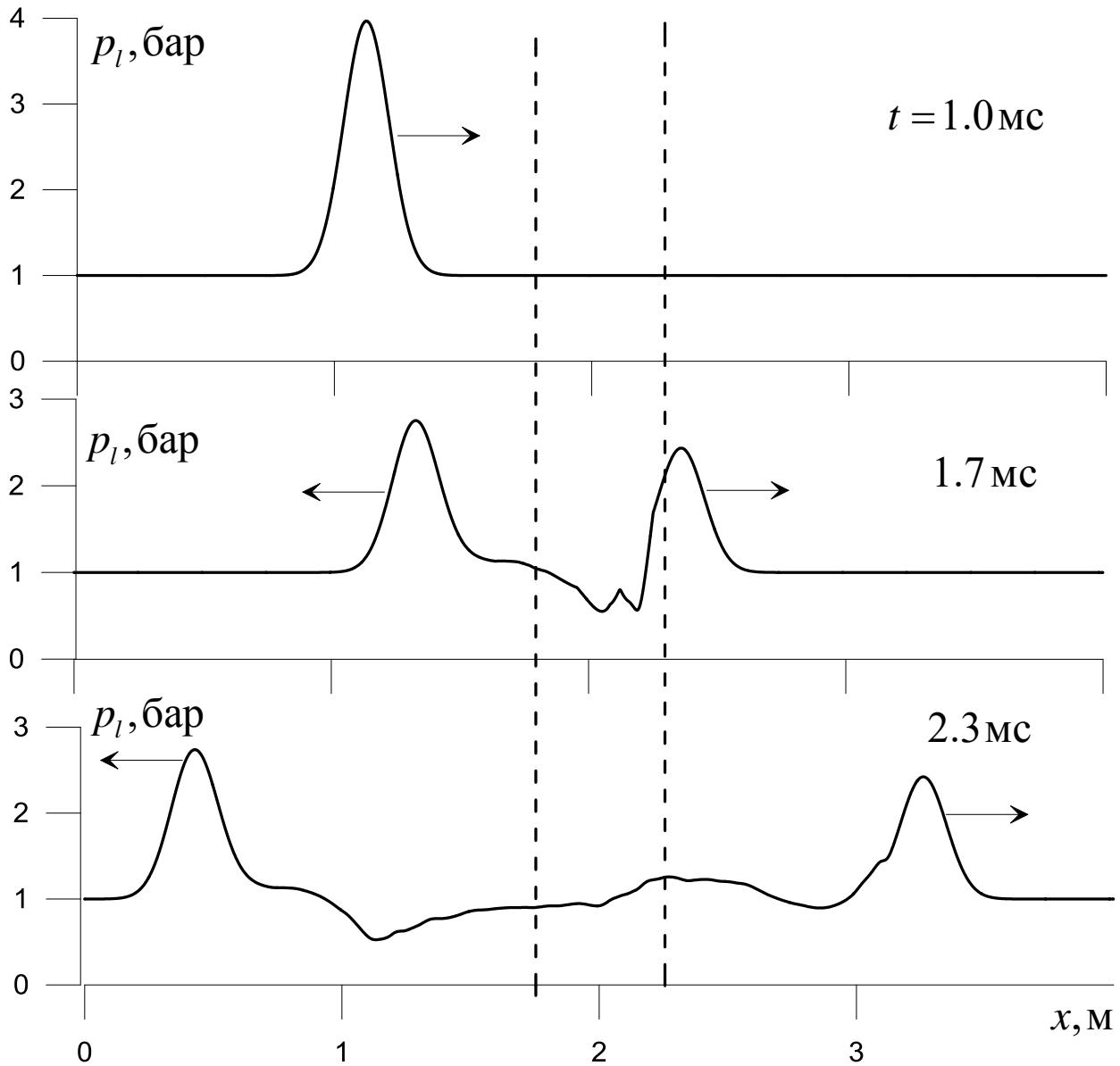
$$v_l = 0, \quad v_s = 0 (x = L).$$

Расчеты выполнялись на разных расчетных сетках до получения результатов, не зависящих от сетки: дальнейшее измельчение сетки и уменьшение шага интегрирования по времени никак не влияло на результаты расчетов. Расчеты проводились для песчаника, воды и воздуха. При этом использовались следующие значения термодинамических параметров фаз:  $p_0 = 1.01325$  бар,  $T_0 = 290$  К,  $\rho_{s0}^0 = 2650$  кг/м<sup>3</sup>,  $D_{f*} = 1750$  м/с,  $D_{e*} = 900$  м/с,  $a_{s*} = 0.5$  мм,  $\eta_\mu = 1400.0$ ,  $\eta_m = 0.15$ ,  $t_{s0} = 0.5$  мс,  $\rho_{l0}^0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $C_l = 1500$  м/с,  $\mu_l = 0.001$  Па · с,  $\Sigma = 73$  мН/м,  $\rho_{g0}^0 = 1.29$  кг/м<sup>3</sup>,  $B = 287$  Дж/(кг·град),  $\lambda_g = 0.0259$  Вт/(м·град),  $c_g = 1.005$  кДж/(кг · °C),  $a_0 = 1.0$  мм. Параметры импульса полагались равными  $\Delta p_{l0} = 3$  бар,  $t^* = 0.5$  мс; протяженность пористой среды составляла 0.5 м ( $x^* = 1.75$ ,  $x^{**} = 2.25$  м).

Под действием граничного давления в области жидкости формируется колоколообразный импульс амплитудой 3.0 бар и протяженностью 0.75 м, (см. рис. 1, эпюра для момента  $t = 1.0$  мс). Объемное содержание газированной жидкости в пористой среде составляет  $\alpha_{l0+g0} = 0.351$ , а объемное содержание газа  $\alpha_{g0} = 0.001$ . Несмотря на такое маленькое значение содержания газа, импульс от слоя пористой среды, насыщенной газированной жидкостью, отражается как от свободной границы [16], т.е. падающий импульс сжатия отражается как импульс разрежения (при  $t = 1.7$  мс). Форма отраженного и прошедшего сигналов является неоднородной. Амплитуды отраженного и прошедшего сигналов приблизительно равны 0.5 и 0.25 бар соответственно, т.е. амплитуда прошедшего сигнала через пористую перегородку, насыщенную газированной жидкостью, уменьшается в 12 раз. Пик давления



**Рис. 1.** Эпюры давления при прохождении слоя пористой среды, насыщенной газированной жидкостью. Параметры расчета:  $\alpha_{g0} = 0.001$ ,  $\alpha_{l0} = 0.35$ ,  $a_0 = 1$  мм.



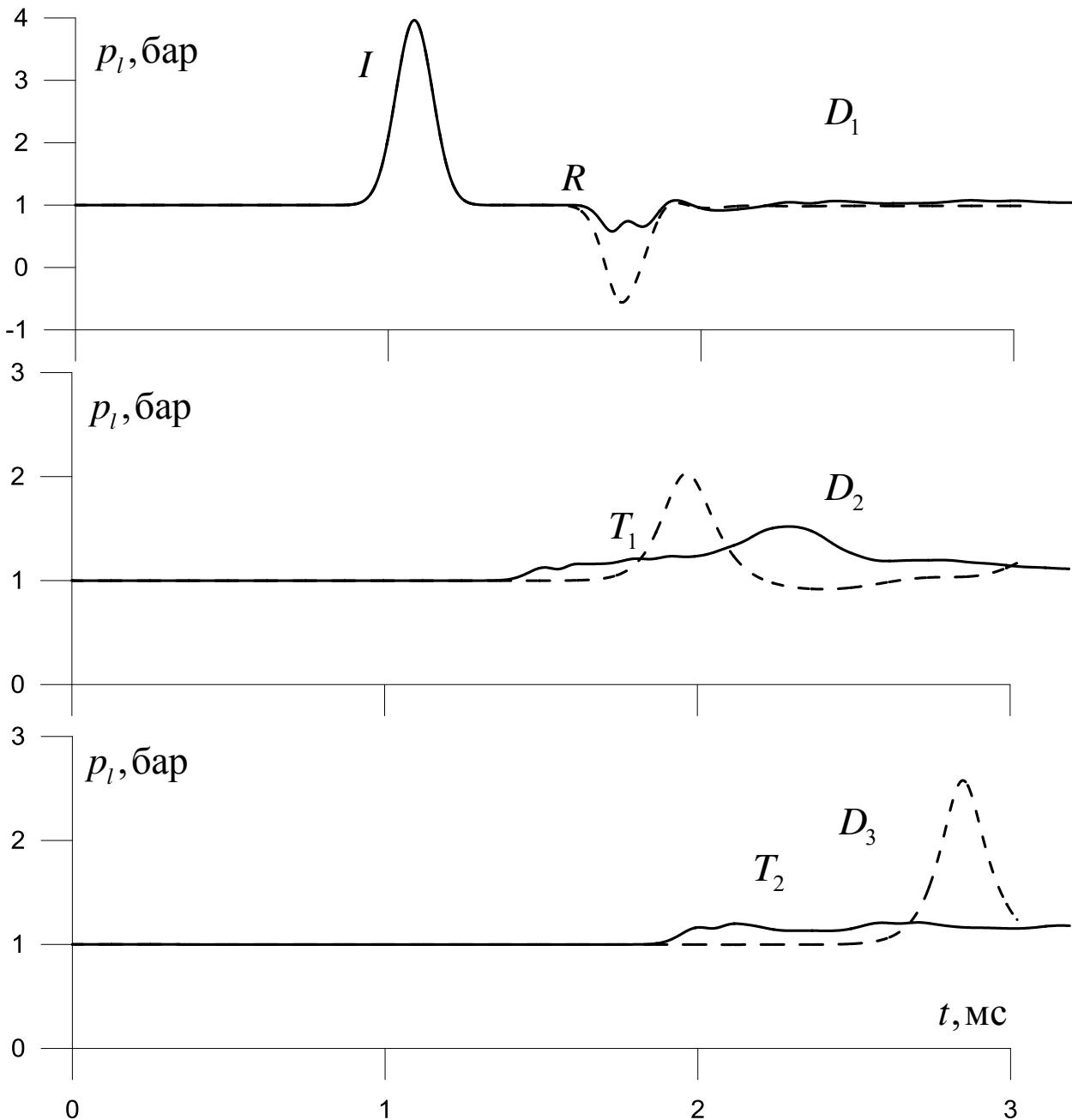
**Рис. 2.** То же, что и на рис. 1, но пористая среда насыщена водой без пузырьков.

внутри пористого слоя, на эпюре, соответствующем моменту 1.7 мс связан с переотражением “быстрой” (деформационной) волны сжатия в скелете пористой среды [13]. В дальнейшем амплитуда этого пика уменьшается ( $t = 2.3$  мс).

Динамика импульсного сигнала при прохождении через пористую перегородку, насыщенной водой без пузырьков, представлена на рис. 2. Параметры первоначального импульса такие же, как для рис. 1. Под действием граничного давления формируется импульсный сигнал колоколообразной формы, рис. 2. ( $t = 1.0$  мс). Акустический импеданс [16] пористой перегородки, насыщенной водой, больше аналогичного параметра для воды, поэтому падающий импульс давления отражается как импульс сжатия, не изменяя своей фазы ( $t = 1.7$  мс). Амплитуда импульса, отраженного от перегородки, равна 1.7 бар, а прошедшего — 1.5 бар, т.е. амплитуда импульса, прошедшего слой пористой среды, насыщенный жидкостью, уменьшается в 2 раза. Отражение волны давления на границе “пористая среда — жидкость” из-за того, что акустическая жесткость пористой среды насыщенной водой меньше, чем аналогичный параметр для воды, происходит аналогично отражению от свободной границы, т.е. им-

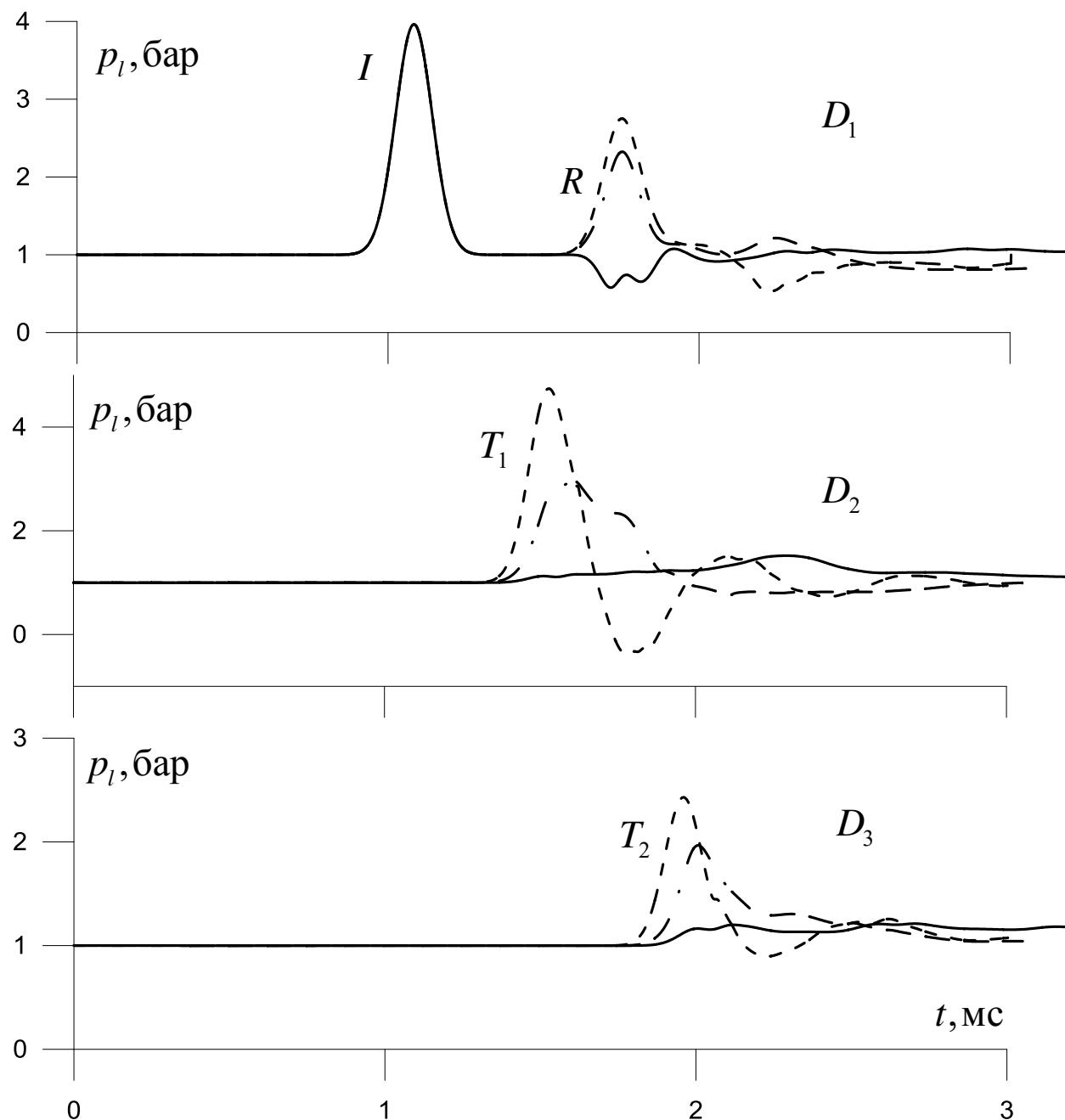
пульс изменяет свою фазу, поэтому в эпюрах давления, соответствующих моменту  $t = 2.3$  мс, за импульсами сжатия следуют импульсы разрежения.

Сравнение “осциллографм” давления, показывающих динамику прохождения импульсного давления пористой перегородки, насыщенной газированной водой, или пузырьковой завесы с такой же толщиной и с таким же объемным содержанием газа, как в области пористого слоя, представлено на рис. 3.



**Рис. 3.** Расчетные “осциллографмы” давления в жидкости. Датчики  $D_1, D_2, D_3$  расположены соответственно перед пористой перегородкой на расстоянии  $0.5$  м от границы  $x^*$ , в середине перегородки, и за перегородкой на расстоянии  $0.5$  м от границы  $x^{**}$ . Сплошная и штриховая линии соответствуют случаям взаимодействия волнового импульса с пористой перегородкой, насыщенной газированной жидкостью ( $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ ,  $\alpha_{l0} = 0.35$ ), и с пузырьковой завесой ( $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ ), все остальные исходные параметры такие же, как на рис. 1.

Первый всплеск  $I$  на осциллограмме для датчика  $D_1$  соответствует падающему импульсу на границу “вода — пористая среда, насыщенная газированной водой” или “вода — газированная вода (пузырьковая завеса)”, символом  $R$  (reflection) обозначены отраженные сигналы от перегородки или завесы. Следует отметить, что отраженные сигналы от пористой перегородки или пузырьковой завесы являются импульсами разрежения (см. рис. 3, датчик  $D_1$ ). Амплитуда отраженного сигнала от пузырьковой завесы более четырех раз превышает амплитуду отраженного сигнала от пористой перегородки, насыщенной газированной водой.



**Рис. 4.** Динамика импульсного сигнала при прохождении через пористую прегородку. Сплошная, штриховая и штрихпунктирная линии соответствуют объемному содержанию газа  $\alpha_{g0} = 0, 10^{-3}, 10^{-4}$  соответственно; все исходные параметры такие же, как на рис. 1. Расположение датчиков и обозначения начального, отраженного и прошедших сигналов такое же, как на рис. 3.

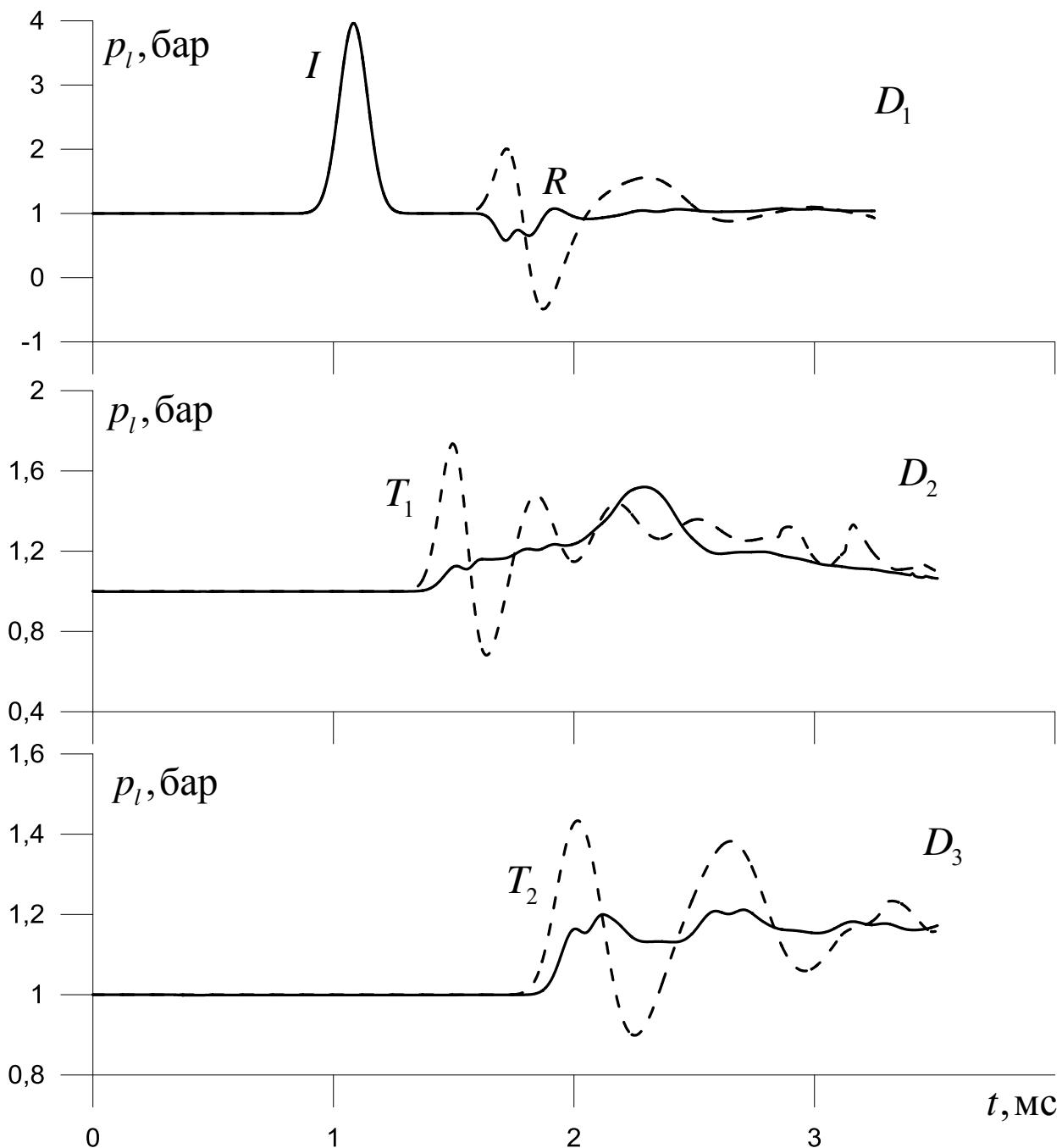
Волновой импульс, прошедший в пузырьковую завесу  $T_1$  (transit), сохраняет форму уединенного сигнала и в середине завесы имеет амплитуду, приблизительно, 2.0 бар, а в пористой перегородке волновой импульс растягивается, максимальное значение амплитуды внутри перегородки около 0.5 бар, рис. 3, датчик  $D_2$ . Амплитуда импульса, прошедшего через пузырьковую завесу ( $T_2$ ), уменьшается почти в два раза по сравнению с амплитудой начального импульса и составляет 1.7 бар; сигнал, прошедший через пористую перегородку, растягивается и имеет амплитуду около 0.25 бар, рис. 3, датчик  $D_2$ . Отметим, что для расчетов, приведенных на рис. 3, протяженность импульса превышает период собственных колебаний пузырьков ( $t^* > t_M$ ,  $t_M = 2\pi/\omega_M$ ,  $\omega_M = a^{-1}\sqrt{3\gamma p_0/\rho_{l0}^0}$ ), если протяженность импульса близка к периоду собственных колебаний пузырьков ( $t^* = t_M$ ), то происходит большее отражение сигнала на границе с пористой перегородкой или завесой и более интенсивное затухание внутри перегородки или завесы, и, как следствие, амплитуда прошедшего импульса является ничтожно малой величиной, чем амплитуда падающего сигнала.

Расчетные осциллограммы для датчиков  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$ , показывающих влияние объемного содержания газа в пористой перегородке на динамику прохождения импульсного сигнала, представлены на рис. 3. Следует отметить, что когда объемное содержание газа  $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ , отражение импульса от пористой среды, насыщенной газированной жидкостью, происходит как от акустически мягкой системы, а при  $\alpha_{g0} = 10^{-4}$ , при прочих одинаковых параметрах, отражение от пористой среды аналогично отражению импульса от жесткой стенки. Амплитуда волнового сигнала, прошедшего через первую границу (“вода – насыщенная пористая среда”) и распространяющегося в пористом слое  $T_1$ , существенно зависит от объемного содержания газа в пористом слое (см. датчик  $D_2$ ). Когда пористая среда насыщена “чистой” жидкостью, амплитуда сигнала  $T_1$  равна 4.0 бар, т.е. превышает первоначальную амплитуду падающего сигнала на 1.0 бар, при  $\alpha_{g0} = 10^{-4}$  и  $10^{-3}$  эта же величина равна 2.0 бар и 0.25 бар соответственно.

Амплитуда сигнала, прошедшего через пористой слой  $T_2$ , насыщенный “чистой” жидкостью, равна 1.5 бар, это значение в два раза меньше амплитуды падающего импульса  $I$  (датчик  $D_1$ ). Прохождение импульсного сигнала с амплитудой 3.0 бар слоя пористой среды, насыщенной газированной жидкостью с объемным содержанием газа  $\alpha_{g0} = 10^{-4}$  и  $10^{-3}$ , приводит к уменьшению амплитуды до 1.0 и 0.1 бар соответственно. Таким образом, можно утверждать, что существует критическое значение объемного содержания газа в пористой среде, насыщенной газированной жидкостью, меньше которого импульсное давление отражается от границы “жидкость – пористая среда, насыщенная газированной жидкостью” как от жесткой стенки (без изменения фазы), а когда объемное содержание газа выше этого значения – отражение происходит, как от свободной границы (с изменением фазы).

Влияние объемного содержания жидкости в пористой перегородке, при одинаковом значении объемного содержания газа на динамику прохождения импульсного сигнала, представлено на рис. 5. С уменьшением объемного содержания жидкости, соответственно с увеличением объемного содержания скелета, акустическая жесткость пористой перегородки увеличивается, и волновой импульс отражается как от жесткой стенки, за ним следует волна разрежения, связанная с отражением волны давления от границы “пористая среда – вода”. Уменьшение доли воды в скелете приводит к более интенсивным осцилляциям давления в середине (датчик  $D_2$ ) и за пористой перегородкой (датчик  $D_3$ ), что связано с циркуляцией “быстрой” деформационной волны в скелете.

Расчетные “осциллограммы” полного напряжения и давления в жидкости, “регистрируемые” в середине пористой перегородки датчиком  $D_2$ , представлены на рис. 6. В случае насыщения пористого слоя газожидкостной средой влияние давления в воде на полное напряжение несущественно, рис. 6а. Пульсации в профиле полного напряжения связаны с циркуляцией деформационной волны сжатия в скелете вязкоупругой пористой среды. Период этих пульсаций равен 0.3 мс, что соответствует времени распространения волн в скелете со скоростью, близкой к продольной динамической скорости звука в вязкоупругой пористой среде ( $D_f = 1750$  м/с). Протяженность сигнала, который характеризует полное напряжение, составляет приблизительно 2.15 мс, амплитуда – 8.0 бар. В случае насыщения пористой среды “чистой” жидкостью (см. рис. 6б), в отличие от случая насыщения пористой среды газированной жидкостью, в значение полного напряжения существенный вклад вносит давление в жидкости. Для случая, представленного на рис. 6б, максимальное значение амплитуды полного напряжения на 2.2 бар превышает амплитуду давления в жидкости и составляет приблизительно 6.5 бар. Профиль полного напряжения и давления в жидкости имеет пульсационный характер, что также связано с переотражением деформационной волны на границах насыщенной пористой среды и жидкости.

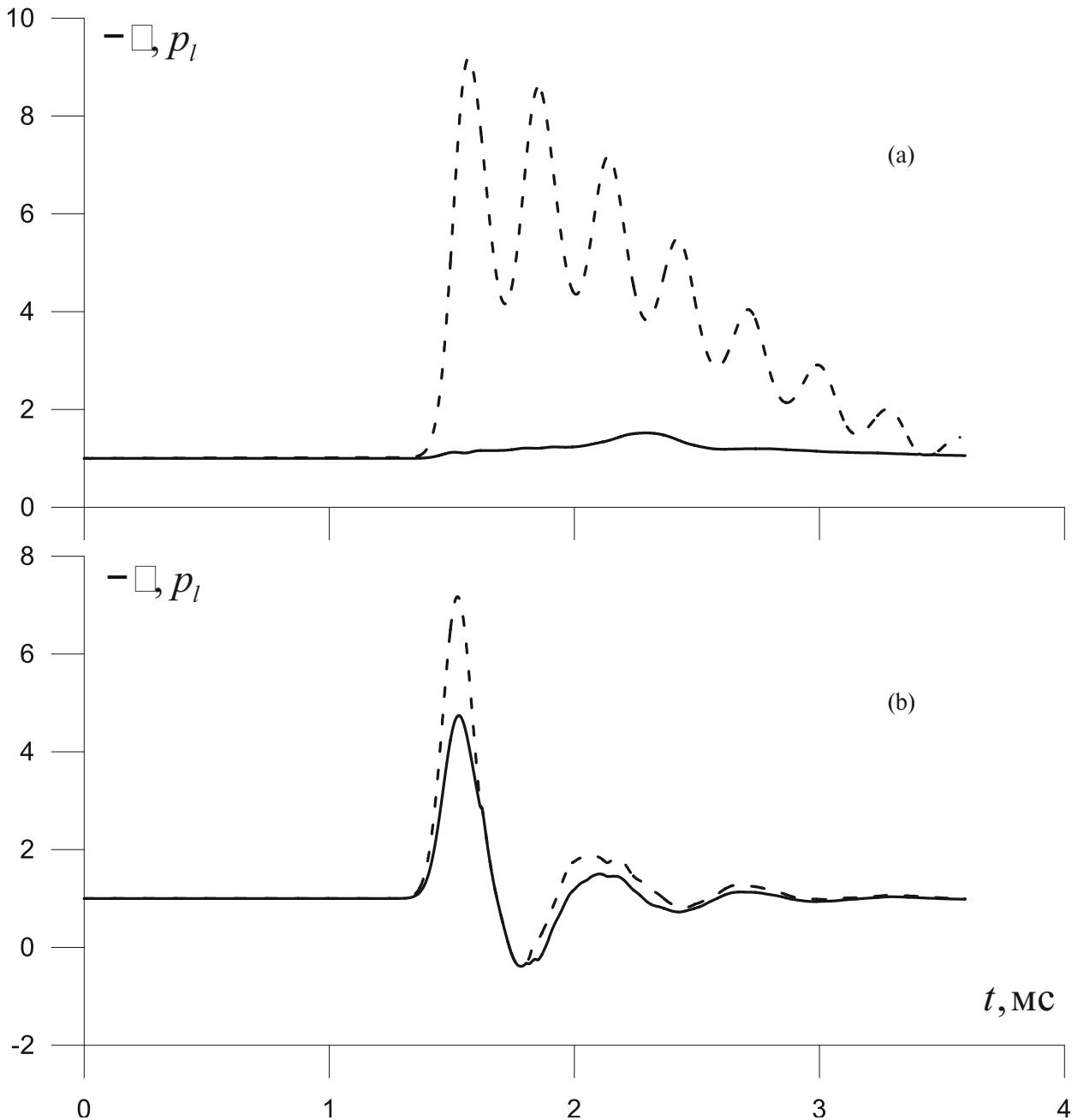


**Рис. 5.** То же, что на рис. 4. Сплошная и пунктирная линии соответственно  $\alpha_{l0} = 0.35$  и  $0.25$  ( $\alpha_{g0} = 0.001$ ,  $a_0 = 1$  мм), остальные начальные параметры расчета, такие же как на рис. 1. Остальные обозначения, как на рис. 4.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе численного исследования динамики волн в жидкости при наличии в ней пористой перегородки, насыщенной газированной жидкостью, установлено:

- существует критическое значение объемного содержания газа в пористой среде, насыщенной газированной жидкостью, и пористости, такие, что при меньших значениях импульсное возмущение отражается от границы “жидкость–пористая среда, насыщенная газированной жидкостью” как от жесткой стенки (без изменения фазы), а когда объемное содержание газа или пористость выше критических значений – отражение происходит как от свободной границы (с изменением фазы).



**Рис. 6.** Расчетные “осциллограммы” полного напряжения и давления в жидкости на датчике  $D_2$ . Сплошная и штриховая линии – соответственно полное напряжение  $\sigma = -\sigma_s + p_l$  и давление  $p_l$  в бар. Фрагмент *a* соответствует объемному содержанию газа в слое пористой среды  $\alpha_{g0} = 10^{-3}$ , *b* случаю насыщения пористого слоя “чистой” жидкостью – водой; остальные исходные параметры такие же, как на рис. 1.

— в случае насыщения пористого слоя газожидкостной средой с объемным содержанием газа выше 0.001 влияние давления в жидкости на полное напряжение несущественно.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00274, <https://rscf.ru/project/24-11-00274/>.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимофеев Е.И., Гельфанд Б.Е., Гумеров А.Г. Влияние пузырькового экрана на ударно-волновое возмущение в жидкости // Физика горения и взрыва. 1985. Т. 21. № 3. С. 98–102.
2. Гималтдинов И.К., Нигматулин Р.И., Шагапов В.Ш. Эволюция волн давления в жидкости, содержащей зону жидкости с пузырьками // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2001. № 3. С. 133.
3. Губайдуллин Д.А. Падение акустической волны на многослойную среду, содержащую слой пузырьковой жидкости Д. А. Губайдуллин, Ю. В. Федоров // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2017. № 1. С. 109–116. DOI 10.7868/S056852811701008X. – EDN YKULQX.
4. Суров В.С. Моделирование взаимодействия подводной ударной волны с препятствием при наличии пузырькового экрана В. С. Суров // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89. № 1. С. 86–93. – EDN TEJLGA.
5. Губайдуллин А.А., Болдырева О.Ю., Дудко Д.Н. Взаимодействие акустических волн с пористым слоем // Теплофизика и аэромеханика. 2009. Т. 16. № 3. С. 455–470. EDN KTOLRN.
6. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. В 2 ч. М.: Наука, 1987.
7. Кедринский В.К. Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели. Новосибирск : Изд-во Сиб. отд-ния РАН, 2000.
8. Губайдуллин А.А. Волны в газожидкостных системах. Тюмень. Изд-во Тюменского гос. ун-та. 2008. 184 с.
9. Губайдуллин Д.А., Гафиятов Р. Н. Отражение и прохождение акустической волны через многофракционный пузырьковый слой // Теплофизика высоких температур. 2020. Т. 58. № 1. С. 97–100. DOI 10.31857/S0040364420010081. EDN XJNXXH.
10. Neves, Diogo & Brito, Moises & Pires-Silva, Antonio & Fortes, Conceicao & Matos, Jorge Experimental Investigation of Air Bubble Curtain Effects on Water Wave Field. Defect and Diffusion Forum. 2022. 415. 81–99. 10.4028/p-9jm010.
11. Ali Kareem Hilo, Ji-Woo Hong, Ki-Seong Kim, Byoung-Kwon Ahn, Cheolsoo Park, Gun-Do Kim, Il-Sung Moon Experimental study on insertion loss of air bubble layer in freestream flow // Wave Motion, V. 123. 2023. p. 103227.
12. Губайдуллин А.А., Болдырева О.Ю., Дудко Д.Н. Распространение возмущений давления в насыщенной пузырьковой жидкостью пористой среде // Ученые записки Казанского ун-та. Сер. Физико-математические науки. 2015. Т. 157, № 1. С. 101–106. EDN TTMTWX.
13. Болдырева О.Ю., Губайдуллин А.А., Дудко Д.Н., Кутушев А.Г. Численное исследование передачи ударно-волновой нагрузки экранируемой плоской стенке через слой порошкообразной среды и разделяющий их воздушный зазор // Физика горения и взрыва. 2007. Т. 43. № 1. С. 132–142.
14. Нигматулин Р.И., Шагапов В.Ш., Вахитова Н.К. Проявление сжимаемости несущей фазы при распространении волн в пузырьковой среде // ДАН СССР. 1989. Т. 304. № 5. С. 1077.
15. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984.
16. Исакович М.А. Общая акустика / Уч. пособ. М.: Наука, Гл. редакция физико-математической лит, 1973 г. 496 с.

## EVOLUTION OF PRESSURE WAVES IN LIQUID CONTAINING A POROUS PARTITION SATURATED WITH A BUBBLE FLUID

**I. K. Gimaltdinov<sup>a,\*</sup>, A. S. Rodionov<sup>a,\*\*\*</sup> and O. Yu. Valiakhmetova<sup>a,\*\*\*</sup>**

<sup>a</sup>*Ufa Petroleum Technological State University, Ufa, Russia*

<sup>\*</sup>e-mail: iljas\_g@mail.ru

<sup>\*\*</sup>e-mail: artrodionov@mail.ru

<sup>\*\*\*</sup>e-mail: v9174121007@gmail.com

**Abstract**—The distinctive features of pressure wave dynamics in the presence of a porous partition (layer) saturated with a bubbly fluid are considered. It is shown that, depending on the parameters of the gas mixture and the porous medium (volume gas content, bubble dispersion, and porosity), reflection of a wave pulse from the porous partition saturated with a bubbly mixture is similar to reflection from the free boundary or from the rigid wall.

**Keywords:** porous medium, bubbly fluid, waves, free boundary

# ЭЛЕКТРОДИНАМИКА МАЛОМОЩНОГО АНОМАЛЬНОГО ТЛЕЮЩЕГО РАЗРЯДА В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С ВЫСОКОСКОРОСТНЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

© 2024 г. С. Т. Суржиков<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

\*e-mail: surg@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 18.09.2024 г.

После доработки 11.10.2024 г.

Принята к публикации 11.10.2024 г.

На основе двухмерной системы уравнений Навье–Стокса и диффузионно-дрейфовой модели газоразрядной плазмы представлена расчетная сопряженная модель тлеющего в сверхзвуковом потоке газа. Рассчитана электродинамическая структура аномального тлеющего разряда между двумя электродами конечной протяженности, расположенными на противоположных поверхностях плоского канала высотой 2 см со сверхзвуковым потоком молекулярного азота при давлении 5 Торр. Изучен процесс горения маломощного аномального тлеющего разряда с суммарным током 10–20 мА при напряжении между электродами порядка 1000 В. Особенностью построенной вычислительной модели является учет внешнего магнитного поля, вектор магнитной индукции которого направлен поперек газовому потоку. Показано, что в зависимости от поляризации вектора индукции магнитного поля заметно изменяется электродинамическая структура тлеющего разряда в потоке газа, что, в свою очередь, влияет на распределение давления вдоль поверхностей канала в окрестности расположения электродов.

**Ключевые слова:** сверхзвуковое течение в плоском канале, аномальный тлеющий разряд, тлеющий разряд в магнитном поле

**DOI:** 10.31857/S1024708424060159, **EDN:** FDAHEP

Экспериментальные исследования аномального тлеющего разряда между двумя диско-образными электродами [1], расположенными на противоположных поверхностях плоского канала, с расстоянием между ними 2 см, показали возможность устойчивого горения токового столба тлеющего разряда в поперечном сверхзвуковом потоке воздуха при скоростях, отвечающих числам Маха  $M \sim 3$ . Эксперименты выполнены в измерительной секции ударной аэrodинамической трубы.

Давление в газе в области горения разряда изменялось в пределах 3–5 Торр, напряжение между электродами изменялось незначительно  $V \sim 500$  В при изменении тока через разряд в диапазоне  $I \sim 1.2\text{--}6.7$  мА (э.д.с. источника питания изменялось в диапазоне  $\varepsilon = 0.4\text{--}2$  кВ). Это означает, что энергию, вкладываемую в тлеющий разряд, можно оценить величиной  $W \sim 0.6\text{--}3.35$  Вт.

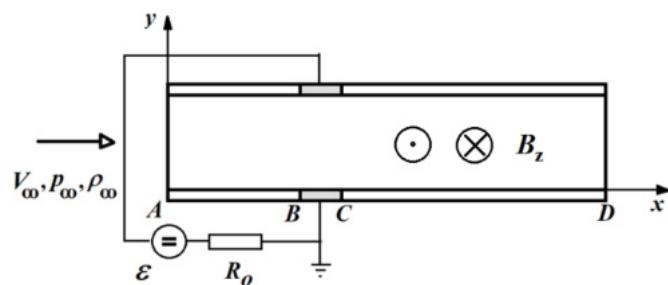
Расчетные исследования нормального [2] и аномального [3, 4] тлеющих разрядов в условиях, близких к упомянутым экспериментальным условиям [1], показали близость параметров вольтамперных характеристик разрядов, что позволяет надеяться на адекватность численного описания изучаемого явления, при этом позволили получить представление об электродинамической структуре токовых столбов тлеющих разрядов.

Использовались две расчетные модели газоразрядной плазмы: амбиполярная [3, 4] и диффузионно-дрейфовая [2, 5]. Вторая из упомянутых моделей является более трудоемкой, поскольку приходится интегрировать уравнение Пуассона для нахождения электрического потенциала во всей расчетной области. Однако, главным преимуществом диффузионно-дрейфовой модели является достаточно подробное описание структуры приэлектродных областей пространственно-го заряда и положительного столба, а также возможность расчета вольтамперных характеристик тлеющего разряда.

Еще одно достоинство диффузионно-дрейфовой модели было продемонстрировано в [2], где решалась задача динамики нормального тлеющего разряда в плоском канале со сверхзвуковым потоком газа. Использованием амбиполярной модели такую задачу не решить без введения дополнительных упрощений.

В работе [5] с использованием диффузионно-дрейфовой модели изучался аномальный тлеющий разряд постоянного тока между двумя электродами, расположенными на поверхности острой пластины в сверхзвуковом потоке молекулярного азота. В указанном случае токовый столб газоразрядной плазмы стелился вдоль обтекаемой поверхности между электродами. Исследовался маломощный тлеющий разряд в поперечном магнитном поле. Удалось установить, что в зависимости от поляризации вектора индукции магнитного поля тлеющий разряд оказывает разное влияние на распределение давления вдоль обтекаемой поверхности.

В настоящей работе диффузионно-дрейфовая модель применяется для изучения электродинамической структуры аномального тлеющего разряда между двумя электродами, расположенными на противоположных поверхностях плоского канала, как это показано на рис. 1.



**Рис. 1.** Расчетная схема аномального тлеющего разряда в плоском канале с потоком газа. Длина канала  $x_D = 10$  см, расстояние между поверхностями  $H_y = 2$  см, протяженность электродов вдоль газового потока  $x_C - x_B = 1$  см.

Скорость  $V_\infty$  молекулярного азота на входе в канал соответствует числу Maxa  $M = 5$  при давлении  $p_\infty = 5$  Торр и температуре  $T_\infty = 250$  К. Главной целью численного исследования данной работы является изучение влияния величины э.д.с. источника питания во внешней цепи и поляризации вектора индукции магнитного поля  $B_z$ , направленного в положительном или отрицательном направлении оси  $z$  (см. рис. 1), на электродинамическую структуру аномального тлеющего разряда. Расчеты для двух поляризаций вектора индукции магнитного поля сравниваются с его отсутствием. Рассматривается маломощный аномальный тлеющий разряд с мощностью, вкладываемой в разряд порядка нескольких ватт.

## 1. УРАВНЕНИЯ РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ ТЛЕЮЩЕГО РАЗРЯДА В ПОТОКЕ ГАЗА

Подробно формулировка двухмерной сопряженной расчетной модели тлеющего разряда в магнитном поле и в сверхзвуковом потоке газа изложена в работах [2–5]. Указанная расчетная модель включает в себя систему уравнений Навье–Стокса, диффузионно-дрейфовой модели тлеющего разряда и замыкающие соотношения, характеризующие термофизические и электрофизические свойства газа и газоразрядной плазмы. Здесь приведем эти уравнения без дополнительных обсуждений. Система нестационарных уравнений неразрывности, Навье–Стокса и сохранения энергии (в форме уравнения теплопроводности Фурье–Кирхгофа)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\mu \operatorname{div} \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F_{B,x}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\mu \operatorname{div} \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + F_{B,y}, \quad (1.3)$$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \mathbf{V} \operatorname{grad} T = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V} \operatorname{grad} p + \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T) + Q_J + \\ + \mu \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (1.4)$$

где  $u, v$  — проекции вектора скорости  $\mathbf{V}$  на оси прямоугольной декартовой системы координат  $x$  и  $y$ ;  $\rho, p$  — плотность и давление;  $\mu, \lambda$  — динамический коэффициент вязкости и коэффициент теплопроводности;  $c_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении;  $T$  — температура;  $F_{B,x}, F_{B,y}$  — компоненты вектора магнитной силы  $\mathbf{F}_B = [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]$ ;  $\mathbf{j}, \mathbf{B}$  — векторы плотности тока и магнитной индукции;  $Q_J = \eta(\mathbf{j} \cdot \mathbf{E})$  — объемная мощность джоулева тепловыделения в газе ( $\eta = 0.2$  — эффективность преобразования энергии электрического поля в нагрев газа.);  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$  — вектор напряженности электрического поля;  $\varphi$  — электрический потенциал.

Система уравнений диффузионно-дрейфовой модели

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\Gamma_{e,x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\Gamma_{e,y}) = \dot{\omega}_i = \alpha \Gamma_e - \beta n_e n_i, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\Gamma_{i,x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\Gamma_{i,y}) = \dot{\omega}_i = \alpha \Gamma_e - \beta n_e n_i, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 y} = 4\pi e(n_e - n_i), \quad (1.7)$$

где  $n_e, n_i$  — объемная концентрация электронов и ионов;  $e$  — заряд электрона;  $\alpha, \beta$  — коэффициенты ионизации и рекомбинации;  $\Gamma_{e,x}, \Gamma_{e,y}, \Gamma_{i,x}, \Gamma_{i,y}$  — проекции векторов плотностей электронов  $\Gamma_e$  и ионов  $\Gamma_i$  на координатные оси;

$$\Gamma_{e,x} = -n_e \mu_{e,B} E_{e,x} - D_{e,B} \frac{\partial n_e}{\partial x}, \quad \Gamma_{e,y} = -n_e \mu_{e,B} E_{e,y} - D_{e,B} \frac{\partial n_e}{\partial y},$$

$$\Gamma_{i,x} = \frac{u + b_i v}{1 + b_i^2} + n_i \mu_{i,B} E_{i,x} - D_{i,B} \frac{\partial n_i}{\partial x}, \quad \Gamma_{i,y} = \frac{v - b_i u}{1 + b_i^2} + n_i \mu_{i,B} E_{i,y} - D_{i,B} \frac{\partial n_i}{\partial y},$$

$$E_{e,x} = E_x - b_e E_y, \quad E_{e,y} = E_y + b_e E_x, \quad E_{i,x} = E_x + b_i E_y, \quad E_{i,y} = E_y - b_i E_x$$

есть компоненты эффективной напряженности электрического поля в магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z B_z$ ;  $D_{e,B} = \frac{D_e}{1+b_e^2}$ ,  $D_{i,B} = \frac{D_i}{1+b_i^2}$  — эффективные коэффициенты диффузии электронов и ионов в магнитном поле;  $\mu_{e,B} = \frac{\mu_e}{1+b_e^2}$ ,  $\mu_{i,B} = \frac{\mu_i}{1+b_i^2}$  — эффективные коэффициенты подвижности электронов и ионов в магнитном поле;  $b_e = \frac{\mu_e B_z}{c} = \frac{\omega_e}{v_{en}}$ ,  $b_i = \frac{\mu_i B_z}{c} = \frac{\omega_i}{v_{in}}$  — параметры Холла электронов и ионов;  $\omega_e = \frac{e B_z}{m_e c}$ ,  $\omega_i = \frac{e B_z}{m_i c}$  — ларморовские частоты электронов и ионов;  $m_e, m_i$  — масса электрона и иона;  $c$  — скорость света;  $v_{en}, v_{in}$  — частоты столкновений электронов и ионов с нейтральными частицами. К замыкающим термодинамическим, теплофизическим и электрофизическим уравнениям и соотношениям относятся:

— термическое и калорическое уравнения состояния совершенного газа

$$p = \rho \frac{R_0}{M_\Sigma} T = (\gamma - 1)e, \quad e = c_v T = \frac{c_p}{\gamma} T, \quad (1.8)$$

где  $R_0 = 8.314 \times 10^7$  эрг/(моль · К) — универсальная газовая постоянная;  $M_\Sigma = 28$  г/моль — молекулярный вес газа;  $e, c_v$  — внутренняя энергия совершенного газа и удельная теплоемкость при постоянном объеме;  $\gamma = 1.4$ ;

— температурная зависимость коэффициента динамической вязкости и теплопроводности

$$\mu = \mu_0 \frac{114 + T_0}{114 + T} \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2}, \quad T_0 = 273 \text{ K}, \quad \mu_0 = 1.667 \cdot 10^{-4} \text{ г/см} \cdot \text{с}, \quad \lambda = \frac{\mu c_p}{\Pr}, \quad \Pr = 0.7;$$

— подвижности электронов и ионов

$$\mu_e = 4.5 \times 10^5 \frac{1}{p}, \quad \mu_i \approx 1.45 \times 10^3 \frac{1}{p} \frac{\text{см}^2}{\text{B} \cdot \text{с}};$$

— коэффициента ионизации

$$\alpha(E) = pA \exp \left[ -\frac{B}{(E/p)} \right] \frac{1}{\text{см}},$$

где  $A = 12 \frac{1}{\text{см} \cdot \text{Торр}}$ ,  $B = 342 \frac{\text{В}}{\text{см} \cdot \text{Торр}}$ ,  $E = |\mathbf{E}|$ .

Границные условия для газодинамической части задачи

$$\begin{aligned} x = x_A : u &= u_\infty, \quad v = 0, \quad T = T_\infty, \quad p = p_\infty, \quad \rho = \rho_\infty, \\ x = x_D : \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \\ y = 0, \quad y = H_y : u &= v = 0, \quad T = T_w = 300 \text{ K}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Границные условия для задачи о тлеющем разряде

$$\begin{aligned} x = x_A, \quad x = x_D : \left( \frac{\partial n_e}{\partial x} \right) &= \left( \frac{\partial n_i}{\partial x} \right) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0, \\ y = 0, \quad y = H_y, \quad x < x_B, \quad x > x_C : n_e &= n_i = n_w, \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0, \\ y = 0, \quad x_B < x < x_C : \left( \frac{\partial n_i}{\partial y} \right) &= 0, \quad n_e = \chi n_i \mu_i \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \varphi = 0 \quad (\text{поверхность катода}), \\ y = H_y, \quad x_B < x < x_C : \left( \frac{\partial n_e}{\partial y} \right) &= 0, \quad n_i = 0, \quad \varphi_{1,j} = V \quad (\text{поверхность анода}), \\ y = L_y, \quad \left( \frac{\partial n_e}{\partial y} \right) &= \left( \frac{\partial n_i}{\partial y} \right) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

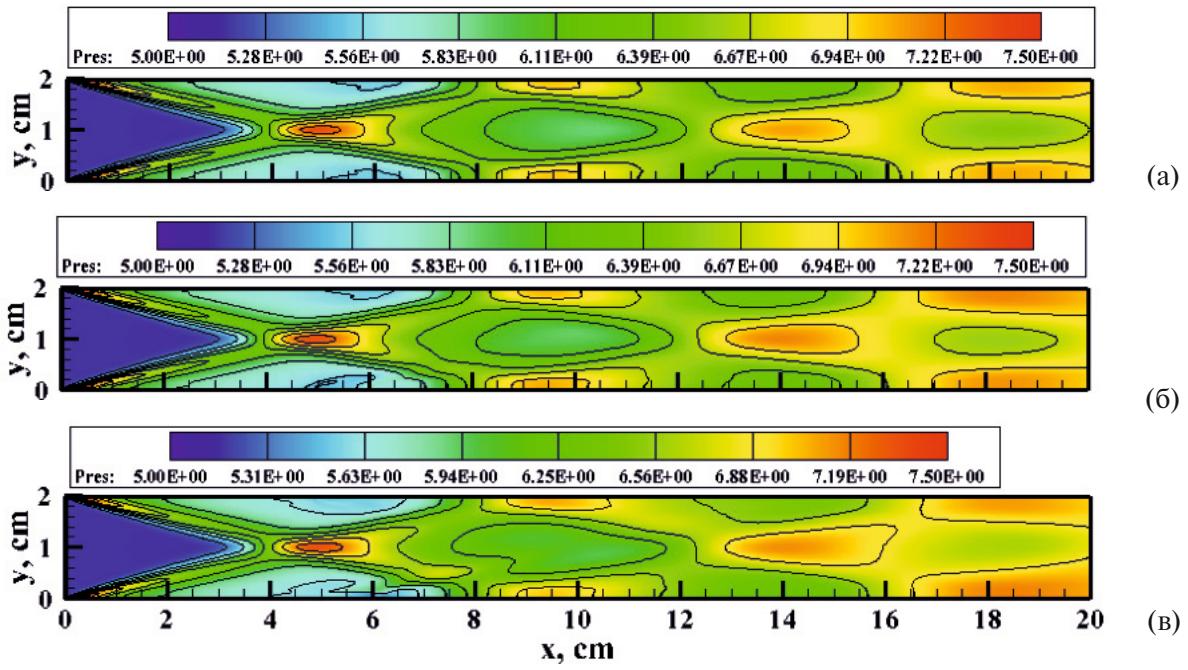
Здесь:  $\chi = 0.1$  — коэффициент вторичной электронной эмиссии;  $n_w = 10^2 \text{ см}^{-3}$ ;  $x_A, x_B, x_C, x_D$  — координаты соответствующих точек на рис. 1;  $H_y$  — высота расчетной области. Учет внешней электрической цепи посредством уравнения

$$\varepsilon = V + IR_0. \quad (1.11)$$

Позволяет найти падение напряжения между электродами. Здесь:  $V$  — падение напряжения на электродах;  $I$  — разрядный ток;  $\varepsilon$  — э.д.с. источника питания;  $R_0 = 12 \text{ кОм}$  — внешнее балластное сопротивление. Полный ток через разряд рассчитывается по формуле  $I = \int_{x_B}^{x_C} (\mathbf{j} \mathbf{n})_e dx$ , где:  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к поверхности катода;  $\mathbf{j}$  — плотность тока,  $\mathbf{j} = e(\mathbf{\Gamma}_i - \mathbf{\Gamma}_e)$ .

Система уравнений (1.1)–(1.8), (1.11) с граничными условиями (1.9) и (1.10) составляют замкнутую постановку решаемой задачи. В качестве начальных условий задавалось решение газодинамической задачи без разряда и установившееся решение электроразрядной задачи без магнитного поля и без потока газа.

Из представленной постановки задачи становится понятным как моделируется сопряженная термогазодинамическая и электродинамическая задачи об аномальном тлеющем разряде в сверхзвуковом потоке газа. Уравнения Навье–Стокса (1.2), (1.3) содержат в правой части функции, задающие силовое воздействие токового столба тлеющего разряда в магнитном поле на газовый поток. В уравнении сохранения энергии (1.4) присутствует источникое слагаемое  $Q_J$ , отвечающее джоулеву нагреву газа протекающим в разряде током. Вариации температуры и давления в потоке газа оказывают влияние на электрофизические свойства газоразрядной плазмы. Решение электродинамической части задачи оказывает, в свою очередь, непосредственное влияние на распределение давления и температуры.



**Рис. 2.** Давление газа в плоском канале при  $M = 5$  и  $p_{\infty} = 5$  Торр без разряда (а) и с разрядом при  $\epsilon = 1500$  В,  $B_z = +0.1$  Тл (б) и  $B_z = -0.1$  Тл (в).

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

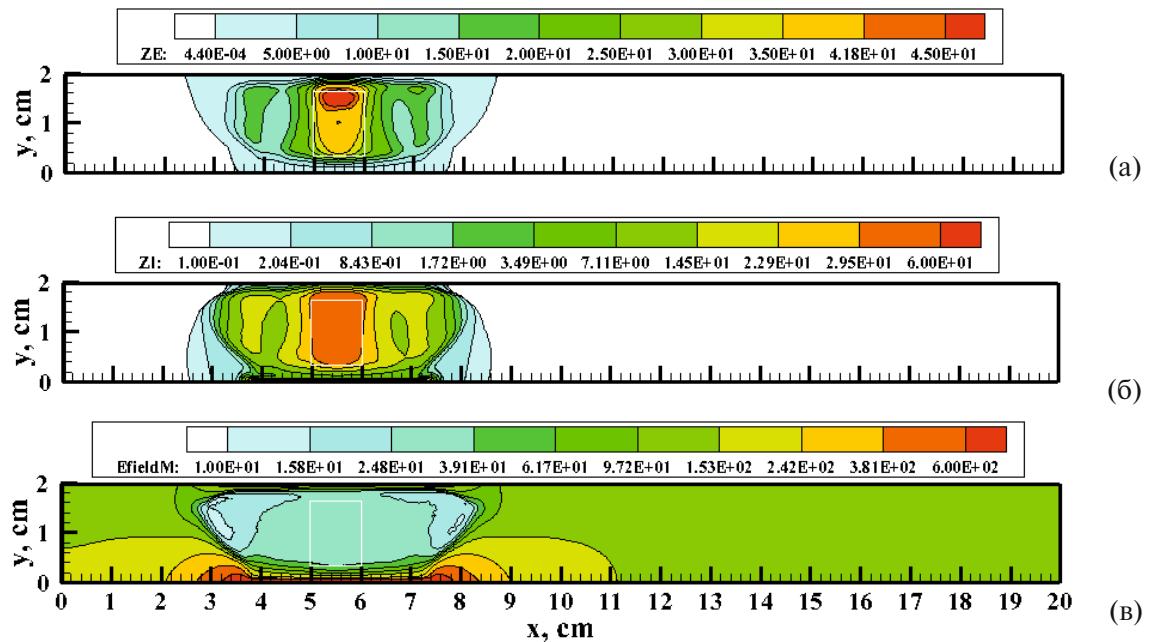
Расчеты электродинамики аномального тлеющего разряда в плоском канале проводились при скорости потока молекулярного азота на входе в канал  $V_{\infty} = 1.576 \cdot 10^5$  см/с. Давление  $p_{\infty} = 5$  Торр ( $6580$  эрг/см $^3$ ) и температура  $T_{\infty} = 250$  К полагались неизменными для всех расчетных вариантов. В указанных условиях плотность газа на входе в канал равна  $\rho_{\infty} = 9.18 \cdot 10^{-6}$  г/см $^3$ .

Хорошо известно [6], что сверхзвуковое движение газа в канале имеет ряд особенностей, связанных с возникновением ударно-волевой структуры вдоль канала и нарастающих вдоль поверхностей пограничных слоев. На рис. 2а показано распределение давления в канале при указанных выше условиях. Хорошо видна периодическая структура поля давления как в центре канала, где происходит периодическое пересечение ударных волн, отраженных от стенок канала с постепенным увеличением давления вдоль канала. Аналогичная картина наблюдается вблизи стенок канала, где происходит взаимодействие ударных волн с развивающимися вдоль поверхностей пограничными слоями. Указанные газодинамические эффекты активно изучаются в термогазодинамике каналов со сверхзвуковым потоком.

В электродинамике газовых разрядов переменность таких параметров, как давление и температуры является чрезвычайно важной, поскольку эти параметры во многом определяют сам факт зажигания и устойчивого горения разрядной плазмы [7].

На рис. 3 показана электродинамическая структура аномального тлеющего разряда в канале без потока и магнитного поля при  $p = 5$  Торр и  $\epsilon = 750$  В. Белыми прямоугольниками на поле рисунков обозначено расположение начального приближения квазинейтральной газоразрядной плазмы с концентрацией заряженных частиц  $n_0 = 10^9$  см $^{-3}$ .

Рассматриваемые расчетные данные близки к условиям погасания разряда, поэтому наблюдается некоторое нарушение классической конфигурации столба нормального тлеющего разряда. Фактически в данном случае разряд горит в поднормальном режиме. Наибольшая концентрация ионов  $n_i \approx 60 \cdot 10^9$  см $^{-3}$ , хотя и достигается вблизи катодного слоя на расстоянии от поверхности катода около 0.1 см, но в положительном столбе она также весьма высока  $n_i \approx (40 \div 50) \cdot 10^9$  см $^{-3}$ . Концентрация электронов в большей части токового столба  $n_e \approx 35 \cdot 10^9$  см $^{-3}$  уступает концентрации ионов. И только близи анодного слоя концентрации заряженных частиц сближаются, после чего концентрация ионов падает до нуля. Так, что строго центральную часть токового столба нельзя назвать положительным



**Рис. 3.** Распределение концентраций электронов ( $ZE = n_e/n_0$ ) (а), ионов ( $ZI = n_i/n_0$ ) (б) и модуля напряженности электрического поля ( $|E|$  в В/см) (в) при  $M = 0$ ,  $p_\infty = 5$  Торр,  $B_z = 0$  и  $\epsilon = 750$  В.

квазинейтральным столбом, поскольку она носит положительный объемный заряд. Наибольшая напряженность электрического поля  $|E| \sim 600$  В/см локализована близи катода (рис. 3в). В центре токового столба ее величина изменяется в пределах  $|E| \sim 20$ – $100$  В/см.

На рис. 4 представлены поля концентраций заряженных частиц в отсутствие магнитного поля при двух значениях э.д.с. источника питания  $\epsilon = 750$  В и  $1500$  В. Эти расчетные данные иллюстрируют взаимодействие газового потока с входной скоростью  $M = 5$  с аномальным тлеющим разрядом.

Обратим внимание на подобный характер поведения объемных концентраций электронов и ионов при  $\epsilon = 750$  В (рис. 4а, в) и  $1500$  В (рис. 4б, г). Здесь и далее  $n_0 = 10^9$  см $^{-3}$ . На рис. 4б, г прямоугольником показано местоположение начального приближения облака концентраций ионов и электронов.

Сравнивая распределения концентраций электронов (рис. 4а, в) и ионов (рис. 4в, г) со случаем отсутствия газового потока (рис. 3), видим, что разрядный канал практически сдувается с области расположения электродов и он существует за счет повышенной напряженности электрического поля вблизи нижней по потоку границы электродов. Области максимальных концентраций электронов и ионов вытягиваются вдоль поверхностей электродов, а их устойчивость во многом обеспечивается относительно низкой скоростью газового потока в пограничных слоях.

Увеличение э.д.с. источника питания качественно изменяет электродинамическую структуру разряда (рис. 4б, г). При  $\epsilon = 1500$  В напряженность электрического поля между электродами возрастает настолько, что обеспечивает устойчивое горение тлеющего разряда между противоположно расположенными катодом и анодом. Примечательно также, что шлейф заряженных частиц ниже по потоку имеет меньшую протяженность, чем при  $\epsilon = 750$  В. Это связано с большими дрейфовыми потерями заряженных частиц из области разряда в области с большей напряженностью электрического поля. Роль пограничного слоя, как и прежде, проявляется в стабилизации областей наибольших концентраций зарядов вблизи электродов. Обратим внимание на то, что на рисунках, отвечающих разным э.д.с., цена деления цветовой палитры отличается примерно в 50 раз.

На рис. 5 и 6 представлены поля концентраций электронов и ионов в газовом потоке со скоростью  $M = 5$  при двух значениях э.д.с. и противоположных поляризациях вектора индукции магнитного поля. Сравнивая представленные расчетные распределения с предыдущими результатами без магнитного поля, отметим весьма сильное влияние внешнего магнитного поля и поляризации вектора индукции магнитного поля.

Если при  $B_z = +0.1$  Тл и  $\epsilon = 750$  В токовый столб разряда локализован между электродами (рис. 5а и 6а), то при  $B_z = -0.1$  Тл и  $\epsilon = 750$  В в центральной области канала наблюдается снос газоразрядной

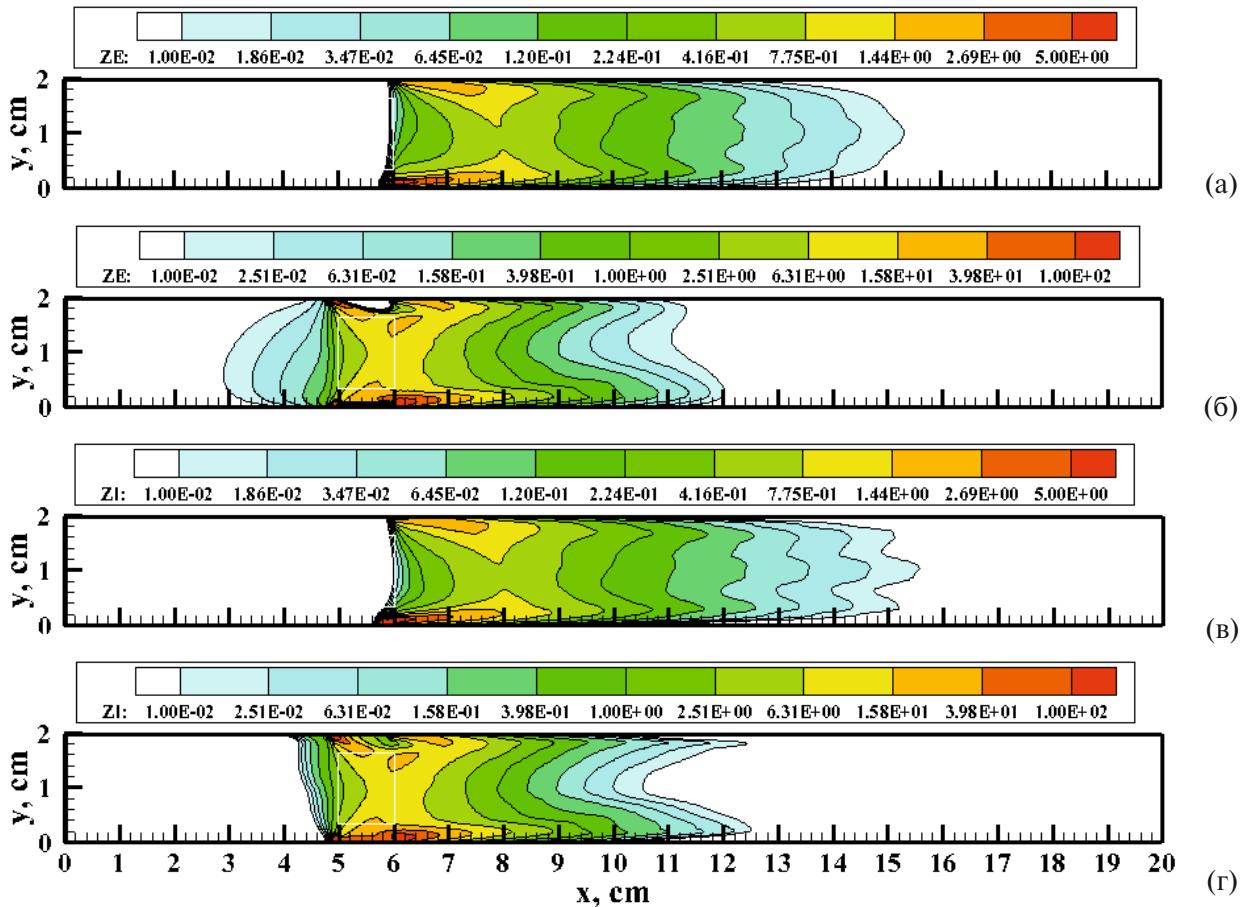


Рис. 4. Распределение концентраций электронов ( $ZE = n_e/n_0$ ) (а, б) и ионов ( $ZI = n_i/n_0$ ) (в, г) в отсутствие магнитного поля при  $M = 5$ ,  $p_\infty = 5$  Торр,  $\varepsilon = 750$  В (а, в) и  $\varepsilon = 1500$  В (б, г).

плазмы вниз по потоку (рис. 5в и 6в). Качественно представленные расчетные данные подтверждаются электродинамическим правилом “левой руки”. По определению, электрический ток направлен от анода (сверху) к катоду. При положительной поляризации вектора магнитной индукции объемная магнитная сила направлена в отрицательном направлении оси  $x$ , то есть способствует смещению токового столба справа налево. При отрицательной поляризации вектора магнитной индукции объемная магнитная сила способствует сносу газоразрядной плазмы вниз по потоку. Это и наблюдается на указанных рисунках. При двухкратном увеличении э.д.с. источника питания отмеченные закономерности остаются в силе, но числовые значения концентраций электронов и ионов значительно возрастают (рис. 5б, г и 6б, г).

Анализ распределений концентраций электронов и ионов показал, что в потоке газа вблизи электродов наблюдается снос заряженных частиц вдоль потока. Это означает, что при формировании объемной магнитной силы в этих областях появляется нормальная к поверхности составляющая, что проявляется в изменении распределения давления вдоль поверхности канала. На рис. 7 показано распределение коэффициента давления

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2}$$

вдоль нижней поверхности катодной секции в сравнении с расчетным случаем отсутствия магнитного поля. Весьма сильное влияние магнитного поля наблюдается при  $\varepsilon = 1500$  В. Причем, наибольшие изменения в коэффициенте давления наблюдаются вблизи нижней по потоку границы катодной секции. Закономерно, что противоположная поляризация вектора индукции магнитного поля приводит либо к разрежению, либо к увеличению давления.

На рис. 8 показаны поля проекции магнитной силы на ось  $y$ , откуда хорошо видно, что вблизи нижней по потоку границы катодной секции при  $B_z = +0.1$  Тл наблюдаются отрицательные значения  $F_{B,y}$ ,

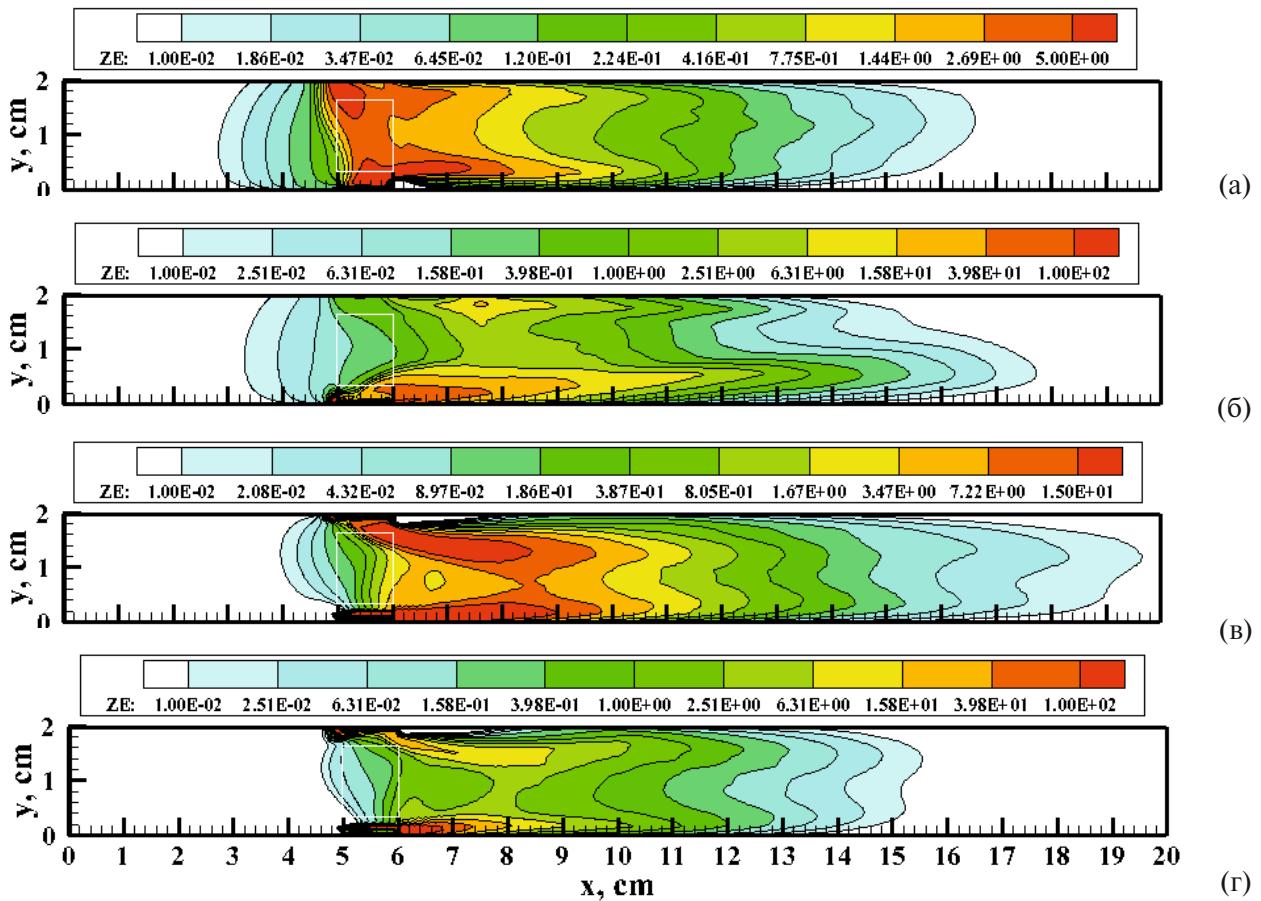


Рис. 5. Распределение концентраций электронов ( $ZE = n_e/n_0$ ) при  $M = 5$ ,  $p_\infty = 5$  Торр,  $B_z = +0.1$  Тл (а, б),  $B_z = -0.1$  Тл (в, г),  $\epsilon = 750$  В (а, в),  $\epsilon = 1500$  В (б, г).

что приводит к возрастанию давления. При  $B_z = -0.1$  Тл величина  $F_{B,y}$  положительна и на границе катодной секции наблюдается значительное разрежение.

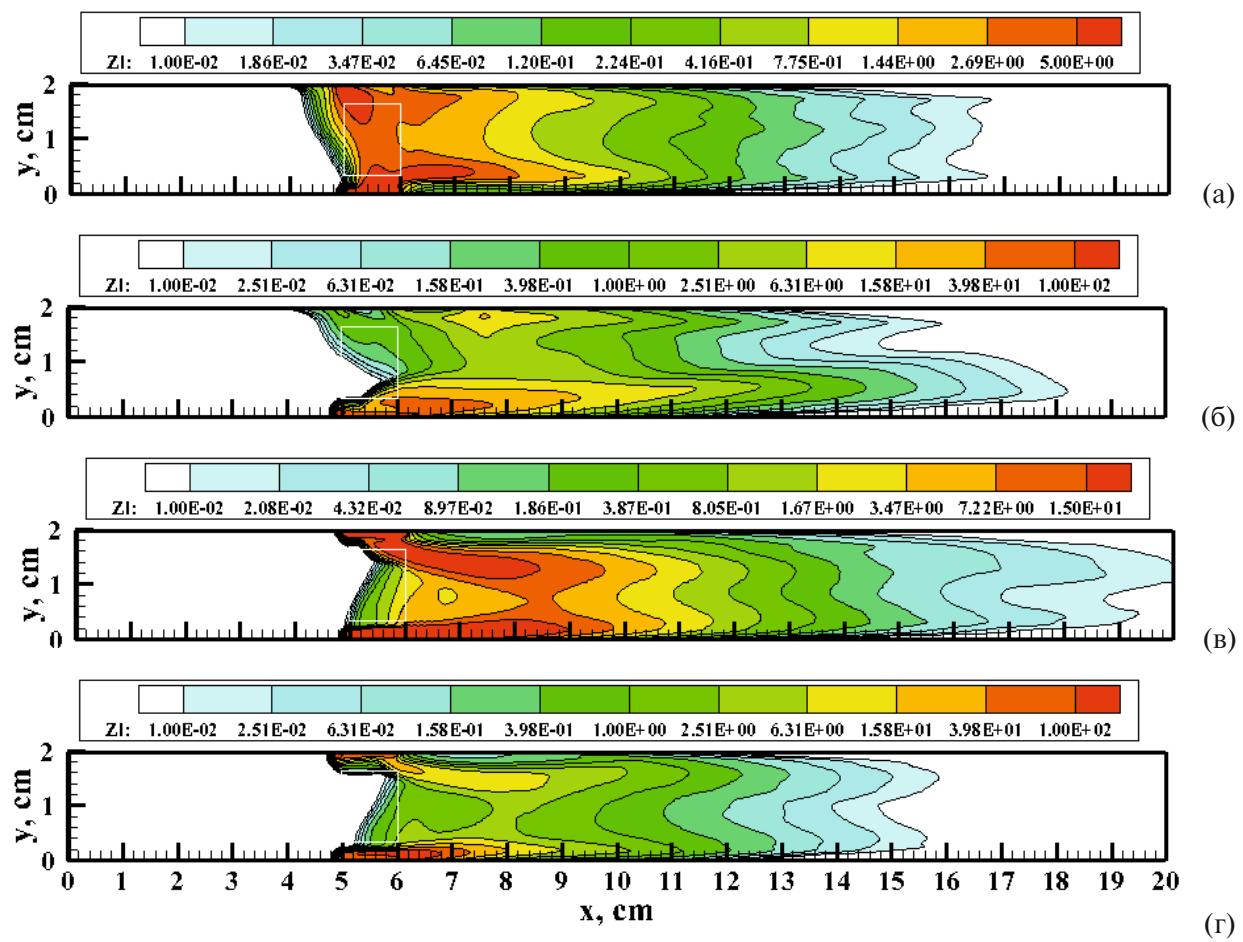
Отмеченные локальные силовые воздействия на поверхность находят свое отражение в распределении давления во всей расчетной области. На рис. 2б, в показаны установившиеся распределения давления в канале с газовым разрядом и с магнитным полем. Очевидно, что даже изученное мало-мощное воздействие газового разряда оказывает заметное влияние на газовый поток.

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

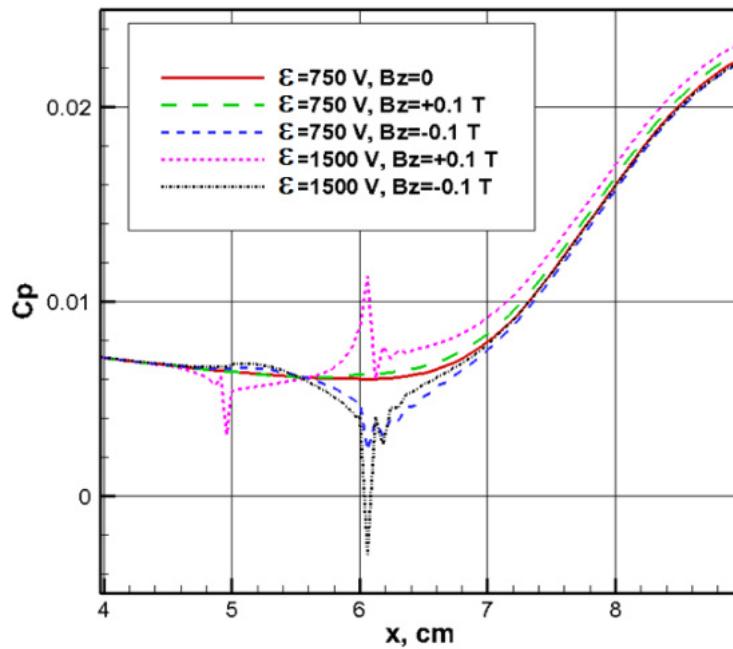
Численное моделирование сопряженной газодинамической и электродинамической задачи об аномальном тлеющем разряде в плоском канале со сверхзвуковым потоком газа при скорости на входе в канал  $M = 5$  и давлении = 5 Торр подтвердило экспериментально установленный факт устойчивого существования тлеющего разряда между двумя электродами, расположенными напротив друг друга на расстоянии 2 см. Для численного решения использовалась двухмерная система уравнений Навье–Стокса и диффузионно-дрейфовой модели газоразрядной плазмы.

Получены данные по электродинамической структуре аномального тлеющего разряда без внешнего магнитного поля, а также в поперечном к потоку магнитном поле с индукцией  $B_z = \pm 0.1$  Тл: при электродным слоям, положительном столбе, а также по локальным областям повышенной напряженности электрического поля вблизи границ электродов. Исследован маломощный тлеющий разряд с суммарным током 10–20 мА при напряжении между электродами порядка 1000 В.

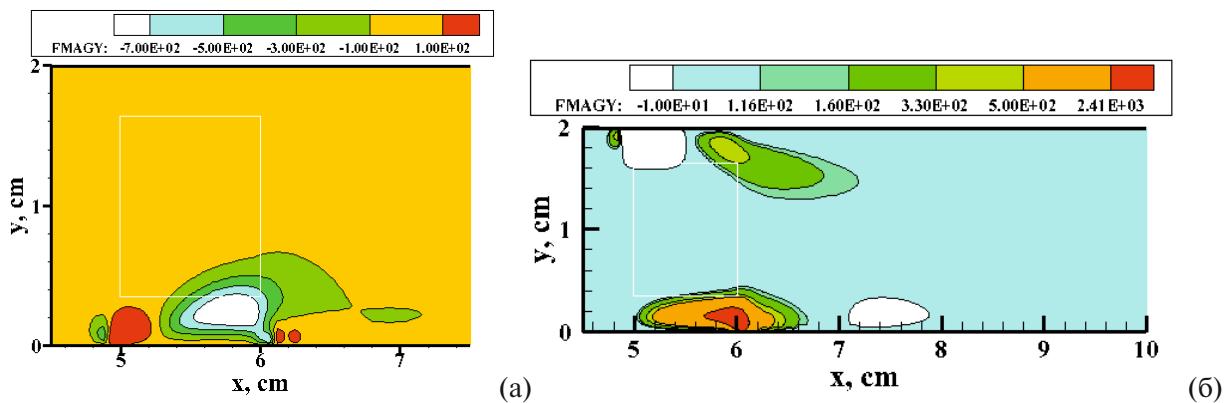
Показано, что в зависимости от поляризации вектора индукции магнитного поля заметно изменяется электродинамическая структура тлеющего разряда в потоке газа, что, в свою очередь, влияет на распределение давления вдоль поверхностей канала в окрестности расположения электродов.



**Рис. 6.** Распределение концентраций ионов ( $ZI = n_i/n_0$ ) при  $M = 5$ ,  $p_\infty = 5$  Торр,  $B_z = +0.1$  Тл (а, б),  $B_z = -0.1$  Тл (в, г),  $\varepsilon = 750$  В (а, в),  $\varepsilon = 1500$  В (б, г).



**Рис. 7.** Распределение коэффициента давления вдоль нижней поверхности при  $M = 5$  и  $p_\infty = 5$  Торр при разных э.д.с. источника питания и поляризациях вектора индукции магнитного поля.



**Рис. 8.** Проекция вектора магнитной силы  $F_{B,y} = \text{FMAGY}$  на ось  $y$  при  $\epsilon = 1500 \text{ В}$ ,  $B_z = +0.1 \text{ Тл}$  (а) и  $B_z = -0.1 \text{ Тл}$  (б).

## ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант №22-11-00062).

## КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Солодовников С. И., Руслева Л. Б. Экспериментальные исследования газоразрядной плазмы в потоке // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2023. Т. 24. Вып. 6. <http://chemphys.edu.ru/issues/2023-24-6/articles/1079/>
- Суржиков С.Т. Сверхзвуковой поток газа в плоском канале с нормальным тлеющим разрядом в магнитном поле // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2024. № 5. С.
- Суржиков С.Т. Гиперзвуковое обтекание острой пластины и двойного клина с электромагнитным актиоатором // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2020. № 6. С. 106–120.
- Суржиков С.Т. Сверхзвуковое обтекание заостренной пластины с поверхностным аномальным тлеющим разрядом в магнитном поле // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2023. № 6. С. 144–167.
- Суржиков С.Т. Диффузионно-дрейфовая модель поверхностного тлеющего разряда в сверхзвуковом потоке газа // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2024. № 1. С. 145–162.
- Гуськов О.В., Копченов В.И., Липатов И.И., Острась В.Н., Старухин В.П. Процессы торможения сверхзвуковых течений в каналах. М.: Физматлит, 2008. 168 с.
- Суржиков С.Т. Физическая механика газовых разрядов. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2006. 640 с. (Перевод: Surzhikov S.T. Theoretical and Computational Physics of Gas Discharge Phenomena. A Mathematical Introduction/2nd ed. Berlin: de Gruyter, 2020, 537 p.).

# ELECTRODYNAMICS OF A LOW-POWER ANOMALOUS GLOW DISCHARGE IN A PLANE CHANNEL WITH HIGH-SPEED GAS FLOW

S. T. Surzhikov<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

\*e-mail: [surg@ipmnet.ru](mailto:surg@ipmnet.ru)

**Abstract**—A computational coupled model of a glow discharge in supersonic gas flow based on the two-dimensional system of Navier-Stokes equations and the diffusion-drift model of gas discharge plasma is proposed. The electrodynamic structure of the anomalous glow discharge between two finite-length electrodes located on opposite surfaces of a 2-cm-high plane channel with supersonic flow of molecular nitrogen at the pressure of 5 Torr is calculated. The combustion process of a low-power anomalous glow discharge with the total electric current of 10–20 mA at the voltage between the electrodes of about 1000 V is studied. The specific feature of the constructed computational model is that it takes into account the external magnetic field, whose magnetic induction vector is directed transversally the gas flow. It is shown that the electrodynamic structure of the glow discharge in the gas flow modifies noticeably depending on the polarization of the magnetic field induction vector, which, in turn, affects the pressure distribution along the channel surfaces in the vicinity of the electrodes.

**Keywords:** supersonic flow in a plane channel, anomalous glow discharge, glow discharge in a magnetic field