

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕЧЕНИЕ ПУАЗЕЙЛЯ ТЕРМОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАДИЕНТОВ ДАВЛЕНИЯ И ТЕМПЕРАТУРЫ

© 2024 г. Д. В. Князев^{а,*}

^а Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

*e-mail: dvk@icmm.ru

Поступила в редакцию 22.07.2024 г.

После доработки 29.08.2024 г.

Принята к публикации 11.10.2024 г.

Исследование стационарного осесимметричного течения Пуазейля ньютоновской жидкости, индуцируемого продольными градиентами давления и температуры, с коэффициентом динамической вязкости, зависящим от температуры, сведено к отысканию решений трёхпараметрической краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка. В области пространства параметров, соответствующей отрицательному осевому градиенту температуры, существуют две ветви решений, описывающих течения, сопровождающиеся отводом тепла от жидкости. Смыкаясь, ветви образуют границу в фазовом пространстве, за пределами которой решения задачи пуазейлевского типа не существуют. Одна из ветвей продолжается в область неотрицательных значений продольного градиента температуры и содержит изотермическое решение Пуазейля. Вдоль этой ветви кривая зависимости расхода от безразмерного осевого градиента температуры имеет минимум в области положительных значений последнего. В этой части пространства параметров режим теплообмена с внешней средой зависит от соотношения между всеми тремя безразмерными комплексами задачи. Режим теплообмена влияет на характер течения, тормозя поток у твёрдой стенки при теплоотдаче, и формируя более наполненный профиль скорости при поглощении тепла жидкостью.

Ключевые слова: течение Пуазейля, зависимость вязкости от температуры, ветвление решений

DOI: 10.31857/S1024708424060022, **EDN:** FETQOY

В ряде случаев зависимость коэффициента вязкости от температуры может заметно влиять на течение жидкости. Универсального закона, выражающего эту зависимость, по-видимому, не существует, поэтому на практике используются разнообразные эмпирические и полуэмпирические формулы [1, 2]. Как правило, коэффициент вязкости уменьшается с ростом температуры, такое поведение нередко удачно описывается степенными и показательными зависимостями.

Простыми, но практически и теоретически важными являются сдвиговое течение Куэтта и напорное течение Пуазейля. Эти течения между параллельными твёрдыми границами, поддерживаемыми при постоянных температурах, рассмотрены в [3, 4] с учётом тепловыделения за счёт внутреннего трения и без уточнения конкретного вида зависимости коэффициента вязкости от температуры, лишь в предположении, что он является положительной, гладкой, убывающей функцией. Этих допущений оказывается достаточно для построения решения задачи Куэтта о сдвиговом стационарном термовязком течении в виде квадратур [3]. В [4] задача о течении Пуазейля, поддерживаемом постоянным осевым градиентом давления, сведена к однопараметрическому интегральному уравнению. Показано, что по достижении параметром критического значения, решение уравнения перестаёт существовать. Причём в некоторой окрестности критического значения задача имеет, по меньшей мере, два решения. Метод исследования, использованный в [4], ясно указывает на то, что исчезновение решения тесно связано с требованием положительности коэффициента вязкости. Примеры точных решений задач для конкретных видов зависимостей коэффициента вязкости от температуры можно найти в обзорной работе [5].

Неоднородное распределение температуры вдоль границ области течения влечёт необходимость учёта конвективного механизма переноса тепла и нелинейности распределения давления. В этой ситуации течения пуазейлевского типа, с единственной компонентой скорости, зависящей от поперечной к ней координаты, возможны лишь для некоторых законов, связывающих коэффициент вязкости с температурой, и специальных распределений температуры вдоль границ. К таким случаям относятся течения с линейным распределением температуры вдоль границы при экспоненциальной зависимости вязкости от температуры [6] и степенной связью коэффициента вязкости с температурой при экспоненциальном распределении температуры вдоль твёрдой границы [7]. В [6] найдены явные выражения полей давления и касательных напряжений в плоскопараллельных и осесимметричных термовязких потоках жидкости с экспоненциальным законом зависимости вязкости от температуры. Для этих течений в [8], с использованием подхода, предложенного в [4], выполнена оценка критических значений параметров, ограничивающих область существования решений. В [7] сформулирована задача о плоскопараллельном течении ньютоновской жидкости с гиперболическим законом зависимости вязкости от температуры и найдены её частные решения. Численное исследование задачи показало неединственность её решений [9].

Во всех упомянутых выше работах предполагалось, что, кроме коэффициента вязкости, прочие величины, характеризующие теплофизические свойства среды, включая плотность, постоянны. С использованием приближения Буссинеска в [10] найдено решение задачи о стационарной конвекции в вертикальном канале с коэффициентом вязкости и плотностью, линейно зависящими от температуры. Указано, что температурная неоднородность коэффициента вязкости приводит к отклонению профиля скорости от антисимметричного и способствует дестабилизации стационарного течения. В [11] найдено решение близкой по постановке задачи, но с учётом воздействия постоянного градиента давления и в предположении о гиперболическом законе связи коэффициента вязкости с температурой. Задача о плоском течении Куэтта сжимаемой вязкой среды с уравнением состояния Менделеева–Клапейрона и коэффициентами вязкости (по формуле Сазерленда) и теплопроводности, зависящими от температуры, решена в [12]. Течение газа несимметричное относительно биссектрисы угла, образованного плоскостями, нагретыми до разных температур, с коэффициентом вязкости и теплопроводности, зависящим от температуры по степенному закону, изучено в [13].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается установившееся осесимметричное течение ньютоновской жидкости в длинной трубе радиуса R с коэффициентом динамической вязкости, зависящим от температуры. Движение индуцируется разностью давлений Δp в нормальных сечениях $z = 0$, $z = L$ и неоднородным распределением температуры вдоль боковой поверхности трубы $T_0(z)$. По аналогии с изотермическим течением Пуазейля предполагается, что скорость направлена вдоль оси симметрии потока z и зависит только от радиуса r . В этих условиях тензор вязких напряжений имеет две ненулевые компоненты $\sigma_{rz} = \sigma_{zr}$ и гидродинамические уравнения принимают вид

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial r \sigma_{rz}}{\partial r}, \quad v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \chi \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right], \quad \sigma_{rz} = \eta(T) \frac{dv_z}{dr}. \quad (1.1)$$

Кроме коэффициента вязкости η , все величины, характеризующие физические свойства жидкости, считаются постоянными, включая плотность и коэффициент температуропроводности χ . На оси симметрии и боковой поверхности трубы выполняется условия:

$$r = 0: \quad \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad \Delta p = p(0, 0) - p(0, L) \geq 0; \quad r = R: \quad v_z = 0, \quad T = T_0(z). \quad (1.2)$$

Задача (1.1), (1.2) разрешима не для всех видов зависимостей $\eta(T)$, $T_0(z)$. Далее предполагается, что

$$\eta(T) = \eta_0 T^{-\lambda}, \quad T_0(z) = e^{B+Az}, \quad T > 0, \quad \eta_0 > 0, \quad \lambda \geq 0. \quad (1.3)$$

Решение системы (1.1)–(1.3) ищется в виде

$$v_z = \frac{L \Delta p}{\eta_0} w(\xi), \quad p - p(0, L) = \Delta p \frac{P(\xi) \exp(a(1 - \xi)) - 1}{\exp(a) - 1}, \quad (1.4)$$

$$T = \exp \left(\frac{b + \theta(\xi) + a\xi}{\lambda} \right),$$

где $0 \leq \xi = r/R \leq 1$, $0 \leq \zeta = z/L \leq 1$ – безразмерные радиальная и осевая координаты; $a = \lambda AL$, $b = \lambda B$. Представление температуры в виде (1.4) обусловлено граничным условием (1.3) и необходимостью обеспечить положительность коэффициента вязкости $\eta(T)$.

Новая безразмерная неизвестная $P(\xi)$ удовлетворяет модифицированному уравнению Бесселя нулевого порядка с дополнительными условиями $P(0) = 1$, $P'(0) = 0$, так что

$$P = I_0(\alpha\xi) \geq 1, \quad P' = \alpha I_1(\alpha\xi) \geq 0. \quad (1.5)$$

Штрихом обозначается производная по переменной ξ ; $I_0(t)$, $I_1(t)$ – модифицированные функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков [14]. Функция $I_0(t)$ положительная, чётная, $I_0(t) = I_0(-t)$, монотонно растёт при $t > 0$ и $I_0(0) = 1$. Функция $I_1(t)$ нечётная, $I_1(-t) = -I_1(t)$, монотонно растёт на всей числовой прямой и $I_1(0) = 0$. Безразмерный параметр $\alpha = a\delta$ характеризует величину продольного градиента температуры на боковой поверхности трубы с учётом отношения радиального и осевого масштабов $0 < \delta = R/L < 1$. При $\alpha < 0$ температура стенки уменьшается вдоль рассматриваемого участка трубы, при $\alpha > 0$ – растёт.

Для безразмерной скорости $w(\xi)$ и её производной из (1.1)–(1.5) следуют выражения:

$$\alpha\delta Pe w = \theta'' + \frac{\theta'}{\xi} + \frac{\theta'\theta' + \alpha^2}{\lambda}, \quad w' = -\frac{\delta e^b}{1 - \exp(-\alpha/\delta)} I_1(\alpha\xi) \exp \theta \leq 0, \quad (1.6)$$

где $Pe = L^2 \Delta p / (\eta_0 \chi) \geq 0$ – число Пекле. Неравенство $w'(\xi) \leq 0$ вытекает из свойств монотонности и нечётности функции $I_1(t)$.

Формулы (1.5), (1.6) позволяют выписать явные выражения для давления и поля касательных напряжений

$$\begin{aligned} \frac{p - p(0, L)}{\Delta p} &= \frac{I_0(\alpha\xi) \exp(\alpha(1 - \zeta)/\delta) - 1}{\exp(\alpha/\delta) - 1}, \\ \frac{\sigma_{rz}}{\Delta p} &= -\frac{\exp(-\alpha\zeta/\delta)}{1 - \exp(-\alpha/\delta)} I_1(\alpha\xi) \leq 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Абсолютная величина $|\sigma_{rz}|$ минимальна на оси симметрии потока $|\sigma_{rz}(0, \zeta)| = 0$ и, монотонно возрастая в радиальном направлении, достигает максимума на твёрдой боковой поверхности трубы.

Вследствие (1.6) и граничных условий неизвестная $\theta(\xi)$ удовлетворяет краевой задаче:

$$\begin{aligned} \theta''' + \left(\frac{1}{\xi} + \frac{2}{\lambda} \theta' \right) \theta'' - \frac{\theta'}{\xi^2} &= -\beta I_1(\alpha\xi) \exp(\theta), \\ \theta'(0) = 0, \theta(1) = 0, \theta''(1) + \theta'(1) + \frac{\theta'(1)\theta'(1) + \alpha^2}{\lambda} &= 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

содержащей три параметра

$$\alpha = \lambda AR, \quad \beta = \frac{\alpha}{1 - \exp(-\alpha/\delta)} \exp(b)\delta^2 Pe \geq 0, \quad \lambda \geq 0.$$

Таким образом, задача (1.1)–(1.3) с помощью (1.4) сводится к системе (1.8).

2. АНАЛИЗ ЗАДАЧИ И РАСЧЁТЫ

В силу неравенства $w'(\xi) \leq 0$ (1.6) безразмерная скорость $w(\xi) \geq 0$ всегда максимальна на оси потока и монотонно убывает до нулевого значения на твёрдой границе. Подобным же образом ведёт себя $\theta(\xi)$ при $\alpha < 0$, так как из первого уравнения (1.6) вытекает, что

$$\theta' = \frac{\alpha\delta Pe}{\xi} \int_0^\xi t w dt - \frac{1}{\lambda\xi} \left[\frac{(\alpha\xi)^2}{2} + \int_0^\xi t \theta' \theta' dt \right].$$

При $\alpha > 0$ ($\lambda \neq \infty$) функция $\theta(\xi)$ может быть немонотонной и менять знак.

Если в уравнениях и граничных условиях (1.6), (1.8) отбросить слагаемые, содержащие в качестве множителя λ^{-1} , то получившаяся система описывает течение жидкости с экспоненциальной зависимостью коэффициента вязкости от температуры и линейным изменением последней вдоль потока [8, 15]:

$$\eta = \eta_0 \exp(-\lambda T), \quad \lambda T = b + \theta(\xi) + a\zeta, \quad T_0 = B + Az. \quad (2.1)$$

Иными словами, течение (2.1) соответствует главному члену разложения $\theta = \theta_0 + \lambda^{-1}\theta_1 + \lambda^{-2}\theta_2 + \dots$. Таким образом, для достаточно больших значений λ течения со степенной зависимостью коэффициента вязкости от температуры (1.3) близки к течениям (2.1) при одинаковых значениях параметров α, β . Выражения давления и вязких напряжений (1.7) остаются справедливыми для течений (2.1) [6]. Далее случай (2.1) обозначается “ $\lambda = \infty$ ”. В противоположной предельной ситуации, $0 \leq \lambda < 1$, главный член разложения $\theta = \lambda\theta_1 + \lambda^2\theta_2 + \dots$ ($\alpha = \lambda AR$) определяет распределению температуры на фоне изотермического течения Пуазейля с граничным условием (1.3).

При $\lambda = \infty$ произведение $\alpha\theta' > 0$ на полуинтервале $0 < \xi \leq 1$, поэтому функция $\theta(\xi) \leq 0$ минимальна на оси симметрии и монотонно растёт до нуля на боковой поверхности трубы при $\alpha > 0$.

В случае термовязкого течения потоки массы и тепла связаны между собой. Направление вектора плотности потока тепла

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T = -\kappa_0 T (\theta' \mathbf{e}_r + \alpha \mathbf{e}_z), \quad \kappa_0 = \frac{\kappa}{\lambda R}$$

зависит от $\theta'(\xi)$ и α . В частности, $\gamma = \theta'(1)$ характеризует плотность теплового потока через твёрдую границу. Тепло подводится к жидкости через боковую границу трубы при $\gamma > 0$ и отводится наружу при $\gamma < 0$. Величины γ и α входят в выражение для расхода

$$Q = 2\pi R \chi \delta \text{Pe} \int_0^1 \xi w d\xi = \frac{2\pi R \chi}{\alpha} \left[\gamma + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\alpha^2}{2} + \int_0^1 \xi \theta' \theta' d\xi \right) \right] \geq 0. \quad (2.2)$$

Согласно (2.2) при $\alpha < 0$ тепло отводится от жидкости через боковую поверхность трубы, то есть $\gamma \leq 0$. В случае $\lambda = \infty$ ($\mathbf{q}/\kappa_0 = -\theta' \mathbf{e}_r - \alpha \mathbf{e}_z$) безразмерный расход $G = Q/(2\pi R \chi)$ прямопропорционален плотности теплового потока через боковую поверхность трубы и обратнопропорционален плотности осевого потока тепла: $G = \gamma/\alpha \geq 0$.

Величины γ и G зависят от трёх параметров задачи (1.8), то есть $\gamma = \gamma(\alpha, \beta, \lambda)$, $G = G(\alpha, \beta, \lambda)$. Анализ этих зависимостей показывает, что существуют критические значения параметров $\alpha_1 < 0$, $\beta_1 > 0$, $\lambda_1 > 0$, ограничивающие область существования стационарных решений пуазейлевского типа (1.4). В частности при фиксированных значениях параметров β и λ , в случае убывания температуры вдоль боковой поверхности трубы ($\alpha < 0$), решение задачи вида (1.4) существовать лишь в ограниченном диапазоне значений параметра $\alpha_1(\beta, \lambda) \leq \alpha \leq 0$ (рис. 1, 2). При этом каждому α соответствуют два решения с одинаковыми полями давления и вязких напряжений (1.7), но различными плотностями теплового потока $\gamma \leq 0$ (рис. 1а, 2а) и безразмерными расходами G (рис. 1б, 2б). Таким образом, можно говорить о двух ветвях решения (*I*, *II*), смыкающихся при $\alpha = \alpha_1$. С увеличением β абсолютная величина критического значения $|\alpha_1|$ уменьшается (рис. 1), а с ростом λ увеличивается, достигая конечного максимума при $\lambda = \infty$ (рис. 2).

Оценить критическое значение α_1 можно, рассмотрев главный член разложения

$$\theta = \theta_0 + \beta\theta_1 + \beta^2\theta_2 + \dots \quad (0 \leq \beta < 1)$$

$$\theta_0 = \lambda \ln \frac{J_0(\alpha\xi/\lambda)}{J_0(\alpha/\lambda)} \quad (2.3)$$

описывающий распределение температуры в неподвижной жидкости ($\Delta p = 0$, $G = 0$). Выражение (2.3) имеет смысл если

$$-\lambda t_1 < \alpha < \lambda t_1, \quad (2.4)$$

где $t_1 \approx 2.405$ — наименьший положительный ноль функции Бесселя $J_0(t)$. Условия (2.4) можно переписать в виде ограничения на равновесный продольный градиент температуры A : $-2.405/R < A < 2.405/R$. Левая часть двойного неравенства (2.4) выступает в качестве оценки критического значения α_1 : $-2.405\lambda < \alpha_1 < 0$. В то же время численные расчёты показывают, что система (1.8) имеет решения

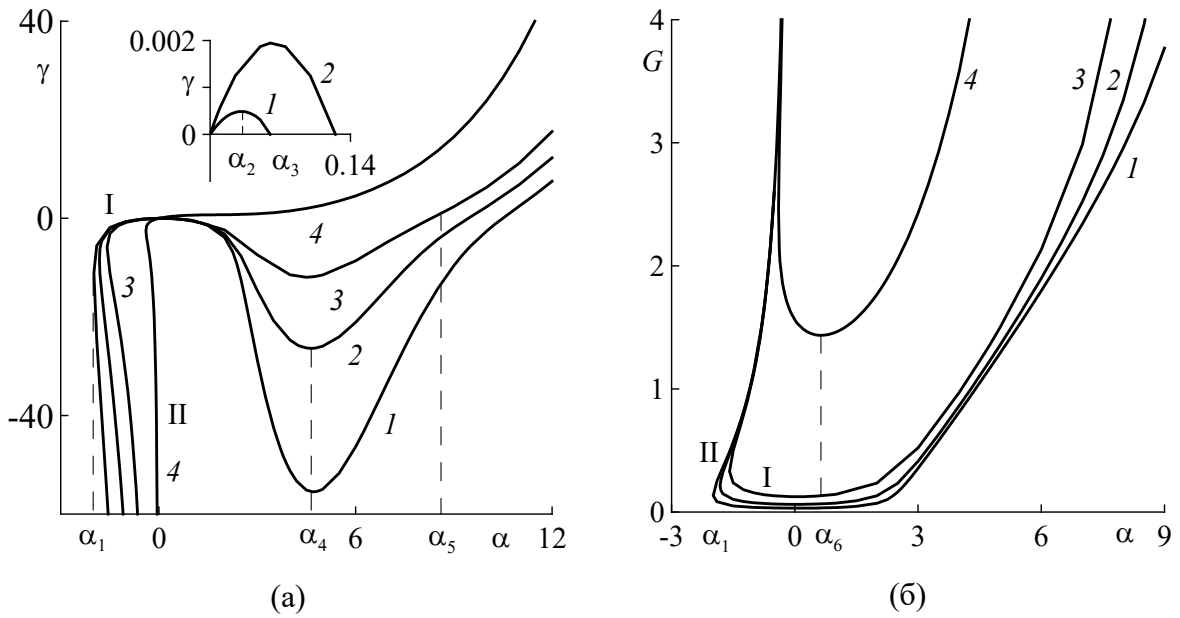


Рис. 1. Зависимости $\gamma(\alpha)$ (а) и $G(\alpha)$ (б) при $\lambda = 1$ и различных значениях параметра β : 1 – $\beta = 0.5$, $\alpha_1 = -1.987$; 2 – $\beta = 1$, $\alpha_1 = -1.818$; 3 – $\beta = 2$, $\alpha_1 = -1.587$; 4 – $\beta = 25$, $\alpha_1 = -0.610$.

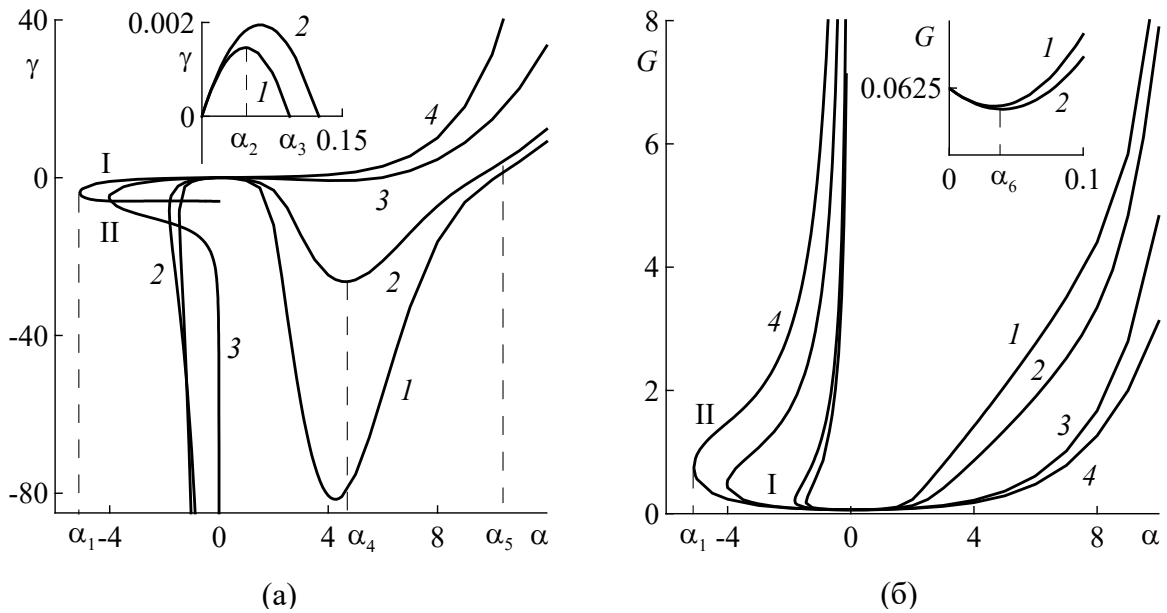


Рис. 2. Зависимости $\gamma(\alpha)$ (а) и $G(\alpha)$ (б) при $\beta = 1$ и различных значениях параметра λ : 1 – $\lambda = 0.75$, $\alpha_1 = -1.452$; 2 – $\lambda = 1$, $\alpha_1 = -1.818$; 3 – $\lambda = 5$, $\alpha_1 = -4.021$; 4 – $\lambda = \infty$, $\alpha_1 = -5.099$.

при $\alpha > 2.405\lambda$ (рис. 16). В этой области значений параметра α заметно увеличивается скорость роста кривых $G(\alpha)$, а зависимости $G(\beta)$, построенные по соответствующим решениям при фиксированных α, λ , не отвечают состоянию равновесия (2.3) с нулевым расходом (рис. 3а, кривые 3, 4), то есть использованное выше разложение перестаёт быть применимым. В области параметров $\alpha < 0, \lambda$, ограниченной левой частью неравенства (2.4), ветви решений I и II смыкаются по достижении критического значения $\beta_1(\alpha, \lambda) > 0$ (рис. 3б). Для $\beta > \beta_1$ решение задачи (1.8) не существует.

В случае $\lambda = \infty$ правая часть (2.3) обращается в ноль, что соответствует однородному в радиальном направлении распределению температуры (2.1). Оценка критических значений параметров задачи для течений с экспоненциальной зависимостью коэффициента вязкости от температуры (2.1)

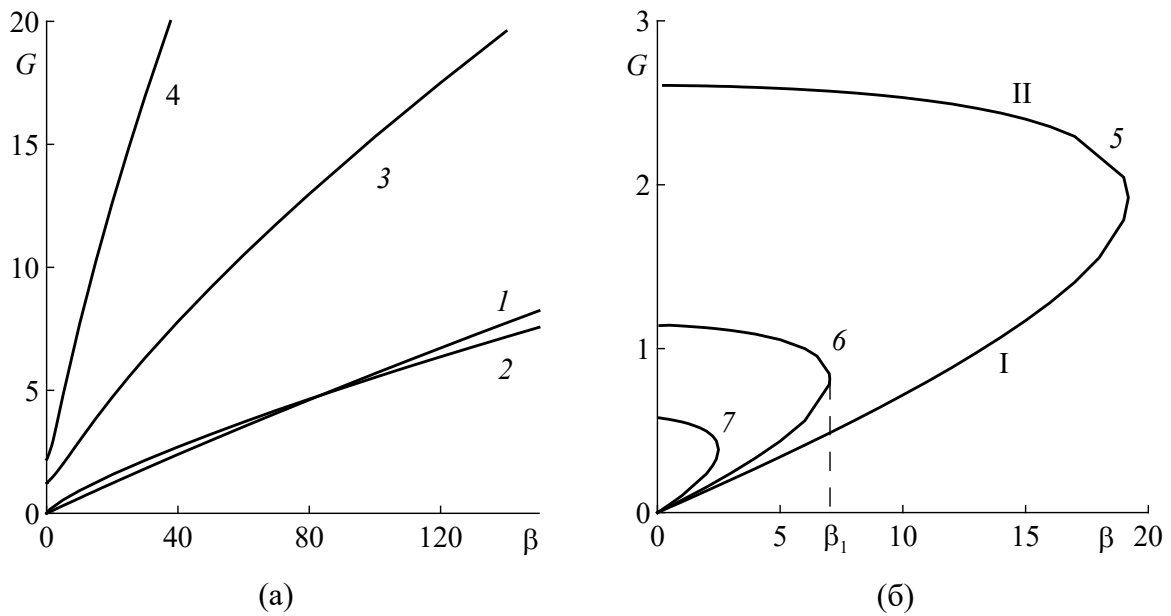


Рис. 3. Зависимость $G(\beta)$ при $\lambda = 1$ и различных положительных (а) и отрицательных (б) значениях параметра α : $1 - \alpha = 0.1$; $2 - \alpha = 2.2$; $3 - \alpha = 5$; $4 - \alpha_1 = 7$; $5 - \alpha = -0.5$, $\beta_1 = 19.187$; $6 - \alpha = -1$, $\beta_1 = 7.023$; $7 - \alpha = -1.5$, $\beta_1 = 2.491$.

выполнена в [8]. При $\lambda = \infty$ легко найти первые члены разложений w и θ по натуральным степеням β

$$\delta \text{Re} w = \frac{\beta}{\alpha^2} [I_0(\alpha) - I_0(\alpha\xi)] + \frac{\beta^2}{2\alpha^5} \left\{ [I_0(\alpha\xi) - I_0(\alpha)]^2 + \frac{\alpha^2}{2} (1 - \xi^2) I_0(\alpha) I_0(\alpha\xi) + \right. \\ \left. + \alpha I_0(\alpha) [\xi I_1(\alpha\xi) - I_1(\alpha)] \right\} + \dots, \quad \theta = \frac{\beta}{\alpha^3} \left[\frac{\alpha^2 I_0(\alpha)}{4} (\xi^2 - 1) + I_0(\alpha) - I_0(\alpha\xi) \right] + \dots \quad (2.5)$$

применимые, в том числе, при α заметно больших единицы.

При $|\alpha| < 1$ приближённое решение краевой задачи (1.8), соответствующее ветви I, может быть получено в виде разложения по степеням α

$$\theta = -\frac{\alpha\beta}{64} (\xi^4 - 4\xi^2 + 3) + \frac{\alpha^2}{147456} \left[3 \left(1 - \frac{3}{\lambda} \right) \beta^2 \xi^8 - 32 \left(1 - \frac{2}{\lambda} \right) \beta^2 \xi^6 + \right. \\ \left. + 36 \left(3 - \frac{4}{\lambda} \right) \beta^2 \xi^4 - 192 \left(\beta^2 + \frac{192}{\lambda} \right) \xi^2 + \left(113 + \frac{89}{\lambda} \right) \beta^2 + \frac{36864}{\lambda} \right] + \dots, \\ \delta \text{Re} w = \frac{\beta}{4} (1 - \xi^2) + \frac{\alpha\beta^2}{768} (\xi^6 - 6\xi^4 + 9\xi^2 - 4) - \frac{\alpha^2\beta}{983040} \left\{ \left(7 - \frac{3}{\lambda} \right) \beta^2 \xi^{10} - \right. \\ \left. - \frac{20}{3} \left(11 - \frac{4}{\lambda} \right) \beta^2 \xi^8 + 40 \left(7 - \frac{2}{\lambda} \right) \beta^2 \xi^6 - 40 \left[13\beta^2 - 384 \left(1 - \frac{2}{\lambda} \right) \right] \xi^4 + \right. \\ \left. + \frac{5}{3} \left[\left(275 + \frac{89}{\lambda} \right) \beta^2 + \frac{36864}{\lambda} \right] \xi^2 - 4 \left(38 + \frac{23}{\lambda} \right) \beta^2 - 15360 \left(1 + \frac{2}{\lambda} \right) \right\} + \dots \quad (2.6)$$

Для вычисления (2.6) использовано представление модифицированной функции Бесселя $I_1(t)$ в виде степенного ряда [14]. С уменьшением теплового воздействия на поток ($a \rightarrow 0$) безразмерная скорость (2.6) стремится к решению Пуазейля $w = \delta^2 (1 - \xi^2)/4$. При $\beta = 0$ из (2.6) следует приближённое выражение для (2.3): $\theta_0 \approx \alpha^2 (1 - \xi^2)/(4\lambda)$. Представление о характере зависимостей γ и G от парамет-

ров задачи дают выражения, вычисленные с помощью (2.6):

$$\begin{aligned}\gamma(\alpha, \beta, \lambda) &\approx \frac{\alpha\beta}{16} - \frac{\alpha^2}{6144\lambda} [(5\lambda + 11)\beta^2 + 3072], \\ G(\alpha, \beta, \lambda) &\approx \frac{\beta}{16} - \frac{5}{6144}\alpha\beta^2 + \frac{\alpha^2\beta}{5898240\lambda} [(119\lambda + 99)\beta^2 + 307020(1 + \lambda)].\end{aligned}\quad (2.7)$$

Структура приближённых выражений (2.6) и их следствий (2.7) позволяет смотреть на них не только как на разложения при $|\alpha| < 0$, но и как на первые члены разложений по параметрам $0 \leq \beta < 1$, $0 \leq \lambda^{-1} < 1$.

В области $\alpha_1 \leq \alpha \leq 0$ зависимости $\gamma(\alpha)$, $G(\alpha)$, рассчитанные по решениям, принадлежащим ветви I, при фиксированных значениях параметров β и λ , монотонны. Каждая функция $\gamma(\alpha)$ растёт от значения $\gamma(\alpha_1) < 0$, до $\gamma(0) = 0$ (рис. 1а, 2а; (2.7)). Функции $G(\alpha)$ – убывающие (рис. 1б, 2б; (2.7)). В случае $\alpha < 0$ продольный тепловой поток сонаправлен с потоком массы, формирующий при этом радиальный поток тепла направлен наружу, $\gamma < 0$. Абсолютная величина вязких напряжений $|\sigma_{rz}|$ (1.7) и коэффициент вязкости $\eta \sim \exp(-\theta - \alpha\xi/\delta)$ растут вниз по потоку жидкости и от центра к периферии. Всё это способствует торможению течения у твёрдой стенки тем больше, чем больше $|\gamma|$ (рис. 4а).

В области $\alpha \geq 0$ осевой поток тепла направлен против течения жидкости, следовательно, согласно (1.7), силы вязкого трения убывают вниз по потоку. Режим теплообмена через твёрдую границу зависит от соотношения параметров задачи α , β , λ . При небольших β , λ функции $\gamma(\alpha)$ обращаются в ноль при $\alpha = 0$, $\alpha = \alpha_3$, $\alpha = \alpha_5$ и имеют локальные максимум и минимум при $\alpha = \alpha_2 \in (0, \alpha_3]$, $\gamma(\alpha_2) > 0$ (см. (2.7)) и $\alpha = \alpha_4 \in [\alpha_3, \alpha_5]$, $\gamma(\alpha_4) \leq 0$ (рис. 1а, 2а, кривые 1–3). Жидкость поглощает тепло через твёрдую границу ($\gamma > 0$) при $0 < \alpha < \alpha_3$, $\alpha > \alpha_5$ и отдаёт его ($\gamma < 0$) при $\alpha_3 < \alpha < \alpha_5$. В случае подвода тепла функция $\theta(\xi)$ монотонно растёт в радиальном направлении от $\theta(0) < 0$, до $\theta(1) = 0$ (рис. 4б, кривые 1; рис. 4г, кривые 3), поэтому коэффициент вязкости η максимален на оси симметрии потока. При слабой теплоотдаче, то есть при α близких к границам интервала $\alpha_3 < \alpha < \alpha_5$, функция $\theta(\xi)$ немо-

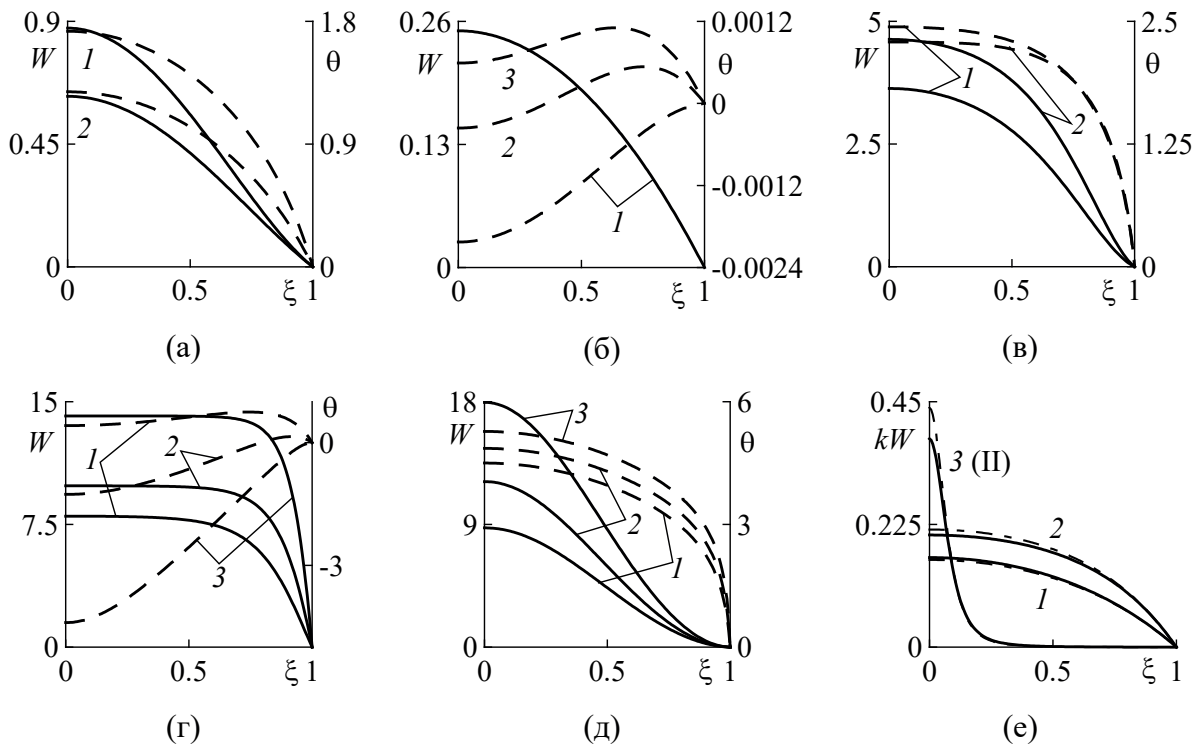


Рис. 4. Профили безразмерной скорости $W(\xi) = \delta \text{Re} w(\xi)$ (—) и $\theta(\xi)$ (---) при различных значениях параметров задачи: $\beta = 1$, $\lambda = 1$; (а) 1 – $\alpha = -1.8$, 2 – $\alpha = -1.7$; (б) 1 – $\alpha = 0.12$, 2 – $\alpha = 0.18$, 3 – $\alpha = 0.2$; (в) 1 – $\alpha = 4$, 2 – $\alpha = 4.7$; (г) 1 – $\alpha = 7.5$, 2 – $\alpha = 8.5$, 3 – $\alpha = 9.5$; (д) ветвь II, 1 – $\alpha = -0.9$, 2 – $\alpha = -0.7$, 3 – $\alpha = -0.5$; (е) $\beta = 0.5$, $\lambda = \infty$, 1 – $\alpha = -2$, $k = 1$, 2 – $\alpha = 3$, $k = 1$, 3 – $\alpha = -2.25$ (ветвь II), $k = 10^{-4}$, (штрихпунктирные кривые – приближённые решения).

нотонна и может менять знак (рис. 4б, кривые 2, 3; рис. 4г кривые 1, 2). Интенсивный теплоотвод, при α близких к α_4 , приводит к торможению жидкости вблизи твёрдой границы (рис. 4в), как и в описанном ранее случае $\alpha < 0$. Отличие между этими двумя режимами заключается в более “наполненных” профилях безразмерной скорости и монотонно убывающей функции $\theta(\xi)$ при $\alpha > 0$ (сравниваются рис. 4а и 4в). Последнее означает, что коэффициент вязкости убывает быстрее по направлению к оси симметрии, чем в случае $\alpha < 0$, также он уменьшается вдоль этой оси вместе с $|\sigma_{rz}|$. При достаточно больших значениях параметра α (например, $\alpha \geq \alpha_5$) профиль скорости напоминает “стержневое” течение, так как скорость отличается от постоянной лишь в сравнительно узкой области у твёрдой границы (рис. 4г). С увеличением параметров β и λ зависимости $\gamma(\alpha)$ становятся положительными, а затем монотонными (рис. 1а, б, кривые 4). Кривые зависимости безразмерного расхода от параметра α , $G(\alpha)$, построенные для различных фиксированных значений β и λ , имеют минимум при $\alpha = \alpha_5(\beta, \lambda)$ (рис. 1б, 2б и вторая формула (2.7)).

Решения задачи (1.8), принадлежащие ветви II, существуют лишь в той области пространства параметров, где $\alpha_1(\beta, \lambda) \leq \alpha < 0$. Здесь безразмерный расход G — монотонно растущая функция параметра α (рис. 1б, 2б). Как и в случае $\lambda = \infty$, при достаточно малых значениях β , λ^{-1} зависимость $\gamma(\alpha) < 0$ имеет до двух локальных экстремумов, исчезающих по мере увеличения этих параметров (рис. 1а, 2а) [15]. С уменьшением внешнего теплового воздействия на поток жидкости ($\alpha \rightarrow -0$) безразмерный расход и теплоотдача через твёрдую стенку неограниченно растут, $G \rightarrow \infty$, $\gamma \rightarrow -\infty$, (рис. 1, 2), что представляется парадоксальным. Отвод тепла наружу через боковую поверхность трубы вновь приводит к торможению потока вблизи неё (рис. 4д). Особенно отчётливо такое поведение поля скорости проявляется в случае $\lambda = \infty$. При $-1 \ll \alpha < 0$ движение сосредоточено в области небольшого радиуса около оси симметрии, за пределами которой жидкость почти неподвижна (рис. 4е, кривая 3).

Случай $\lambda = \infty$ отличается тем, что для решений, принадлежащих ветви II, при $\alpha \rightarrow -0$ плотность безразмерного теплового потока через твёрдую границу γ стремится к постоянному значению ($\gamma \rightarrow -6$) независимо от величины параметра β (рис. 2а, кривая 4) [15]. При этом расход неограниченно растёт, так как $G = \gamma/\alpha$. Убедиться в этом можно следующим образом. Полагая, что $-1 < \alpha < 0$, в (1.8) (слагаемые с множителем λ^{-1} отброшены) можно принять $I_1(\alpha\xi) \approx \alpha\xi/2$. Получившаяся задача имеет решение

$$\theta_* = 3 \ln \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon + \xi^2}, \quad \frac{\alpha\beta}{96} = -\frac{\varepsilon}{(\varepsilon + 1)^3}. \quad (2.8)$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — новый параметр. Решение (2.8) удовлетворяет двум первым граничным условиям (1.8), а последнее условие $\theta''(1) + \theta'(1) = -12\varepsilon(\varepsilon + 1)^{-2}$ выполняется в двух предельных случаях: $\varepsilon \rightarrow +\infty$, $\varepsilon \rightarrow +0$. Первый случай соответствует ветви решения I, второй — ветви II. Ветви смыкаются в точке минимума правой части второго выражения (2.8) при $\varepsilon = 1/2$, $\alpha\beta = -128/9$. Последнее соотношение нельзя использовать как количественную связь между критическими значениями параметров, по достижении которых решение задачи перестаёт существовать, но качественно (2.8) верно описывает исчезновение трения.

Безразмерная плотность теплового потока через твёрдую границу равна $\gamma = \theta'(1) = -6/(\varepsilon + 1)$, следовательно, $\gamma \rightarrow -6$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ ($\alpha \rightarrow -0$) для любого фиксированного β , что согласуется с результатами численных расчётов [15] (рис. 2а, кривая 4).

Для того чтобы последнее граничное условие (1.8) выполнялось точнее можно рассмотреть аддитивную поправку $\Theta(\xi, \varepsilon)$ к (2.8). Для решений, относящихся к ветви I, $\Theta(\xi, \varepsilon)$ удобно представить в виде ряда по натуральным степеням ε^{-1} , то есть

$$\theta = \theta_* + \varepsilon^{-1}\Theta_1 + \varepsilon^{-2}\Theta_2 + \dots = 3 \ln \frac{1 + \varepsilon^{-1}}{1 + \varepsilon^{-1}\xi^2} + 3(\varepsilon^{-1} - 2\varepsilon^{-2})(\xi^2 - 1) + \dots$$

В результате $\theta''(1) + \theta'(1) \sim -12\varepsilon^{-3}$ ($\varepsilon \rightarrow +\infty$).

Если для решений, принадлежащих ветви II, искать поправку в виде

$$\Theta(\xi, \varepsilon) = \varepsilon\Theta_1 + \varepsilon^2\Theta_2 + \varepsilon^3\Theta_3 + \dots,$$

то оказывается, что, начиная с Θ_2 , все коэффициенты сингулярны при $\xi = 0$. Это связано с тем, что точка $(\xi, \varepsilon) = (0, 0)$ особая для решения (2.8) в отличие от регулярной точки $(\xi, \varepsilon) = (0, +\infty)$. Поэтому,

ограничиваясь лишь линейным по ε слагаемым, можно написать

$$\theta \approx 3 \ln \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon + \xi^2} + 3\varepsilon (\xi^2 - 1), \quad \delta \text{Re}_w \approx \frac{\beta}{8} (\varepsilon + 1)^3 \left[\frac{1}{(\varepsilon + \xi^2)^2} - 1 \right]. \quad (2.9)$$

Приближённое решение (2.9) для ветви II, как и (2.5) для ветви I, близки к результатам численных расчетов, в том числе, при α несколько больших единицы (рис. 4е, штрихпунктирные кривые).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задача о стационарном осесимметричном течении Пуазейля жидкости с коэффициентом динамической вязкости, зависящим от температуры по степенному закону, сводится к трёхпараметрической краевой задаче для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка. Течение с экспоненциальной зависимостью коэффициента вязкости от температуры является его предельным случаем при (бесконечно) больших значениях показателя степени.

В случае понижения температуры боковой поверхности трубы в направлении от входного сечения к выходному, тепловой поток через твёрдую стенку оказывается направленным наружу. При этом решение задачи существует лишь в ограниченной области значений параметров. Каждой точке внутри этой области соответствуют два решения, принадлежащие двум разным ветвям, смыкающимся на границе области существования. По-видимому, физический смысл имеют лишь решения, принадлежащие ветви, переходящей в изотермическое течение Пуазейля при уменьшении внешнего теплового воздействия.

В случае роста температуры боковой поверхности трубы вниз по потоку, характер теплообмена через твёрдую границу зависит от соотношений величин трёх параметров задачи. Режимам с отводом тепла от потока жидкости соответствует лишь ограниченная область пространства параметров. Точкам за её пределами соответствуют решения, описывающие течения с поглощением тепла жидкостью.

Независимо от режима теплообмена на границе скорость жидкости максимальна на оси симметрии течения и монотонно убывает до нуля на твёрдой границе. Отвод тепла через боковую границу способствует торможению потока возле неё. Подвод тепла извне делает профиль скорости более “наполненным”, вплоть до формирования почти однородного течения с тонким пограничным слоем у боковой поверхности трубы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (тема № 121031700169-1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Евдокимов И.Н., Елисеев Н.Ю. Молекулярные механизмы вязкости жидкости и газа. Ч. 1. М.: РГУ нефти и газа им. И.Н. Губкина, 2005. 59 с.
2. Kulikov Yu. M., Son E.E. Fluid flow with abrupt viscosity – temperature dependence // High Temp. 2014. V. 52. № 5. P. 723–729.
3. Регирер С.А. Влияние теплового эффекта на вязкое сопротивление в установившемся одномерном течении капельной жидкости // Прик. мат. и мех. 1958. Т. 22. В. 3. С. 414–418.
4. Каганов С.А. Об установившемся ламинарном течении несжимаемой жидкости в плоском канале и круглой цилиндрической трубе с учётом теплоты трения и зависимости вязкости от температуры // Прик. мех. и тех. физ. 1962. № 3. С. 96–99.
5. Худяев С.И. Об одном классе интегрируемых уравнений в задачах горения и гидродинамики // Мат. моделирование. 1995. Т. 7. № 1. С. 35–60.
6. Найдёнов В.И. Об автомодельности одной задачи конвективного теплообмена // Прик. мех. и тех. физ. 1974. № 5. С. 152–153.
7. Аристов С.Н. Стационарное течение несжимаемой жидкости с переменной вязкостью // Доклады РАН. 1998. Т. 359. №. 5. С. 625–628.
8. Найдёнов В.И., Полянин А.Д. О некоторых нелинейных конвективно-тепловых эффектах в теории фильтрации и гидродинамике // Доклады АН СССР. 1984. Т. 279. № 3. С. 575–579.

9. Аристов С.Н., Зеленина В.Г. Влияние теплообмена на пуазейлевское течение с переменной вязкостью // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 2. С. 75–80.
10. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука. 1989. 320 с.
11. Поляков А.Ф. Установившееся вязко-термогравитационное течение капельной жидкости и теплообмен в вертикальной полости при асимметричных тепловых условиях // Теплофиз. выс. темп. 2014. Т. 55. В. 1. С. 78–83.
12. Хорин А.Н., Конюхова А.А. Течение Куэтта горячего вязкого газа // Вестн. Сам. гос. тех. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. № 2. С. 365–378.
13. Брутян М.А., Ибрагимов У.Г. Автомодельное несимметричное течение вязкого газа в клине // Прик. мат. и мех. 2022. Т. 86. В. 5. С. 741–752.
14. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М.: Наука. 1968. 344 с.
15. Князев Д.В. Течение Пуазейля термовязкой жидкости под действием продольных градиентов давления и температуры // Пермские гидродинамические научные чтения. Сборник докладов. Пермь. 2023. 510 с. <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/sborniki/permskie-gidrodinamicheskie-nauchnyechteniya-2023.pdf>.

AXISYMMETRIC POISEUILLE FLOW WITH TEMPERATURE-DEPENDENT VISCOSITY UNDER PRESSURE AND TEMPERATURE GRADIENTS

D.V. Knyazev^{a,*}

^a *Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch
of the Russian Academy of Sciences, Perm, Russia*

*e-mail: dvk@icmm.ru

Abstract—The study of steady-state axisymmetric Poiseuille flow of a Newtonian fluid induced by streamwise pressure and temperature gradients in the case of the dynamic viscosity coefficient dependent on the temperature is reduced to finding solutions to a three-parameter boundary-value problem for a third-order ordinary differential equation. In the domain of the parameter space corresponding to negative axial temperature gradients, there exist two branches of solutions describing flows accompanied by heat removal from the fluid. When the branches meet, they form a boundary in the phase space beyond which no solutions to the Poiseuille-type problem exist. One of the branches can be continued into the domain of non-negative values of the streamwise temperature gradient and contains an isothermal Poiseuille solution. Along this branch, curve of the flow rate as a function of the dimensionless axial temperature gradient has a minimum in the domain of positive values of the latter. In this part of the parameter space, the heat exchange regime with the external medium depends on the relation between all three dimensionless numbers of the problem. The heat exchange regime affects the nature of flow, slowing down the flow near the rigid wall during heat transfer, and forming a more filled velocity profile when heat is absorbed by fluid.

Keywords: Poiseuille flow, temperature dependence of viscosity, branching of solutions