

ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ РАДИАЦИОННО-КОНДУКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

© 2024 г. В. В. Завьялов^{a,*}

^aРоссийский федеральный ядерный центр Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики им. акад. Е.И. Забабахина, Снежинск, Россия

*e-mail: v.v.zavyalov@vniitf.ru

Поступила в редакцию 27.08.2024 г.

После доработки 08.10.2024 г.

Принята к публикации 08.10.2024 г.

Рассматривается точное автомодельное решение типа бегущей тепловой волны для нестационарной нелинейной системы радиационно-кондуктивного теплообмена в декартовой геометрии. Радиационная составляющая рассматривается в кинетической модели при специально подобранных коэффициентах поглощения и рассеяния. Приводится пример тестовой задачи в плоской геометрии.

Ключевые слова: теплоперенос, точное решение

DOI: 10.31857/S1024708424060019, **EDN:** FETWCS

ВВЕДЕНИЕ

Аналитические решения для уравнений математической физики очень важны в качестве тестов для численных методов. Их ценность резко возрастает, если они качественно моделируют физические процессы. В 1963 году была опубликована работа [1], где были рассмотрены различные варианты точных решений для квазилинейного уравнения теплопроводности. В 1979 году сотрудниками РФЯЦ–ВНИИТФ было предложено точное автомодельное решение уравнения переноса фотонов в плоском слое для нестационарной кинетической модели в чисто поглощающей среде [2]. Для построения решения было предложено использовать предопределенный вид коэффициента поглощения, пропорциональность внутренней энергии четвертой степени температуры и представление температуры через автомодельную переменную. Этот подход оказался весьма плодотворным, он успешно развивался, и предложенный класс точных решений используется в РФЯЦ–ВНИИТФ [3–9]. В данной работе показана возможность применения рассматриваемой методологии построения точных решений для сложного радиационно-кондуктивного теплообмена.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Система уравнений, описывающая радиационно-кондуктивный теплообмен в неподвижной среде, состоит из спектрального кинетического уравнения переноса, описывающего перенос, поглощение и рассеяние теплового излучения, уравнения энергии, описывающего изменение температуры с учетом теплопроводности. Согласно [10], уравнения в равновесном спектральном случае для изотропного рассеяния

$$\begin{cases} \frac{\partial I_v}{\partial t} + \Omega \cdot \nabla I_v + \alpha_v I_v = \frac{\alpha_{cv}}{4\pi} B_v + \frac{\alpha_{sv}}{4\pi} \int_{\Omega} I_v d\Omega, \\ \rho \frac{\partial E}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{S}_c + \int_0^{\infty} \alpha_{cv} \left(\int_{\Omega} I_v d\Omega - B_v \right) dv, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $I_v(\mathbf{r}, \Omega, v, t)$ — интенсивность излучения в точке с радиус-вектором \mathbf{r} в момент времени t в направлении Ω , $\alpha_v(T, v) = \alpha_{cv}(T, v) + \alpha_{sv}(T, v)$ — коэффициент ослабления, равный сумме коэффициентов поглощения и рассеяния, $T(\mathbf{r}, t)$ — температура вещества, $E(T)$ — удельная внутренняя энергия вещества, σ, p — положительные константы, $B_v(v, T) = pv^3(e^{v/T} - 1)^{-1}$ — функция Планка ($B(T) = \sigma T^4$ — в приближении “серой материи”), $\rho(\mathbf{r}, t)$ — плотность вещества, $\mathbf{S}_c = -k\nabla T$ — вектор потока кондуктивного тепла, $k(\mathbf{r}, T)$ — коэффициент теплопроводности, v — энергия фотонов.

Для системы уравнений (1.1) в области Γ пространства \mathbb{R}^n с замкнутой границей $\bar{\Gamma}$ решается смешанная задача с начальными и граничными условиями

$$I_v(\mathbf{r}, \Omega, t = 0) = I_v^0(\mathbf{r}, \Omega), \quad I_v(\mathbf{r} \in \bar{\Gamma}, \mathbf{n} \cdot \Omega < 0, t) = I_v(\mathbf{r} \in \bar{\Gamma}, \Omega, t), \quad (1.2)$$

$$T(\mathbf{r}, t = 0) = T^0(\mathbf{r}),$$

$$T(\mathbf{r} \in \bar{\Gamma}, t) = T_{\bar{\Gamma}}(\mathbf{r}, t), \quad (1.3)$$

где \mathbf{n} — внешняя нормаль к $\bar{\Gamma}$. Для учета явления кондуктивной теплопроводности ограничимся граничными условиями первого рода (1.3).

Система (1.1) описывает нестационарный перенос излучения. Отметим, что в работе [11] доказывается существование и единственность решения даже для более сложного случая теплообмена с дополнительным учетом ионной теплопроводности.

2. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Аналогично [8] будем рассматривать многокомпонентную гомогенную смесь, состоящую из \hat{m} веществ, которая удовлетворяет модели [11]

$$\hat{z}_v = \sum_m c_m \hat{z}_{v,m}, \quad \sum_m c_m = 1,$$

где \hat{z}_v — некоторая характеристика вещества, c_m — массовая доля вещества, $m = 1, 2, \dots, \hat{m}$ — индекс вещества. Также, предполагая степенную зависимость энергии вещества от температуры, представим уравнение состояния в форме $E_* = \tilde{C}_{V,*} T^{\tilde{h}_*}$, где $\tilde{C}_{V,*}(T) = \sum_m c_m \tilde{C}_{V,*m}(T)$ — удельная теплоемкость вещества, $\tilde{h}_* > 0$ — показатель степени, и символ $*$ определяет тип переноса тепла.

Рассмотрим отдельно уравнения, описывающие кондуктивную и радиационную составляющие. Перенос тепла за счет теплопроводности записывается так

$$\rho \frac{\partial E_C}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T), \quad (2.1)$$

а система уравнений лучистого переноса энергии

$$\begin{cases} \frac{\partial I_v}{\partial t} + \Omega \cdot \nabla I_v + \alpha_v I_v = \frac{\alpha_{cv}}{4\pi} B_v + \frac{\alpha_{sv}}{4\pi} \int_{\Omega} I_v d\Omega, \\ \rho \frac{\partial E_R}{\partial t} = \int_0^\infty \alpha_{cv} \left(\int_{\Omega} I_v d\Omega - B_v \right) dv. \end{cases} \quad (2.2)$$

Для уравнения (2.1) в работе [1] рассматривается набор различных точных решений и, в частности, бегущая тепловая волна, распространяющаяся с постоянной скоростью. Пусть $k = k_0 T$, $T = \xi$ и $\xi(\mathbf{r}, t)$ — автомодельная переменная, тогда в многомерном случае для гомогенной смеси ее можно описать

$$\xi = \xi_1 (\xi_1 t + \xi_{\nabla} \mathbf{r} + \xi_0), \quad \xi_{\nabla} = \frac{\nabla \xi}{\xi_1}, \quad \tilde{C}_{V,C} = k_0 (\nabla \xi)^2 \left(\rho \frac{\partial \xi}{\partial t} T^{\tilde{h}_C - 1} \right)^{-1}, \quad (2.3)$$

где $\xi_1, \xi_0, k_0 > 0$ — константы.

Решение системы (2.2) ищем в виде

$$T = \xi, \quad I_v = B_v f, \quad \alpha_{sv,m} = \alpha_{s0} \alpha_{cv,m}, \quad \alpha_{cv,m} = \alpha_{c0,m} \frac{\partial \ln B_v}{\partial \xi}.$$

Здесь $f(\mathbf{r}, \Omega) > 0$ – некоторая функция, $\alpha_{c0} > 0$, $\alpha_{s0} \geq 0$ – константы. Подставляя эти выражения в (2.2), получим

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1 (\xi_1 t + \xi_v \cdot \mathbf{r} + \xi_0), \quad -1 \leq \mu = \cos(\Omega \cdot \xi_v) \leq 1, \\ f &= \frac{\delta \gamma}{4\pi (1 - \alpha_{s0} \hat{f}) (1 + \gamma \mu)}, \quad \int_{\Omega} f d\Omega = \frac{\hat{f}}{1 - \alpha_{s0} \hat{f}}, \quad \hat{f} = \delta \text{Arth} \gamma, \\ \gamma &= \frac{|\nabla \xi|}{\alpha_{c0} (1 + \alpha_{s0}) + \frac{\partial \xi}{\partial t}}, \quad \delta = \frac{\alpha_{c0}}{\nabla \xi}, \quad \tilde{C}_{V,R} = \frac{16\pi \alpha_{c0} \sigma T^{4-\tilde{h}_r} ((1 + \alpha_{s0}) \hat{f} - 1)}{\rho \tilde{h}_r \frac{\partial \xi}{\partial t} (1 - \alpha_{s0} \hat{f})}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Очевидно, что $\tilde{C}_V(T)$ будет константой только в случае $\tilde{h} = 4$. Таким образом, получено решение для нестационарного случая [8]. Если рассмотреть квазистационарный режим ($\frac{\partial I_v}{\partial t} = 0$), то достаточно положить в (7) $\frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$ для параметра γ [8]. Сопоставляя формулы (2.3) и (2.4), легко убедиться, что вид автомодельной переменной ξ совпадает и, выбирая двучленное уравнение состояния в виде

$$E = E_R + E_C = \left(\frac{16\pi \alpha_{c0} \sigma T^{4-\tilde{h}_R} ((1 + \alpha_{s0}) \hat{f} - 1)}{\tilde{h}_R (1 - \alpha_{s0} \hat{f})} T^{\tilde{h}_R} + \frac{k_0 (\nabla \xi)^2}{\tilde{h}_C T^{\tilde{h}_C - 1}} T^{\tilde{h}_C} \right) \left(\rho \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^{-1},$$

мы получим точное решение системы (1.1). В работе [6] рассматривается автомодельное точное решение для системы уравнений, описывающей перенос лучистой энергии в приближении спектральной диффузии. Автомодельная переменная имеет тот же вид, как и в (2.3), (2.4), что позволяет предположить возможность построения аналогичного точного решения с учетом теплопроводности.

3. ПРИМЕР

В качестве примера рассмотрим задачу о прогреве холодной чисто поглощающей двухкомпонентной среды тепловой волной в приближении “серой материи” для плоского слоя. Важным фактом является наличие ограничений на выбор констант для рассматриваемого автомодельного решения, в частности, условие $\tilde{C}_V(T) > 0$. Для решения кинетического уравнения необходимо также выполнение условий $|\gamma| < 1$, $\alpha_{s0} \hat{f} > 1$. В начальный момент времени зададим фоновую температуру $T^0 = 0.0001$ и выберем следующий набор констант:

$$\begin{aligned} \hat{m} &= 2, \quad c_1 = 0.2, \quad c_2 = 0.8, \quad \alpha_{c0,1} = 5, \quad \alpha_{c0,2} = 2.5, \quad \alpha_{s0} = 0, \quad k_{0,1} = 9, \quad k_{0,2} = 4, \\ \rho_1 &= 0.2, \quad \rho_2 = 0.8, \quad \xi_1 = 1, \quad \xi_0 = 0, \quad \xi_v = -0.5, \quad \xi_t = 5, \quad \tilde{h}_r = 4, \quad \tilde{h}_c = 1. \end{aligned}$$

Тогда точное автомодельное решение для радиационно-кондуктивного переноса тепла описывается формулами

$$\begin{aligned} T &= \begin{cases} \xi = 5t - 0.5z, & T > T^0; \\ T^0, & T \leq T^0; \end{cases} \quad I^0 = B(T^0), \quad I = \begin{cases} fB = -\frac{3\gamma}{(1+\gamma\mu)} B, & T > T^0; \\ B, & T \leq T^0; \end{cases} \\ \tilde{C}_V &= \frac{6\sigma}{5} (\hat{f} - 1) T^3 + 0.25, \quad \gamma = -0.5/(3 + 5/3000), \quad \alpha_c = \frac{3}{T}, \quad k = 5T. \end{aligned}$$

Задача решалась в области $z \in [0, 0.25]$. Радиационный перенос энергии моделировался методом дискретных ординат с гауссовой квадратурой с 20 узлами. В качестве конечно-разностной схемы использовалась нелинейная TVD-подобная схема повышенного порядка точности с ограничителем Ван Альбада [12,13]. Уравнение теплопроводности аппроксимировалось конечно-разностной

схемой РОМБ [14]. Счет по времени осуществлялся по неявной схеме Эйлера первого порядка точности. Расчет велся до момента времени $t = 0.02$ с сеточным шагом по пространству $\Delta z = 0.002$ и по времени $\Delta t = 0.00001$. Заданная точность численного моделирования по температуре определялась величиной 10^{-6} .

Во многих приложениях интересны следующие характеристики теплового поля, которые для данного точного решения имеют вид

$$U = \int_{-1}^1 \frac{I}{c} d\mu = \frac{\delta \operatorname{Arth} \gamma}{c} B, \quad P = \int_{-1}^1 \mu^2 \frac{I}{c} d\mu = 2\delta \frac{\operatorname{Arth} \gamma - \gamma}{c\gamma^2} B,$$

$$S_R = \int_{-1}^1 \mu I d\mu = 2\delta \frac{\gamma - \operatorname{Arth} \gamma}{\gamma} B, \quad S_C = -k \frac{\partial T}{\partial z},$$

где U — плотность излучения, P — давление излучения, S_R — поток излучения, μ — косинус угла полета фотонов. Результаты расчетов и аналитические представления некоторых важных величин теплового поля для решения, представляющего собой линейную волну, исходящую из начала координат, представлены на рис. 1–3. Аналитические данные представлены сплошной линией, численные результаты — пунктирными линиями с маркерами.

Из расчета видно, что численные результаты для представленных величин хорошо совпадают с аналитическими. Заметное отличие наблюдается только для температуры на фронте прохождения тепловой волны. Приведенный пример показывает возможность применения рассматриваемого класса точных решений для исследования численных методов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлено точное автомодельное решение для спектральной нелинейной системы, описывающей перенос тепла для поглощающей, излучающей и изотропно рассеивающей среды

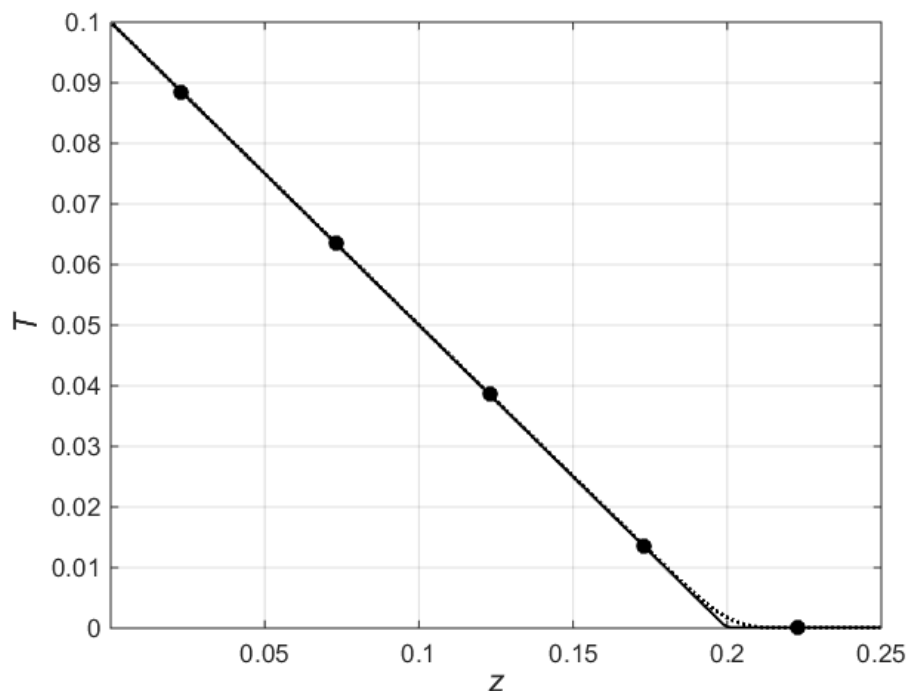


Рис. 1. Профили температуры T : сплошная линия — аналитическое решение, пунктирная линия с маркером — численное решение.

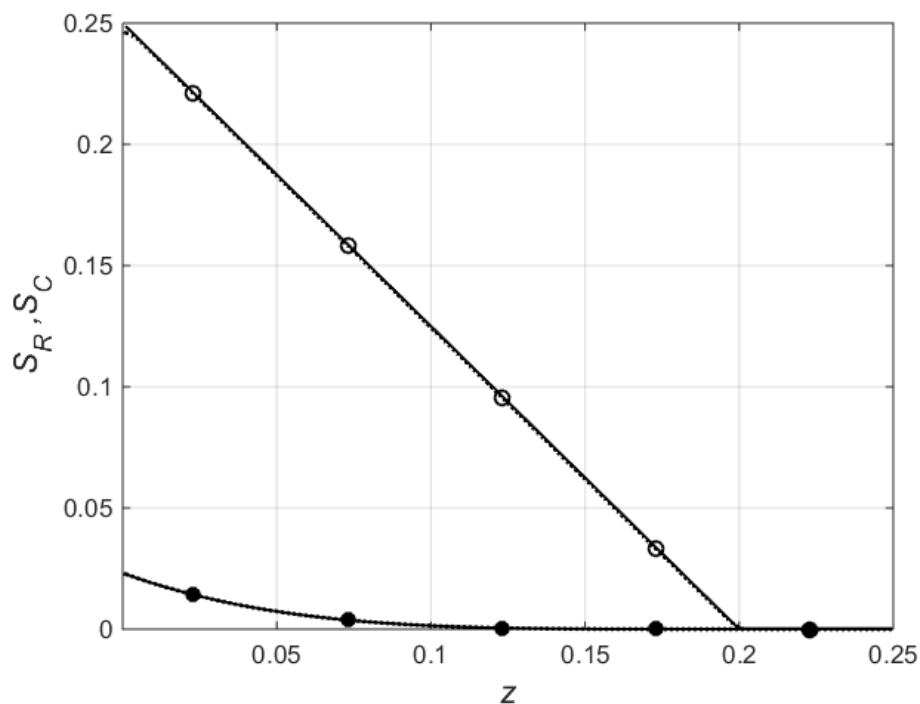


Рис. 2. Профили радиационного S_R (маркер окружность) и кондуктивного S_C (маркер точка) потоков, аналитические решения — сплошная линия.

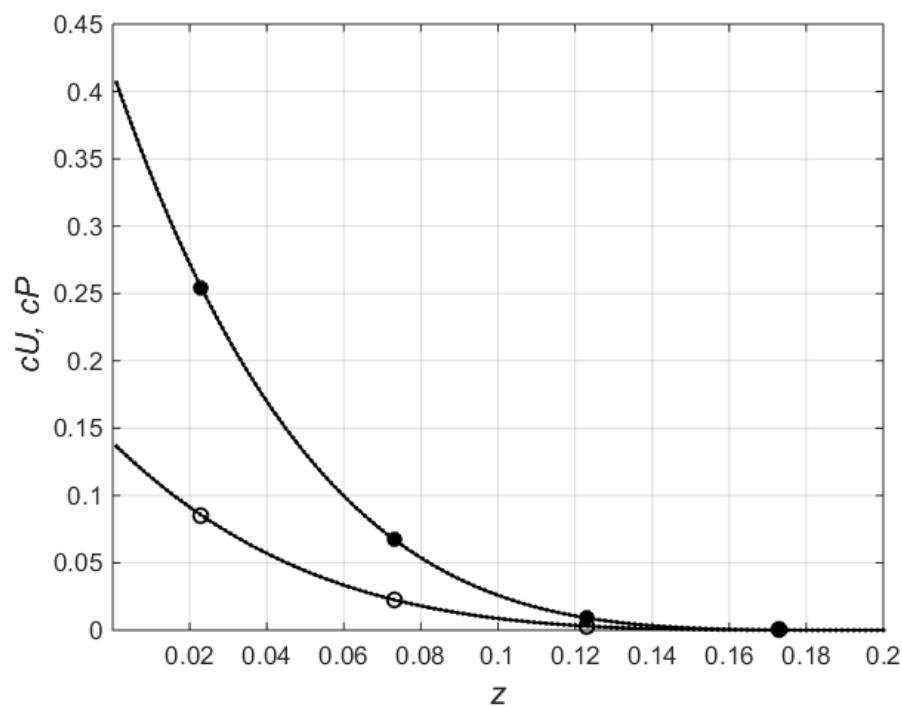


Рис. 3. Профили интегральной интенсивности cU (маркер точка) и давления излучения, умноженного на скорость света, cP (маркер окружность), аналитические решения — сплошная линия.

в кинетической модели с учетом теплопроводности в декартовой системе координат. Решение существует в случае нестационарного, квазистационарного и регулярного режимов для кинетического уравнения переноса. Несмотря на некоторые недостатки изложенного подхода, например, предопределенный вид коэффициентов поглощения и рассеивания, важным, по мнению автора, является простота реализации и описание интенсивности излучения I_ν . Это дает возможность получения других характеристик теплового поля, что особенно важно при разработке и отладке методов моделирования задач сложного теплообмена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А., Соболев И.М. Примеры численного решения температурных волн // ЖВМ и МФ. 1963. Т. 3. № 4. С. 702–719.
2. Думкина Г.В., Козманов М.Ю. Точное решение нелинейной системы уравнений энергии и нестационарного переноса излучения // ЖВМ и МФ. 1979. Т. 19. № 4. С. 1061–1063.
3. Андреев Е.С., Думкина Г.В., Козманов М.Ю. О некоторых точных решениях системы уравнений энергии и спектрального нестационарного переноса излучения // ЖВМ и МФ. 1981. Т. 21. № 4. С. 1054–1055.
4. Гусев В.Ю., Козманов М.Ю. О некоторых точных решениях системы уравнений энергии и переноса излучения с учетом рассеяния // ВАНТ. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1986. Вып. 3. С. 20–21.
5. Шестаков А.А. Об одном точном решении системы спектральных уравнений переноса лучистой энергии // ВАНТ. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1988. Вып. 2. С. 40–43.
6. Shestakov A.A., Zavyalov V.V., Andreev E.S. Analytical Solution of the System of Energy and Radiation Transport Equations for 1D Heterogeneous media // 2nd International Conference “From Scientific Computing to Computational Engineering”. 2006. Athens. P. 299–306.
7. Завьялов В.В., Козманов М.Ю., Селезнев В.Н., Черняков В.Е., Шестаков А.А. Результаты численных расчетов одномерных тестовых задач переноса излучения // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2005. Вып. 3. С. 26–36.
8. Завьялов В.В. Об одном классе аналитических автомодельных решений системы уравнений переноса излучения и энергии для гомогенной среды // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51. № 6. С. 931–936.
9. Завьялов В.В. Точное автомодельное решение системы уравнений переноса излучения в кинетической модели для регулярного режима // Теплофизика и аэромеханика. 2024. Т.31. № 1. С. 159–166.
10. Суржиков С.Т. Тепловое излучение газов и плазмы. М.: МГТУ им.Баумана, 2004. 544 с.
11. Козманов М.Ю. Принцип максимума для системы уравнений переноса излучения с учетом электронной и ионной теплопроводности // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1994. Вып. 3. С. 18–20.
12. Код ЭГИДА-2Д для моделирования двумерных задач. Саров: ФГУП “РФЯЦ–ВНИИЭФ”. 2008. — 344 с.
13. Гаджиев А.Д., Завьялов В.В., Шестаков А.А. Применение TVD подхода к DS_n методу решения уравнения переноса теплового излучения // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2009. Вып. 2. С. 37–48.
14. Писарев В.Н., Чернова С.В. Численная методика РОМБ решения трехмерного уравнения теплопроводности в криволинейной системе координат // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2007. Вып. 3, 4. С. 3–5.

AN EXACT SOLUTION FOR A TIME-DEPENDENT SYSTEM OF RADIATIVE-CONDUCTIVE HEAT TRANSFER EQUATIONS

V. V. Zaviyalov^{a,*}

^a *Russian Federal Nuclear Center, Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics,
Snezhinsk, Russia*

^{*}*e-mail: v.v.zaviyalov@vniitf.ru*

Abstract—An exact self-similar solution of the type of a traveling heat wave for the time-dependent nonlinear system of radiative-conductive heat transport equations in the Cartesian geometry is considered. The radiation component is considered in the kinetic model with specially adjusted absorption and scattering coefficients. An example of the test problem in the plane geometry is given.

Keywords: heat transfer, exact solution