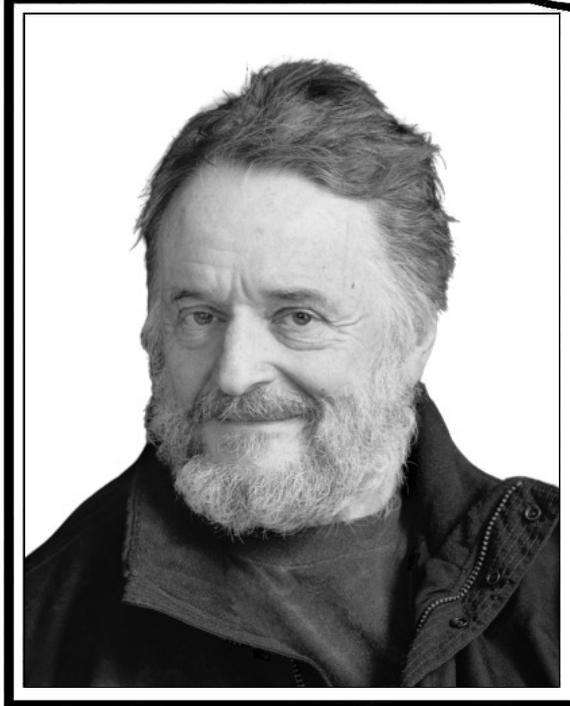


Трикладная Делнейная Динамика



*Джон Хортон Конвей
(26 декабря 1937 – 11 апреля 2020)*

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю. В. Гуляев, д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Институт радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН, Москва

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

И. В. Сысоев, д.ф.-м.н., профессор СГУ имени Н. Г. Чернышевского

А. Н. Чумаченко, д. геогр. н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В. М. Аникин, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского

Б. П. Безручко, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского

С. В. Гонченко, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ имени Н. И. Лобачевского

Н. С. Гинзбург, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент РАН,
Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

А. С. Дмитриев, д.ф.-м.н., профессор, Институт радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН, Москва

С. А. Кащенко, д.ф.-м.н., профессор, ЯрГУ имени П. Г. Демидова

П. С. Ланда, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М. В. Ломоносова

Г. Г. Малинецкий, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Москва

В. В. Матросов, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ имени Н. И. Лобачевского

В. И. Некоркин, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной физики РАН,
Нижний Новгород

А. В. Порубов, д.ф.-м.н., Институт проблем машиноведения РАН,
Санкт-Петербург

Ю. М. Романовский, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М. В. Ломоносова

В. В. Тучин, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент РАН,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского

А. М. Фейгин, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной физики РАН,
Нижний Новгород

В. А. Царёв, д.т.н., профессор, СГТУ имени Гагарина Ю. А., Саратов

М. В. Шитикова, д.ф.-м.н., профессор, Воронежский государственный
технический университет

В. Г. Яхно, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной физики РАН,
Нижний Новгород

S. Boccaletti, Ph.D. in Physics, Senior Researcher of Institute for Complex
Systems of the National Research Council, Sesto Fiorentino, Italy

A. V. Kraskov, Ph.D., Principal Investigator, UCL Institute of Neurology,
Sobell Department, London, UK

N. V. Kuznetsov, Visiting Professor, University of Jyväskylä, Finland

G. van Luijckelaar, Ph.D., Professor emeritus, Donders Centre for Cognition,
Radboud University Nijmegen, Nijmegen, The Netherlands

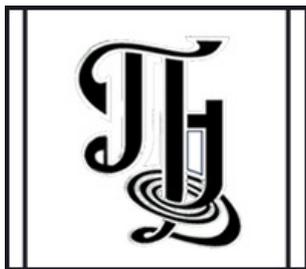
A. K. Lüttjohann, Ph.D., Postdoctoral researcher, Institut für Physiologie I,
Westfälische Wilhelms-Universität, Münster, Germany

A. B. Neiman, Dr. of Science, Physics and Mathematics, Associate professor
of Department of Physics and Astronomy, Ohio University, USA

A. S. Pikovsky, Dr. rer. Nat. habil., Professor, Universität Potsdam, Germany

A. N. Pisarchik, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid, Centre for
Biomedical Technology, Spain

V. A. Vakorin, Ph.D., Data Scientist, NeuroInformatics and NeuroAnalytics Lead,
ImageTech Lab, Simon Fraser University, Vancouver, Canada



**Известия высших учебных заведений
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

Научно-технический журнал

Издается с 1993 года, выходит 6 раз в год

Учредитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издание зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации средства массовой информации № 1492 от 19.12.1991, перерегистрация: № 1492 от 24.08.1998, перерегистрация: ПИ № ФС77-77991 от 20.03.2020

Краткое название: Известия вузов. ПНД

ISSN печатной версии 0869-6632, ISSN online версии 2542-1905

Язык публикаций: русский, английский

Журнал включён как самостоятельное издание в два индекса Web of Science: Emerging Source Citation Index (WoS Core Collection) и Russian Science Citation Index

Журнал включен в библиографическую базу данных SCOPUS (sourceid/21100864538) как самостоятельное издание

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук». Научные специальности, по которым присуждаются учёные степени (физико-математические науки): 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела, 1.3.3 – Теоретическая физика, 1.3.4 – Радиофизика, 1.3.5 – Физическая электроника, 1.3.6 – Оптика, 1.3.9 – Физика плазмы, 1.3.11 – Физика полупроводников, 1.3.19 – Лазерная физика, 1.5.2 – Биофизика.

Подписка осуществляется по Объединенному Каталогу «Пресса России» Раздел 30. «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия ВУЗов» (подписной индекс 73498) и по Интернет-Каталогу Агентства «Книга-Сервис». Цена свободная.

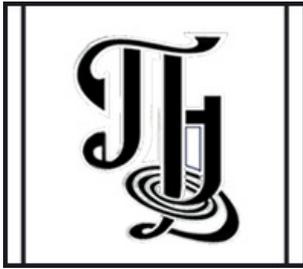
Электронная версия журнала находится в открытом доступе

Зав. редакцией М. В. Сысоева
Редакторы: Л. А. Сидорова, А. О. Салахова
Оформление Д. А. Лачиновой
Верстка О. Н. Строгановой

Адрес редакции: Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83. Тел.: +7 (8452) 523864, +7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@sgu.ru, сайт: <http://andjournal.sgu.ru>

Подписан в печать 14.03.2022
Вышел в свет 31.03.2022
Формат 60x84 1/8. Усл. печ. л. 14.88 (15.2)
Тираж 70 экз. Заказ № 28-Т

Отпечатан в Типографии Саратовского университета. Адрес типографии: Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83, корп. 8
Тел.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru



Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy
APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

Scientific-technical journal

Published since 1993, 6 issues per year

The journal was founded by Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

The publisher of the journal is Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

Registered with the Federal service for supervision of communications, information technology and mass communications. Certificate of mass media registration No 1492 of 19.12.1991, re-registration: No 1492 of 24.08.1998, re-registration: ПИ No ФC77-77991 of 20.03.2020

Abbreviated title: Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics

ISSN print 0869-6632, ISSN online 2542-1905

Languages of publication: Russian and English

The journal is included into Web of Science Core Collection, Emerging Source Citation Index and into Russian Science Citation Index on the Web of Science platform

The journal has been indexed in SCOPUS as an independent source (sourceid/21100864538)

The journal is included in «The LIST of peer-reviewed scientific publications, where the main scientific results of Candidate of Sciences and Doctor of Sciences dissertations have to be published». The following Scientific Specialties in the field of Physics and Mathematical Sciences are presented: 1.1.8 – Mechanics of a deformable solid body, 1.3.3 – Theoretical Physics, 1.3.4 – Radio Physics, 1.3.5 – Physical Electronics, 1.3.6 – Optics, 1.3.9 – Plasma Physics, 1.3.11 – Semiconductor Physics, 1.3.19 – Laser Physics, 1.5.2 – Biophysics.

The journal subscription index is 73498 in the United Catalogue «Pressa Rossii», «The Russian Press», section 30 «Scientific and Technical Journals. Bulletins of the Russian Academy of Sciences. Bulletins of Higher Educational Institutions (Izvestiya VUZ)».

The journal is Open Access

Head of Editorial office M. V. Sysoeva
Editors: L. A. Sidorova, A. O. Salakhova
Design of D. A. Lachinova
Layout of O. N. Stroganova

Address of Editorial office: 83, Astrakhanskaya Str.,
Saratov 410012, Russia. Ph.:+7 (8452) 523864,
+7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@sgu.ru,
website: <http://andjournal.sgu.ru>

Signed to press 14.03.2022. Published 31.03.2022
Format 60x84 1/8. Conv.-pr. Sh. of 14.88 (15.2)
Edition of 70 copies. Order No. 28-T

Printed by Printing House of Saratov State
University. Address of Printing House:
83, build. 8, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012,
Russia. Ph.:+7 (8452) 273385, e-mail:sguprint@bk.ru

СО Д Е Р Ж А Н И Е

ОТ РЕДАКТОРА

Сысоев И. В. Джон Хортон Конвей 129

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ
ХАОС. КВАНТОВЫЙ ХАОС

Корнута А. А., Лукьяненко В. А. Динамика решений одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения параболического типа 132

Глызин Д. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю. Охота на химер в полностью связанных сетях нелинейных осцилляторов 152

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Никулина М. В., Антонец В. А. Опыт оценки variability сердечного ритма по сглаженным кардиоинтервалограммам 176

Григорьева Е. В., Кащенко С. А. Локальная динамика модели цепочки лазеров с опто-электронной запаздывающей однонаправленной связью 189

Кулаков М. П., Фрисман Е. Я. Простая и сложная динамика в модели эволюции двух миграционно связанных популяций с непересекающимися поколениями 208

НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

Сокол-Кутыловский О. Л. Нелинейное усиление сигнала магнитной индукции в магнитомодуляционном датчике с аморфным ферромагнитным сердечником 233

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА

Ольшанский В. М., Зленко Д. В., Орлов А. А., Касумян А. О., Моллер П., МакМагон Е., Сюэ Вэй. Особенности многоэлектродной регистрации эпизодических разрядов слабозлектрических рыб 239

C O N T E N T S

EDITORIAL

Sysoev I. V. John Horton Conway 129

BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS. DETERMINISTIC CHAOS.
QUANTUM CHAOS

Kornuta A. A., Lukianenko B. A. Dynamics of solutions of nonlinear functional differential equation of parabolic type 132

Glyzin D. S., Glyzin S. D., Kolesov A. Yu. Hunt for chimeras in fully coupled networks of nonlinear oscillators 152

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

Nikulina M. V., Antonets V. A. Experience in assessing heart rate variability by smoothed cardiointervalograms 176

Grigorieva E. V., Kashchenko S. A. Local dynamics of laser chain model with optoelectronic delayed unidirectional coupling 189

Kulakov M. P., Frisman E. Ya. Simple and complex dynamics in the model of evolution of two populations coupled by migration with non-overlapping generations 208

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

Sokol-Kutylovskii O. L. Nonlinear amplification of the magnetic induction signal in a magnetomodulation sensor with an amorphous ferromagnetic core 233

NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE

Olshansky V. M., Zlenko D. V., Orlov A. A., Kasumyan A. O., Moller P., MacMahon E., Xue Wei. Multielectrode registration of episodic discharges generated by weakly electric fishes 239



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(2)

Редакторская заметка

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-129-131

Джон Хортон Конвей

(26 декабря 1937 – 11 апреля 2020)

И. В. Сысоев

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия
E-mail: ivssci@gmail.com

Поступила в редакцию 25.05.2020, опубликована 31.03.2022

Для цитирования: Сысоев И. В. Джон Хортон Конвей // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 2. С. 129–131.
DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-129-131.

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

I do have a big ego! As I often say, modesty is my only vice. If I weren't so modest, I'd be perfect.

J. H. Conway

О да, у меня большое эго! Как я часто говорю, скромность — мой единственный недостаток. Не будь я таким скромным, я был бы безупречен.

Д. Х. Конвей

Джон Хортон Конвей родился 26 декабря 1937 года в Ливерпуле, Великобритания. Джон был довольно замкнутым интравертным ребёнком, который с раннего детства увлекался математикой [1].

В 1956 году он поступил в колледж Гонвилля и Кейса в Кембриджском университете и неожиданно решил вести себя там экстравертно. Он и в самом деле нашёл себе в Кембридже друзей. В частности, он встретил Майкла Гая, сына математика Ричарда Гая. Майкл Гай стал лучшим другом Конвея и соавтором нескольких его работ. В 1964 году Конвей получил степень PhD и позицию там же в Gonville&Keyes College на кафедре чистой математики. Он читал лекции, которые были очень популярны благодаря живым и понятным объяснениям, практически цирковым трюкам и импровизациям. У Конвея часто не было плана и текста для своих лекций. Его ученик Эндрю Гласс сделал подробное, упорядоченное резюме своих лекций по абстрактным автоматам. Это резюме было скопировано многими студентами, а затем и самим лектором,

и через несколько лет это резюме стало первой книгой Конвея «Регулярная алгебра и конечные автоматы» [2].

Конвей играл во многие математические игры с коллегами и студентами и регулярно их придумывал. Так они изобрели топологическую игру «Рассада», которая сразу же завоевала популярность на кафедре. В целом жизнь Конвея в период после защиты диссертации была приятной и беззаботной. Но он не занимался «серьёзной» математической работой, и это его угнетало.

С того момента, как Джон Конвей открыл и опубликовал в 1968 году новые спорадические группы [3], он больше не беспокоился о том, достаточно ли серьёзно он относится к математике [1]. Поэтому он с чистой совестью приступил к разработке простейшего возможного клеточного автомата с нетривиальным, непредсказуемым поведением, надеясь, что в этом случае он будет завершён по Тьюрингу. Команда энтузиастов (Конвей, его коллеги и студенты) занималась перебором бесчисленных вариаций правил в поисках подходящих. Их усилия были вознаграждены, когда они разработали игру «Жизнь». Конвей написал об игре «Жизнь» в своей колонке в *Scientific American*, и эта статья стала самой популярной из всех статей, опубликованных в этой колонке. Игра «Жизнь» получила тысячи поклонников по всей Америке и за рубежом, а ее изобретатель прославился среди широкой публики [1]. Вскоре Конвей доказал тьюринг-полноту игры «Жизнь» (доказательство не было опубликовано). После этого он практически потерял интерес к этой теме.

Годы изобретения и обдумывания игр не прошли даром. Когда Ричард Гай и американский математик Элвин Берлекэмп задумали книгу по играм, они пригласили Конвея стать их соавтором [4]. Пока шла работа над книгой, получившей название «Выигрышные стратегии для ваших математических игр», Конвей продолжал исследовать игры и обнаружил, что позиции в так называемых пристрастных играх могут быть выражены числами, причём множество необходимых для этого чисел включает не только целые и действительные числа, но и некоторые новые числа. Дональд Кнут назвал эти числа сюрреальными. Конвей считал сюрреальные числа своим главным поводом для гордости [5]. В 1976 году Конвей быстро написал и выпустил собственную книгу «О числах и играх» [6], посвящённую пристрастным играм и сюрреальным числам. Когда он сообщил об этом Берлекэмпу, тот был крайне недоволен и едва не рассорился с кембриджским соавтором, и только Гай смог помирить их. Книга «Выигрышные стратегии» в итоге была дописана только в 1981 году; на следующий год книга вышла в свет и стала бестселлером.

В начале 1970-х Джон Конвей решил составить каталог конечных групп. Эта будущая книга получила название «Атлас конечных групп». Работа заняла много лет. Только в 1984 году атлас был окончательно завершён. Потребовался ещё один год, чтобы подготовить его к печати. Его публикация стала долгожданным событием для работы в области теоретических групп математиков по всему миру [7].

В 1970-е годы параллельно с составлением каталога конечных групп Конвей продолжал работать над спорадическими группами. В частности, он поучаствовал в определении размера «монстра» (и придумал это название для группы). К 1978 году другими специалистами по теории групп были вычислены таблицы характеров монстра (построена эта группа, однако, ещё не была). И в этот момент Джон Маккей заметил, что размерность одного из представлений монстра, 196883, лишь на единицу отличается от линейного коэффициента фурье-разложения j -инварианта, равного 196884. Конвей и Нортон собрали это и другие наблюдения от разных авторов и сформулировали гипотезу о глубокой связи между модулярными функциями и конечными группами, назвав её «гипотезой чудовищного вздора» [1].

1986–1987 учебный год Джон Конвей провёл в Принстонском университете (США), временно занимая по приглашению тогдашнего главы кафедры математики Элиаса Стайна только что учреждённую позицию Фоннеймановского профессора прикладной и вычислительной математики. Конвею было предложено остаться на этой должности на постоянной основе. Он сильно колебался,

но в итоге мнение жены, бóльшая зарплата, уход из Кембриджа многих коллег-математиков и общее желание перемен склонили его принять предложение [1]. В Принстоне Конвей тоже прославился харизмой и эксцентричностью. Время от времени Конвей, рассказывая на различных выступлениях о тех или иных интересных нерешённых задачах, предлагал денежные призы за их решение.

Конвей ушёл на должность эмерит-профессора в 2013 году. В первые годы после формальной отставки он продолжил работать едва ли не активнее, чем до неё — выступать на конференциях, выпускать новые работы, преподавать в математических лагерях для школьников [1]. Последние публикации за авторством Конвея вышли в 2017 году. В 2018 году он пережил обширный инсульт. Джон Хортон Конвей скончался в Нью-Брансуике 11 апреля 2020 года в возрасте 82 лет от осложнений на фоне коронавирусной инфекции COVID-19 [8].

Список литературы

1. *Roberts S.* Genius At Play. The Curious Mind of John Horton Conway. Errata: Bloomsbury USA, 2015. 481 p.
2. *Conway J. H.* Regular Algebra and Finite Machines. London: Chapman and Hall, 1971. 147 p.
3. *Conway J. H.* A Perfect Group of Order 8,315,553,613,086,720,000 and the Sporadic Simple Groups // Bull. London Math. Soc. 1969. Vol. 1. P. 79–88.
4. *Berlekamp E. R., Conway J. H., Guy R. K.* Winning Ways for Your Mathematical Plays. New York: Academic Press, 1982.
5. *Siegel A. N.* Combinatorial Game Theory. Vol. 146. San Francisco, CA, 2013. 523 p.
6. *Conway J. H.* On Numbers and Games. New York: Academic Press, 1976. 242 p.
7. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of Finite Groups. Oxford University Press, 1986. 250 p.
8. *Воронцов Н.* Создатель игры «Жизнь» математик Джон Конвей умер от COVID-19 // N + 1. 12.04.2020.



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(2)

Научная статья

УДК 517.957

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-132-151

Динамика решений одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения параболического типа

А. А. Корнута , В. А. Лукьяненко

Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского, Симферополь, Россия

E-mail: korn_57@mail.ru, art-inf@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.10.2020, принята к публикации 4.01.2022,
опубликована 31.03.2022

Аннотация. Целью работы является исследование начально-краевой задачи для параболического функционально-дифференциального уравнения в кольцевой области, которое описывает динамику фазовой модуляции световой волны, прошедшей тонкий слой нелинейной среды керровского типа в оптической системе с контуром обратной связи, с преобразованием поворота (отвечает оператор инволюции) и условиями Неймана на границе в классе периодических функций. Более подробно исследуются пространственно-неоднородные стационарные решения, бифурцирующие из пространственно-однородного стационарного решения в результате бифуркации типа «вилка» и периодические по времени решения типа «бегущая волна». **Методы.** Для представления исходного уравнения в виде нелинейных интегральных уравнений используется функция Грина. Применяется метод центральных многообразий для доказательства теоремы о существовании в окрестности бифуркационного параметра решений указанного уравнения и исследования их асимптотической формы. Численное моделирование пространственно-неоднородных решений и бегущих волн проведено с использованием метода Галёркина. **Результаты.** Получены интегральные представления рассматриваемой задачи в зависимости от вида линеаризованного оператора. С использованием метода центральных многообразий доказана теорема о существовании и асимптотической форме решений начально-краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения параболического типа с оператором инволюции на кольце. В результате численного моделирования, основанного на галёркинских аппроксимациях, в рассматриваемой задаче построены приближенные пространственно-неоднородные стационарные решения и периодические по времени решения типа бегущей волны. **Заключение.** Предложенная схема применима не только к инволютивным операторам поворота и условиям Неймана на границе кольца, но и к другим крайевым условиям и круговым областям. Представление исходной начально-краевой задачи в виде нелинейных интегральных уравнений второго рода позволяет более просто находить коэффициенты асимптотических разложений, доказывать теоремы существования и единственности, а также использовать различное число коэффициентов разложения нелинейной составляющей в правой части исходного уравнения в окрестности выделенного решения (например, стационарного). Визуализация численного решения подтверждает теоретические выкладки и показывает возможность формирования сложных фазовых структур.

Ключевые слова: оптическая система, нелинейная среда керровского типа, параболическое нелинейное уравнение, оператор инволюции, устойчивость решений.

Для цитирования: Корнута А. А., Лукьяненко В. А. Динамика решений одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения параболического типа // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 2. С. 132–151.

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-132-151

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Dynamics of solutions of nonlinear functional differential equation of parabolic type

A. A. Kornuta , V. A. Lukianenko

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia

E-mail: korn_57@mail.ru, art-inf@yandex.ru

Received 15.10.2020, accepted 4.01.2022, published 31.03.2022

Abstract. Purpose of this work is to study the initial-boundary value problem for a parabolic functional-differential equation in an annular region, which describes the dynamics of phase modulation of a light wave passing through a thin layer of a nonlinear Kerr-type medium in an optical system with a feedback loop, with a rotation transformation (corresponds the involution operator) and the Neumann conditions on the boundary in the class of periodic functions. A more detailed study is made of spatially inhomogeneous stationary solutions bifurcating from a spatially homogeneous stationary solution as a result of a bifurcation of the “fork” type and time-periodic solutions of the “traveling wave” type. *Methods.* To represent the original equation in the form of nonlinear integral equations, the Green’s function is used. The method of central manifolds is used to prove the theorem on the existence of solutions of the indicated equation in a neighborhood of the bifurcation parameter and to study their asymptotic form. Numerical modeling of spatially inhomogeneous solutions and traveling waves was carried out using the Galerkin method. *Results.* Integral representations of the considered problem are obtained depending on the form of the linearized operator. Using the method of central manifolds, a theorem on the existence and asymptotic form of solutions of the initial-boundary value problem for a functional-differential equation of parabolic type with an involution operator on an annulus is proved. As a result of numerical modeling based on Galerkin approximations, in the problem under consideration, approximate spatially inhomogeneous stationary solutions and time-periodic solutions of the traveling wave type are constructed. *Conclusion.* The proposed scheme is applicable not only to involutive rotation operators and Neumann conditions on the boundary of the ring, but also to other boundary conditions and circular domains. The representation of the initial-boundary value problem in the form of nonlinear integral equations of the second kind allows one to more simply find the coefficients of asymptotic expansions, prove existence and uniqueness theorems, and also use a different number of expansion coefficients of the nonlinear component in the right-hand side of the original equation in the neighborhood of the selected solution (for example, stationary). Visualization of the numerical solution confirms the theoretical calculations and shows the possibility of forming complex phase structures.

Keywords: optical system, Kerr-type nonlinear medium, parabolic nonlinear equation, involution operator, stability solved.

For citation: Kornuta AA, Lukianenko BA. Dynamics of solutions of nonlinear functional differential equation of parabolic type. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2022;30(2):132–151. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-132-151

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

В последние несколько десятилетий внимание исследователей привлекают математические модели нелинейной оптики. Они обладают богатой динамикой самоорганизующихся систем, а варьирование параметров позволяет управлять такой динамикой и наблюдать экспериментально широкий спектр изменения светового поля. Характерной является оптическая система, состоящая из тонкого слоя нелинейной среды керровского типа и различным образом организованного внешнего контура двумерной обратной связи [1–3]. В зависимости от реализации обратной связи рассматриваются модели, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями или параболическими функционально-дифференциальными уравнениями с преобразованием пространственных переменных искомой функции [4, 5]. Более общим является случай учёта запаздывания в системе [4, 6–8]. В этом случае функционально-дифференциальное уравнение

$$\tau_1 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + u(x, t) = \mu \Delta u(x, t) + K(1 + \gamma \cos Qu(x, t - \tau)), \quad x \in S, \quad t \geq 0$$

описывает фазовую модуляцию световой волны $u(x, t)$ в тонком слое нелинейной среды керровского типа в пределах апертуры $S \subset \mathbb{R}^2$. Указанное уравнение дополняется краевыми условиями на границе ∂S , а также начальными условиями при $(x, t) \in S \times [-\tau, 0]$. В уравнении Δ — оператор Лапласа, $\mu > 0$ — коэффициент диффузии частиц нелинейной среды, $K > 0$ — коэффициент нелинейности, пропорциональный интенсивности входного поля, γ ($0 < \gamma < 1$) — видность (контрастность) интерференционной картины, $Qu(x, t) = u(q(x), t)$, $q(x)$ — гладкое обратимое преобразование пространственной переменной (например, отражение, поворот).

Исследования функционально-дифференциальных уравнений имеет большую историю, начиная с работ А. Д. Мышкиса [9], Р. Беллмана, К. Кука [10], классической работы Дж. Хейла [11], цикла работ А. Л. Скубачевского и его учеников [12], В. М. Варфоломеева [13, 14], А. Б. Муравника [15, 16], работ А. В. Разгулина и его учеников [17–19], Е. П. Белана [20, 21] и его учеников [22–24], О. Б. Лыковой [25] и других авторов.

Выявление бегущих волн, вращающихся волн, фронтов представляет практический интерес. Бифуркация Андронова–Хопфа приводит к рождению вращающихся волн на окружности в случае преобразования поворота пространственных аргументов [5, 18, 26, 27]. Их взаимодействие на окружности изучалось в работах [20, 21], а двумерные вращающиеся волны в круге с преобразованием поворота рассматривались в [25].

Задача моделирования явлений структурообразования, проявляющихся в экспериментах, таких как бегущие (вращающиеся) волны, далека от завершения. Здесь существенную роль играют апертура области, параметры задачи, организация обратной связи, краевые условия, а также выбор бифуркационного параметра. В отличие от многих исследований в данной работе таким параметром является коэффициент диффузии μ . В работах С. Д. Глызина, А. Ю. Колесова, Н. Х. Розова (в частности, [28]) для динамических систем типа реакция–диффузия при условии уменьшения коэффициента диффузии рассмотрен феномен многомодового диффузионного хаоса. Исследование указанных задач актуально как с позиций теории нелинейных функционально-дифференциальных уравнений параболического типа, так и в связи с разнообразными приложениями в нелинейной оптике.

1. Постановка задачи

На кольце $S = \{(r, \theta) \mid 0 < r_1 \leq r \leq r_2; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u = \mu \Delta u + K(1 + \gamma \cos Qu), \quad (r, \theta) \in S, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $u = u(r, \theta, t)$ с преобразованием поворота на угол h , $Qu = u(r, \theta + h, t)$, например, $h = (2\pi)/p$ ($p \in \mathbb{N}$), с условиями Неймана на границе

$$\frac{\partial u(r_1, \theta, t)}{\partial r} = \tilde{g}_1(\theta, t), \quad \frac{\partial u(r_2, \theta, t)}{\partial r} = \tilde{g}_2(\theta, t), \quad (2)$$

начальным условием

$$u(r, \theta, 0) = u_0(r, \theta), \quad (3)$$

условием периодичности

$$u(r, \theta + 2\pi, t) = u(r, \theta, t). \quad (4)$$

Здесь $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ — оператор Лапласа в полярной системе координат, $\mu > 0$ — коэффициент диффузии частиц нелинейной среды, преобразование поворота на угол $h = (2\pi)/p$ определяет оператор $Q = Q_h$, который является оператором инволюции $Q^p = I$ [29], $K > 0$ —

коэффициент, пропорциональный интенсивности входящего потока, $\gamma (0 < \gamma < 1)$ — коэффициент видности (контрастности) интерференционной картины.

При исследовании задачи (1)–(4) используются следующие пространства: функциональное пространство $H = L_2^r(r_1, r_2) \times (0, 2\pi)$ — пространство функций из L^2 квадратично интегрируемых с весом r , со скалярным произведением и нормой, соответственно

$$\langle u, v \rangle_H = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} u(r, \theta) \overline{v(r, \theta)} r dr d\theta, \quad \|u\|_H^2 = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} |u(r, \theta)|^2 r dr d\theta;$$

функциональное пространство H^2 — соболевское пространство комплекснозначных функций двух вещественных переменных со скалярным произведением и нормой, соответственно

$$\langle u, v \rangle_{H^2} = \langle u, v \rangle_H + \langle -\Delta u, -\Delta v \rangle_H, \quad \|u\|_{H^2}^2 = \sqrt{\langle u, u \rangle_{H^2}};$$

функциональное пространство $H_{2\pi}^2 = \{u | u(\theta + 2\pi) = u(\theta)\}$ — замкнутое пространство 2π -периодичных функций из H^2 .

Корректность начально-краевой задачи (1)–(4) для кольца S может быть доказана по аналогии с задачей для круга $0 < r < r_1$, доказанной ранее в работе [30].

Рассматривается проблема нахождения приближённого пространственно-неоднородного решения задачи (1)–(4), бифурцирующего из его пространственно-однородного решения. В качестве бифуркационного параметра выбран коэффициент диффузии μ .

2. Интегральные представления уравнения

Пусть w — одно из решений задачи (1)–(4). Выполним замену $u = w + v$, где $v(r, \theta, t)$ — новая неизвестная функция. Тогда с учётом $\cos(w + v) = \cos w \cos v - \sin w \sin v = \cos w(\cos v - 1) - \sin w \sin v + \cos w$, получим

$$\begin{aligned} K [1 + \gamma \cos Q_h u] &= K [1 + \gamma Q_h \cos(w + v)] = \\ &= K [1 + \gamma \cos Q_h w] - K \gamma \sin Q_h w \cdot Q_h v + f(Q_h w, Q_h v), \end{aligned}$$

где $f(Q_h w, Q_h v) = K \gamma (\cos Q_h w (\cos Q_h v - 1) - \sin Q_h w (\sin Q_h v - Q_h v))$.

Разложение нелинейной функции $f(Q_h v, Q_h w)$ в ряд по степеням v начинается с v^2 и $f(Q_h w, 0) = 0$.

Задача (1)–(4) относительно v примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v = \mu \Delta v - K \gamma \sin Q_h w \cdot Q_h v + f(Q_h v, Q_h w), \quad (r, \theta) \in S, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

с условиями второго рода на границе

$$\frac{\partial v(r_1, \theta, t)}{\partial r} = g_1(\theta, t), \quad \frac{\partial v(r_2, \theta, t)}{\partial r} = g_2(\theta, t), \quad g_i(\theta, t) \in H_{2\pi}^2, \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

начальным условием

$$v(r, \theta, 0) = v_0(r, \theta), \quad (7)$$

условием периодичности

$$v(r, \theta + 2\pi, t) = v(r, \theta, t). \quad (8)$$

Сохраняя в разложении $f(Q_h v, Q_h w)$ конечное число членов ряда, получаем ряд модельных уравнений.

В [31] проведен подробный анализ частных решений $u(r, \theta, t) = w$ уравнения (1): стационарного, равного постоянной, $u = w = \text{const}$; стационарного, зависящего только от r , $u = w(r)$; стационарного, зависящего только от θ , $u = w(\theta)$; стационарного, зависящего от r и θ , $u = w(r, \theta)$; нестационарного, зависящего только от t , $u = w(t)$; нестационарного, зависящего от t и θ , $u = w(\theta, t)$.

Уравнение (5), в зависимости от специфики постановки задачи, удобно представлять в трёх операторных формах

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= A_j v + B_j, \quad j = 1, 2, 3, \\ A_1 v &= \mu \Delta v, \quad B_1 = -v - K\gamma \sin Q_h w \cdot Q_h v + f(Q_h v, Q_h w); \\ A_2 v &= \mu \Delta v - v, \quad B_2 = -K\gamma \sin Q_h w \cdot Q_h v + f(Q_h v, Q_h w); \\ A_3 v &= \mu \Delta v - v - K\gamma \sin Q_h w \cdot Q_h v, \quad B_3 = f(Q_h v, Q_h w). \end{aligned}$$

Лемма 1. Операторы A_j , $j = 1, 2, 3$ имеют полную в $L_2(\Omega)$, $\Omega = \{(r, \theta) \mid r_1 \leq r \leq r_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ ортонормированную систему собственных функций

$$\psi_{n,m}(r, \theta) = R_{n,m}(\lambda_{n,m} r) \exp[in\theta], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots,$$

где

$$R_{n,m}(r) = R_{n,m}(\lambda_{n,m} r) = J_n(\lambda_{n,m} r) \cdot Y_n'(\lambda_{n,m} r_1) - Y_n(\lambda_{n,m} r) \cdot J_n'(\lambda_{n,m} r_1) \quad (9)$$

определяются через функции Бесселя J_n , Y_n [32] первого и второго рода, соответственно, порядка n :

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot \tilde{\psi}_n(x), \quad \text{где} \quad \tilde{\psi}_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1) \cdot \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \\ Y_n(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow n} \left(\text{ctg} \pi \alpha \cdot J_\alpha(x) - \frac{1}{\sin \pi \alpha} \cdot J_{-\alpha}(x) \right), \end{aligned}$$

$\lambda_{n,m} = \tilde{\lambda}$ – последовательность нумерованных в порядке возрастания корней уравнения

$$J_n'(\tilde{\lambda} r_1) \cdot Y_n'(\tilde{\lambda} r_2) - J_n'(\tilde{\lambda} r_2) \cdot Y_n'(\tilde{\lambda} r_1) = 0. \quad (10)$$

Функции $R(r) = R_{n,m}(\lambda_{m,n})$ являются решениями краевой задачи для уравнения Бесселя

$$r^2 R''(r) + r R'(r) + (\tilde{\lambda}^2 r^2 - n^2) R(r) = 0, \quad R'(r_1) = 0, \quad R'(r_2) = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11)$$

Собственные значения: $\lambda = -\mu \lambda_{n,m}^2$ (для оператора A_1); $\lambda = -1 - \mu \lambda_{n,m}^2$ (для A_2); $\lambda = -1 - \mu \lambda_{n,m}^2 + \Lambda \exp[inh]$ (для A_3), $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $\Lambda = -K\gamma \sin Q_h w = -K\gamma \sin w$, для $w = \text{const}$.

Доказательство. Собственные функции $\psi_{n,m}(r, \theta)$ получаем в результате применения метода разделения переменных для уравнений $\frac{\partial v}{\partial t} = A_j v$, $j = 1, 2, 3$. Например, для уравнения с оператором A_3 , представляя $v(r, \theta, t) = X(r, \theta) \cdot T(t) \equiv R(r) \cdot \Phi(\theta) \cdot T(t)$, приходим к задаче Штурма–Лиувилля для $X(r, \theta)$:

$$\begin{aligned} \mu \Delta X(r, \theta) - X(r, \theta) + \Lambda Q_h X(r, \theta) &= \lambda X(r, \theta), \\ \frac{\partial X(r_1, \theta)}{\partial r} &= 0, \quad \frac{\partial X(r_2, \theta)}{\partial r} = 0, \quad X(r, \theta + 2\pi) = X(r, \theta) \end{aligned} \quad (12)$$

и уравнению для функции $T(t)$: $T'(t) - \lambda T(t) = 0$.

Разделяя переменные в (12), для $R(r)$ приходим к задаче (11), а для $\Phi(\theta)$, в отличие от задачи с операторами $A_{1,2}$ ($\Lambda \equiv 0$), задача Штурма–Лиувилля имеет вид:

$$\Phi''(\theta) + \nu\Phi(\theta) = 0, \quad Q_h\Phi(\theta) + \alpha\Phi(\theta) = 0, \quad \Phi(\theta + 2\pi) = \Phi(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

$$\nu = \nu_n = n^2, \quad \Phi = \Phi_n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[\pm in\theta], \quad \alpha_n = -\frac{Q_h\Phi_n(\theta)}{\Phi_n(\theta)}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Определим собственные значения λ оператора A_3 (12).

Раскладывая в ряд $X(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} v_{n,m} \psi_{n,m}(r, \theta)$ по функциям $\psi_{n,m}(r, \theta)$, получим для коэффициентов разложения $v_{n,m}$

$$(-1 - \mu\lambda_{n,m}^2 + \Lambda \exp[inh]) v_{n,m} = \lambda v_{n,m}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots$$

Откуда следует, что для A_3

$$\lambda = -1 - \mu\lambda_{n,m}^2 + \Lambda \exp[inh], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots$$

При $\Lambda = 0$ получаем собственные значения для оператора A_2 и, очевидно, $\lambda = -\mu\lambda_{n,m}^2$ для оператора A_1 .

Решениями краевой задачи (11) являются функции $R(r) = C_1 J_n(r) + C_2 Y_n(r)$. Учитывая краевые условия задачи (11), получим:

$$\begin{aligned} C_1 J'_n(\tilde{\lambda}r_1) + C_2 Y'_n(\tilde{\lambda}r_1) &= 0, \\ C_1 J'_n(\tilde{\lambda}r_2) + C_2 Y'_n(\tilde{\lambda}r_2) &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Система (13) относительно C_1 и C_2 имеет нетривиальное решение, если $\tilde{\lambda}$ является решением уравнения (10). Известно, что уравнение (10) имеет счётное число положительных корней [32] $\lambda_{n,m}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $m = 1, 2, \dots$. Тогда C_1 и C_2 определяются из любого уравнения системы (13) (то есть определяется решение (9)):

$$C_1 = -C_2 \frac{Y'_n(\lambda_{n,m}r_1)}{J'_n(\lambda_{n,m}r_1)} \quad \text{или} \quad C_2 = -C_1 \frac{J'_n(\lambda_{n,m}r_1)}{Y'_n(\lambda_{n,m}r_1)}. \quad \square$$

На основании выкладок метода разделения переменных Леммы 1, запишем функцию Грина для оператора A_1 :

$$\begin{aligned} G_1(r, \rho, \theta, \varphi, t, \tau) &= \frac{\rho}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp[-in(\theta - \varphi)] R_{n,m}(r) R_{n,m}(\rho) \exp[-\mu\lambda_{n,m}^2(t - \tau)]}{d_{n,m}^2}, \\ d_{n,m}^2 &= \frac{2}{\pi^2 \lambda_{n,m}^2 r_1^2} \left[\frac{\pi^2 r_1^2}{4} (\lambda_{n,m}^2 r_2^2 - n^2) (R_{n,m}(r_2))^2 - (\lambda_{n,m}^2 r_1^2 - n^2) \right], \\ n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{14}$$

Для неоднородного линейного уравнения с оператором A_1 с условиями, приведёнными к однородным краевым и начальным условиям

$$v_t = A_1 v + v_0(r, \theta)\delta(t) + g_2(\theta, t)\delta(r - r_2) - g_1(\theta, t)\delta(r - r_1) + f(r, \theta, t) \equiv A_1 v + f_1,$$

решение можно представить через функцию Грина

$$v(r, \theta, t) = \int_0^t \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} G_1(r, \rho, \theta, \varphi, t, \tau) f_1(\rho, \varphi, \tau) d\varphi \rho d\rho d\tau.$$

Функция Грина G_2 для оператора A_2 будет отличаться от G_1 множителем $\exp[-(1 + \mu\lambda_{n,m}^2)t]$ вместо $\exp[-\mu\lambda_{n,m}^2 t]$, а G_3 для оператора A_3 – множителем $\exp[(-1 - \mu\lambda_{n,m}^2 + \Lambda \exp[inh])t]$.

В случае нелинейных уравнений с операторами A_j с нулевыми краевыми и ненулевыми начальными условиями использование функций Грина G_j приводит к нелинейным уравнениям следующего вида

$$v_j(r, \theta, t) = \int_0^t \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} G_j(r, \rho, \theta, \varphi, t, \tau) [B_j(v(\rho, \varphi, \tau)) + v_0(\rho, \varphi)\delta(\tau)] d\varphi \rho d\rho d\tau, \quad j = 1, 2. \quad (15)$$

Уравнения (15) удобны для приближённых вычислений и оценок.

3. Бифуркация решения, асимптотическое представление

Далее в этом разделе рассматриваем пространственно-неоднородные стационарные решения, бифурцирующие из пространственно-однородного стационарного решения $u(r, \theta, t) = w = \text{const}$, которое определяется равенством

$$w = K(1 + \gamma \cos w). \quad (16)$$

Известно [33], что при увеличении K число корней уравнения (16) растёт и состав их меняется. Зафиксируем гладкую ветвь, соответствующую одному из решений (16)

$$w = w(K, \gamma), \quad 1 + K\gamma \sin w(K, \gamma) \neq 0.$$

Линеаризуем уравнение (1) на выделенном стационарном пространственно-однородном решении $w(K, \gamma)$, выполним замену $u = v + w$ и, выделив линейную часть, получим уравнение:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v = \mu \Delta v - K\gamma \sin w \cdot Q_h v + f(Q_h v, w), \quad (r, \theta) \in S, \quad t \geq 0.$$

Для обнаружения решений, которые наблюдались в экспериментах (например, [34]), предположим, что оператор Q_h является инволютивным: $Q_h^p = I$. Выберем $h = 2\pi/p$, $p \in \mathbb{N}$. Представляет интерес $p \geq 3$ (случай $p = 2$ исследован ранее [24]).

Собственные значения оператора A_3

$$\lambda = -1 - \mu\lambda_{n,m}^2 - K\gamma \sin w \exp\left[i\frac{2\pi n}{p}\right], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Лемма 2. Устойчивость решения v определяется знаком вещественной части выражения (17): $\lambda = \alpha_{n,m} + i\beta_{n,m}$, где $\text{Re } \lambda = \alpha_{n,m} = -1 - \mu\lambda_{n,m}^2 - K\gamma \sin w \cos(2\pi n/p)$, $\text{Im } \lambda = \beta_{n,m} = -K\gamma \sin w \sin(2\pi n/p)$. Если $\text{Re } \lambda < 0$, то решение v устойчивое, если $\text{Re } \lambda > 0$, то решение v неустойчивое [35, стр. 29].

Действительная часть $\alpha_{n,m} = -1 - \mu\lambda_{n,m}^2 + \Lambda \cos(2\pi n/p)$ содержит параметры K, γ, w, μ , из которых в общем случае значимыми являются K и μ . Выберем в качестве бифуркационного параметра коэффициент диффузии μ , зафиксировав при этом Λ .

В общем случае, для $Q_h \Phi(\theta) = \Phi(\theta + 2\pi/p)$ справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Решение линеаризованной задачи, соответствующей (5)–(8), может быть представлено в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} C_{n,m} R_{n,m}(r) \exp[-in\theta] \exp\left[\left(-1 - \mu\lambda_{n,m}^2 + \Lambda \exp\left[i\frac{2\pi n}{p}\right]\right)t\right].$$

В зависимости от значений действительной и мнимой частей λ могут быть получены различные типы решений, в частности, при $\operatorname{Re} \lambda \neq 0, \operatorname{Im} \lambda = 0$ получаем стационарные решения (5)–(8), при $\operatorname{Re} \lambda = 0, \operatorname{Im} \lambda \neq 0$ получаем чисто периодические решения (5)–(8)

$$A_{n,m}(r) \exp \left[-i \left(n\theta + \Lambda \sin \frac{2\pi n}{p} t \right) \right].$$

3.1. Метод центральных многообразий. Для исследования бифуркационных явлений используем принятую методику, основанную на построении иерархии упрощенных моделей в окрестности точек бифуркации [20, 36].

Далее рассмотрим случай $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$. Используя линеаризацию уравнения (5) на выделенном стационарном пространственно-однородном решении $w(K, \gamma)$, выполним замену $u = v + w$ и рассмотрим одну из модельных задач задачи (5)–(8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v &= \mu \Delta v - K\gamma \sin w \cdot Q_h v - \frac{K\gamma \cos w}{2!} \cdot Q_h v^2 + \frac{K\gamma \sin w}{3!} \cdot Q_h v^3, \\ 0 < r_1 \leq r \leq r_2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (18)$$

с условиями второго рода на границе

$$\frac{\partial v(r_1, \theta, t)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial v(r_2, \theta, t)}{\partial r} = 0, \quad (19)$$

начальным условием

$$v(r, \theta, 0) = 0 \quad (20)$$

и условием периодичности

$$v(r, \theta + 2\pi, t) = v(r, \theta, t). \quad (21)$$

Учитывая, что $\Lambda = -K\gamma \sin w$, и, обозначив $\Omega = -K\gamma(\operatorname{ctg} w/2)$, (18) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= -v + \mu \Delta v + \Lambda Q_h v + \Omega Q_h v^2 - \frac{\Lambda}{6} Q_h v^3, \\ 0 < r_1 \leq r \leq r_2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Уравнение (22), линеаризованное в окрестности нулевого решения, представим в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A_3 v, \quad (23)$$

где $A_3 v = -v + \mu \Delta v + \Lambda Q_h v$.

Далее будем считать, что $h = \pi/3$ (аналогично можно рассмотреть другие случаи).

Линейный оператор A_3 с областью определения H^2 , рассматриваемый как неограниченный оператор в пространстве H , является самосопряженным оператором. На основании Леммы 1 устанавливается

Лемма 3. Для случая поворота $h = \pi/3$, $\operatorname{Re} \lambda_n \neq 0$, $\operatorname{Im} \lambda_n = \beta_{n,m} = K\gamma \sin w \sin(\pi n/3) = 0$, оператору A_3 соответствует разложение в ряд по собственным функциям $\psi_{3s,m}(r, \theta) = R_{3s,m} \cos 3s\theta$, $s = 1, 2, \dots$ с собственными значениями

$$\lambda_{3s} = -\mu \lambda_{3s,m}^2 - 1 + (-1)^s \Lambda, \quad (24)$$

где $\lambda_{3s,m}$ — m -корень уравнения (10).

Доказательство следует из общего случая (Лемма 1) разложения линейного оператора A_3 , рассматриваемого в гильбертовом пространстве H с областью определения H^2 по полной ортонормированной системе собственных функций $\psi_{n,m}(r, \theta)$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. При $h = \pi/3$, $\Lambda < -1$, существует $\delta > 0$, такое что при фиксированном значении $m = 1$ и для любых значений параметра μ , удовлетворяющих неравенству $\mu_1 - \delta < \mu < \mu_1$, где $\mu_s = (-1 - (-1)^s \Lambda) / \lambda_{3s,m}^2$, $s = 1, 2, \dots$, существует непрерывная ветвь стационарных точек $z(\mu) > 0$ уравнения

$$\dot{z} = \lambda_3(\mu)z + \frac{1}{2d_{3,1}^2} \left(\frac{\Lambda\gamma_1}{4} - \frac{\Omega^2\gamma_2^2}{(2\lambda_3 - \lambda_6)d_{6,1}^2} \right) z^3 + \dots, \quad (25)$$

которой соответствует стационарное решение $v = \varphi(r, \theta, \mu)$ уравнения (22), определяемое равенством

$$\varphi(r, \theta, \mu) = zR_{3,1}(r) \cos 3\theta + z^2P_6(r, \mu) \cos 6\theta + z^3P_9(r, \mu) \cos 9\theta + \xi(z, r, \theta, \mu) |_{z=z(\mu)}, \quad (26)$$

$$P_6(r, \mu) = \frac{\Omega\gamma_2}{2(2\lambda_3 - \lambda_6)d_{6,1}^2} \cdot R_{6,1}(r), \quad (27)$$

$$P_9(r, \mu) = \frac{1}{2(3\lambda_3 - \lambda_9)d_{9,1}^2} \left[-\frac{\Omega^2\gamma_2\gamma_3}{(2\lambda_3 - \lambda_6)d_{6,1}^2} + \frac{\Lambda\gamma_4}{12} \right] \cdot R_{9,1}(r), \quad (28)$$

где $\xi(z, r, \theta, \mu) = O(|z|^4)$, $R_{3s,1}$ и $d_{3s,1}^2$, $s = 1, 2, 3$ определяются равенствами (9) и (14), соответственно,

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \int_{r_1}^{r_2} rR_{3,1}^4(r)dr, & \gamma_2 &= \int_{r_1}^{r_2} rR_{3,1}^2(r)R_{6,1}(r)dr, \\ \gamma_3 &= \int_{r_1}^{r_2} rR_{3,1}(r)R_{6,1}(r)R_{9,1}(r)dr, & \gamma_4 &= \int_{r_1}^{r_2} rR_{3,1}^3(r)R_{9,1}(r)dr. \end{aligned} \quad (29)$$

Решение $\varphi(r, \theta, \mu)$ — орбитально устойчиво.

Доказательство. Согласно теореме 5.1.1 работы [36] и Леммам 1, 2, если $\Lambda > 1$, то нулевое решение (23) неустойчиво для любых $\mu > 0$. Если $-1 < \Lambda < 1$, то нулевое решение (23) является асимптотически устойчивым для любых $\mu > 0$. Интерес представляет случай $\Lambda < -1$. Выберем теперь K так, чтобы выполнялось условие: $\Lambda = \Lambda(K) < -1$.

Здесь $\mu_s = (-1 - (-1)^s \Lambda) / \lambda_{3s,m}^2$, $s = 1, 2, \dots$. Если $\mu > \mu_1$, то согласно Лемме 2 нулевое решение задачи (23) является устойчивым. При убывании параметра μ и его прохождении через значение μ_1 одно собственное значение λ_3 проходит через мнимую ось.

Если $\mu_2 < \mu < \mu_1$, то индекс неустойчивости нулевого решения равен 1. Индекс неустойчивости нулевого решения повышается на единицу при уменьшении μ и его прохождении через μ_s , $s = 2, 3, \dots$

В окрестности $v = 0$ для μ , удовлетворяющих неравенству $\mu_1 - \delta < \mu < \mu_1$, существует центральное многообразие [36], представимое в виде

$$\varphi(r, \theta, \mu) = zR_{3,1}(r) \cos 3\theta + z^2P_6(r, \mu) \cos 6\theta + z^3P_9(r, \mu) \cos 9\theta + \xi(z, r, \theta, \mu) |_{z=z(\mu)}, \quad (30)$$

где $P_6(r, \mu), P_9(r, \mu), \dots$ функции из пространства $L_2^r[r_1, r_2]$. На многообразии (30) уравнение (22) принимает вид

$$\dot{z} = \lambda_3(\mu)z + C_2z^2 + C_3z^3. \quad (31)$$

Найдём коэффициенты разложений (30) и (31). Для этого подставим (30) и (31) в уравнение (22):

$$\begin{aligned} & \left(\lambda_3(\mu)z + C_2z^2 + C_3z^3 \right) \left(zR_{3,1}(r) \cos 3\theta + 2zP_6(r, \mu) \cos 6\theta + 3z^2P_9(r, \mu) \cos 9\theta \right) = \\ & = \mu \left(zR_{3,1}''(r) \cos 3\theta + z^2P_6''(r, \mu) \cos 6\theta + z^3P_9''(r, \mu) \cos 9\theta + \right. \\ & \quad \left. + \frac{zR_{3,1}'(r) \cos 3\theta}{r} + \frac{z^2P_6'(r, \mu) \cos 6\theta}{r} + \frac{z^3P_9'(r, \mu) \cos 9\theta}{r} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{9zR_{3,1}''(r) \cos 3\theta}{r^2} - \frac{36z^2P_6''(r, \mu) \cos 6\theta}{r^2} - \frac{81z^3P_9''(r, \mu) \cos 9\theta}{r^2} \right) + \\ & \quad + \Lambda \left(-zR_{3,1}(r) \cos 3\theta + z^2P_6(r, \mu) \cos 6\theta - z^3P_9(r, \mu) \cos 9\theta \right) + \\ & \quad + \Omega \left(-zR_{3,1}(r) \cos 3\theta + z^2P_6(r, \mu) \cos 6\theta - z^3P_9(r, \mu) \cos 9\theta \right)^2 - \\ & \quad - \frac{\Lambda}{6} \left(-zR_{3,1}(r) \cos 3\theta + z^2P_6(r, \mu) \cos 6\theta - z^3P_9(r, \mu) \cos 9\theta \right)^3. \end{aligned} \quad (32)$$

В силу ортогональности системы собственных функций $\cos 3s\theta$, $s = 1, 2, 3$ приравняем коэффициенты при указанных функциях в левой и правой частях равенства (32). При $\cos 3\theta$ получим

$$\begin{aligned} & R_{3,1}(r) \left[z \left(\lambda_3 + 1 + \Lambda \right) + C_2z^2 + C_3z^3 \right] = \\ & = \mu z \left(R_{3,1}''(r) + \frac{R_{3,1}'(r)}{r} - \frac{9R_{3,1}(r)}{r^2} \right) - \Omega z^3 R_{3,1}(r) P_6(r, \mu) + \frac{\Lambda z^3 R_{3,1}^3(r)}{8}. \end{aligned}$$

Так как $R_{3,1}(r)$ – решение краевой задачи уравнения Бесселя (11), то

$$\begin{aligned} & R_{3,1}(r) \left[z \left(\lambda_3 + 1 + \Lambda + \mu\lambda_{3,1}^2 \right) + C_2z^2 + C_3z^3 \right] = \\ & = -\Omega z^3 R_{3,1}(r) P_6(r, \mu) + \frac{\Lambda z^3 R_{3,1}^3(r)}{8}. \end{aligned}$$

Так как $\lambda_3 = -1 - \mu\lambda_{3,1}^2 - \Lambda$, то $C_2 = 0$, $C_3 R_{3,1}(r) = -\Omega R_{3,1}(r) P_6(r, \mu) + \frac{\Lambda R_{3,1}^3(r)}{8}$. Следовательно,

$$C_3 = \frac{1}{d_{3,1}^2} \left(-\Omega \int_{r_1}^{r_2} r R_{3,1}^2(r) P_6(r, \mu) dr + \frac{\Lambda \gamma_1}{8} \right), \quad (33)$$

где $\gamma_1 = \int_{r_1}^{r_2} r R_{3,1}^4(r) dr$, $P_6(r, \mu) = \frac{\gamma_2 \Omega R_{6,1}(r)}{2d_{6,1}^2 (2\lambda_3 - \lambda_6)}$.

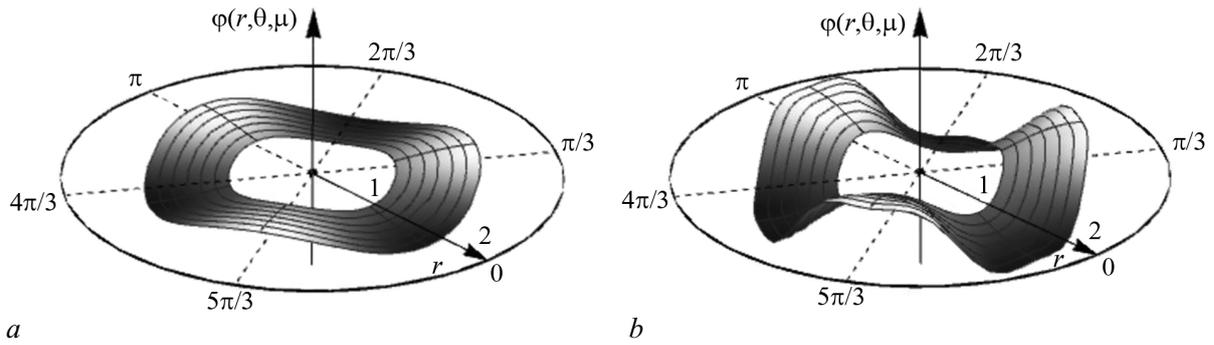


Рис. 1. Приближённое стационарное решение (30) для $\Lambda = -3/2$, $h = \pi/3$ в цилиндрической системе координат при $\mu = 0.1$ (a) и $\mu = 0.01$ (b)

Fig. 1. Approximate stationary solution of (30) for $\Lambda = -3/2$, $h = \pi/3$ in a cylindrical coordinate system for $\mu = 0.1$ (a) and $\mu = 0.01$ (b)

Исходя из условия $\Lambda < -1$ и равенства (24), очевидно, что $C_3 < 0$, тогда имеет место суперкритическая бифуркация типа «вилка» (см. [36], гл. 6. 3) и от тривиальной особой точки уравнения (25) ответвляются две устойчивые стационарные точки.

Проводя аналогичные (громоздкие) выкладки для $s = 2, 3$, получим утверждения Теоремы.

Таким образом, в некоторой окрестности μ_1 существует стационарное решение $v = \varphi(r, \theta, \mu)$ уравнения (22), определяемое равенствами (26)–(28). Решение $\varphi(r, \theta, \mu)$ – орбитально устойчиво. \square

Теорема носит локальный характер.

При использовании пакета «Wolfram Mathematica 11.3» для $\Lambda = -3/2$, $h = \pi/3$ построены полученные в Теореме приближённые решения (30) для различных значений бифуркационного параметра μ (рис. 1).

Следствие 1. Полученные результаты согласуются с одномерным случаем, когда узкое кольцо можно заменить окружностью. При $h = \pi/3$, $\Lambda < -1$, существует $\delta > 0$ и $\mu_1 = (-1 - \Lambda)/9$, такое что для любых значений параметра μ , удовлетворяющих неравенству $\mu_1 - \delta < \mu < \mu_1$, существует непрерывная ветвь стационарных точек $z(\mu) > 0$ уравнения

$$\dot{z} = \lambda_3(\mu)z + \frac{1}{2} \left(\frac{\Lambda}{4} - \frac{\Omega^2}{(2\lambda_3 - \lambda_6)} \right) z^3 + \dots,$$

которой соответствует стационарное решение $v = \varphi_1(\theta, \mu)$ уравнения (22) на окружности $S(r_1 = r_2)$ с условием 2π -периодичности, определяемое равенством

$$\begin{aligned} \varphi_1(\theta, \mu) = & z \cos 3\theta + z^2 \frac{\Omega}{2(2\lambda_3 - \lambda_6)} \cos 6\theta + \\ & + z^3 \frac{1}{2(3\lambda_3 - \lambda_9)} \left[-\frac{\Omega^2}{(2\lambda_3 - \lambda_6)} + \frac{\Lambda}{12} \right] \cos 9\theta + \xi(z, \theta, \mu) \Big|_{z=z(\mu)}, \end{aligned}$$

где $\xi(z, \theta, \mu) = O(|z|^4)$, $\lambda_{3s} = -1 + (-1)^s \Lambda - (3s)^2 \mu$, $s = 1, 2, 3$.

Решение $\varphi_1(\theta, \mu)$ – орбитально устойчиво.

3.2. Метод Галёркина. Для того чтобы провести исследование асимптотики стационарных решений задачи (18)–(21) при уменьшении бифуркационного параметра μ и его отходе

от критического значения μ_1 , воспользуемся методом Галёркина, в соответствии с которым приближённые решения представим в виде

$$\varphi^*(r, \theta) = \sum_{k=1}^N (z_k \exp[ik\theta] + \bar{z}_k \exp[-ik\theta]) R_{k,1}(r), \quad (34)$$

здесь z_k, \bar{z}_k – комплексно-сопряжённые выражения.

Требую, чтобы функция $\varphi^*(r, \theta)$, определяемая равенством (34), удовлетворяла уравнению (18), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{z}_k &= \lambda_k z_k + \sigma_k(z, \bar{z}), \\ \dot{\bar{z}}_k &= \bar{\lambda}_k \bar{z}_k + \bar{\sigma}_k(z, \bar{z}), \end{aligned} \quad (35)$$

где $\lambda_k(\mu) = -1 - \mu \lambda_{k,1}^2 + \exp[ikh]\Lambda$, $\bar{\lambda}_k(\mu) = -1 - \mu \lambda_{k,1}^2 + \exp[-ikh]\Lambda$, $\sigma_k(z, \bar{z})$, $\bar{\sigma}_k(z, \bar{z})$ – формы третьей степени от z_k, \bar{z}_k , $k = 1, 2, \dots, N$.

Одним из решений системы (35) является нулевое решение, устойчивость которого определяется спектром $\{\lambda_k(\mu), \bar{\lambda}_k(\mu)\}$ соответствующей матрицы устойчивости. Как и выше, считаем, что выполняется условие $\Lambda < -1$.

Пусть $h = \pi/3$, тогда первое критическое значение бифуркационного параметра, при котором нулевое стационарное решение системы (35) теряет устойчивость, $\mu_1 = (-\Lambda - 1)/\lambda_{3,1}^2$. В результате этого происходит бифуркация типа «вилка» и при $\mu < \mu_1$ рождается пара устойчивых стационарных точек $\pm z^*(\mu) = \{0, 0, \pm z_3^*, 0, 0, \pm z_6^*, \dots\}$, являющихся решениями алгебраической системы уравнений

$$\lambda_k z_k + \varepsilon_k(z_l) = 0, \quad k, l = 1, 2, \dots, N, \quad (36)$$

где $\varepsilon_k(z_l)$ – полином третьей степени, содержащий вторую и третью степень z_l .

Исходя из этого, с учётом (34), пространственно-неоднородное стационарное решение задачи (18)–(21) определяется асимптотическим равенством

$$\varphi^*(r, \theta, \mu) = \sum_{k=1}^{[N/3]} z_{3k}(\mu) \cos[3k\theta] R_{3k,1}(r). \quad (37)$$

Например, при $N = 3$ решение $z^*(\mu)$ определяется системой

$$\begin{aligned} \lambda_3 z_1 + \frac{1}{8d_3^2} [\Lambda (\beta_3 z_1^3 + 2\delta_{36} z_2^2 z_1 + 2\delta_{39} z_3^2 z_1 + \zeta_{39} z_1^2 z_3 + \xi_{639} z_2^2 z_3) - 8\Omega z_2 (\delta_{369} z_3 + \xi_{36} z_1)] &= 0, \\ \lambda_6 z_2 + \frac{1}{8d_6^2} [-\Lambda z_2 (\beta_6 z_2^2 + 2\delta_{36} z_1^2 + 2\delta_{69} z_3^2 + 2\xi_{639} z_1 z_3) + \Omega z_1 (8\delta_{369} z_3 + 4\xi_{36} z_1)] &= 0, \\ \lambda_9 z_3 + \frac{1}{24d_9^2} [3\Lambda (\beta_9 z_3^3 + 2\delta_{39} z_1^2 z_3 + 2\delta_{69} z_2^2 z_3 + \zeta_{39} \Lambda z_1^3 + \xi_{639} z_2^2 z_1) - 24\delta_{369} \Omega z_2 z_1] &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \beta_k &= \int_{r_1}^{r_2} r R_{k,1}^4(r) dr, \quad k = 3, 6, 9; \quad \delta_{kl} = \int_{r_1}^{r_2} r R_{k,1}^2(r) R_{l,1}^2(r) dr, \quad k, l = 3, 6, 9 (k < l); \\ \zeta_{39} &= \int_{r_1}^{r_2} r R_{3,1}^3(r) R_{9,1}(r) dr, \quad \xi_{36} = \int_{r_1}^{r_2} r R_{3,1}^2(r) R_{6,1}(r) dr, \\ \delta_{369} &= \int_{r_1}^{r_2} r R_{3,1}^2(r) R_{6,1}^2(r) R_{9,1}^2(r) dr, \quad \xi_{639} = \int_{r_1}^{r_2} r R_{6,1}^2(r) R_{3,1}(r) R_{9,1}(r) dr. \end{aligned} \quad (38)$$

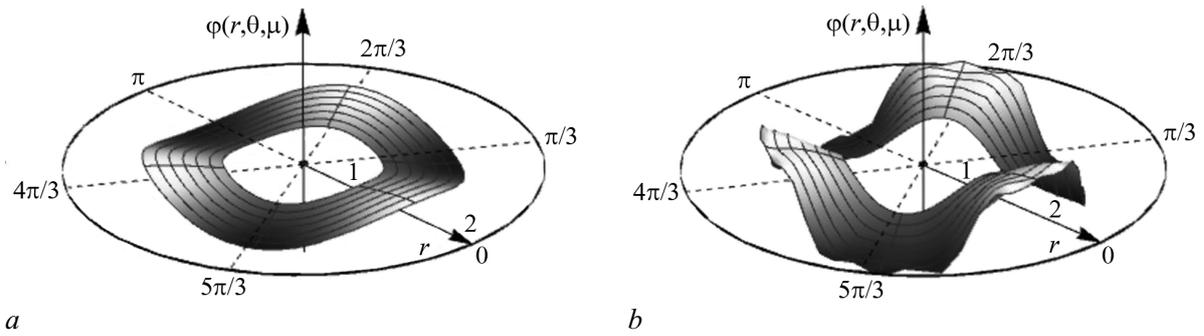


Рис. 2. Приближённое решение (30), полученное с применением метода Галёркина, для $\Lambda = -3/2$, $h = \pi/3$ в цилиндрической системе координат при $\mu = 0.1$ (a) и $\mu = 0.01$ (b)

Fig. 2. Approximate solution (30) obtained using the Galerkin method for $\Lambda = -3/2$, $h = \pi/3$ in a cylindrical coordinate system for $\mu = 0.1$ (a) and $\mu = 0.01$ (b)

Численный анализ для $N = 5$ проводился при фиксированных значениях параметров $\Lambda = -3/2$, $\Omega = 0.129264$, что соответствует $K = 2$, $\gamma = 0.761058$, $w = 1.74147$. Получены следующие результаты.

1. Критическое значение бифуркационного параметра $\mu^* \approx 0.113315$.
2. При $\mu > \mu^*$ нулевое решение системы (36) устойчиво.
3. При уменьшении параметра μ и прохождении критического значения μ^* одно собственное значение спектра матрицы устойчивости нулевого решения λ_3 проходит через нуль и становится положительным. В результате происходит бифуркация типа «вилка» и от теряющего устойчивость нулевого решения ответвляется пара устойчивых стационарных решений. В частности, при $\mu = 0.11331$ решение системы (36) $z^*(\mu) = \{0, 0, \pm 0.0481462, 0, 0, \pm 0.0000198428, 0, \dots\}$.
4. При дальнейшем уменьшении параметра μ собственное значение λ_3 остаётся положительным.
5. Спектр матрицы устойчивости решения $z^*(\mu)$ лежит на отрицательной полуоси.

В пакете «Wolfram Mathematica 11.3» для различных значений бифуркационного параметра μ построены полученные с применением метода Галёркина приближённые решения $\varphi(r, \theta, \mu)$, определяемые равенством (37) (рис. 2).

Приближённые решения задачи (18)–(21), построенные с применением метода центральных многообразий и метода Галёркина, практически совпадают.

3.3. Бегущая волна. Заметим, что в отличие от результатов, полученных выше, наличие поворота пространственных координат может моделировать ситуацию, когда пространственно-однородное решение при изменении параметров в задаче (μ, K) теряет устойчивость колебательным образом. В этом случае возникает бегущая волна.

Далее, используя представление решения (34) задачи (18)–(21) в методе Галёркина, построим двухмодовую аппроксимацию её периодического решения типа «бегущая волна», которое рождается в результате бифуркации Андронова–Хопфа при наибольшем критическом значении параметра $\mu = \mu^* : \{\text{Re } \lambda(\mu^*) = 0\}$ (24) от теряющего колебательным образом устойчивость нулевого решения системы (35).

Указанное решение ищем в виде

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \rho_1 \exp[i\theta_1], & z_2(t) &= 0, & z_3(t) &= \rho_3 \exp[i(3\theta_1 + \alpha_3)]; \\ \bar{z}_1(t) &= \rho_1 \exp[-i\theta_1], & \bar{z}_2(t) &= 0, & \bar{z}_3(t) &= \rho_3 \exp[-i(3\theta_1 + \alpha_3)], \end{aligned} \quad (39)$$

где $\rho_k = \rho_k(t, \mu) > 0$, $\theta_k = \theta_k(t, \mu)$, $k = 1, 3$.

Считаем $\theta_1(t, \mu) = \omega(\mu)t$. Подставим (39) в (35), получим систему для определения ρ_k, α_3 :

$$\begin{aligned} \rho_1(\lambda_1^* d_1^2 - i\omega) - \frac{1}{2}\Lambda \exp[ih] [\xi_{13} \exp[i\alpha_3] \rho_3 \rho_1^2 - \beta_1 \rho_1^3 - 2\delta_{13} \rho_3^2 \rho_1] &= 0, \\ \rho_1(\hat{\lambda}_1^* d_1^2 + i\omega) - \frac{1}{2}\Lambda \exp[-ih] [\xi_{13} \exp[-i\alpha_3] \rho_3 \rho_1^2 - \beta_1 \rho_1^3 - 2\delta_{13} \rho_3^2 \rho_1] &= 0, \\ \rho_3(\lambda_3^* d_3^2 - 3i\omega) - \frac{1}{6}\Lambda \exp[3ih] [\xi_{13} \exp[-i\alpha_3] \rho_1^3 - 3\beta_3 \rho_3^3 - 6\delta_{13} \rho_3 \rho_1^2] &= 0, \\ \rho_3(\hat{\lambda}_3^* d_3^2 + 3i\omega) - \frac{1}{6}\Lambda \exp[-3ih] [\xi_{13} \exp[i\alpha_3] \rho_1^3 - 3\beta_3 \rho_3^3 - 6\delta_{13} \rho_3 \rho_1^2] &= 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь $d_k^2 (k = 1, 3)$ определяется равенством (14), $\beta_k (k = 1, 3)$, δ_{13} определяются равенствами (38), $\xi_{13} = \int_{r_1}^{r_2} r R_{1,1}^3(r) R_{3,1}(r) dr$.

При $\mu > \mu^*$ система имеет только нулевое ($\rho_1 = 0, \rho_3 = 0$) устойчивое решение. При уменьшении параметра μ и прохождении критического значения μ^* нулевое решение теряет устойчивость и при этом происходит рождение решения вида:

$$\begin{aligned} \rho_1^2(\mu) &= \frac{6\Psi_3^c}{\Lambda (\Psi_1^c (3\gamma_1 (\Psi_3^c)^2 - 4\delta_{13} \Psi_3^c - \gamma_3 \Psi_1^c))} \left[\omega (3\omega \sin 4h + d_3^2 \Upsilon_{13}^c) + \right. \\ &\quad \left. + (d_1^2 (3\omega \Upsilon_{31}^c + d_3^2 (\Lambda \sin 3h (1 + \mu \lambda_{3,1}^2) - \Upsilon^s (1 + \mu \lambda_{1,1}^2))) \right], \\ \sin^2 \alpha_3(\mu) &= -\frac{12\Psi_1^c \Psi_3^c}{\Lambda^2 \xi_{13}^2 \rho_1(\mu)^4}, \\ \cos \alpha_3(\mu) &= \frac{\sin \alpha_3(\mu) (\gamma_1 \Lambda \rho_1^2(t) - 2d_1^2 \Lambda) \Psi^s}{2\Psi_1^c} + \frac{4\delta_{13} \Psi_1^c}{\Lambda \xi_{13}^2 \sin \alpha_3(\mu) \rho_1^2(t)}, \\ \rho_3(\mu) &= \frac{-2\Psi_1^c}{\Lambda \xi_{13} \sin \alpha_3(\mu) \rho_1(\mu)}, \end{aligned} \quad (41)$$

где $\Psi_k^c = k\omega \cos(kh) - d_k^2 \sin(kh)(\mu \lambda_{k,1}^2 + 1)$, $k = 1, 3$, $\Psi^s = \omega \sin h + d_1^2 \cos h(\mu \lambda_{1,1}^2 + 1)$, $\Upsilon_{jk}^c = -\Lambda \cos jh + \cos 4h(\mu \lambda_{k,1}^2 + 1)$, $(j, k = 1, 3, j \neq k)$, $\Upsilon^s = -\Lambda \sin h + \sin 4h(\mu \lambda_{3,1}^2 + 1)$, значение ω определяется из основного тригонометрического тождества для $\alpha_3(\mu)$, знак $\sin \alpha_3(\mu)$ выбирается противоположным знаком Ψ_1^c .

Следовательно, система (35) при $\mu < \mu^*$ имеет решение

$$\begin{aligned} z_1(t, \mu) &= \rho_1(\mu) \exp[i\theta_1(\mu)t], \quad z_2(t) = 0, \quad z_3(t, \mu) = \rho_3(\mu) \exp[i(3\theta_1(\mu)t + \alpha_3(\mu))]; \\ \bar{z}_1(t, \mu) &= \rho_1(\mu) \exp[-i\theta_1(\mu)t], \quad \bar{z}_2(t) = 0, \quad \bar{z}_3(t, \mu) = \rho_3(\mu) \exp[-i(3\theta_1(\mu)t + \alpha_3(\mu))]. \end{aligned} \quad (42)$$

Подставив (42) в (34), получаем периодическое решение $\varphi^*(r, \theta, t, \mu)$ задачи (18)–(21).

Указанное решение рождается устойчивым.

Численное моделирование проводилось для $h = 2\pi/3$ при фиксированных значениях параметров $\Lambda = -3/2$, $\Omega = 0.129264$, которые соответствуют параметрам $K = 2$, $\gamma = 0.761058$,

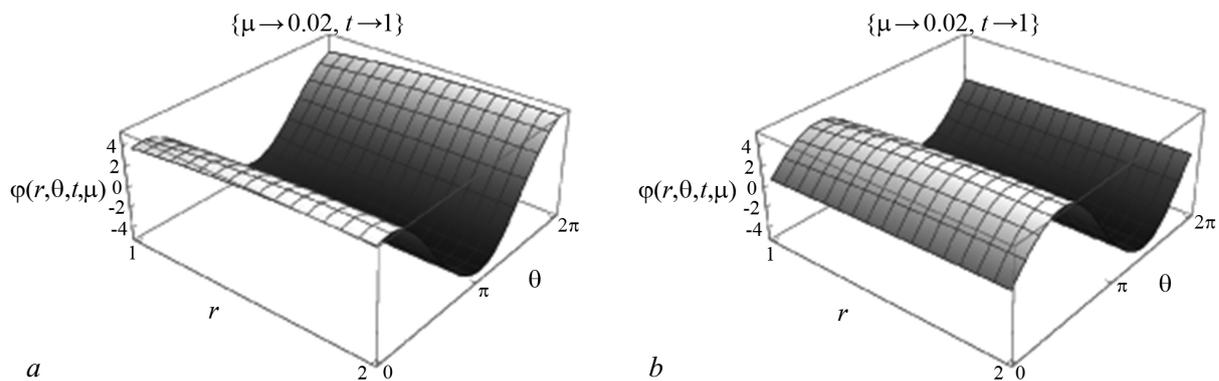


Рис. 3. Приближённое решение (30) типа «бегущая волна», полученное с применением метода Галёркина, для $\Lambda = -3/2$, $h = 2\pi/3$ при $\mu = 0.1$ (a) и $\mu = 0.01$ (b)

Fig. 3. An approximate solution (30) of the “traveling wave” type obtained using the Galerkin method for $\Lambda = -3/2$, $h = 2\pi/3$ for $\mu = 0.1$ (a) and $\mu = 0.01$ (b)

$w = 1.74147$ исходной задачи. В пакете «Wolfram Mathematica 11.3» для различных значений бифуркационного параметра μ при $N = 5$ были построены галёркинские аппроксимации периодических решений $\varphi^*(r, \theta, t, \mu)$ (рис. 3).

Заключение

В работе рассмотрена начально-краевая задача для параболического функционально-дифференциального уравнения в кольцевой области, которое описывает динамику фазовой модуляции световой волны, прошедшей тонкий слой нелинейной среды керровского типа в оптической системе с контуром обратной связи, с оператором инволюции и условиями Неймана на границе в классе периодических функций. С использованием функции Грина получено интегральное представление рассматриваемого уравнения, что позволяет более просто находить коэффициенты асимптотических разложений, доказывать теоремы существования и единственности (аналогично [30]), а также использовать различное число коэффициентов разложения нелинейной составляющей в правой части исходного уравнения в окрестности выделенного решения (например, стационарного).

С применением метода центральных многообразий доказана теорема о существовании в окрестности бифуркационного значения параметра μ (коэффициента диффузии) пространственно-неоднородного решения, которое ответвляется от пространственно-однородного решения. С помощью метода Галёркина проведено численное моделирование бифурцирующих пространственно-неоднородных стационарных решений и бегущих волн при фиксированных значениях параметров.

Рассмотренная математическая модель соответствует оптической схеме, в которой за счёт керровской нелинейности происходит визуализация фазы световой волны. Распределению фазы соответствует распределение интенсивности в поперечном сечении. Визуализация численного решения подтверждает теоретические выкладки и показывает возможность формирования сложных фазовых структур.

Список литературы

1. Ахманов С. А., Воронцов М. А., Иванов В. Ю. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей // В кн.: Новые физические принципы оптической обработки информации. М.: Наука, 1990. С. 263–325.

2. *Разгулин А. В.* Задача управления двумерным преобразованием пространственных аргументов в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, № 8. С. 1078–1091.
3. *Разгулин А. В.* Нелинейные модели оптической синергетики. М.: МАКС Пресс, 2008. 203 с.
4. *Akhmanov S. A., Vorontsov M. A., Ivanov V. Y., Larichev A. V., Zheleznykh N. I.* Controlling transverse-wave interactions in nonlinear optics: generation and interaction of spatiotemporal structures // J. Opt. Soc. Am. B. 1992. Vol. 9, no. 1. P. 78–90. DOI: 10.1364/JOSAB.9.000078.
5. *Vorontsov M. A., Razgulin A. V.* Properties of global attractor in nonlinear optical system having nonlocal interactions // Photonics and Optoelectronics. 1993. Vol. 1, no. 2. P. 103–111.
6. *Chesnokov S. S., Rybak A. A.* Spatiotemporal chaotic behavior of time-delayed nonlinear optical systems // Laser Physics. 2000. Vol. 10, no. 5. P. 1061–1068.
7. *Iroshnikov N. G., Vorontsov M. A.* Transverse rotating waves in the non-linear optical system with spatial and temporal delay // In: *Frontiers in Nonlinear Optics: The Sergei Akhmanov Memorial Volume* / Ed. by Walther H., Koroteev N., Scully M. O. Boca Raton: CRC Press, 1993. P. 261–278.
8. *Razgulin A. V.* Finite-dimensional dynamics of distributed optical systems with delayed feedback // *Computers and Mathematics with Applications*. 2000. Vol. 40, no. 12. P. 1405–1418. DOI: 10.1016/S0898-1221(00)00249-2.
9. *Каменский Г. А., Мышкис А. Д., Скубачевский А. Л.* О минимуме квадратичного функционала и о линейных краевых задачах эллиптического типа с отклоняющимися аргументами // УМН. 1979. Т. 34, № 3(207). С. 197–198.
10. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М: Мир, 1967. 548 с.
11. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 424 с.
12. *Скубачевский А. Л.* О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, № 10. С. 1394–1401.
13. *Варфоломеев Е. М.* О бифуркации Андронова–Хопфа для квазилинейных параболических функционально-дифференциальных уравнений с преобразованиями пространственных переменных // УМН. 2007. Т. 62, № 2(374). С. 173–174. DOI: 10.4213/rm6389.
14. *Варфоломеев Е. М.* О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных операторов, возникающих в нелинейной оптике // *Современная математика. Фундаментальные направления*. 2007. Т. 21. С. 5–36.
15. *Муравник А. Б.* О задаче Коши для некоторых неоднородных дифференциально-разностных параболических уравнений // *Математические заметки*. 2003. Т. 74, № 4. С. 538–548. DOI: 10.4213/mzm288.
16. *Муравник А. Б.* Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши // *Современная математика. Фундаментальные направления*. 2014. Т. 52. С. 3–141.
17. *Разгулин А. В.* Ротационные волны в оптической системе с двумерной обратной связью // *Математическое моделирование*. 1993. Т. 5, № 4. С. 105–119.
18. *Разгулин А. В., Романенко Т. Е.* Вращающиеся волны в параболическом функционально-дифференциальном уравнении с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2013. Т. 53, № 11. С. 1804–1821. DOI: 10.7868/S0044466913110136.
19. *Романенко Т. Е.* Двумерные вращающиеся волны в функционально-дифференциальном уравнении диффузии с поворотом пространственных аргументов и запаздыванием // *Дифференциальные уравнения*. 2014. Т. 50, № 2. С. 260–263. DOI: 10.1134/S0374064114020149.

20. Белан Е. П. О взаимодействии бегущих волн в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 5. С. 645–654.
21. Белан Е. П. О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной // Журнал математической физики, анализа, геометрии. 2005. Т. 1, № 1. С. 3–34.
22. Белан Е. П., Хазова Ю. А. Динамика стационарных структур в параболической задаче на окружности с отражением пространственной переменной // Динамические системы. 2014. Т. 4, № 1–2(32). С. 43–57.
23. Белан Е. П., Шиян О. В. Автоколебательные режимы горения вдоль полосы // Динамические системы. 2009. № 27. С. 3–16.
24. Корнута А. А. Метаустойчивые структуры в параболическом уравнении на окружности с поворотом пространственной переменной // Динамические системы. 2014. Т. 4, № 1–2(32). С. 59–75.
25. Белан Е. П., Лыкова О. Б. Вращающиеся структуры в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 10. С. 1348–1357.
26. Ларичев А. В. Динамические процессы в нелинейных оптических системах с двумерной обратной связью: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.21. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1995. 108 с.
27. Grigorieva E. V., Haken H., Kashchenko S. A., Pelster A. Travelling wave dynamics in a nonlinear interferometer with spatial field transformer in feedback // Physica D. 1999. Vol. 125, no. 1–2. P. 123–141. DOI: 10.1016/S0167-2789(98)00196-1.
28. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Диффузионный хаос и его инвариантные числовые характеристики // Теоретическая и математическая физика. 2020. Т. 203, № 1. С. 10–25. DOI: 10.4213/tmf9824.
29. Карпетянц Н. К., Самко С. Г. Уравнения с инволютивными операторами и их приложения. Ростов: Издательство Ростовского университета, 1988. 187 с.
30. Хазова Ю. А., Лукьяненко В. А. Применение интегральных методов для исследования одной параболической задачи // Известия вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 4. С. 85–98. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-4-85-98.
31. Корнута А. А., Лукьяненко В. А. Функционально-дифференциальные уравнения параболического типа с оператором инволюции // Динамические системы. 2019. Т. 9(37), № 4. С. 390–409.
32. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
33. Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит, 2005. 430 с.
34. Arecchi F. T., Boccaletti S., Ducci S., Pampaloni E., Ramazza P. L., Residori S. The liquid crystal light valve with optical feedback: A case study in pattern formation // Journal of Nonlinear Optical Physics & Materials. 2000. Vol. 9, no. 2. P. 183–204. DOI: 10.1142/S0218863500000170.
35. Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». Динамические системы – 1. М.: ВИНТИ, 1985. С. 7–140.
36. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985. 376 с.
37. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций. М.: Наука, 1970. 328 с.

References

1. Akhmanov SA, Vorontsov MA, Ivanov VY. Generation of structures in optical systems with two-dimensional feedback: Toward the creation of nonlinear-optical analogues of neural networks. In: *New Physical Principles of Optical Data Processing*. Moscow: Nauka; 1990. P. 263–325 (in Russian).
2. Razgulin AV. The problem of control of a two-dimensional transformation of spatial arguments in a parabolic functional-differential equation. *Differential Equations*. 2006;42(8):1140–1155. DOI: 10.1134/S001226610608009X.
3. Razgulin AV. *Nonlinear Models of Optical Synergetics*. Moscow: MAKS-Press; 2008. 203 p. (in Russian).
4. Akhmanov SA, Vorontsov MA, Ivanov VY, Larichev AV, Zheleznykh NI. Controlling transverse-wave interactions in nonlinear optics: generation and interaction of spatiotemporal structures. *J. Opt. Soc. Am. B*. 1992;9(1):78–90. DOI: 10.1364/JOSAB.9.000078.
5. Vorontsov MA, Razgulin AV. Properties of global attractor in nonlinear optical system having nonlocal interactions. *Photonics and Optoelectronics*. 1993;1(2):103–111.
6. Chesnokov SS, Rybak AA. Spatiotemporal chaotic behavior of time-delayed nonlinear optical systems. *Laser Physics*. 2000;10(5):1061–1068.
7. Iroshnikov NG, Vorontsov MA. Transverse rotating waves in the non-linear optical system with spatial and temporal delay. In: Walther H, Koroteev N, Scully MO, editors. *Frontiers in Nonlinear Optics: The Sergei Akhmanov Memorial Volume*. Boca Raton: CRC Press; 1993. P. 261–278.
8. Razgulin AV. Finite-dimensional dynamics of distributed optical systems with delayed feedback. *Computers and Mathematics with Applications*. 2000;40(12):1405–1418. DOI: 10.1016/S0898-1221(00)00249-2.
9. Kamenskii GA, Myshkis AD, Skubachevskii AL. The minimum of a quadratic functional, and linear elliptic boundary-value problems with deviating arguments. *Russian Mathematical Surveys*. 1979;34(3):201–202. DOI: 10.1070/RM1979v034n03ABEH003993.
10. Bellman RE, Cooke KL. *Differential-Difference Equations*. New York: Academic Press; 1963. 465 p.
11. Hale JK. *Theory of Functional Differential Equations*. New-York: Springer-Verlag; 1977. 366 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-9892-2.
12. Skubachevskii AL. On the Hopf bifurcation for a quasilinear parabolic functional-differential equation. *Differential Equations*. 1998;34(10):1395–1402.
13. Varfolomeev EM. Andronov–Hopf bifurcation for quasi-linear parabolic functional differential equations with transformations of spatial variables. *Russian Mathematical Surveys*. 2007;62(2):398–400. DOI: 10.1070/RM2007v062n02ABEH004401.
14. Varfolomeev EM. On some properties of elliptic and parabolic functional differential operators arising in nonlinear optics. *Journal of Mathematical Sciences*. 2008;153(5):649–682. DOI: 10.1007/s10958-008-9141-0.
15. Muravnik AB. The Cauchy problem for certain inhomogeneous difference-differential parabolic equations. *Mathematical Notes*. 2003;74(4):510–519. DOI: 10.1023/A:1026143810717.
16. Muravnik AB. Functional differential parabolic equations: integral transformations and qualitative properties of solutions of the Cauchy problem. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016;216(3):345–496. DOI: 10.1007/s10958-016-2904-0.
17. Razgulin AV. Rotational waves in optical system with 2-d feedback. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 1993;5(4):105–119 (in Russian).
18. Razgulin AV, Romanenko TE. Rotating waves in parabolic functional differential equations with

- rotation of spatial argument and time delay. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2013;53(11):1626–1643. DOI: 10.1134/S0965542513110109.
19. Romanenko TE. Two-dimensional rotating waves in a functional-differential diffusion equation with rotation of spatial arguments and time delay. *Differential Equations*. 2014;50(2):264–267. DOI: 10.1134/S0012266114020141.
 20. Belan EP. On the interaction of traveling waves in a parabolic functional-differential equation. *Differential Equations*. 2004;40(5):692–702. DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000043527.22864.ac.
 21. Belan EP. On the dynamics of traveling waves in a parabolic equation with the transformation of the shift of the spatial variable. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*. 2005;1(1): 3–34 (in Russian).
 22. Belan EP, Khazova YA. Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable in the case of a circle. *Dynamical Systems*. 2014;4(1–2(32)):43–57 (in Russian).
 23. Belan EP, Shiyani OV. Self-oscillatory combustion regimes along the strip. *Dynamical Systems*. 2009;(27):3–16 (in Russian).
 24. Kornuta AA. Metastable structures in a parabolic equation with rotation of the spatial variable. *Dynamical Systems*. 2014;4(1–2(32)):59–75 (in Russian).
 25. Belan EP, Lykova OB. Rotating structures in a parabolic functional-differential equation. *Differential Equations*. 2004;40(10):1419–1430. DOI: 10.1007/s10625-004-0008-y.
 26. Larichev AV. *Dynamic Processes in Nonlinear Optical Systems With Two-Dimensional Feedback*. PhD Thesis in Physical and Mathematical Sciences. Moscow: Lomonosov Moscow State University; 1995. 108 p. (in Russian).
 27. Grigorieva EV, Haken H, Kashchenko SA, Pelster A. Travelling wave dynamics in a nonlinear interferometer with spatial field transformer in feedback. *Physica D*. 1999;125(1–2):123–141. DOI: 10.1016/S0167-2789(98)00196-1.
 28. Glyzin SD, Kolesov AY, Rozov NC. Diffusion chaos and its invariant numerical characteristics. *Theoretical and Mathematical Physics*. 2020;203(1):443–456. DOI: 10.1134/S0040577920040029.
 29. Karapetiants NK, Samko SG. *Equations With Involution Operators and Their Applications*. Rostov-on-Don: Rostov University Publishing; 1988. 187 p. (in Russian).
 30. Khazova YA, Lukianenko VA. Application of integral methods for the study of the parabolic problem. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2019;27(4):85–98 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-4-85-98.
 31. Kornuta AA, Lukianenko VA. Functional-differential equations of parabolic type with an involution operator. *Dynamical Systems*. 2019;9(4):390–409 (in Russian).
 32. Abramowitz M, Stegun IA, editors. *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Washington: National Bureau of Standards; 1964. 1082 p.
 33. Mishchenko EF, Sadovnichiy VA, Kolesov AY, Rozov NK. *Autowave Processes in Nonlinear Media With Diffusion*. Moscow: Fizmatlit; 2005. 430 p. (in Russian).
 34. Arecchi FT, Boccaletti S, Ducci S, Pampaloni E, Ramazza PL, Residori S. The liquid crystal light valve with optical feedback: A case study in pattern formation. *Journal of Nonlinear Optical Physics & Materials*. 2000;9(2):183–204. DOI: 10.1142/S0218863500000170.
 35. Arnol'd VI, Ilyashenko YS. Ordinary differential equations. In: *Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Dynamical Systems I*. Berlin: Springer-Verlag; 1988. P. 1–148.
 36. Henry D. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Berlin: Springer-Verlag; 1981. 350 p. DOI: 10.1007/BFb0089647.
 37. Bateman H, Erdelyi A. *Tables of Integral Transforms*. Vol. 2. New York: McGraw-Hill Book Company; 1954. 451 p.



Корнута Анжелика Александровна — родилась в Симферополе (1969). Окончила с отличием Симферопольский государственный университет по специальности математика (1992). Старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений и геометрии факультета математики и информатики Таврической академии (структурное подразделение) Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского. Научные интересы — анализ решений функционально-дифференциальных уравнений параболического типа с преобразованием пространственных переменных, бифурцирующих при изменении параметров уравнения, математическое моделирование. Опубликовала 9 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 295007 Симферополь, просп. Академика Вернадского, 4
Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского
E-mail: korn_57@mail.ru
AuthorID: 890574



Лукьяненко Владимир Андреевич — родился в с. Юрковка Винницкой области (1949). Окончил Одесский государственный университет имени И. И. Мечникова по специальности математика (1972). Доцент кафедры дифференциальных уравнений и геометрии факультета математики и информатики Таврической академии (структурное подразделение) Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского. Опубликовал свыше 140 научных статей по направлениям уравнения типа свертки, краевые задачи теории аналитических функций и уравнения в частных производных, линейные и нелинейные уравнения 1-го рода, математическое моделирование, интеллектуализация обработки данных.

Россия, 295007 Симферополь, просп. Академика Вернадского, 4
Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского
E-mail: art-inf@yandex.ru
ORCID: 0000-0001-5271-031X
AuthorID: 885978



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(2)

Научная статья

УДК 517.926

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-152-175

Охота на химер в полностью связанных сетях нелинейных осцилляторов

Д. С. Глызин, С. Д. Глызин[✉], А. Ю. Колесов

Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова, Россия

E-mail: glyzin@gmail.com, ✉glyzin@uniyar.ac.ru, kolesov@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию 21.12.2021, принята к публикации 16.02.2022, опубликована 31.03.2022

Аннотация. Целью работы является изучение динамических свойств решений специальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, называемых полностью связанными сетями нелинейных осцилляторов. **Методы.** Предлагается новый подход к отысканию в этих системах периодических режимов химерного типа, суть которого состоит в следующем. Сначала в случае симметричной сети решается более простой вопрос о существовании и устойчивости квазихимерных решений — периодических режимов двухкластерной синхронизации. Для каждого из таких режимов множество осцилляторов распадается на два непересекающихся класса. В пределах данных классов наблюдается полная синхронизация колебаний, а каждые два осциллятора из разных классов колеблются асинхронно. **Результаты.** На основе предложенных методов отдельно устанавливается, что при переходе от симметричной системы к сети общего вида периодические режимы двухкластерной синхронизации могут трансформироваться в химеры. **Заключение.** Основные утверждения работы, касающиеся возникновения химер, получены аналитически на основе асимптотического исследования модельного примера. Для этого примера введено понятие канонической химеры и доказано утверждение о существовании и устойчивости решений химерного типа в случае несимметричности сети. Все приведённые результаты распространены на непрерывный аналог соответствующей системы. Полученные результаты проиллюстрированы численно.

Ключевые слова: полностью связанная сеть нелинейных осцилляторов, периодические режимы двухкластерной синхронизации, охота на химер, устойчивость, буферность.

Благодарности. Исследования, изложенные в разделе 4, выполнены в рамках реализации программы развития РНОМЦ (ЯрГУ) при поддержке Минобрнауки России (соглашение № 075-02-2021-1397). Исследования, приведенные в разделах 1–3, выполнены при поддержке Российского научного фонда (грант № 21-71-30011).

Для цитирования: Глызин Д. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю. Охота на химер в полностью связанных сетях нелинейных осцилляторов // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 2. С. 152–175. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-152-175

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Hunt for chimeras in fully coupled networks of nonlinear oscillators

D. S. Glyzin, S. D. Glyzin[✉], A. Yu. Kolesov

P. G. Demidov Yaroslavl State University, Russia
E-mail: glyzin@gmail.com, ✉glyzin@uniyar.ac.ru, kolesov@uniyar.ac.ru
Received 21.12.2021, accepted 16.02.2022, published 31.03.2022

Abstract. The purpose of this work is to study the dynamic properties of solutions to special systems of ordinary differential equations, called fully connected networks of nonlinear oscillators. *Methods.* A new approach to obtain periodic regimes of the chimeric type in these systems is proposed, the essence of which is as follows. First, in the case of a symmetric network, a simpler problem is solved of the existence and stability of quasi-chimeric solutions – periodic regimes of two-cluster synchronization. For each of these modes, the set of oscillators falls into two disjoint classes. Within these classes, full synchronization of oscillations is observed, and every two oscillators from different classes oscillate asynchronously. *Results.* On the basis of the proposed methods, it is separately established that in the transition from a symmetric system to a general network, the periodic regimes of two-cluster synchronization can be transformed into chimeras. *Conclusion.* The main statements of the work concerning the emergence of chimeras were obtained analytically on the basis of an asymptotic study of a model example. For this example, the notion of a canonical chimera is introduced and the statement about the existence and stability of solutions of chimeric type in the case of asymmetry of the network is proved. All the results presented are extended to a continuous analogue of the corresponding system. The obtained results are illustrated numerically.

Keywords: fully coupled network of nonlinear oscillators, periodic modes of two-cluster synchronization, hunting for chimeras, stability, buffering.

Acknowledgements. Sections 1–3 of this work were supported by the Russian Science Foundation (project No. 21-71-30011). Section 4 was carried out within the framework of a development programme for the RSEMC of the P. G. Demidov Yaroslavl State University with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 075-02-2021-1397).

For citation: Glyzin DS, Glyzin SD, Kolesov AYU. Hunt for chimeras in fully coupled networks of nonlinear oscillators. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(2):152–175. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-152-175

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

1. Общая стратегия охоты на химер

Полносвязной сетью нелинейных осцилляторов или просто полносвязной сетью назовем систему вида

$$\dot{x}_j = F_j(x_j, u_j), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (1)$$

Здесь $m \geq 2$, $x_j = x_j(t) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, точка – дифференцирование по t ,

$$u_j = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m G_s(x_s), \quad (2)$$

а вектор-функции $F_j(x, u)$, $G_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, m$, со значениями в \mathbb{R}^n бесконечно дифференцируемы по своим переменным $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и $x \in \mathbb{R}^n$. Как правило, каждая из отвечающих сети (1), (2) парциальных систем

$$\dot{x} = F_j(x, 0), \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3)$$

допускает экспоненциально орбитально устойчивый цикл, то есть представляет собой нелинейный осциллятор. Мы же рассматриваем ситуацию, когда m осцилляторов (3) взаимодействуют друг с другом по принципу «каждый со всеми».

В частном случае, когда

$$F_j(x, u) = F_j(x) + D_j(x)u, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

где $D_j(x)$ — квадратные матрицы размера $n \times n$, система (1), (2) приобретает вид

$$\dot{x}_j = F_j(x_j) + D_j(x_j) \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m G_s(x_s), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

Данная ситуация заслуживает отдельного упоминания в связи с тем, что именно системы (4) наиболее часто встречаются в приложениях.

Следует отметить, что цепочки и решетки связанных идентичных нелинейных осцилляторов используются в качестве математических моделей в различных областях естествознания: биофизике, экологии, оптике, химической кинетике, нейродинамике, генной инженерии и т. д. При этом в подавляющем большинстве работ, посвященных системам связанных нелинейных осцилляторов, изучаются специальные стационарные режимы упомянутых систем — так называемые химеры. Универсального математического определения химеры не существует. На эвристическом же уровне строгости одна из возможных ситуаций, когда мы имеем дело с химерой, состоит в следующем. Пусть m — количество осцилляторов в системе, а $m_1, m_2 : m_1 < m_2 < m$ — некоторые фиксированные натуральные числа. Тогда в случае химерного стационарного режима имеются две зоны когерентности: для любых двух компонент x_j с номерами $1 \leq j \leq m_1$ или $m_2 < j \leq m$ наблюдается синхронизация (возможно, приближенная). Под термином «синхронизация» во избежание недоразумений мы понимаем выполнение равенств вида $x_1 = x_2 = \dots = x_{m_1}, x_{m_2+1} = x_{m_2+2} = \dots = x_m$. Любые же два осциллятора с номерами $j_1, j_2 : m_1 < j_1 < j_2 \leq m_2$ колеблются асинхронно, то есть $x_{j_1} \neq x_{j_2}$ (это так называемая зона некогерентности). Добавим еще, что, как правило, химеры характерны для случая $m, m_1, m_2 \gg 1$ и выявляются посредством численного анализа соответствующих математических моделей.

С момента своего открытия в 2002 г. (см. [1]) химеры стали активно изучаемым объектом исследования [2, 3]. Было показано, что они могут возникать как в глобально связанных [4, 5], так и в локально связанных [6] сетях нелинейных осцилляторов. Например, химеры удалось обнаружить в модели Стюарта–Ландау [7, 8], в связанных системах ван дер Поля [9], ФитцХью–Нагумо [10], в моделях Ходжкина–Хаксли [11], Хиндмарша–Роуза [12] и т. д. Это, разумеется, далеко не полный библиографический список. Более подробную библиографию по химерам можно найти в книге [13].

В настоящей работе предлагается некоторый общий подход к отысканию химерных стационарных режимов, который уместно назвать «охотой на химер». Упомянутый подход состоит из двух этапов.

На первом этапе мы рассматриваем аналогичную (1), (2) симметричную полносвязную сеть

$$\dot{x}_j = F(x_j, u_j), \quad u_j = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m G(x_s), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (5)$$

где, как и выше, $F(x, u) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $G(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Далее, нас будут интересовать периодические режимы системы (5), которые можно квалифицировать как квазихимеры. В описанной выше ситуации им соответствует случай $m_1 = m_2$, когда отсутствует зона некогерентного

поведения осцилляторов, а есть только две зоны когерентности. Такого типа периодические решения естественно назвать режимами двухкластерной синхронизации. Простейший из них имеет вид

$$C: \quad x_1 = x_2 = \dots = x_k = v_{(k)}(t), \quad x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_m = w_{(k)}(t), \quad (6)$$

где $k: 1 \leq k \leq m$ – некоторое фиксированное натуральное число, а $v_{(k)}(t), w_{(k)}(t)$ – периодические вектор-функции. Предположим, что данный цикл в системе (5) существует и экспоненциально орбитально устойчив.

На втором этапе перейдем от (5) к несимметричной сети

$$\dot{x}_j = F_j(x_j, u_j, \varepsilon), \quad u_j = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m G_s(x_s, \varepsilon), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (7)$$

где

$$F_j(x, u, \varepsilon) = F(x, u) + \varepsilon \Delta_{1,j}(x, u), \quad G_j(x, \varepsilon) = G(x) + \varepsilon \Delta_{2,j}(x), \quad (8)$$

$$\Delta_{1,j}(x, u) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n), \quad \Delta_{2,j}(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n), \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

а $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Ясно, что система (7) допускает асимптотически близкий к (6) устойчивый цикл $C(\varepsilon)$, который при подходящих возмущениях $\Delta_{1,j}, \Delta_{2,j}$ из (8) может стать химерой.

Действительно, фиксируем натуральные $m_1, m_2: m_1 < k < m_2 < m$ и предположим, что

$$\begin{aligned} \Delta_{1,1} = \Delta_{1,2} = \dots = \Delta_{1,m_1}, \quad \Delta_{1,m_2+1} = \Delta_{1,m_2+2} = \dots = \Delta_{1,m}, \\ \Delta_{2,1} = \Delta_{2,2} = \dots = \Delta_{2,m_1}, \quad \Delta_{2,m_2+1} = \Delta_{2,m_2+2} = \dots = \Delta_{2,m}, \end{aligned} \quad (9)$$

а при $m_1 + 1 \leq j \leq m_2$ добавки $\Delta_{1,j}, \Delta_{2,j}$ нетривиально зависят от индекса j (строгий смысл этому понятию будет придан ниже при рассмотрении конкретного примера сети (7)). Тогда, очевидно, система (7) допускает так называемые частично однородные решения (не обязательно периодические), для которых выполняются аналогичные (9) соотношения

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{m_1}, \quad x_{m_2+1} = x_{m_2+2} = \dots = x_m. \quad (10)$$

А отсюда, в свою очередь, следует, что равенства (10) справедливы и для цикла $C(\varepsilon)$ (поскольку он заведомо обладает частичной однородностью при $\varepsilon = 0$). Что же касается компонент x_j этого цикла при $m_1 + 1 \leq j \leq m_2$, то в общем случае они демонстрируют некогерентное поведение, то есть каждая пара из них колеблется асинхронно.

Итак, для реализации предложенной нами стратегии охоты на химер необходимо знать периодические режимы двухкластерной синхронизации у симметричной сети (5). В отличие от химер данные режимы допускают строгое математическое описание, позволяющее в ряде случаев проанализировать вопросы об их существовании и устойчивости. Соответствующая теория излагается ниже.

Фиксируем произвольно натуральное $k: 1 \leq k \leq m - 1$ и предположим, что совокупность индексов $1 \leq j \leq m$ разбита на два непересекающихся множества \mathcal{A} и \mathcal{B} , состоящих из k и $m - k$ элементов, соответственно, то есть

$$\{1, 2, \dots, m\} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}. \quad (11)$$

Тогда, как нетрудно увидеть, система (5) допускает решения с компонентами

$$x_j = v(t) \quad \text{при } j \in \mathcal{A}, \quad x_j = w(t) \quad \text{при } j \in \mathcal{B}, \quad (12)$$

где переменные v, w удовлетворяют вспомогательной системе

$$\dot{v} = F(v, u_{k,1}), \quad \dot{w} = F(w, u_{k,2}), \quad (13)$$

в которой

$$u_{k,1} = (k-1)G(v) + (m-k)G(w), \quad u_{k,2} = kG(v) + (m-k-1)G(w). \quad (14)$$

А поскольку нас интересуют периодические решения системы (5) вида (12), то предполагаем выполненным следующее

Условие 1. Система (13), (14) имеет непостоянное периодическое решение

$$C_k: (v, w) = (v_{(k)}(t), w_{(k)}(t)) \quad (15)$$

периода $T_{(k)} > 0$, удовлетворяющее требованию неоднородности

$$v_{(k)}(t) \neq w_{(k)}(t). \quad (16)$$

Сформулированное условие гарантирует существование у исходной системы (5) целого семейства циклов \mathcal{U}_k . Все циклы из этого семейства задаются равенствами (11), (12) при

$$v = v_{(k)}(t), \quad w = w_{(k)}(t), \quad (17)$$

а их количество равно, очевидно, C_m^k . Добавим еще, что в силу условия неоднородности (16) они представляют собой режимы двухкластерной синхронизации.

Для исследования устойчивости циклов (11), (12), (17) системы (5) нам потребуется серия $T_{(k)}$ -периодических по t матриц $A_s(t), B_s(t), s = 1, 2, 3$ размера $n \times n$. Упомянутые матрицы зададим равенствами

$$A_1(t) = \left. \frac{\partial F}{\partial x}(x, u) \right|_{x=v_{(k)}(t), u=u_{k,1}(t)}, \quad (18)$$

$$A_2(t) = \left. \frac{\partial F}{\partial u}(x, u) \right|_{x=v_{(k)}(t), u=u_{k,1}(t)} \cdot G'_x(v_{(k)}(t)), \quad (19)$$

$$A_3(t) = \left. \frac{\partial F}{\partial u}(x, u) \right|_{x=v_{(k)}(t), u=u_{k,1}(t)} \cdot G'_x(w_{(k)}(t)), \quad (20)$$

$$B_1(t) = \left. \frac{\partial F}{\partial x}(x, u) \right|_{x=w_{(k)}(t), u=u_{k,2}(t)}, \quad (21)$$

$$B_2(t) = \left. \frac{\partial F}{\partial u}(x, u) \right|_{x=w_{(k)}(t), u=u_{k,2}(t)} \cdot G'_x(v_{(k)}(t)), \quad (22)$$

$$B_3(t) = \left. \frac{\partial F}{\partial u}(x, u) \right|_{x=w_{(k)}(t), u=u_{k,2}(t)} \cdot G'_x(w_{(k)}(t)), \quad (23)$$

где

$$u_{k,1}(t) = (k-1)G(v_{(k)}(t)) + (m-k)G(w_{(k)}(t)),$$

$$u_{k,2}(t) = kG(v_{(k)}(t)) + (m-k-1)G(w_{(k)}(t)).$$

Далее, введем в рассмотрение линейные системы

$$\begin{aligned} \dot{c}_1 &= (A_1(t) + (k-1)A_2(t))c_1 + (m-k)A_3(t)c_2, \\ \dot{c}_2 &= k B_2(t)c_1 + (B_1(t) + (m-k-1)B_3(t))c_2, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\dot{c} = (A_1(t) - A_2(t))c, \quad \dot{c} = (B_1(t) - B_3(t))c, \quad (25)$$

где $c_1, c_2, c \in \mathbb{R}^n$.

Из формул (18)–(23) непосредственно следует, что система (24) представляет собой линеаризацию вспомогательной системы (13), (14) на цикле (15). Тем самым, она заведомо имеет единичный мультипликатор. В дальнейшем считаем, что этот мультипликатор является простым. Более того, предположим, что выполнено очередное

Условие 2. Все мультипликаторы систем (24), (25) (за исключением простого единичного в случае системы (24)) по модулю строго меньше единицы.

Сформулированные ограничения позволяют доказать следующий базовый результат.

Теорема 1. При условиях 1, 2 система (5) допускает семейство \mathcal{U}_k периодических режимов двухкластерной синхронизации, количество которых равно C_m^k . Все эти циклы экспоненциально орбитально устойчивы.

Доказательство. Как уже отмечалось выше, существование у системы (5) семейства циклов \mathcal{U}_k гарантируется условием 1. Поэтому перейдем сразу к вопросу об устойчивости данных циклов. В связи с этим сделаем два полезных наблюдения.

Во-первых, несложная проверка показывает, что система (5) инвариантна относительно замен

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow (x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}), \quad (26)$$

где (j_1, j_2, \dots, j_m) – произвольная перестановка набора индексов $(1, 2, \dots, m)$. Во-вторых, периодические режимы из семейства \mathcal{U}_k допускают кодирование с помощью бинарных векторов

$$(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m) : \vartheta_j = 1 \text{ или } 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (27)$$

Точнее говоря, предполагаем, что j -я координата вектора (27) равна 1 или 0 при $j \in \mathcal{A}$ или $j \in \mathcal{B}$, соответственно. В этом случае между векторами (27), содержащими k единиц и $m-k$ нулей, и циклами семейства \mathcal{U}_k имеет место взаимно однозначное соответствие.

Суммируя вышесказанное, убеждаемся в том, что любые два цикла из \mathcal{U}_k переходят друг в друга под действием замен (26), а значит, имеют одинаковые свойства устойчивости. Таким образом, проблема устойчивости всех режимов семейства \mathcal{U}_k сводится к исследованию устойчивости только одного цикла, соответствующего бинарному вектору

$$(\underbrace{1, \dots, 1}_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-k}).$$

Линеаризуя исходную систему (5) на указанном цикле, приходим к линейной системе вида

$$\dot{h}_j = A_1(t)h_j + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^k A_2(t)h_s + \sum_{s=k+1}^m A_3(t)h_s, \quad 1 \leq j \leq k, \quad (28)$$

$$\dot{h}_j = B_1(t)h_j + \sum_{s=1}^k B_2(t)h_s + \sum_{\substack{s=k+1 \\ s \neq j}}^m B_3(t)h_s, \quad k+1 \leq j \leq m, \quad (29)$$

где $A_s(t), B_s(t), s = 1, 2, 3$ – матрицы (18)–(23), $h_j \in \mathbb{R}^n, j = 1, 2, \dots, m$.

Как оказывается, при подходящей замене переменных система (28), (29) принимает блочную структуру: распадается на одну $2n$ -мерную подсистему и $m - 2$ подсистем размерности n .

Действительно, введем в рассмотрение серию матриц размера $nm \times n$, задающихся в виде матричных столбцов

$$e_{1,0} = (\underbrace{I, I, \dots, I}_k, \underbrace{O, O, \dots, O}_{m-k})^*, \quad e_{2,0} = (\underbrace{O, O, \dots, O}_k, \underbrace{I, I, \dots, I}_{m-k})^*, \quad (30)$$

$$e_{1,s} = (I, O, \dots, O, \underbrace{-I}_{s+1}, O, \dots, O)^*, \quad s = 1, \dots, k-1, \quad (31)$$

$$e_{2,s} = (O, \dots, O, \underbrace{I}_k, O, \dots, O, \underbrace{-I}_{k+1+s}, O, \dots, O)^*, \quad s = 1, \dots, m-k-1. \quad (32)$$

Здесь I и O — единичная и нулевая матрицы размера $n \times n$, $*$ — операция транспонирования, а нижние подписи обозначают номера позиций, которые занимают эти $n \times n$ -блоки в соответствующих матричных столбцах (30)–(32).

Опираясь на приведенные матрицы, выполним в системе (28), (29) замену

$$\text{colon}(h_1, h_2, \dots, h_m) = e_{1,0}c_{1,0} + e_{2,0}c_{2,0} + \sum_{s=1}^{k-1} e_{1,s}c_{1,s} + \sum_{s=1}^{m-k-1} e_{2,s}c_{2,s}, \quad (33)$$

где $c_{1,0}, c_{2,0}, c_{1,s}, c_{2,s} \in \mathbb{R}^n$ — новые переменные. В результате приходим к выводу, что пара компонент $(c_{1,0}, c_{2,0}) = (c_{1,0}(t), c_{2,0}(t))$ из (33) удовлетворяет линейной системе (24). Что же касается компонент $c_{1,s} = c_{1,s}(t)$, $s = 1, \dots, k-1$, то все они являются решениями первой системы из (25). Аналогичным образом, группа координат $c_{2,s} = c_{2,s}(t)$, $s = 1, \dots, m-k-1$, удовлетворяет второй системе из (25). А отсюда и из Условия 2 вытекает требуемая экспоненциальная орбитальная устойчивость всех циклов семейства \mathcal{U}_k . Теорема 1 доказана. \square

Завершая описание общей схемы исследования проблем существования и устойчивости периодических режимов двухкластерной синхронизации, напомним [14, 15], что ранее такие режимы были обнаружены в полностью связанных нейронных и генных сетях, содержащих запаздывание по времени. Однако, как показывают результаты настоящей работы, факт наличия или отсутствия запаздывания в данном вопросе несущественен.

2. Анализ модельного примера

В настоящем разделе изложенная выше общая стратегия охоты на химер иллюстрируется на конкретном модельном примере. А именно рассматривается такая симметричная полностью связанная сеть (5), для которой все периодические режимы двухкластерной синхронизации задаются явными формулами.

Для построения интересующей нас сети обратимся сначала к двумерной системе, имеющей в комплексной форме запись вид

$$\dot{z} = z - d_0|z|^2 z, \quad z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad d_0 = 1 - ic_0, \quad c_0 = \text{const} > 0. \quad (34)$$

Несложно проверить, что эта система допускает экспоненциально орбитально устойчивый гармонический цикл $z_0(t) = \exp(ic_0 t)$, то есть является простейшим нелинейным осциллятором. Рассмотрим далее полностью связанную сеть

$$\dot{z}_j = z_j - d_0|z_j|^2 z_j - \frac{\nu}{m} d_1 \bar{z}_j \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m z_s^2, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (35)$$

осцилляторов (34), где $z_j = x_j + iy_j$, $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, m$, $\nu = \text{const} > 0$, $d_1 = 1 + ic_1$, $c_1 = \text{const} \in \mathbb{R}$. Как будет показано ниже, сеть (35) обладает интересующим нас свойством: все ее периодические режимы двухкластерной синхронизации, а также условия их устойчивости, выписываются в явном виде.

Анализ системы (35) начнем с получения условий ее диссипативности. Для этого нам потребуется функция

$$V(z_1, z_2, \dots, z_m, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_m) = \sum_{j=1}^m |z_j|^2. \quad (36)$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. При выполнении неравенства

$$\nu < m \quad (37)$$

имеет место оценка

$$\frac{1}{2} \dot{V} \leq V - \left(1 - \frac{\nu}{m}\right) \frac{1}{m} V^2, \quad (38)$$

где \dot{V} — производная функции (36) в силу системы (35).

Доказательство. Для вычисления производной \dot{V} заметим сначала, что в силу (35) при любом индексе $j : 1 \leq j \leq m$ справедливо равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |z_j|^2 = |z_j|^2 - \left(1 - \frac{\nu}{m}\right) |z_j|^4 - \frac{\nu}{2m} \left(d_1 \bar{z}_j^2 \sum_{s=1}^m z_s^2 + \bar{d}_1 z_j^2 \sum_{s=1}^m \bar{z}_s^2 \right). \quad (39)$$

Суммируя затем выражения (39) по j , приходим к выводу, что

$$\frac{1}{2} \dot{V} = V - \left(1 - \frac{\nu}{m}\right) \sum_{j=1}^m |z_j|^4 - \frac{\nu}{m} \left| \sum_{j=1}^m z_j^2 \right|^2 \leq V - \left(1 - \frac{\nu}{m}\right) \sum_{j=1}^m |z_j|^4.$$

А отсюда с учетом очевидного свойства

$$\left(\sum_{j=1}^m |z_j|^2 \right)^2 \leq m \sum_{j=1}^m |z_j|^4$$

получаем требуемую оценку (38). Лемма 1 доказана. \square

Установленная лемма позволяет без труда разобраться с интересующим нас вопросом о диссипативности системы (35). Действительно, пусть выполнено условие (37). Тогда в силу (38) при любом фиксированном $R > m^2/(m - \nu)$ все траектории нашей системы при увеличении t втекают в шар

$$\left\{ (z_1, z_2, \dots, z_m) : \sum_{j=1}^m |z_j|^2 \leq R \right\},$$

то есть имеет место требуемое свойство диссипативности. При выполнении же строго противоположного (37) неравенства диссипативность отсутствует.

Действительно, непосредственная проверка показывает, что система (35) допускает инвариантное многообразие вида

$$z_j = z \exp(i\gamma_j), \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

где вещественные постоянные γ_j подчинены условию

$$\sum_{j=1}^m \exp(2i\gamma_j) = 0,$$

а комплексная переменная z удовлетворяет уравнению

$$\dot{z} = z - \left(d_0 - \frac{\nu}{m} d_1 \right) |z|^2 z. \quad (40)$$

Что же касается уравнения (40), то в случае $\nu > m$ любое его решение $z(t) \neq 0$ определено на конечном полуинтервале вида $[0, t_0)$ и $|z(t)| \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow t_0$.

Перейдем теперь к вопросам о существовании и устойчивости периодических решений системы (35). Нетрудно проверить, что рассматриваемая сеть допускает однородный цикл

$$z_j = \xi_0 \exp(i\omega_0 t), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (41)$$

где

$$\xi_0 = \sqrt{1/(1 + \nu(m-1)/m)}, \quad \omega_0 = \left(c_0 - \frac{\nu(m-1)}{m} c_1 \right) \xi_0^2, \quad (42)$$

а также периодические режимы двухкластерной синхронизации

$$z_j = \xi_0 \exp(i\omega_0 t), \quad 1 \leq j \leq k, \quad z_j = -\xi_0 \exp(i\omega_0 t), \quad k+1 \leq j \leq m \quad (43)$$

при всех $k : 1 \leq k \leq m-1$. Как уже отмечалось в разделе 1, каждый из циклов (43) порождает, в свою очередь, целое семейство \mathcal{U}_k режимов двухкластерной синхронизации. Обозначим через \mathcal{U} — объединение циклов из $\bigcup_{k=1}^{m-1} \mathcal{U}_k$ с однородным циклом (41). Как оказывается, все эти периодические режимы устойчивы или нет одновременно.

Лемма 2. *Любой цикл из \mathcal{U} экспоненциально орбитально устойчив при выполнении неравенств*

$$\frac{\nu(m+1)}{m} < 1, \quad \frac{\nu}{m} (1 + c_1^2) + c_0 c_1 - 1 > 0 \quad (44)$$

и неустойчив при строгом нарушении хотя бы одного из них.

Доказательство. При обосновании леммы обратим внимание на два обстоятельства. Во-первых, как нетрудно увидеть, система (35) инвариантна по отношению к заменам переменных

$$(\theta_1 z_1, \theta_2 z_2, \dots, \theta_m z_m) \rightarrow (z_1, z_2, \dots, z_m), \quad (45)$$

где множители θ_j , $j = 1, 2, \dots, m$ независимо друг от друга принимают значения 1 или -1 . Во-вторых, любые два цикла семейства \mathcal{U} переходят друг в друга при некоторой замене вида (45). А отсюда автоматически следует, что свойства устойчивости всех циклов из \mathcal{U} одинаковы. Таким образом, достаточно разобраться с устойчивостью лишь одного из них — однородного цикла (41), (42).

Положим в (35) $z_j = \xi_0(1 + h_j) \exp(i\omega_0 t)$, $h_j = h_{1,j} + ih_{2,j}$, $h_{1,j}, h_{2,j} \in \mathbb{R}$ и отбросим нелинейные по h_j, \bar{h}_j слагаемые. В результате приходим к линейной системе

$$\begin{aligned} \dot{h}_j = & -d_0 \xi_0^2 (h_j + \bar{h}_j) + \frac{\nu(m+1)}{m} d_1 \xi_0^2 h_j - \frac{\nu(m-1)}{m} d_1 \xi_0^2 \bar{h}_j - \\ & - \frac{2\nu}{m} d_1 \xi_0^2 \sum_{s=1}^m h_s, \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (46)$$

Заметим, далее, что получившаяся система допускает инвариантное подпространство $h_1 = h_2 = \dots = h_m$, на котором она записывается в виде

$$\dot{h} = -\xi_0^2 \left(d_0 + \frac{\nu(m-1)}{m} d_1 \right) (h + \bar{h}), \quad h = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m h_j,$$

а также инвариантное подпространство $(h_1, h_2, \dots, h_m) : \sum_{j=1}^m h_j = 0$, на котором она приобретает вид

$$\dot{h}_j = -\xi_0^2 \left(d_0 - \frac{\nu(m+1)}{m} d_1 \right) h_j - \xi_0^2 \left(d_0 + \frac{\nu(m-1)}{m} d_1 \right) \bar{h}_j, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Тем самым спектр устойчивости системы (46) совпадает с собственными значениями матрицы

$$B_1 = -\xi_0^2 \begin{pmatrix} d_0 + \frac{\nu(m-1)}{m} d_1 & d_0 + \frac{\nu(m-1)}{m} d_1 \\ \bar{d}_0 + \frac{\nu(m-1)}{m} \bar{d}_1 & \bar{d}_0 + \frac{\nu(m-1)}{m} \bar{d}_1 \end{pmatrix} \quad (47)$$

и $m-1$ одинаковых матриц

$$B_2 = -\xi_0^2 \begin{pmatrix} d_0 - \frac{\nu(m+1)}{m} d_1 & d_0 + \frac{\nu(m-1)}{m} d_1 \\ \bar{d}_0 + \frac{\nu(m-1)}{m} \bar{d}_1 & \bar{d}_0 - \frac{\nu(m+1)}{m} \bar{d}_1 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Остается заметить, что матрица (47) имеет собственные значения $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -2$, а матрица (48) при условиях (44) является гурвицевой. При строгом же нарушении хотя бы одного из этих условий B_2 допускает собственное значение в полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$. Лемма 2 доказана. \square

Перейдем теперь от (35) к соответствующей несимметричной сети

$$\dot{z}_j = (1 + i\varepsilon\mu_j)z_j - d_0|z_j|^2 z_j - \frac{\nu}{m} d_1 \bar{z}_j \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m z_s^2, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (49)$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon| \ll 1$, $\mu_j = \operatorname{const} \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, m$. Предполагаем существование таких натуральных $m_1, m_2 : m_1 < m_2 < m$, что

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{m_1}, \quad \mu_{m_2} = \mu_{m_2+1} = \dots = \mu_m. \quad (50)$$

В случае же $m_1 + 1 \leq j \leq m_2 - 1$ считаем зависимость величин μ_j от индекса j нетривиальной. Последнее означает, что

$$\mu_{j_1} \neq \mu_{j_2} \quad \forall j_1, j_2 \in [m_1 + 1, m_2 - 1], \quad j_1 \neq j_2. \quad (51)$$

Как оказывается, для системы (49) приведенному в разделе 1 эвристическому описанию химеры можно придать строгий смысл. А именно, канонической химерой назовем цикл этой системы, компоненты $z_j = z_j(t)$ которого удовлетворяют требованиям

$$z_1(t) \equiv z_2(t) \equiv \dots \equiv z_{m_1}(t), \quad z_{m_2}(t) \equiv z_{m_2+1}(t) \equiv \dots \equiv z_m(t), \quad (52)$$

$$z_{j_1}(t) \not\equiv z_{j_2}(t) \quad \forall j_1, j_2 \in [m_1 + 1, m_2 - 1], \quad j_1 \neq j_2, \quad (53)$$

где натуральные m_1, m_2 заимствованы из (50), (51). Что же касается отрезков $1 \leq j \leq m_1, m_2 \leq j \leq m$ и $m_1 + 1 \leq j \leq m_2 - 1$, то, как обычно, их будем называть промежутками когерентного и некогерентного поведения осцилляторов.

При решении вопроса о существовании канонической химеры предположим, что параметры c_0, c_1, ν системы (49) удовлетворяют требованиям

$$0 < \nu < \frac{m}{m+1}, \quad c_0 c_1 > 1. \quad (54)$$

В этом случае справедливо следующее утверждение.

Теорема 2 (о существовании канонической химеры). При выполнении сформулированных выше ограничений и при всех $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало, система (49) имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл

$$z_j = \rho_j(\varepsilon) \exp[i\varphi_j(\varepsilon) + i\omega(\varepsilon)t], \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad \sum_{j=1}^m \varphi_j(\varepsilon) = 0, \quad (55)$$

являющийся при $\varepsilon \neq 0$ канонической химерой. Здесь вещественные функции $\rho_j(\varepsilon), \varphi_j(\varepsilon), \omega(\varepsilon)$ аналитически зависят от ε и при $\varepsilon \rightarrow 0$ допускают асимптотику:

$$\rho_j(\varepsilon) = \rho_0 + \varepsilon \rho_{1,j} + O(\varepsilon^2), \quad \varphi_j(\varepsilon) = \varepsilon \varphi_{1,j} + O(\varepsilon^2), \quad \omega(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + O(\varepsilon^2), \quad (56)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_0 = \xi_0, \quad \rho_{1,j} = \frac{\operatorname{Re} \kappa_j}{\xi_0}, \quad \varphi_{1,j} = \frac{\operatorname{Im} \kappa_j}{\xi_0^2}, \quad \omega_1 = \frac{1}{m} \sum_{s=1}^m \mu_s, \\ \kappa_j = \frac{\nu c_1 - i(1 - \nu/m)}{2\nu[c_0 c_1 - 1 + \nu(1 + c_1^2)/m]} (\omega_1 - \mu_j), \quad j = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (57)$$

а ξ_0, ω_0 — величины (42).

Доказательство. В силу Условий (54) и Леммы 2 при $\varepsilon = 0$ однородный цикл (41) системы (49) экспоненциально орбитально устойчив. Поэтому при малых по модулю значениях ε он переходит в экспоненциально орбитально устойчивый цикл вида

$$z_j = z_j(\varepsilon) \exp[i\omega(\varepsilon)t], \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (58)$$

где комплексные амплитуды $z_j(\varepsilon), z_j(0) = \xi_0$ и частота $\omega(\varepsilon), \omega(0) = \omega_0$ аналитически зависят от ε . Далее подставим формулы (58) вместе с разложениями

$$z_j(\varepsilon) = \xi_0 + \varepsilon \xi_{1,j} + \dots, \quad \omega(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \dots \quad (59)$$

в систему (49), сократим результат на $\exp[i\omega(\varepsilon)t]$ и приравняем коэффициенты при ε в левой и правой частях получившихся соотношений. В результате для постоянных $\xi_{1,j} \in \mathbb{C}, \omega_1 \in \mathbb{R}$ из (59) приходим к линейной неоднородной системе

$$\begin{aligned} i\omega_1 = i\mu_j - d_0 \xi_0 (\xi_{1,j} + \bar{\xi}_{1,j}) + \frac{\nu(m+1)}{m} d_1 \xi_0 \xi_{1,j} - \\ - \frac{\nu(m-1)}{m} d_1 \xi_0 \bar{\xi}_{1,j} - \frac{2\nu}{m} d_1 \xi_0 \sum_{s=1}^m \xi_{1,s}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Последняя же, как нетрудно проверить, при значении ω_1 , определенном соответствующей формулой из (57), имеет решение

$$\xi_{1,j} = \frac{\kappa_j}{\xi_0}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (60)$$

Из установленных соотношений (59), (60) следует, что цикл (58) преобразуется к нужному виду (55)–(57). Необходимо только заметить, что выполнения фигурирующего в (55) равенства $\sum_{j=1}^m \varphi_j(\varepsilon) = 0$ всегда можно добиться посредством замены t на $t + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Добавим, наконец, что при $\varepsilon \neq 0$ цикл (55) является канонической химерой. Действительно, равенства вида (52) справедливы для него по тем же причинам, что и аналогичные равенства (10) для цикла $C(\varepsilon)$ системы (7) (см. соответствующее место в разделе 1). Что же касается требований (53), то их справедливость при $\varepsilon \neq 0$ гарантируют условие (51) и формулы (56), (57). Теорема 2 доказана. \square

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Поскольку при $\varepsilon \neq 0$ система (49) по-прежнему инвариантна относительно замен (45), то каноническая химера (55) порождает целое семейство \mathcal{U} , состоящее из $2^m - 1$ экспоненциально орбитально устойчивых циклов. Все эти циклы, получающиеся из одного цикла (55) посредством указанных замен переменных, будем называть химероподобными структурами. Ясно также, что если положить

$$\mu_j = \mu(s)|_{s=j/m}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (61)$$

где $\mu(s)$ – некоторая непрерывная на отрезке $0 \leq s \leq 1$ функция, то при выполнении аналогичных (54) условий

$$0 < \nu < 1, \quad c_0 c_1 > 1 \quad (62)$$

и при согласованном стремлении $\varepsilon \rightarrow 0$, $m \rightarrow +\infty$ количество сосуществующих в системе (49) устойчивых циклов неограниченно растет. Иными словами, наблюдается известное явление буферности. Как показано в монографиях [16, 17], данное явление характерно для широкого класса динамических систем из различных областей естествознания.

Завершая обсуждение стратегии охоты на химер применительно к системе (49), отметим, что за счет подходящего выбора коэффициентов μ_j мы можем гарантировать существование химеры с заранее запланированными свойствами. Действительно, предположим, что массив индексов $1 \leq j \leq m$ произвольным образом разбит на k , $k \geq 2$ отрезков, то есть

$$\{1, 2, \dots, m\} = [1, m_1] \cup [m_1 + 1, m_2] \cup \dots \cup [m_s + 1, m_{s+1}] \cup \dots \cup [m_{k-1} + 1, m]. \quad (63)$$

Считаем далее, что на каждом из этих отрезков последовательность μ_j либо постоянна, либо нетривиально зависит от j , и такого рода отрезки чередуются. В этом случае Теорема 2 остается в силе при условии, что мы надлежащим образом модифицируем определение канонической химеры. А именно в данном случае таковой уместно назвать химеру, у которой промежутки когерентного и некогерентного поведения осцилляторов совпадают с отрезками из (63) постоянства и непостоянства коэффициентов μ_j .

3. Непрерывные химеры

В данном разделе установленные выше результаты для модельной системы (35) распространяются на ее непрерывный аналог. А именно исследуется эволюционное уравнение вида

$$\dot{z} = z - d_0 |z|^2 z - \nu d_1 \bar{z} \int_0^1 z^2(t, s) ds, \quad (64)$$

получающееся из (35) при $m \rightarrow +\infty$. Здесь, как обычно, точкой обозначена производная по t ,

$$z = x(t, s) + iy(t, s), \quad t \geq 0, \quad s \in [0, 1], \quad x(t, s), y(t, s) \in \mathbb{R}, \quad d_0 = 1 - ic_0, \quad (65)$$

$$c_0 = \text{const} > 0, \quad \nu = \text{const} > 0, \quad d_1 = 1 + ic_1, \quad c_1 = \text{const} \in \mathbb{R}.$$

Остановимся сначала на вопросе о разрешимости задачи Коши для уравнения (64) с начальным условием из подходящего фазового пространства. В качестве такового возьмем вещественное банахово пространство E , элементами которого являются векторы

$$\xi = (x(s), y(s)) : \quad x(s), y(s) \in L_\infty(0, 1). \quad (66)$$

Что же касается нормы элемента (66), то ее зададим формулой

$$\|\xi\| = \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq s \leq 1} \sqrt{x^2(s) + y^2(s)}, \quad (67)$$

где $\operatorname{ess\,sup}$ — существенная точная верхняя грань. Далее, введем в рассмотрение абстрактную функцию $\xi(t) = (x(t, s), y(t, s))$ со значениями в E , где $x(t, s), y(t, s)$ — функции из (65). В результате уравнение (64) записывается в абстрактной форме

$$\dot{\xi} = \mathcal{F}(\xi), \quad (68)$$

где, как нетрудно увидеть, нелинейный оператор $\mathcal{F} : E \rightarrow E$ есть сумма единичного оператора и слагаемого вида $\mathcal{G}(\xi, \xi, \xi)$, где $\mathcal{G}(\cdot, \cdot, \cdot)$ — непрерывная кубическая форма, действующая из $E \times E \times E$ в E .

Элементы общей теории абстрактных уравнений вида (68) с ограниченной и гладкой по Фреше правой частью содержатся, например, в монографии [18]. Из этой теории вытекает, в частности, следующее утверждение.

Лемма 3. По любому фиксированному ограниченному множеству $\Omega \subset E$ можно указать такое $t_0 = t_0(\Omega) > 0$, что при $\forall \xi_0 \in \Omega$ решение $\xi = \xi(t)$ уравнения (68) с начальным условием

$$\xi|_{t=0} = \xi_0 \quad (69)$$

однозначно определено на отрезке $0 \leq t \leq t_0$.

В дальнейшем нам потребуется еще одно стандартное утверждение из теории абстрактных уравнений вида (68). Перед его формулировкой для решения $\xi = \xi(t)$ задачи Коши (68), (69) определим максимальный полуинтервал существования $[0, t_{\max})$, где

$$t_{\max} = \sup \{t_0 : \xi(t) \text{ существует на отрезке } [0, t_0]\}. \quad (70)$$

Согласно Лемме 3, множество значений t_0 , по которому берется \sup в (70), заведомо не пусто. Кроме того, любое решение $\xi(t)$ однозначно продолжается на свой максимальный полуинтервал. Если же оказалось, что $t_{\max} < \infty$, то справедлива следующая

Лемма 4. Предположим, что для некоторого решения $\xi(t)$ уравнения (68) конечна величина (70). Тогда имеет место предельное равенство

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max} - 0} \|\xi(t)\| = +\infty, \quad (71)$$

где здесь и далее $\|\cdot\|$ — норма (67).

Доказательство сформулированной леммы проводится от противного. Действительно, предположим, что соотношение (71) не выполняется. В этом случае существуют такая последовательность моментов времени $t_n, t_n \nearrow t_{\max}$ при $n \rightarrow +\infty$, и такая постоянная $M > 0$, что $\|\xi(t_n)\| \leq M$. Далее, в условиях Леммы 3 в качестве ограниченного множества Ω возьмем $\{\xi(t_n), n \geq 1\}$. Тогда, очевидно, решение $\xi(t)$ будет определено на отрезках вида $[t_n, t_n + t_0]$, $n \geq 1$, где $t_0 = t_0(\Omega) > 0$. Ясно также, что при достаточно больших n выполняется включение $t_{\max} \in (t_n, t_n + t_0)$. Последнее же противоречит определению t_{\max} (см. (70)). \square

Перейдем теперь к вопросу о диссипативности уравнения (68). Как оказывается, в отличие от дискретного случая (35), где условие диссипативности имеет вид (37), непрерывная система (64) диссипативна при каждом $\nu > 0$. Точнее говоря, справедлива очередная

Лемма 5. Существует постоянная $R_0 > 0$ со следующими свойствами. По любому ограниченному множеству $\Omega \subset E$ найдется такое $t_* = t_*(\Omega) > 0$, что при каждом $\xi_0 \in \Omega$ решение $\xi(t)$ соответствующей задачи Коши (68), (69) определено на полуоси $t \geq 0$, а при всех $t \geq t_*$ удовлетворяет неравенству

$$\|\xi(t)\| \leq R_0. \quad (72)$$

Доказательство. Фиксируем произвольно ограниченное множество Ω из E и элемент $\xi_0 \in \Omega$. Далее, обозначим через $\xi(t)$ решение задачи Коши (68), (69), определенное на своем максимальном полуинтервале $[0, t_{\max})$, где t_{\max} — величина (70). В последующем нам потребуется также представление

$$\xi(t) = (x(t, s), y(t, s)) : x(t, s), y(t, s) \in L_\infty(0, 1) \text{ по } s \text{ при } \forall t \in [0, t_{\max}) \quad (73)$$

и связанная с ним функция $z(t, s) = x(t, s) + iy(t, s)$, удовлетворяющая при всех значениях $t \in [0, t_{\max})$ уравнению (64) (почти при всех $s \in [0, 1]$).

Обоснование Леммы разбивается на два этапа. На первом из них будет установлена оценка сверху для функции

$$V(t) = \int_0^1 |z(t, s)|^2 ds, \quad 0 \leq t < t_{\max}. \quad (74)$$

Получение требуемой оценки проводится следующим образом. Сначала дополним уравнение (64) комплексно сопряженным уравнением. Умножим затем первое из этих уравнений на \bar{z} , а второе — на z . В результате после сложения получившихся выражений и последующего интегрирования по $s \in [0, 1]$ приходим к равенству

$$\dot{V} = 2 \left(V(t) - \int_0^1 |z(t, s)|^4 ds - v \left| \int_0^1 z^2(t, s) ds \right|^2 \right). \quad (75)$$

Далее, из соотношения (75) и из формулы (74) очевидным образом следует, что

$$\dot{V} \leq 2 \left(V(t) - \int_0^1 |z(t, s)|^4 ds \right) \leq 2(V(t) - V^2(t)), \quad V(0) \leq V_0,$$

где

$$V_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\xi_0 \in \Omega} \|\xi_0\|^2 > 0$$

(случай $V_0 = 0$ тривиален, поскольку тогда $\Omega = \{0\}$ и $\xi(t) \equiv 0$). А отсюда, в свою очередь имеем

$$V(t) \leq V_*(t), \quad 0 \leq t < t_{\max}, \quad (76)$$

где $V_*(t), t \geq 0$ — решение задачи Коши

$$\dot{V} = 2(V - V^2), \quad V|_{t=0} = V_0. \quad (77)$$

Добавим еще, что

$$V_*(t) \leq R_1 \quad \forall t \geq 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} V_*(t) = 1, \quad (78)$$

где $R_1 = R_1(\Omega)$ — некоторая положительная постоянная.

Второй этап обоснования Леммы связан с получением при почти всех значениях $s \in [0, 1]$ оценки сверху на функцию

$$W(t, s) = |z(t, s)|^2, \quad 0 \leq t < t_{\max}. \quad (79)$$

Для этого привлечем аналогичное (75) равенство

$$\dot{W}(t, s) = 2(W(t, s) - W^2(t, s)) - 2\nu \operatorname{Re} [d_1 \alpha(t) \bar{z}^2(t, s)], \quad (80)$$

где, как обычно, точка – дифференцирование по t , а функция $\alpha(t)$ имеет вид

$$\alpha(t) = \int_0^1 z^2(t, s) ds, \quad 0 \leq t < t_{\max}.$$

Далее, объединяя формулы (79), (80) с очевидным фактом $|\alpha(t)| \leq V(t)$ и уже установленной оценкой (76), приходим к выводу, что (почти всюду по s)

$$\begin{aligned} \dot{W}(t, s) &\leq 2[(1 + \nu |d_1| V_*(t))W(t, s) - W^2(t, s)], \quad 0 \leq t < t_{\max}, \\ W(0, s) &\leq W_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\xi_0 \in \Omega} \|\xi_0\|^2. \end{aligned} \quad (81)$$

И наконец, из (81) в силу теоремы о дифференциальных неравенствах при почти всех $s \in [0, 1]$ имеем

$$W(t, s) \leq W_*(t), \quad 0 \leq t < t_{\max}, \quad (82)$$

где $W_*(t), t \geq 0$ – решение аналогичной (77) задачи Коши

$$\dot{W} = 2[(1 + \nu |d_1| V_*(t))W - W^2], \quad W|_{t=0} = W_0.$$

Отметим еще, что в силу (78) решение $W_*(t)$ этой задачи обладает свойствами

$$W_*(t) \leq R_2 \quad \forall t \geq 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} W_*(t) = 1 + \nu |d_1|, \quad (83)$$

где $R_2 = R_2(\Omega) > 0$.

Подводя итог, перейдем в неравенстве (82) к существенной точной верхней грани по $s \in [0, 1]$. В результате, принимая во внимание способ задания нормы в пространстве E (см. (67)), для функции (73) получаем оценку

$$\|\xi(t)\|^2 \leq W_*(t), \quad 0 \leq t < t_{\max}. \quad (84)$$

Далее, из (84) автоматически следует, что $t_{\max} = +\infty$ (в противном случае имеет место предельное равенство (71), противоречащее оценке (84)). Остается отметить, что в силу (83), (84) все траектории системы (68) при увеличении t втекают в шар $\{\xi \in E : \|\xi\| \leq R_0\}$ при любом фиксированном $R_0 > \sqrt{1 + \nu |d_1|}$. Тем самым, при подходящем выборе $t_* = t_*(\Omega) > 0$ требуемое неравенство (72) заведомо выполняется на полуоси $t \geq t_*$. Лемма 5 доказана. \square

Вопросы о существовании и устойчивости у уравнения (64) периодических режимов двухкластерной синхронизации требуют отдельного рассмотрения. Отметим сразу, что как и в дискретном случае (35), непрерывная модель (64) имеет однородный цикл

$$z = \xi_0 \exp(i\omega_0 t), \quad (85)$$

где

$$\xi_0 = 1/\sqrt{1 + \nu}, \quad \omega_0 = (c_0 - \nu c_1)\xi_0^2. \quad (86)$$

Как оказывается, этот цикл порождает целое семейство циклов уравнения (64).

Действительно, опираясь на представление

$$[0, 1] = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \quad (87)$$

где \mathcal{A}, \mathcal{B} — произвольные измеримые по Лебегу непересекающиеся подмножества отрезка $[0, 1]$ положительной меры, рассмотрим функцию

$$I_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}(s) = \begin{cases} 1 & \text{при } s \in \mathcal{A}, \\ -1 & \text{при } s \in \mathcal{B}. \end{cases} \quad (88)$$

Заметим далее, что поскольку уравнение (64) инвариантно относительно замены

$$I_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}(s)z \rightarrow z, \quad (89)$$

то наряду с циклом (85), (86) оно допускает цикл

$$z(t, s) = I_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}(s)\xi_0 \exp(i\omega_0 t), \quad (90)$$

который и будем называть периодическим режимом двухкластерной синхронизации. Все циклы (90), отвечающие любым разбиениям вида (87), а также однородный цикл (85), (86), объединим в семейство \mathcal{U} (отождествляя, естественно, циклы, отличающиеся друг от друга по s лишь на множестве нулевой меры). Аналогом Леммы 2 в данном случае является следующее утверждение.

Лемма 6. При условиях (62) каждый цикл семейства \mathcal{U} экспоненциально орбитально устойчив. При выполнении же хотя бы одного неравенства $\nu > 1$ или $c_0 c_1 < 1$ все циклы данного семейства неустойчивы.

Доказательство. Как и при обосновании Леммы 2, сначала обратим внимание на тот факт, что любые два цикла семейства \mathcal{U} переходят друг в друга под действием некоторой замены из класса (88), (89). Те самым, свойства их устойчивости одинаковы, а значит, мы можем ограничиться рассмотрением лишь однородного цикла (85), (86). Добавим еще, что поскольку для абстрактного уравнения (68) очевидным образом справедлива теорема Андронова–Витта об устойчивости цикла по первому приближению, то проблема устойчивости упомянутого периодического режима сводится к анализу соответствующей системы в вариациях.

Полагая в (64) $z = \xi_0(1 + h(t, s)) \exp(i\omega_0 t)$, где

$$h(t, s) = h_1(t, s) + ih_2(t, s), \quad h_1(t, s), h_2(t, s) \in \mathbb{R},$$

и отбрасывая нелинейные по h, \bar{h} слагаемые, приходим к выводу, что интересующее нас уравнение в вариациях имеет вид

$$\dot{h} = -d_0 \xi_0^2 (h + \bar{h}) + \nu d_1 \xi_0^2 (h - \bar{h}) - 2\nu d_1 \xi_0^2 \int_0^1 h(t, s) ds. \quad (91)$$

Заметим, далее, что фазовое пространство E уравнения (91), состоящее из пар

$$(h_1(s), h_2(s)) : h_j(s) \in L_\infty(0, 1), \quad j = 1, 2,$$

раскладывается в прямую сумму замкнутых линейных подпространств E_1, E_2 . Первое из них двумерно и задается равенством

$$E_1 = \{(h_1(s), h_2(s)) : h_j(s) \equiv h_j, \quad h_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2\}, \quad (92)$$

а второе имеет вид

$$E_2 = \left\{ (h_1(s), h_2(s)) : \int_0^1 h_j(s) ds = 0, \quad j = 1, 2 \right\}. \quad (93)$$

Кроме того, нетрудно проверить, что подпространства (92), (93) инвариантны для траекторий уравнения (91).

Обозначим через $L : E \rightarrow E$ линейный ограниченный оператор, порожденный правой частью уравнения (91) и действующий по правилу:

$$(h_1(s), h_2(s)) \mapsto (\operatorname{Re} \mathcal{L}(h, \bar{h}), \operatorname{Im} \mathcal{L}(h, \bar{h})),$$

где

$$\mathcal{L}(h, \bar{h}) = -d_0 \xi_0^2 (h + \bar{h}) + \nu d_1 \xi_0^2 (h - \bar{h}) - 2\nu d_1 \xi_0^2 \int_0^1 h(s) ds, \quad h(s) = h_1(s) + ih_2(s).$$

Из приведенных выше фактов следует, что, во-первых, $LE_j \subset E_j$, $j = 1, 2$; во-вторых, спектры сужений $L|_{E_j}$, $j = 1, 2$ совпадают с собственными значениями матриц B_1 и B_2 , соответственно, где

$$B_1 = -\xi_0^2 \begin{pmatrix} d_0 + \nu d_1 & d_0 + \nu d_1 \\ \bar{d}_0 + \nu \bar{d}_1 & \bar{d}_0 + \nu \bar{d}_1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = -\xi_0^2 \begin{pmatrix} d_0 - \nu d_1 & d_0 + \nu d_1 \\ \bar{d}_0 + \nu \bar{d}_1 & \bar{d}_0 - \nu \bar{d}_1 \end{pmatrix}. \quad (94)$$

Остается добавить, что первая из матриц (94) имеет собственные значения $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, а вторая при условиях (62) является гурвицевой. В случае же $\nu > 1$ или $c_0 c_1 < 1$ у B_2 существует собственное значение с положительной действительной частью. Лемма 6 доказана. \square

В связи с установленной Леммой обратим внимание на следующий чисто бесконечномерный эффект: хотя семейство \mathcal{U} имеет мощность континуума, но в фазовом пространстве E любые два различных цикла этого семейства располагаются друг от друга на положительном расстоянии, равном $2\xi_0$. В конечномерном случае и даже в случае бесконечномерного сепарабельного фазового пространства такая ситуация заведомо невозможна.

Перейдем теперь к несимметричной непрерывной сети

$$\dot{z} = (1 + i\varepsilon\mu(s))z - d_0|z|^2z - \nu d_1 \bar{z} \int_0^1 z^2(t, s) ds, \quad (95)$$

получающейся из (49) при условиях (61) и при $m \rightarrow +\infty$. Здесь, как и в дискретном случае, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon| \ll 1$. Далее, по аналогии с требованиями (50), (51) предполагаем существование таких $s_1, s_2 : 0 < s_1 < s_2 < 1$, что непрерывная вещественная функция $\mu(s)$ постоянна на отрезках $[0, s_1]$ и $[s_2, 1]$, а на отрезке $[s_1, s_2]$ нетривиально зависит от s . Последнее означает, что при $\forall c \in \mathbb{R}$ множество $\{s \in [s_1, s_2] : \mu(s) = c\}$ имеет нулевую меру Лебега.

Как и в случае системы (49), для уравнения (95) можно сформулировать определение непрерывной канонической химеры. В данной ситуации канонической химерой назовем периодическое решение $z = z(t, s)$ этого уравнения, удовлетворяющее соотношениям (почти всюду по s)

$$z(t, s) \equiv z_1(t) \text{ при } s \in [0, s_1], \quad z(t, s) \equiv z_2(t) \text{ при } s \in [s_2, 1], \quad (96)$$

где $z_1(t), z_2(t)$ — некоторые комплекснозначные функции. В случае же отрезка $s_1 \leq s \leq s_2$ предполагаем, что для $\forall c \in \mathbb{C}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ множество значений $\{s \in [s_1, s_2] : z(t, s) = c\}$ имеет меру ноль. Если рассматривать $z = z(t, s)$ как континуальный массив нелинейных осцилляторов, то в силу (96) промежутки $0 \leq s \leq s_1$ и $s_2 \leq s \leq 1$ естественно назвать зонами когерентности. Что же касается отрезка $s_1 \leq s \leq s_2$, то его назовем зоной некогерентности.

Аналогом Теоремы 2 для непрерывной модели (95) является следующая

Теорема 3 (о непрерывной канонической химере). При выполнении сформулированных выше ограничений на функцию $\mu(s)$, при условиях (62) и при всех достаточно малых по модулю значениях ε уравнение (95) имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл

$$z = \rho(s, \varepsilon) \exp[i\varphi(s, \varepsilon) + i\omega(\varepsilon)t], \quad \int_0^1 \varphi(s, \varepsilon) ds \equiv 0, \quad (97)$$

являющийся при $\varepsilon \neq 0$ канонической химерой. Здесь непрерывные по своим переменным и аналитические по ε вещественные функции $\rho(s, \varepsilon)$, $\varphi(s, \varepsilon)$, $\omega(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ допускают асимптотику:

$$\begin{aligned} \rho(s, \varepsilon) &= \rho_0 + \varepsilon\rho_1(s) + O(\varepsilon^2), & \varphi(s, \varepsilon) &= \varepsilon\varphi_1(s) + O(\varepsilon^2), \\ \omega(\varepsilon) &= \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (98)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \xi_0, & \rho_1(s) &= \frac{\operatorname{Re} \kappa(s)}{\xi_0}, & \varphi_1(s) &= \frac{\operatorname{Im} \kappa(s)}{\xi_0^2}, & \omega_1 &= \int_0^1 \mu(s) ds, \\ \kappa(s) &= \frac{\nu c_1 - i}{2\nu(c_0 c_1 - 1)} (\omega_1 - \mu(s)), \end{aligned} \quad (99)$$

а ξ_0 , ω_0 — величины (86).

На доказательстве Теоремы 3 не останавливаемся, поскольку в своей идейной части оно идентично обоснованию Теоремы 2. Отметим только, что аналог этой теоремы справедлив и в случае, когда функция $\mu(s)$ имеет несколько чередующихся участков постоянства и нетривиальной зависимости от s . Необходимо только надлежащим образом скорректировать определение канонической химеры.

Завершая рассмотрение непрерывной модели (95), заметим, что при $\varepsilon \neq 0$ она по-прежнему инвариантна по отношению к заменам переменных (88), (89). Поэтому каноническая химера (97) порождает континуальное семейство \mathcal{U} экспоненциально орбитально устойчивых циклов, получающихся из (97) под действием указанных замен. Как и в дискретном случае, эти периодические режимы уместно назвать химероподобными структурами.

Заключение

В данном разделе приводятся результаты численного анализа системы (49). Цель этого анализа — выявление возможных типов химероподобных режимов, существующих в указанной системе при фиксированных параметрах ν , c_1 , c_2 , удовлетворяющих условиям (62), и при различных значениях управляющего параметра $\varepsilon > 0$.

Прежде чем перейти непосредственно к описанию численных экспериментов, остановимся на характерных особенностях изучаемой системы. Назовем два ее цикла эквивалентными, если они переходят друг в друга под действием замены переменных вида (45). Ясно, что свойства их устойчивости и происходящие с ними возможные бифуркации одинаковы. В связи с этим все эквивалентные между собой циклы уместно объединить в соответствующие семейства. Одним из таких семейств является множество химероподобных структур \mathcal{U} , количество которых равно $2^m - 1$ (что при $m = 100$ имеет порядок 10^{30}). Напомним, что эти химеры получаются из канонической химеры (55) под действием замен (45). Существуют и другие семейства эквивалентных периодических режимов, отличные от \mathcal{U} и также состоящие не менее чем из $2^m - 1$ элементов. Все это приводит к реализации так называемого феномена флуктуационного хаоса. Суть упомянутого феномена состоит в том, что ввиду узости бассейнов притяжений отдельно

взятых устойчивых циклов система «скользит» по устойчивым режимам — при незначительном изменении начальных условий происходит переход от одного аттрактора к другому. Понятно, что в такой ситуации проследить за эволюцией по параметру ε какого-либо одного цикла или даже отдельно взятого семейства эквивалентных циклов не представляется возможным. В связи с этим ниже мы ограничиваемся лишь некоторой классификацией реализующихся в системе (49) химероподобных структур.

Перед численным интегрированием системы (49) в ней был осуществлен переход к полярным координатам

$$z_j = \rho_j \exp(i\varphi_j), \quad \rho_j > 0, \quad \varphi_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Далее, при фиксированных параметрах $c_0 = 1$, $c_1 = 3$, $\nu = 0.5$, $m = 100$, при

$$\mu_j = \mu(s)|_{s=j/m}, \quad \mu(s) = \begin{cases} -1 & \text{при } 0 \leq s \leq 1/3, \\ 3(2s - 1) & \text{при } 1/3 \leq s \leq 2/3, \\ 1 & \text{при } 2/3 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

и при различных значениях $\varepsilon > 0$ вычислялся отрезок траектории получившейся системы для ρ_j , φ_j , отвечающий промежутку времени $0 \leq t \leq 1000000$ и начальным условиям

$$\rho_j(0) = 0.2 \left(1 + 0.01 \cdot \frac{j}{j+1} \right), \quad \varphi_j(0) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

На этом пути удалось выявить следующие типы химероподобных структур.

При $0 < \varepsilon \lesssim 0.077$ наблюдаются устойчивые циклы химерного типа, являющиеся продолжениями по параметру ε циклов семейства \mathcal{U} . На рис. 1, *a* и *b* при $\varepsilon = 0.07$ для одного из химерных циклов представлены зависимости переменных $\rho_j(t)$ и $\varphi_{j+1}(t) - \varphi_j(t)$ от индекса $1 \leq j \leq m$. Подчеркнем, что поскольку данный цикл имеет автомодельный вид

$$z_j = z_j^0 \exp(i\omega t), \quad z_j^0 = \text{const} \in \mathbb{C}, \quad \omega = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (100)$$

то упомянутые переменные не зависят от времени. Такую химеру уместно назвать стационарной. Добавим еще, что при указанных ε стационарными являются все химеры из \mathcal{U} .

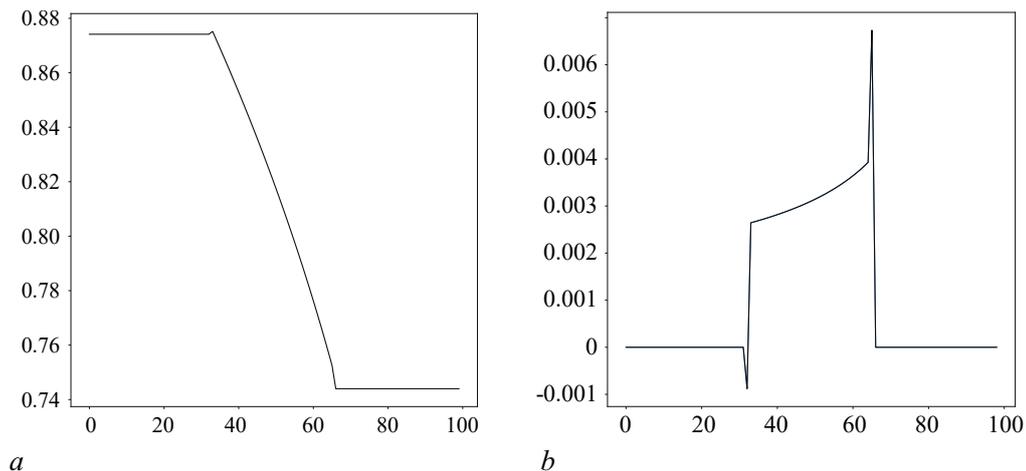


Рис. 1. *a* — ρ_j , *b* — $\varphi_{j+1} - \varphi_j$; $\varepsilon = 0.07$

Fig. 1. *a* — ρ_j , *b* — $\varphi_{j+1} - \varphi_j$; $\varepsilon = 0.07$

При последующем увеличении параметра ε удастся обнаружить так называемые двумерные автомодельные торы, имеющие вид

$$z_j = z_j^0(t) \exp(i\omega t), \quad z_j^0(t) \in \mathbb{C}, \quad \omega = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (101)$$

где $z_j^0(t)$ — некоторые периодические с периодом $T > 0$ комплекснозначные функции. Добавим еще, что торы (101) заведомо не приводятся к виду (100). Такого типа химероподобные структуры будем называть квазипериодическими. На рис. 2, *a*, *b* изображены зависимости от $1 \leq j \leq m$ отвечающих одному из этих торов функций $\rho_j(t)$ и $\varphi_{j+1}(t) - \varphi_j(t)$ при $\varepsilon = 0.08$ и при фиксированном $t = 1000000$. Подчеркнем, что в отличие от предыдущего случая этот химерный режим уже не является стационарным. В частности, в силу (101) отвечающие ему полярные радиусы $\rho_j(t)$ периодичны по t с периодом T . График зависимости от t на промежутке $999500 \leq t \leq 1000000$ одного из этих радиусов, а именно $\rho_5(t)$, представлен на рис. 3 (точке ноль на горизонтальной оси соответствует значение $t = 999500$).

Дальнейшее увеличение параметра ε приводит к очередному усложнению динамики. А именно появляются устойчивые химероподобные режимы с непериодической зависимостью компонент

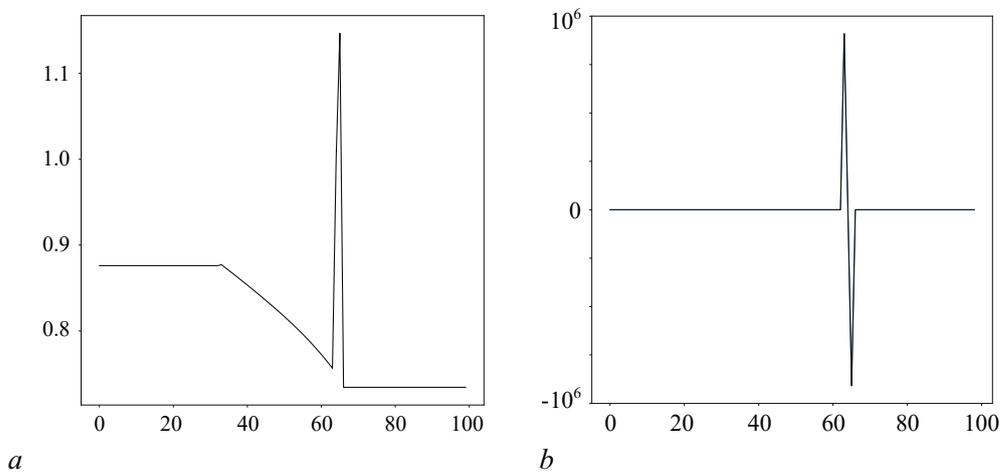


Рис. 2. *a* — ρ_j , *b* — $\varphi_{j+1} - \varphi_j$; $\varepsilon = 0.08$, $t = 1000000$

Fig. 2. *a* — ρ_j , *b* — $\varphi_{j+1} - \varphi_j$; $\varepsilon = 0.08$, $t = 1000000$

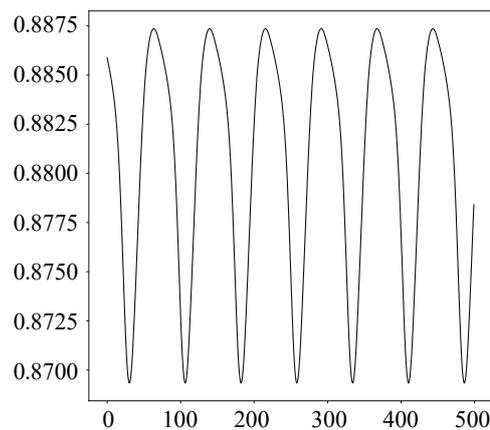


Рис. 3. График $\rho_5(t)$ при $\varepsilon = 0.08$

Fig. 3. Graph of $\rho_5(t)$ for $\varepsilon = 0.08$

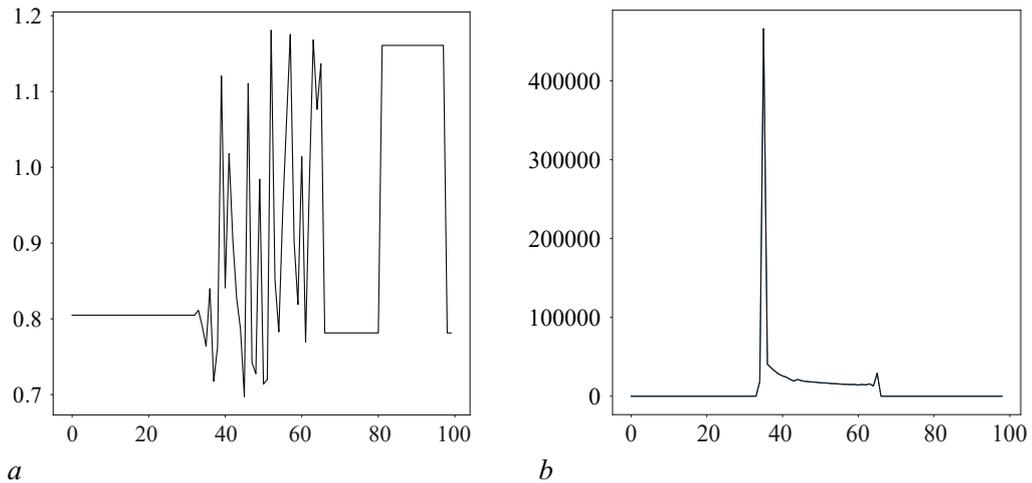


Рис. 4. $a - \rho_j$, $b - \varphi_{j+1} - \varphi_j$; $\varepsilon = 0.18$, $t = 1000000$

Fig. 4. $a - \rho_j$, $b - \varphi_{j+1} - \varphi_j$; $\varepsilon = 0.18$, $t = 1000000$

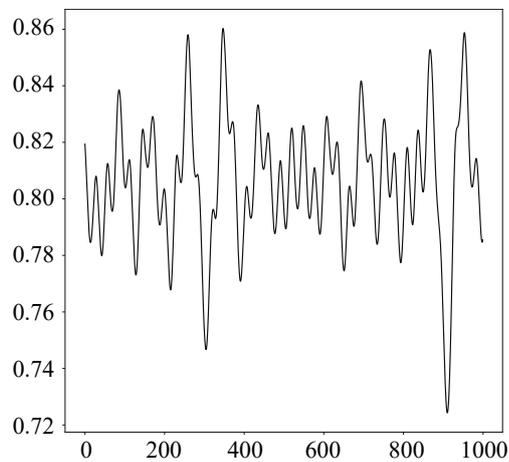


Рис. 5. График $\rho_5(t)$ при $\varepsilon = 0.18$

Fig. 5. Graph of $\rho_5(t)$ for $\varepsilon = 0.18$

$\rho_j(t)$ от t . Такого рода химеры назовем турбулентными. На рис. 4, a , b для одной из турбулентных химер в случае $\varepsilon = 0.18$ приведены зависимости $\rho_j(t)$ и $\varphi_{j+1}(t) - \varphi_j(t)$ от j при $t = 1000000$, а на рис. 5 представлен график $\rho_5(t)$ на промежутке $999000 \leq t \leq 1000000$ (точке ноль на горизонтальной оси соответствует значение $t = 999000$).

В заключение добавим, что все перечисленные выше характерные особенности динамики, связанные с усложнением химерных режимов при увеличении параметра ε , сохраняются и для непрерывной модели (95).

Список литературы

1. Kuramoto Y., Battogtokh D. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2002. Vol. 5, no. 4. P. 380–385.
2. Abrams D.M., Strogatz S.H. Chimera states for coupled oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2004. Vol. 93, no. 17. P. 174102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.174102.

3. *Panaggio M. J., Abrams D. M.* Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators // *Nonlinearity*. 2015. Vol. 28, no. 3. P. R67. DOI: 10.1088/0951-7715/28/3/R67.
4. *Sethia G. C., Sen A.* Chimera states: The existence criteria revisited // *Phys. Rev. Lett.* 2014. Vol. 112, no. 14. P. 144101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.144101.
5. *Schmidt L., Krischer K.* Clustering as a prerequisite for chimera states in globally coupled systems // *Phys. Rev. Lett.* 2015. Vol. 114, no. 3. P. 034101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.034101.
6. *Laing C. R.* Chimeras in networks with purely local coupling // *Phys. Rev. E*. 2015. Vol. 92, no. 5. P. 050904. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.050904.
7. *Laing C. R.* Chimeras in networks of planar oscillators // *Phys. Rev. E*. 2010. Vol. 81, no. 6. P. 066221. DOI: 10.1103/PhysRevE.81.066221.
8. *Zakharova A., Kapeller M., Schöll E.* Chimera death: Symmetry breaking in dynamical networks // *Phys. Rev. Lett.* 2014. Vol. 112, no. 15. P. 154101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.154101.
9. *Omelchenko I., Zakharova A., Hövel P., Siebert J., Schöll E.* Nonlinearity of local dynamics promotes multi-chimeras // *Chaos*. 2015. Vol. 25, no. 8. P. 083104. DOI: 10.1063/1.4927829.
10. *Omelchenko I., Omelchenko O. E., Hövel P., Schöll E.* When nonlocal coupling between oscillators becomes stronger: Patched synchrony or multichimera states // *Phys. Rev. Lett.* 2013. Vol. 110, no. 22. P. 224101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.224101.
11. *Sakaguchi H.* Instability of synchronized motion in nonlocally coupled neural oscillators // *Phys. Rev. E*. 2006. Vol. 73, no. 3. P. 031907. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.031907.
12. *Hizanidis J., Kanas V., Bezerianos A., Bountis T.* Chimera states in networks of nonlocally coupled Hindmarsh–Rose neuron models // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2014. Vol. 24, no. 3. P. 1450030. DOI: 10.1142/S0218127414500308.
13. *Zakharova A.* Chimera Patterns in Networks: Interplay between Dynamics, Structure, Noise, and Delay. Berlin: Springer, 2020. 233 p. DOI: 10.1007/978-3-030-21714-3.
14. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов // *УМН*. 2015. Т. 70, № 3(423). С. 3–76. DOI: 10.4213/rm9659.
15. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Периодические режимы двухкластерной синхронизации в полностью связанных генных сетях // *Дифференциальные уравнения*. 2016. Т. 52, № 2. С. 157–176. DOI: 10.1134/S0374064116020035.
16. *Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. М.: Физматлит, 2004. 408 с.
17. *Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит, 2010. 400 с.
18. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 535 с.

References

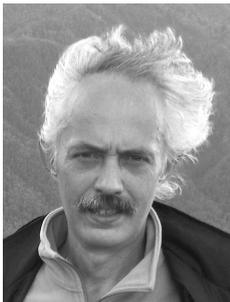
1. Kuramoto Y, Battogtokh D. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2002;5(4):380–385.
2. Abrams DM, Strogatz SH. Chimera states for coupled oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 2004;93(17):174102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.174102.
3. Panaggio MJ, Abrams DM. Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators. *Nonlinearity*. 2015;28(3):R67. DOI: 10.1088/0951-7715/28/3/R67.

4. Sethia GC, Sen A. Chimera states: The existence criteria revisited. *Phys. Rev. Lett.* 2014;112(14):144101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.144101.
5. Schmidt L, Krischer K. Clustering as a prerequisite for chimera states in globally coupled systems. *Phys. Rev. Lett.* 2015;114(3):034101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.034101.
6. Laing CR. Chimeras in networks with purely local coupling. *Phys. Rev. E.* 2015;92(5):050904. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.050904.
7. Laing CR. Chimeras in networks of planar oscillators. *Phys. Rev. E.* 2010;81(6):066221. DOI: 10.1103/PhysRevE.81.066221.
8. Zakharova A, Kapeller M, Schöll E. Chimera death: Symmetry breaking in dynamical networks. *Phys. Rev. Lett.* 2014;112(15):154101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.154101.
9. Omelchenko I, Zakharova A, Hövel P, Siebert J, Schöll E. Nonlinearity of local dynamics promotes multi-chimeras. *Chaos.* 2015;25(8):083104. DOI: 10.1063/1.4927829.
10. Omelchenko I, Omelchenko OE, Hövel P, Schöll E. When nonlocal coupling between oscillators becomes stronger: Patched synchrony or multichimera states. *Phys. Rev. Lett.* 2013;110(22):224101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.224101.
11. Sakaguchi H. Instability of synchronized motion in nonlocally coupled neural oscillators. *Phys. Rev. E.* 2006;73(3):031907. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.031907.
12. Hizanidis J, Kanas V, Bezerianos A, Bountis T. Chimera states in networks of nonlocally coupled Hindmarsh–Rose neuron models. *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 2014;24(3):1450030. DOI: 10.1142/S0218127414500308.
13. Zakharova A. *Chimera Patterns in Networks: Interplay between Dynamics, Structure, Noise, and Delay.* Berlin: Springer; 2020. 233 p. DOI: 10.1007/978-3-030-21714-3.
14. Glyzin SD, Kolesov AY, Rozov NK. Self-excited relaxation oscillations in networks of impulse neurons. *Russian Mathematical Surveys.* 2015;70(3):383–452. DOI: 10.1070/RM2015v070n03ABEH004951.
15. Glyzin SD, Kolesov AY, Rozov NK. Periodic two-cluster synchronization modes in completely connected genetic networks. *Differential Equations.* 2016;52(2):157–176. DOI: 10.1134/S0012266116020038.
16. Kolesov AY, Rozov NK. *Invariant Tori of Nonlinear Wave Equations.* Moscow: Fizmatlit; 2004. 408 p. (in Russian).
17. Mishchenko EF, Sadovnichii VA, Kolesov AY, Rozov NK. *Autowave Processes in Nonlinear Media with Diffusion.* Moscow: Fizmatlit; 2010. 400 p. (in Russian).
18. Daleckii JL, Krein MG. *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space.* Providence: American Mathematical Society; 2002. 386 p.



Глызин Дмитрий Сергеевич — родился в Ярославле (1983), окончил Ярославский государственный университет (2004). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2006). Область научных интересов: нелинейная динамика, математическое моделирование.

Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14
 Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
 E-mail: glyzin@gmail.com
 ORCID: 0000-0002-0701-622X
 AuthorID: 749418



Глызин Сергей Дмитриевич — родился в Новгородской области (1957), окончил Ярославский государственный университет (1979). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ВГУ (1991) и доктора физико-математических наук в НИЯУ МИФИ (2009) в области теории нелинейных колебаний. Профессор, заведующий кафедрой компьютерных сетей. Опубликовал более 100 научных работ. Приказом Министерства образования и науки награжден нагрудным знаком «Почетный работник высшего профессионального образования». Зам. главного редактора научного журнала «Моделирование и анализ информационных систем».

Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
E-mail: glyzin@uniyar.ac.ru, glyzin.s@gmail.com
ORCID: 0000-0002-6403-4061
AuthorID: 35140



Колесов Андрей Юрьевич — родился в городе Старый Оскол Белгородской области (1961), окончил Ярославский государственный университет (1984). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1988) и доктора (1991) физико-математических наук в Математическом институте имени В. А. Стеклова РАН в области дифференциальных уравнений и динамических систем. Профессор кафедры дифференциальных уравнений. Опубликовал более 200 научных работ, среди которых 6 монографий.

Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
E-mail: kolesov@uniyar.ac.ru
ORCID: 0000-0001-5066-0881
AuthorID: 5544



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(2)

Научная статья

УДК 612.176:4, 004.932

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-176-188

Опыт оценки variability сердечного ритма по сглаженным кардиоинтервалограммам

М. В. Никулина^{1,2}✉, В. А. Антонец^{1,2}

¹Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, Россия

²Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия

E-mail: ✉nikamarathon@gmail.com, antonetsva@gmail.com

Поступила в редакцию 15.11.2021, принята к публикации 07.02.2022,

опубликована 31.03.2022

Аннотация. Цель настоящего исследования — показать возможность использования метода сглаживания кардиоинтервалограмм, представляющего собой сугубо временной анализ кардиоинтервалограмм, для разделения и отображения влияния различных механизмов регулирования физиологических систем человека на его сердечный ритм; предложить методические принципы определения частотно-временных характеристик variability сердечного ритма по сглаженной кардиоинтервалограмме и псевдофазовым портретам; обнаружить на сглаженных кардиоинтервалограммах паттерны, соответствующие маркерам стресса. Предполагается, что в динамике регулирования физиологических систем имеет место иерархия времен, наследуемая динамикой вариаций сердечного ритма. **Методы.** В данной работе применен метод сглаживания путем вычисления скользящего среднего с последующей декомпозицией кардиоинтервалограммы на медленную и быструю составляющие. Результаты декомпозиции визуализируются линейными графиками и псевдофазовыми портретами. Настройки визуализации позволяют вычленять уникальные переходные процессы и определять их временные параметры. Метод применен к данным, полученным при разных функциональных состояниях испытуемого и различающимся по уровню адаптационных рисков, наличию или отсутствию стресса. Для анализа выбраны эпизоды стресса, детектированные с помощью информационно-телекоммуникационной технологии событийно-связанной телеметрии сердца (ИТТ ССТС). **Результаты.** Для числового ряда RR-интервалов получено четкое разделение на быстрые и медленные компоненты. Сформулирован и апробирован алгоритм определения частотного наполнения variability сердечного ритма. Предложен способ визуализации, удобный для сопоставления данных, получаемых для разных пациентов. Найден паттерн псевдофазового портрета, соответствующий моменту наступления стресса. Предложенный метод уменьшил дискретность определения момента начала стресса с 10 секунд до единичных ударов сердца. **Заключение.** Продемонстрировано соответствие результатов верифицированному методу ИТТ ССТС и концепции адаптационного риска Баевского–Черниковой. Это подтверждает возможность использования метода временного сглаживания кардиоинтервалограмм для анализа variability сердечного ритма.

Ключевые слова: variability сердечного ритма, иерархия времен кардиорегуляции, псевдофазовый портрет, стресс, сглаживание кардиоинтервалограмм, простое скользящее среднее, временной анализ variability сердечного ритма, визуализация RR-интервалов.

Благодарности. Авторы благодарят Полеву С. А., зав. кафедрой психофизиологии Нижегородского государственного университета имени Н. И. Лобачевского за возможность использования интернет-ресурса «StressMonitor».

Для цитирования: Никулина М. В., Антонец В. А. Опыт оценки variability сердечного ритма по сглаженным кардиоинтервалограммам // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 2. С. 176–188.

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-176-188

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Experience in assessing heart rate variability by smoothed cardiointervalograms

M. V. Nikulina^{1,2}✉, V. A. Antonets^{1,2}

¹Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

²Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: ✉nikamarathon@gmail.com, antonetsva@gmail.com

Received 15.11.2021, accepted 07.02.2022, published 31.03.2022

Abstract. The objective of this study is to show the possibility of using the smoothing cardiointervalograms (CIG) method which is solely time domain analysis of CIG to separate and display the influence of various mechanisms of human physiological regulation systems on his heart rate. *Methods.* This paper shows the possibility of using the method of smoothing the cardiointervalogram by means of a moving average for its subsequent decomposition into slow and fast components. Decomposition results are visualized by line graphs and pseudo-phase portraits. Visualization settings allow us to isolate unique transients and calculate its timing. The method is applied to data obtained under different subject functional states and differing in the level of adaptation risks, the presence or absence of stress. For analysis were selected stress episodes detected using the information and telecommunication technology of event-related cardiac telemetry (ITT ERCT) presented by the Internet resource “StressMonitor”. *Results.* For the numerical series of RR-intervals, a clear division into fast and slow components is obtained. An algorithm for identifying the frequency content of heart rate variability has been formulated and tested. A visualization method is proposed that is convenient for comparing data obtained for different patients. A pseudo-phase portrait pattern corresponding to the moment of stress onset is found. The proposed method reduced the discreteness of identifying the stress onset moment from 10 seconds to single heart beats. *Conclusion.* The correspondence of the results to the verified ITT ERCT method and the Baevsky–Chernikova concept of adaptive risk has been demonstrated. This confirms the possibility of using the time cardiointervalograms smoothing method for the analysis of heart rate variability.

Keywords: heart rate variability, hierarchy of cardioregulatory times, pseudo phase portrait, stress, time domain analysis heart rate variability, cardiointervalograms smoothing, simple moving average, RR-intervals visualization.

Acknowledgements. The authors thank S. A. Polevaya, Head of the Department of Psychophysiology, Lobachevsky University of Nizhny Novgorod for the opportunity to use the Internet resource “StressMonitor”.

For citation: Nikulina MV, Antonets VA. Experience in assessing heart rate variability by smoothed cardiointervalograms. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(2):176–188. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-176-188

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Более полувека вариабельность сердечного ритма (BCP) используется для диагностики и прогноза здоровья человека. BCP отображают как временной ряд RR-интервалов (интервалов между последовательными сокращениями сердца, интервалов между R зубцами электрокардиограммы). Обычно к нему применяются такие способы обработки, как статистический анализ и спектральный анализ на некотором промежутке времени (обычно 5 минут в стандартных условиях лаборатории) [1–4]. В спектре кардиоинтервалограммы (КИГ) стандартно выделяют частотные диапазоны: высокой (high frequency, HF), низкой (low frequency, LF) и очень низкой частоты (very low frequency, VLF). Считается, что эти характерные диапазоны частот соответствуют различным механизмам регуляции. Поскольку спектр оказывается не дискретным, рассчитывают общую спектральную мощность и ее баланс для высоких и низких частот, производные показатели. Спектральный и статистический методы получили широкое распространение и успешно применяются [1–4].

Из временного анализа используются гистограмма и скатерограмма (отображение BCP на плоскости в координатах R_i, R_{i+1}) опять же для некоторого временного интервала [3, 4]. Были предложены и иные методы временного анализа, не получившие дальнейшего развития [1].

Еще в середине 19 века Клод Бернар описал тесную взаимосвязь работы мозга и сердца, а в середине 30-х годов 20 века П. К. Анохин сформулировал теорию функциональных систем, согласно которой центральные процессы достижения цели неразрывно связаны с процессами физиологического обеспечения ее достижения (по Goldstein) [5]. Тем не менее мгновенные изменения ритма сердца при когнитивной нагрузке и стрессе различной этиологии с этой точки зрения стали изучаться только в последнем десятилетии [6]. Мгновенные — значит сиюминутные, возможно преходящие изменения, возможно переводящие организм на новый уровень функционирования. При спектральном анализе они дают размазанность доминирующих частот или непрерывный спектр.

Современная парадигма моделей ВСР предполагает многоконтурность управления физиологическими функциями организма — от двухконтурных моделей, например Р. М. Баевского [2], до более сложных, например Julian F. Thayer [7]. В обзоре [5] описывается разнообразие концептуальных схем, показывающих механизмы регулирования. Эти схемы регулирования отражают иерархическую структуру вегетативных ответов. Такая иерархия ответов, очевидно, соответствует иерархии регуляции и имеет иерархически организованные характерные времена адаптационных процессов. Однако эта иерархическая временная организация сердечного ритма (СР) недоступна для анализа, использующего интегральные показатели, так как они не отражают и практически не позволяют выявлять эпизоды прямого модулирования компонент ритма [8]. В частности, это невозможно при непериодической модуляции СР. Это обстоятельство ограничивает изучение системных физиологических связей. Очевидно, что наряду с методами спектрального анализа ВСР следует использовать и методы временного анализа. Руководствуясь соображениями здравого смысла и предположением о наличии иерархии времен, мы предложили метод обработки кардиоритмограмм, относящийся к временному анализу [8]. Так как каждый уровень в иерархии управления (центральный, метасимпатический, гуморальный...) обладает своим темпом, то разумно сделать усреднение в окне умеренной продолжительности, чтобы нивелировались быстрые компоненты регулирования. В данной работе мы демонстрируем полезность такого подхода и сравниваем его информативность с информативностью применения скользящего спектрального анализа [6] для определения момента наступления острого стресса. Также мы демонстрируем возможность его использования для диагностики функциональных состояний.

1. Методика

Создание каких-либо новых методов не было целью данной работы. Мы используем обычный метод цифровой фильтрации, впервые использованный для анализа ВСР в космическом полете в 1965 г. [9, 10]. Суть примененного метода состоит в сглаживании исходной последовательности кардиоинтервалов, измеренных в миллисекундах. Для этого вычисляется простое скользящее среднее — среднее значение из последующих m значений для некоторого n в исходной КИГ. Обозначим через RR_i элемент исходной последовательности RR-интервалов. Тогда элемент сглаженной последовательности RR_{S_n} вычисляется по формуле

$$RR_{S_n} = \frac{1}{m} \sum_n^{n+m} RR_i,$$

где m — количество отсчетов усредняющего окна. Усреднение в окне скользящего среднего по m кардиоциклам играет роль фильтра низкой частоты. Ширина окна эмпирически устанавливается меньшей, чем половина количества отсчетов, сумма длительностей которых равна времени медленной регуляции [8]. Благодаря этому получающаяся сглаженная последовательность $\{RR_S\}$ фиксирует медленные тренды сердечного ритма.

Мы предполагаем, как уже указывалось выше, что существенно различающиеся времена изменения СР соответствуют разным уровням иерархии управления. Что быстрые (высокочастотные) процессы изменения ритма сердца реализуются на фоне медленных (низкочастотных) процессов влияния физиологического управления на сердечный ритм. Если далее полагать, что быстрые и медленные механизмы независимы, то декомпозиция ритмограммы аддитивна. Декомпозиция КИГ на медленную $\{RR_S\}$ и быструю $\{RR_f\}$ компоненты производится вычитанием $\{RR_f\} = \{RR_i\} - \{RR_S\}$. Мы вычитаем из исходной КИГ усредненную. Качество усреднения проверяется по близости к нулю среднего значения этой разницы. Так убирается квазипостоянная составляющая. Отличительной особенностью такого подхода является то, что значения сглаженной КИГ $\{RR_S\}$ так же, как и значения $\{RR_i\}$, не теряют привязки к конкретным моментам времени, что оказалось важным для применения метода.

Размах получившихся рядов $\{RR_S\}, \{RR_f\}$ [мс] характеризует интенсивность медленного и быстрого регулирования. Аналогично, усреднение в скользящем окне применяется к получившемуся ряду $\{RR_f\}$, моделируя фильтр средней частоты. Получается ряд $\{RR_m\}$.

Метод задумывался и реализовался как интерактивный. Была разработана простейшая программа «RRecon» [8], интерфейс пользователя которой визуализирует RR-последовательности линейными графиками и псевдофазовыми портретами (рис. 1).

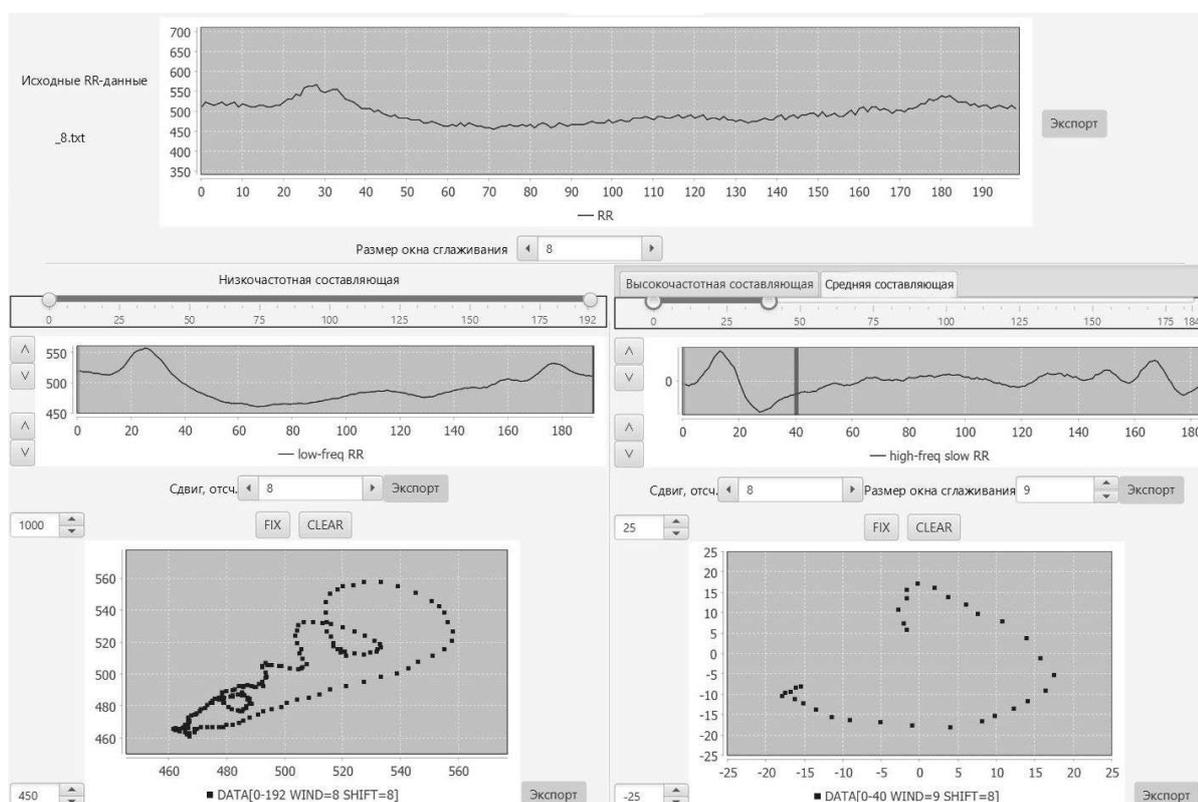


Рис. 1. Снимок экрана программы «RRecon». Представлены инструменты для декомпозиции исходного ряда RR-интервалов на три выборки: $\{RR_S\}, \{RR_m\}, \{RR_f\}$ (соответственно вкладки, названные как низкочастотная, средняя и высокочастотная составляющие). На рисунке открыты вкладки медленной и средней компонент ($\{RR_S\}, \{RR_m\}$). Для них построены псевдофазовые портреты в осях [мс] (см. объяснения в тексте) [8]

Fig. 1. Screenshot of «RRecon» program. Tools for decomposition of the initial series of RR intervals into three samples are presented: $\{RR_S\}, \{RR_m\}, \{RR_f\}$ (respectively, the tabs: slow, middle and fast components). The slow and middle frequency tabs are open in the figure ($\{RR_S\}, \{RR_m\}$). Pseudo-phase portraits in the ms axes are constructed for them (see explanations in the text) [8]

Каждый портрет строится из пар значений (RR_n, RR_{n+L}) соответствующей последовательности RR-интервалов, отстоящих друг от друга на L отсчетов (с лагом L). Такие портреты позволяют четко различать виды аperiodических режимов ВСР, а также определять период интервальной периодической динамики [11]. В программе реализована возможность изменения сдвига L (лага). При сдвиге равном единице, картина приобретает вид классической скатерограммы (корреляционной ритмограммы). Сходство поведения псевдофазовых портретов с фигурами Лиссажу подсказало методику определения времен периодических и непериодических изменений СР. Интерфейс программы позволяет независимо изменять ширину окон сглаживания исходной КИГ и ее высокочастотной компоненты, менять лаги псевдофазовых портретов, ограничивать размер визуализируемой выборки, сравнивать вариационный размах рядов. Все это обеспечивает удобство визуального анализа траекторий портретов (см. рис. 1). Фактически, мы применили известный метод скатерограмм, но сделали сдвиг между осями такой, чтобы гарантировать отсутствие корреляции между отсчетами. В итоге мы получили очень наглядное изображение облаков, соответствующих трем диапазонам частот.

«Для оценки индивидуальных рисков на основе анализа ВСР в космической медицине был предложен ...методологический подход вероятностной оценки функциональных резервов (ФР) и степени напряжения регуляторных систем (СН)» [12, 13]. «По результатам исследования вегетативной регуляции кровообращения в условиях космических полетов была предложена концепция адаптационного риска, который характеризует адаптационные возможности организма с точки зрения соотношения между функциональными резервами организма и текущим напряжением регуляторных систем (Chernikova A. et al., 2012) по данным анализа ВСР». «Было подтверждено по данным исследований вегетативной регуляции в покое и при функциональных нагрузках в условиях космического полета, что показатели ФР и СН так же, как и величина адаптационного риска, не только связаны с текущим функциональным состоянием..., но и являются предиктором снижения адаптационных возможностей... Адаптационный риск ...представляет... вероятность развития предшествующих болезни донозологических и преморбидных состояний» [2]. В итоге Баевским и Черниковой была разработана математическая модель для распознавания классов физиологических состояний [2]. Разработчики интернет-ресурса «StressMonitor» на платформе www.cogni-nn.ru взяли эту модель за основу для определения квартиля физиологического состояния и оценки уровня адаптационного риска (УАР) у лиц, записи ВСР которых находятся в базе данных на сервере.

Данные в виде ряда RR-интервалов передаются в базу посредством информационно-телекоммуникационной технологии событийно-связанной телеметрии сердца (ИТТ ССТС). Эта технология разработана на кафедре психофизиологии Нижегородского государственного университета имени Н. И. Лобачевского [6]. Данная технология позволяет в прозрачном режиме (без привлечения внимания обследуемого и какого-либо ограничения его подвижности) непрерывно, до 150 часов, записывать электрокардиосигнал в условиях естественной деятельности человека. Для каждой ритмограммы проводится скользящий спектральный анализ методом дискретного преобразования Фурье для неравномерных сигналов. Далее, в соответствии с принятыми стандартами [3, 4], на сервере вычисляются спектральная мощность в диапазонах частот VLF (0.003...0.040 Гц), LF (0.04...0.15 Гц), HF (0.15...0.4 Гц), общая мощность спектра $TP = VLF + LF + HF$ и индекс симпато-вагусного баланса LF/HF. Вычисляются ФР, СН, УАР, вероятность квартиля функционального состояния. Снимок экрана Интернет-ресурса StressMonitor представлен на рис. 2. Верхний график — кардиоритмограмма [мс] с интервалами острого стресса, выделенными вертикальными полосами (см. ниже). Нижние графики — расчетные спектральные показатели variability ритма сердца (черный цвет — общая мощность спектра TP [мс²], серый цвет — симпато-вагусный баланс LF/HF). Между графиками — суммарные значения показателей за интервал визуализации, внизу — значения показателей в указанный момент времени [6]. В отдельном отчете выводятся ФР, СН, УАР, вероятностная оценка функционального состояния.

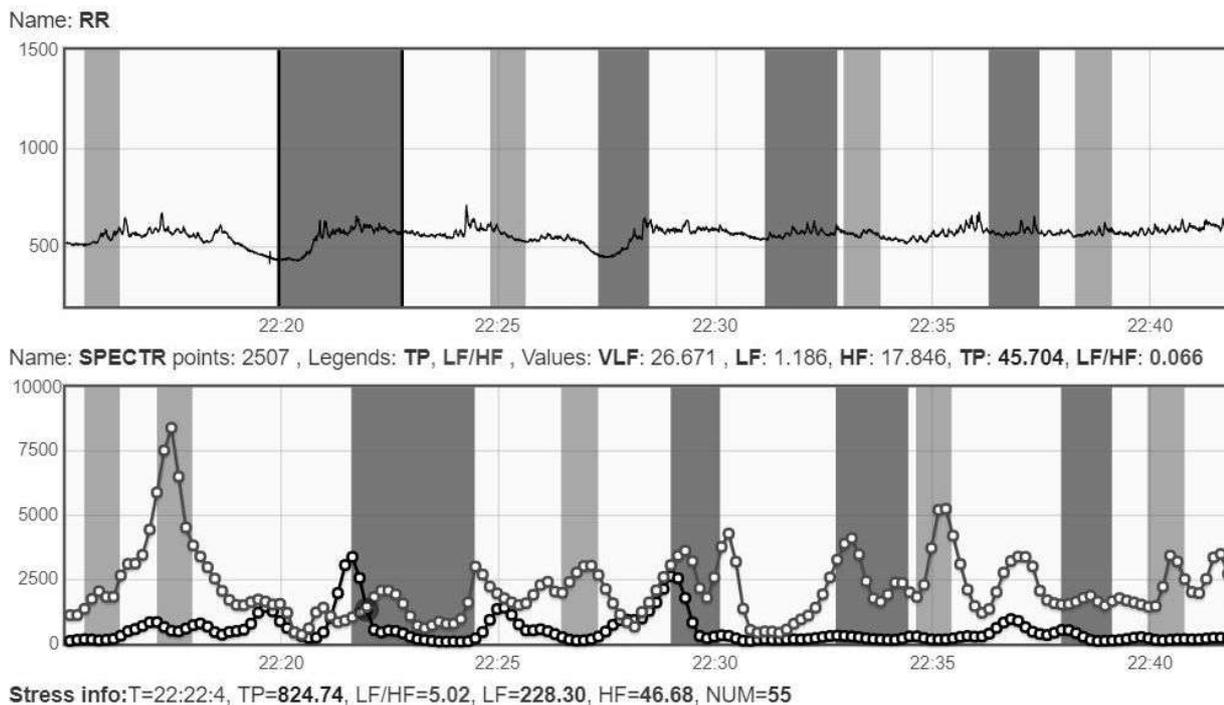


Рис. 2. Снимок экрана Интернет-ресурса StressMonitor. Верхний график — кардиоритмограмма [мс] с интервалами острого стресса, выделенными вертикальными полосами. Нижние графики — расчетные спектральные показатели variability ритма сердца (черный цвет — общая мощность спектра TP [мс²], серый цвет — симпато-вагусный баланс LF/HF). Между графиками — суммарные значения показателей за интервал визуализации, внизу — значения показателей на момент времени 22:22:04 [6]

Fig. 2. Screenshot of the StressMonitor web resource. Upper graph — heart rate [ms] with acute stress intervals highlighted by vertical bars. Lower graphs — calculated spectral indicators of heart rate variability (black color — total spectrum power TP [ms²], gray color — LF/HF sympathovagal balance). Between the graphs — the total values of the indicators for the visualization interval, at the bottom — the values of the indicators at the time 22:22:04 [6]

К моменту написания статьи в базе находилось около 15 тысяч записей. Мы отобрали записи, с высокой вероятностью относящиеся к одному из четырех физиологических состояний: а — состояние физиологической нормы (ФР > 0, СН < 0); б — донозологическое состояние со снижением адаптационных возможностей (ФР > 0, СН > 0); в — преморбидное состояние перенапряжения (ФР < 0, СН > 0); г — патологическое состояние истощения (ФР < 0, СН < 0). Мы построили их портреты в одинаковом масштабе и настройках визуализации. Для большей наглядности настройки для разных частотных компонент отличаются. Для примера, на рис. 3 представлены скриншоты псевдофазовых портретов $\{RR_S\}$, $\{RR_m\}$, $\{RR_f\}$ для 20 ритмограмм, по 5 ритмограмм в каждом квартиле состояний. Видно изменение площади облаков (размаха регулирования) с изменением физиологического состояния. Наблюдается опережение затухания медленной и средней компонент относительно быстрой. Положительное значение функциональных резервов (ФР) (а, б) отличается большей площадью облака быстрых и средних компонент, несколько уменьшающейся при смене знака степени напряжения (СН) с «+» на «-» (от а к б). При смене знака функциональных резервов с «+» на «-» (от в к г) наблюдается ригидизация во всех диапазонах частот.

Основной целью создания интернет-ресурса «StressMonitor» было, как следует из названия, детектирование моментов стресса [6]. Моменты начала острого стресса определяют на основании трехкомпонентной теории нейрохимических механизмов стресса С. Б. Парина [14] по падению общей мощности спектра variability сердечного ритма (TP) на фоне резкого возрастания индекса симпато-вагусного баланса (LF/HF) [6, 15, 16]. Дискретность определения начала стресса — 10 с.

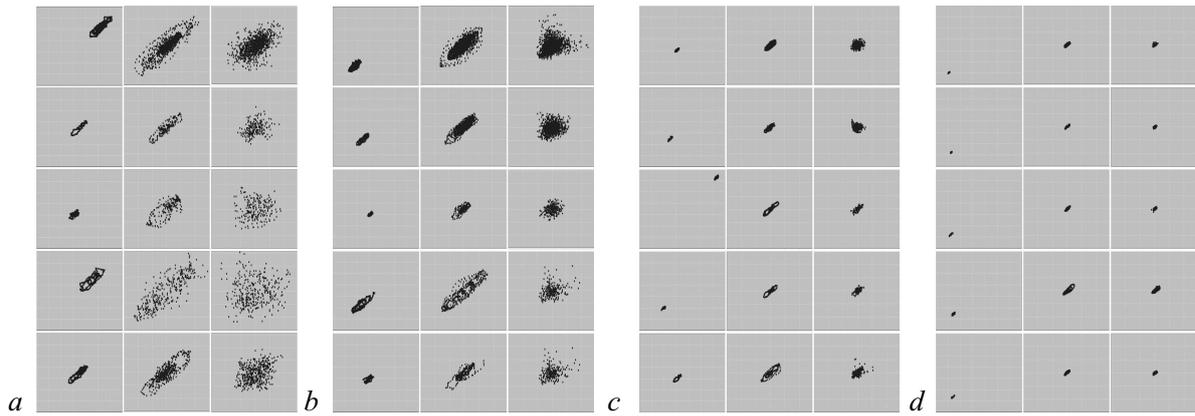


Рис. 3. Псевдофазовые портреты удобны для сопоставления данных, получаемых для разных испытуемых (пациентов). Здесь представлены снимки экрана для каждой из трех компонент (левая колонка – медленная, центральная – средняя, правая – быстрая) для 20 случайных испытуемых, имеющих различное физиологическое состояние. Видно изменение площади облаков (размаха регулирования) с изменением физиологического состояния: *a* – физиологическая норма, *b* – донозологические состояния, *c* – преморбидные состояния, *d* – патологические состояния. Наблюдается опережение затухания медленной и средней компонент относительно быстрой. Настройки визуализации фазовых портретов: скользящее окно усреднения = 30; для медленной компоненты лаг = 8, границы осей 400...1100 мс; для средней компоненты лаг = 4, границы осей ± 150 мс; для быстрой компоненты лаг = 8, границы осей ± 300 мс

Fig. 3. Pseudo-phase portraits are convenient for comparing data obtained for different subjects (patients). Here are screen shots for each of the three components (left column – slow, center – medium, right – fast) for 20 random subjects with different physiological states. We can see the change in the area of clouds (range of regulation) with a change in the physiological state: *a* – physiological norm, *b* – prenosological conditions, *c* – premorbid conditions, *d* – pathological conditions. There is an pre-attenuation of Slow and Middle relative to Fast. Phase portrait visualization settings: averaging sliding window = 30; for the slow component lag = 8, the boundaries of the axes 400...1100 ms; for the middle component lag = 4, axis boundaries ± 150 ms; for the fast component lag = 8, axis boundaries ± 300 ms

Мы выбрали для анализа 7-часовую ритмограмму спортсмена-супермарафонца, характеризующуюся полным спектром функциональных состояний (ФС) и уровней адапционного риска (УАР), которые сменялись в процессе прохождения дистанции (рис. 4). Пузырьковая

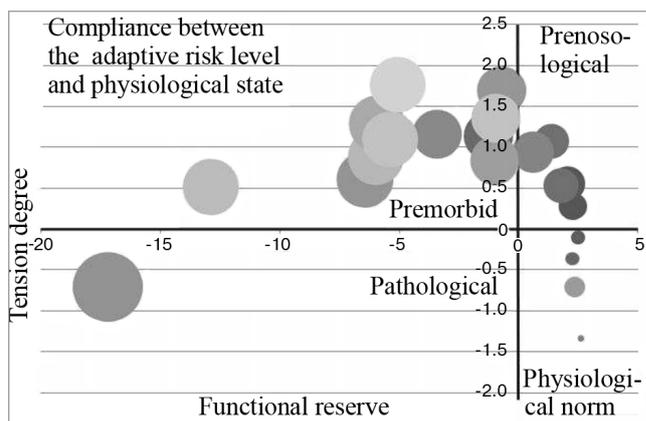


Рис. 4. Траектория состояний спортсмена в пространстве функциональных состояний по Баевскому [2] на основе анализа ВСР. УАР пропорционален диаметру пузырьков

Fig. 4. The trajectory of the athlete's states in the space of functional states according to Baevsky [2] based on HRV analysis. The level of adaptive risk is proportional to the bubbles diameter

диаграмма построена основе анализа этой ритмограммы. Диаметр пузырей соответствует УАР. Траектория состояний спортсмена изображена в пространстве функциональных состояний по Р.М. Баевскому [2]. Состояние стресса возникало при всех ФС. Мы отобрали отрезки КИГ, соответствующие эпизодам стресса, детектированным сервисом «StressMonitor», и отсортировали их по уровню адапционного риска. Эти отрезки использовались в качестве входных данных для программы RRecon (см. рис. 1). Полученные псевдофазовые портреты позволили сравнить размах и поведение ритмограмм непосредственно до и во время стресса в разных физиологических состояниях, которые возникли в процессе экстремальной деятельности (рис. 5): в состоянии физиоло-

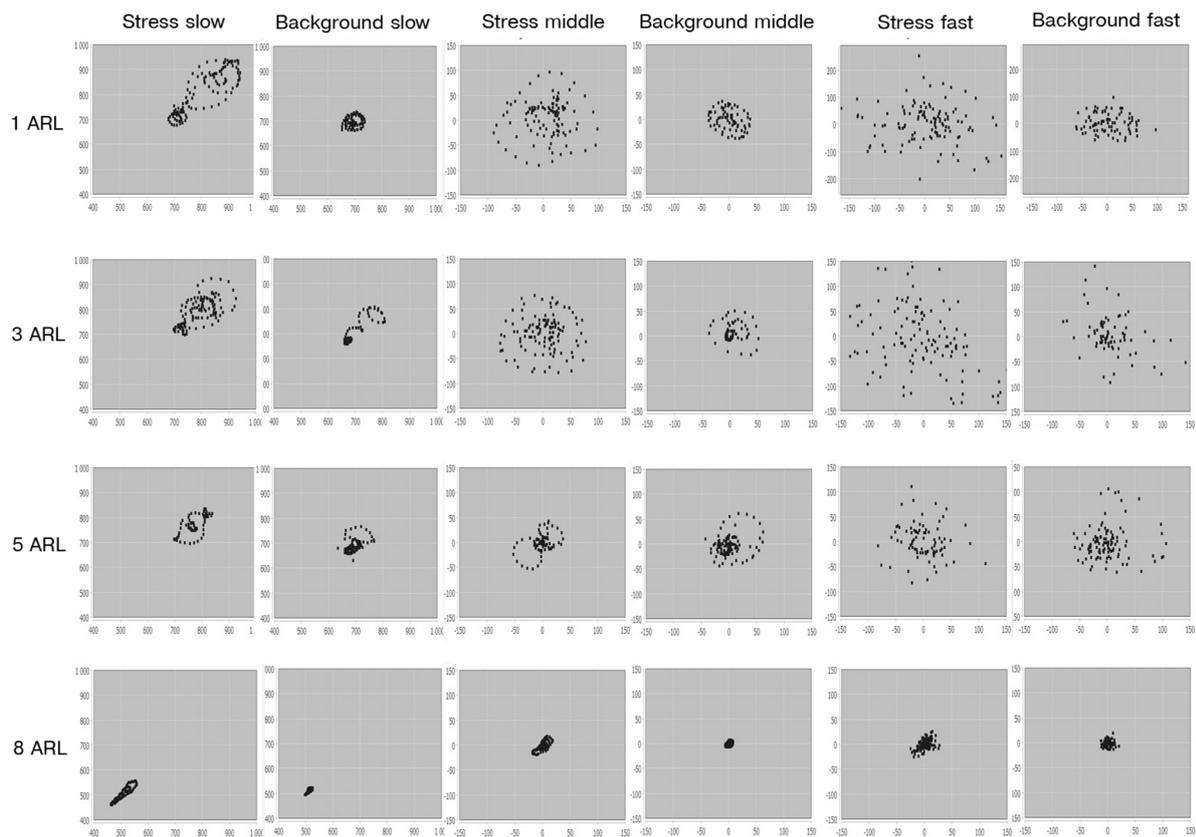


Рис. 5. Ригидизация сердечного ритма (уменьшение размеров облака) при увеличении уровня адаптационного риска (УАР увеличивается сверху вниз) и изменение частотной наполненности при развитии стресса

Fig. 5. Heart rate rigidity (cloud reduction) with an increase of adaptive risk level (ARL) from top to bottom and a change in frequency fullness with the development of stress

гической нормы (УАР = 1...2), донологическом состоянии со снижением адаптационных возможностей (УАР = 3...5), преморбидном состоянии перенапряжения регуляторных систем (УАР = 6...8), патологическом состоянии истощения регуляторных систем (УАР = 9...10). На рис. 5 для 4-х значений УАР в нечетных столбцах таблицы представлены портреты во время развившегося стресса, в четных — фоновое состояние. УАР увеличивается сверху вниз. Очевиден большой размах регулирования при стрессе по всем компонентам: медленной (slow), быстрой (fast) и средней (middle), несмотря на падение общей мощности спектра вариабельности (TP) при стрессе. Размах также уменьшается при ухудшении физиологического состояния.

2. Результаты

Изменение величины лага L и границ отрезка наблюдения позволило графически вычлени нестационарные колебания. При изменении лага через интерфейс программы наблюдается изменение формы псевдофазового портрета, подобно модификации фигур Лиссажу при изменении разности фаз сигналов. Из вытянутого по диагонали псевдофазового портрета (при $L = 1$), который соответствует стандартной скатерограмме, кривая разворачивается, наполняется, принимает округлую форму. При дальнейшем увеличении сдвига, когда его значение приближается к четверти характерного времени регуляции, кривая становится горизонтальной (рис. 6).

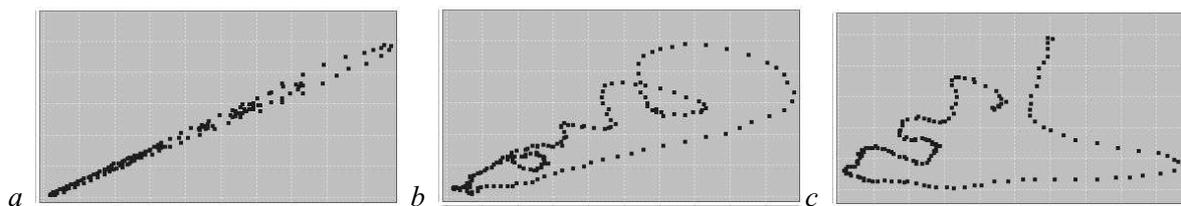


Рис. 6. Изменение формы псевдофазового портрета с изменением величины лага: 1 (a), 8 (b), 25 (c)

Fig. 6. Changing the shape of the table-curve with changing the lag value: 1 (a), 8 (b), 25 (c)

Таким образом, основываясь на этом признаке и зная величину лага, мы имеем возможность определить характерные период и частоты регуляции по простой формуле

$$f = 1/(4L \cdot \overline{RR}),$$

где \overline{RR} – среднее арифметическое RR-интервалов рассматриваемого отрезка КИГ. В качестве примера в Таблице представлены некоторые частоты адапционных реакций, распознанные на соответствующих отрезках исходной КИГ ($УАР=8$) по псевдофазовому портрету для медленной компоненты (slow) на рис. 1 и рис. 6. В частности, на участке RR_{14-102} для ритмограммы, представленной на рис. 1, наблюдается затухающее колебание $f = 0.02$ Гц.

Таблица

| Отрезок RR | Частота, Гц |
|--------------|-------------|
| 5–33 | 0.067 |
| 14–102 | 0.020 |
| 31–71 | 0.017 |
| 101–135 | 0.065 |

При увеличении размера скользящего окна усреднения из портрета исчезают относительно более высокочастотные элементы.

Формальное сопоставление присущей началу стресса динамики [6] и псевдофазовых портретов сглаженных КИГ на более чем 30 эпизодах для группы испытуемых, находящихся в различных функциональных состояниях, решением прямой и обратной задачи позволило выявить характерное поведение скатеротраектории (центральная часть рис. 7). Наблюдается резкое изменение

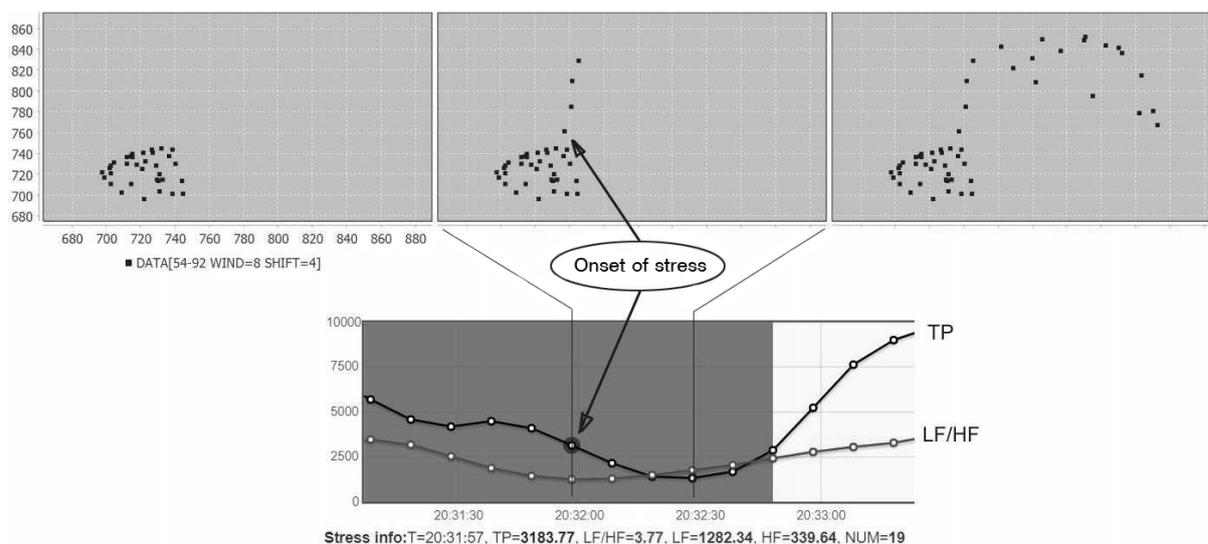


Рис. 7. Паттерн скатерограммы, соответствующий началу стресса

Fig. 7. Scattergram pattern corresponding to the onset of stress

корреляции в начале стресса. Достаточность данного графического признака для достоверной идентификации стресса требует дальнейшего изучения.

Вследствие того, что значения сглаженной КИГ не теряют привязки к конкретным моментам времени, мы, зная номер точки начала стресса на псевдофазовом портрете, можем с точностью 1–2 ударов сердца определить время его начала. Это максимально возможная точность, в отличие от описанного выше метода информационно-телекоммуникационной технологии событийно-связанной телеметрии сердца, использующего интегральные показатели и определяющего наступление таких событий с дискретностью 10 с.

Предложенный подход позволяет сопоставлять форму и размах портретов, полученных для разных пациентов. Рис. 3, 5 демонстрируют увеличение ригидности (снижение размаха) сердечного ритма с увеличением уровня адаптационного риска и изменение частотной наполненности при развитии стресса.

Заключение

В итоге простой метод позволил:

- выделить локальные закономерности в поведении временных рядов RR-интервалов;
- осуществить декомпозицию кардиоинтервалограммы на медленную и быструю компоненты;
- определить частоты переходных процессов;
- максимально точно локализовать момент начала острого стресса;
- сравнить параметры разных кардиоритмограмм.

Таким образом, мы показали новые возможности использования общеизвестного метода. Такой подход безусловно полезен и информативен при использовании его для анализа variability сердечного ритма. Мы считаем, что способ представления кардиоинтервалограмм в виде псевдофазовых портретов может иметь клиническое применение. Предлагаемый нами метод, в случае доработки программы с учетом компетенций конечного пользователя, может применяться для количественной оценки вегетативного тонуса в реальном времени при скрининговых обследованиях населения.

Список литературы

1. *Баевский Р. М., Иванов Г. Г.* Вариабельность сердечного ритма: теоретические аспекты и возможности клинического применения // Ультразвуковая и функциональная диагностика. 2001. № 3. С. 108–127.
2. *Баевский Р. М., Фунтова И. И., Берсенева А. П., Черникова А. Г., Лучицкая Е. С., Прилуцкий Д. А., Семенов Ю. Н., Танк Й., Слепченкова И. Н., Русанов В. Б., Берсенев Е. Ю., Иванов Г. Г.* Методы и приборы космической кардиологии на борту Международной космической станции: монография. Москва: Техносфера, 2016. 368 с.
3. *Баевский Р. М., Иванов Г. Г., Чирейкин Л. В., Гаврилушкин А. П., Довгалецкий П. Я., Кукушкин Ю. А., Миронова Т. Ф., Прилуцкий Д. А., Семенов А. В., Федоров В. Ф., Флейшман А. Н., Медведев М. М.* Анализ variability сердечного ритма при использовании различных электрокардиографических систем (Методические рекомендации, часть 1) // Вестник аритмологии. 2002. № 24. С. 65–87.
4. *Малик М., Биггер Дж. Т., Камм А. Дж., Кляйгер Р. Е., Маллиани А., Мосс А. Дж., Шварц П. Дж.* Вариабельность сердечного ритма. Стандарты измерения, физиологической интерпретации и клинического использования // Вестник аритмологии. 1999. № 11. С. 52–77.
5. *Goldstein D. S., Kopin I. J.* Homeostatic systems, biocybernetics, and autonomic neuroscience // *Autonomic Neuroscience*. 2017. Vol. 208. P. 15–28. DOI: 10.1016/j.autneu.2017.09.001.
6. *Полевая С. А., Еремин Е. В., Буланов Н. А., Бахчина А. В., Ковальчук А. В., Парин С. Б.* Событийно-связанная телеметрия ритма сердца для персонализированного дистанционного

мониторинга когнитивных функций и стресса в условиях естественной деятельности // Современные технологии в медицине. 2019. Т. 11, № 1. С. 109–115.
DOI: 10.17691/stm2019.11.1.13.

7. *Ellis R. J., Thayer J. F.* Music and autonomic nervous system (dys)function // *Music Perception*. 2010. Vol. 27, no. 4. P. 317–326. DOI: 10.1525/mp.2010.27.4.317.
8. *Антонец В. А., Пермьяков С. П., Никулина М. В.* Применение сглаживания кардиоинтервалограмм для анализа variability сердечного ритма // *Материалы VII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Вариабельность сердечного ритма: теоретические аспекты и практическое применение в спорте и массовой физической культуре»*. 25–26 мая 2021, УдГУ, Ижевск. Ижевск: УдГУ, 2021. С. 67–74.
9. *Рябыкина Г. В., Соболев А. В.* Анализ variability ритма сердца // *Кардиология*. 1996. Т. 36, № 10. С. 87–97.
10. *Баевский Р. М., Кириллов О. И., Клецкин С. З.* Математический анализ изменений сердечного ритма при стрессе. Москва: Наука, 1984. 224 с.
11. *Шлюфман К. В., Фишман Б. Е., Фрисман Е. Я.* Особенности динамических режимов одномерной модели Рикера // *Известия вузов. ПНД*. 2012. Т. 20, № 2. С. 12–28.
DOI: 10.18500/0869-6632-2012-20-2-12-28.
12. *Баевский Р. М., Черникова А. Г.* Проблема физиологической нормы: математическая модель функциональных состояний на основе анализа variability сердечного ритма // *Авиакосмическая и экологическая медицина*. 2002. Т. 36, № 6. С. 11–17.
13. *Баевский Р. М., Черникова А. Г.* Способ оценки риска развития донозологических, преморбидных и патологических состояний в длительном космическом полете. Патент № 2448644 от 15.09.2010. Заявитель: Институт медико-биологических проблем Российской академии наук.
14. *Парин С. Б.* Люди и животные в экстремальных ситуациях: нейрохимические механизмы, эволюционный аспект // *Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Психология*. 2008. Т. 2, № 2. С. 118–135.
15. *Некрасова М. М., Полевая С. А., Парин С. Б., Шишалов И. С., Бахчина А. В.* Способ определения стресса. Патент № 2531443 от 11.11.2013. Заявитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
16. *Григорьева К. А., Григорьева В. Н., Полевая С. А.* Способ диагностики стресса у человека. Патент № 2624813 от 11.08.2016. Заявитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Нижегородская государственная медицинская академия» Министерства здравоохранения Российской Федерации.

References

1. Bayevsky RM, Ivanov GG. Cardiac rhythm variability: The theoretical aspects and the opportunities of clinical application (lecture). *Ultrasonic and Functional Diagnostics*. 2001;(3):108–127 (in Russian).
2. Baevsky RM, Funtova II, Berseneva AP, Chernikova AG, Luchitskaya ES, Prilutsky DA, Semenov YN, Tank J, Slepchenkova IN, Rusanov VB, Bersenev EY, Ivanov GG. *Methods and Instruments of Space Cardiology Aboard the International Space Station: Monograph*. Moscow: Tekhnosfera; 2016. 368 p. (in Russian).
3. Baevsky RM, Ivanov GG, Chireikin LV, Gavrilushkin AP, Dovgalevsky PY, Kukushkin YA, Mironova TF, Prilutsky DA, Semenov AV, Fedorov VF, Fleishman AN, Medvedev MM. Analysis of heart rate variability using various electrocardiographic systems (Methodical recommendations, part 1). *Journal of Arrhythmology*. 2002;(24):65–87 (in Russian).

4. Malik M, Bigger JT, Camm AJ, Kleiger RE, Malliani A, Moss AJ, Schwartz PJ. Heart rate variability: Standards of measurement, physiological interpretation, and clinical use. *European Heart Journal*. 1996;17(3):354–381. DOI: 10.1093/oxfordjournals.eurheartj.a014868.
5. Goldstein DS, Kopin IJ. Homeostatic systems, biocybernetics, and autonomic neuroscience. *Autonomic Neuroscience*. 2017;208:15–28. DOI: 10.1016/j.autneu.2017.09.001.
6. Polevaya SA, Eremin EV, Bulanov NA, Bakhchina AV, Kovalchuk AV, Parin SB. Event-related telemetry of heart rate for personalized remote monitoring of cognitive functions and stress under conditions of everyday activity. *Modern Technologies in Medicine*. 2019;11(1):109–115. DOI: 10.17691/stm2019.11.1.13.
7. Ellis RJ, Thayer JF. Music and autonomic nervous system (dys)function. *Music Perception*. 2010;27(4):317–326. DOI: 10.1525/mp.2010.27.4.317.
8. Antonets VA, Permiakov SP, Nikulina MV. Applying cardiointervalogram smoothing to analyze heart rate variability. In: *Materials of the VII All-Russian Scientific and Practical Conference with International Participation «Heart Rate Variability: Theoretical Aspects and Practical Application in Sports and Mass Physical Culture»*. 25-26 May 2021, UdSU, Izhevsk. Izhevsk: UdSU; 2021. P. 67–74 (in Russian).
9. Ryabykina GV, Sobolev AV. Analysis of heart rate variability. *Cardiology*. 1996;36(10):87–97 (in Russian).
10. Baevsky RM, Kirillov OI, Kletskin SZ. *Mathematical Analysis of Changes in Heart Rate During Stress*. Moscow: Nauka; 1984. 224 p. (in Russian).
11. Shljufman KV, Fishman BE, Frisman EJ. Features of modes for one-dimensional model of ricker. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2012;20(2):12–28 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2012-20-2-12-28.
12. Baevsky RM, Chernikova AG. The problem of the physiological norm: a mathematical functional state model based on analysis of the cardiac rhythm variability. *Aerospace and Environmental Medicine*. 2002;36(6):11–17 (in Russian).
13. Baevsky RM, Chernikova AG. A Method for Assessing the Risk of Development of Donosological, Premorbid and Pathological Conditions in a Long-Term Space Flight. Patent No. 2448644 dated 15.09.2010. Assignee: Institute of Biomedical Problems RAS (in Russian).
14. Parin SB. Humans and animals in extreme situations: Neurochemistry mechanisms, evolutionary aspect. *Novosibirsk State University Bulletin. Series: Psychology*. 2008;2(2):118–135 (in Russian).
15. Nekrasova MM, Polevaya SA, Parin SB, Shishalov IS, Bakhchina AV. Method for Determining Stress. Patent No. 2531443 dated 11.11.2013. Assignee: Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (in Russian).
16. Grigorieva KA, Grigorieva VN, Polevaya SA. Method for Diagnosing Stress in Humans. Patent No. 2624813 dated 11.08.2016. Assignee: Privolzhsky Research Medical University (in Russian).

Никulina Марина Валентиновна – окончила Институт радиоэлектроники и информационных технологий Нижегородского технического университета имени Р.Е. Алексеева по направлению «Вычислительная техника» (1986), Национальный государственный университет физической культуры, спорта и здоровья имени П.Ф. Лесгафта, Санкт-Петербург (1997). Работает ведущим технологом Института прикладной физики Российской академии наук. Аспирант ННГУ имени Н.И. Лобачевского. Мастер спорта России. Награждена медалью «В память 800-летия Нижнего Новгорода». Научные интересы – физиология спорта и экстремальной деятельности, компьютерные технологии.

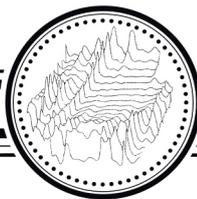


Россия, 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
 Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского
 Россия, 603155, Нижний Новгород, ул. Ульянова, д. 46
 Институт прикладной физики РАН
 E-mail: nikamarathon@gmail.com
 ORCID: 0000-0003-1548-1583
 AuthorID: 1142627

Антонец Владимир Александрович — родился в 1949 году. Окончил Горьковский (Нижегородский) государственный университет имени Н. И. Лобачевского (ННГУ) по специальности «радиофизика» (1971). Кандидат биологических наук (авиационная и космическая медицина, 1979). Доктор физико-математических наук (техника физического эксперимента, биофизика, 1993). Работает в Институте прикладной физики РАН (1977 — младший научный сотрудник, 1979 — старший научный сотрудник, 1986 — заведующий отделом радиофизических методов в медицине, 2002 — ведущий научный сотрудник). Профессор кафедры экологии (2000). Профессор кафедр психофизиологии (ННГУ, с 2014) и технологического предпринимательства (МФТИ, с 2012). Основатель первого в России регионального технологического инкубатора (1994). Профессор РАНХиГС (1999—2010). Автор более 150 научных публикаций в области физических измерений, биофизики, психофизики и коммерциализации технологий, трех учебников и более 10 бумажных и онлайн пособий по управлению НИОКР, коммерциализации их результатов и технологическому аудиту. Автор научно-популярного бестселлера «Простые вопросы» (М.: Манн, Иванов и Фербер, 2016. 304 с.). Область научных интересов: измерения в когнитивных исследованиях, биомеханике и биофизике; управление исследованиями, разработками и технологическим развитием; коммерциализация результатов исследований и разработок; популяризация научных знаний.



Россия, 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского
Россия, 603155, Нижний Новгород, ул. Ульянова, д. 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: antonetsva@gmail.com
ORCID: 0000-0002-8225-8018
AuthorID: 9024



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(2)

Научная статья
УДК 517.9, 535.8
DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-189-207

Локальная динамика модели цепочки лазеров с оптоэлектронной запаздывающей однонаправленной связью

Е. В. Григорьева¹, С. А. Кащенко² ✉

¹Белорусский государственный экономический университет, Минск, Республика Беларусь

²Региональный научно-образовательный математический центр

при Ярославском государственном университете имени П. Г. Демидова, Ярославль, Россия

E-mail: grigorieva@tut.by, ✉kasch@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию 10.01.2022, принята к публикации 16.02.2022, опубликована 31.03.2022

Аннотация. Цель. Исследуется локальная динамика модели цепочки лазеров с оптоэлектронной запаздывающей однонаправленной связью. Рассматривается система уравнений, описывающая динамику замкнутой цепочки большого числа лазеров с оптоэлектронной запаздывающей связью между элементами. Предложена эквивалентная распределенная интегродифференциальная модель с малым параметром, обратно пропорциональным количеству лазеров в цепочке. Для распределенной модели с периодическими краевыми условиями получено критическое значение коэффициента связи, при котором стационарное состояние в цепочке становится неустойчивым. Показано, что в определенной окрестности точки бифуркации число корней характеристического уравнения с близкой к нулю действительной частью неограниченно возрастает при уменьшении малого параметра. В этом случае в качестве нормальной формы построено двумерное комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау с конвекцией. Его нелокальная динамика определяет поведение решений исходной краевой задачи. **Методы исследования.** Используются методы изучения локальной динамики, основанные на построении нормальных форм на центральных многообразиях, применительно к критическим случаям (асимптотически) бесконечной размерности. Предложен алгоритм сведения исходной краевой задачи к уравнению для медленно меняющихся амплитуд. **Результаты.** Получены простейшие однородные периодические решения уравнения Гинзбурга–Ландау и соответствующие им неоднородные решения в виде бегущих волн в распределенной модели. Такие решения можно интерпретировать как режимы фазовой синхронизации в цепочке связанных лазеров. Определены частоты и амплитуды колебаний интенсивности излучения каждого лазера и разность фаз между соседними осцилляторами.

Ключевые слова: бифуркационный анализ, волновые структуры, запаздывание, динамика лазеров.

Благодарности. Работа С. А. Кащенко поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 21-71-30011).

Для цитирования: Григорьева Е. В., Кащенко С. А. Локальная динамика модели цепочки лазеров с оптоэлектронной запаздывающей однонаправленной связью // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 2. С. 189–207.

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-189-207

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Local dynamics of laser chain model with optoelectronic delayed unidirectional coupling

E. V. Grigorieva¹, S. A. Kashchenko²✉

¹Belarus State Economic University, Minsk, Republic of Belarus

²Regional Scientific and Educational Mathematical Center
of the Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia

E-mail: grigorieva@tut.by, ✉kasch@uniyar.ac.ru

Received 10.01.2022, accepted 16.02.2022, published 31.03.2022

Abstract. *Purpose.* The local dynamics of the laser chain model with optoelectronic delayed unidirectional coupling is investigated. A system of equations is considered that describes the dynamics of a closed chain of a large number of lasers with optoelectronic delayed coupling between elements. An equivalent distributed integro-differential model with a small parameter inversely proportional to the number of lasers in the chain is proposed. For a distributed model with periodic edge conditions, the critical value of the coupling coefficient is obtained, at which the stationary state in the chain becomes unstable. It is shown that in a certain neighborhood of the bifurcation point, the number of roots of the characteristic equation with a real part close to zero increases indefinitely when the small parameter decreases. In this case, a two-dimensional complex Ginzburg–Landau equation with convection is constructed as a normal form. Its nonlocal dynamics determines the behavior of the solutions of the original boundary value problem. *Research methods.* Methods for studying local dynamics based on the construction of normal forms on central manifolds are used as applied to critical cases of (asymptotically) infinite dimension. An algorithm for reducing the original boundary value problem to the equation for slowly varying amplitudes is proposed. *Results.* The simplest homogeneous periodic solutions of Ginzburg–Landau equation and corresponding to them inhomogeneous solutions in the form of traveling waves in a distributed model are obtained. Such solutions can be interpreted as phase locking regimes in the chain of coupled lasers. The frequencies and amplitudes of oscillations of the radiation intensity of each laser and the phase difference between adjacent oscillators are determined.

Keywords: bifurcation analysis, wave structures, delay, laser dynamics.

Acknowledgements. The work of S. A. Kashchenko was supported by the Russian Science Foundation (project No. 21-71-30011).

For citation: Grigorieva EV, Kashchenko SA. Local dynamics of laser chain model with optoelectronic delayed unidirectional coupling. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2022;30(2):189–207.

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-189-207

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Кооперативные эффекты в природных сообществах и в технических устройствах являются предметом постоянных активных исследований. Описание разнообразных проявлений синхронизации в ансамблях связанных осцилляторов, базовые модели и классификация функций связей приведены, например, в [1, 2]. Отмечалось, что в процессах функционирования многих сетей неустраняемым фактором может быть запаздывание вследствие конечности скорости распространения и преобразования сигналов между элементами. Особенности динамики сетей, обусловленные наличием временных задержек в линиях связи, обсуждались в обзоре [3]. Многие теоретические результаты были получены на основе локального анализа модели связанных фазовых осцилляторов [4] или метода сведения к отображениям при импульсной функции связи. В том числе были показаны возможность индуцированной запаздыванием мультистабильности синхронных режимов [5], формирование бегущих волн в замкнутом кольце осцилляторов [6, 7], кластерных состояний [8], вымирания колебаний из-за наличия запаздывающих связей [9] при учете амплитудно-фазового взаимодействия.

Особое внимание привлекают системы связанных лазеров в связи с перспективными приложениями таких сетей в фотонике и информационных технологиях [10]. Наиболее детально исследовалась динамика небольшого числа связанных лазеров. Оптическая связь осуществляется посредством взаимной (или однонаправленной) инжекции генерируемого излучения в активную среду лазеров. В этом случае благодаря симметричной связи сообщалось о полной синхронизации генерации двух полупроводниковых лазеров при расстройке их оптических частот [12]. В работе [11] продемонстрирована локализованная синхронизация (с различной амплитудой) колебаний интенсивности излучения двух неидентичных лазеров с несимметричной силой взаимной связи. Задачи надежной стабилизации излучения большого числа оптически связанных лазерных диодов рассматривались в работе [13].

Оптоэлектронная связь обычно осуществляется посредством модуляции тока накачки одного лазера в соответствии с изменениями интенсивности генерируемого излучения другого (других) лазера (лазеров). В работе [14] показано, что в модели двух лазеров, связанных через накачку, наблюдались синхронизация колебаний, резонансные эффекты и динамический хаос даже при отсутствии запаздывания. В работе [15] численно показана возможность синхронизации хаоса в двух лазерах на микрочипах Nd:YVO_4 или в двухмодовом лазере [16]. Роль запаздывания в цепи связи двух лазерных диодов экспериментально изучалась в работе [17]. В работах [18, 19] рассматривалась модель с двумя взаимно связанными идентичными лазерами при условии различных времен запаздывания в цепях связи. Наблюдался квазипериодический сценарий перехода к хаосу при изменении задержки и показана возможность подавления колебаний в случае наличия собственной запаздывающей обратной связи для каждого лазера. Расширение области устойчивой синхронизации колебаний в малых сетях лазеров при наличии собственной обратной связи отмечалось и в [20]. Рассматривались также модели динамики большого числа связанных лазеров. Численное исследование коллективных эффектов в цепочке, содержащей до 50 связанных полупроводниковых лазеров с насыщающимся поглотителем, работающих в режиме коротких пульсаций под действием аддитивного шума, представлено в работе [21]. Продемонстрирована устойчивая временная синхронизация моментов импульсов и синхронизация по амплитуде импульсов.

В настоящей работе исследуется локальная динамика большого числа связанных лазеров методом построения нормализованной краевой задачи. Определены критические значения параметров, при которых стационарная генерация (состояние равновесия) становится неустойчивой. Установлено соответствие между решениями квазинормальной формы и решениями исходной системы для связанных лазеров в закритической области параметров.

Материал статьи изложен следующим образом.

В части 1 обсуждается модель замкнутой (в кольцо) цепочки на основе скоростных уравнений для отдельного лазера. Связь предполагается однонаправленной, осуществляется через ток накачки. Выбор оптоэлектронной связи позволяет избежать сложности, связанной с моделированием многократных отражений и динамики фазы электрического поля, которые играют решающую роль при рассмотрении когерентной оптической связи. Число лазеров в цепочке предполагается большим.

Предложена распределенная интегродифференциальная модель, содержащая малый параметр, обратно пропорциональный числу лазеров в цепочке. В части 2 приводятся результаты анализа устойчивости состояния равновесия распределенной модели. Показано, что при стремлении малого параметра к нулю число корней характеристического уравнения с близкой к нулю действительной частью стремится к бесконечности. Получены критические значения коэффициента связи, частоты и волновые числа возникающих бегущих волн в линеаризованной системе.

В части 3 построены решения нелинейной системы в виде рядов по степеням малого параметра. Для амплитуды первого члена разложения получена краевая задача с периодическими граничными условиями — двумерное комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау с конвекцией. Исходя из решения этой квазинормальной формы находятся последовательно все остальные члены ряда, то есть строится решение исходной нелинейной системы с заданной точностью. Приводится пример простейших периодических решений квазинормальной формы и соответствующих бегущих волн в исходной интегродифференциальной модели.

О методике исследования. Отличительной особенностью рассматриваемых здесь задач является тот факт, что критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия имеют бесконечную размерность. Стандартные методы изучения, основанные на применении теории интегральных инвариантных многообразий и теории нормальных форм, оказываются непосредственно неприменимы. В работах [22–26] был разработан метод построения квазинормальных форм для бесконечномерных критических случаев. В настоящей работе этот метод эффективно применяется при изучении распределенных лазерных систем.

1. Модель цепочки лазеров с однонаправленными связями

В качестве базовой модели динамики отдельного элемента цепочки — лазера — выбрана стандартная система скоростных уравнений для плотности фотонов $u(t)$ и инверсии населенностей активной среды $y(t)$ в двухуровневом приближении [27],

$$\begin{aligned} \dot{u} &= vu(y - 1), \\ \dot{y} &= q - y(1 + u), \end{aligned} \quad (1)$$

где точкой обозначена производная функции по времени t , которое нормировано на время релаксации инверсии населенностей; v — отношение скорости затухания фотонов в резонаторе к скорости релаксации населенностей; потери резонатора нормированы к единице, q — нормированная скорость накачки.

Отметим, что при $q < 1$ (малая скорость накачки) все решения системы (1) стремятся к единственному устойчивому состоянию равновесия с нулевой плотностью излучения, $u = 0$, что соответствует режиму отсутствия генерации излучения. С увеличением скорости накачки до значений $q > 1$ нулевое состояние становится неустойчивым и появляется устойчивое ненулевое состояние равновесия, соответствующее режиму стационарной генерации. При отклонении начальных условий от стационара могут наблюдаться слабо затухающие колебания с частотой $\omega_R = \sqrt{v(q - 1)} + O(v^{-1})$, что типично для многих твердотельных и полупроводниковых лазеров при достаточно большом значении v [27].

Рассмотрим цепочку лазеров, связь между которыми реализуется оптоэлектронными средствами так, что скорость накачки каждого лазера зависит от плотности излучения одного соседнего лазера. Модель цепочки, замкнутой в кольцо, с однонаправленной связью принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{u}_j &= vu_j(y_j - 1), \\ \dot{y}_j &= q - y_j(1 + u_j) - \gamma u_{j+1}(t - T), \end{aligned} \quad (2)$$

где $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$ — номер лазера в цепочке и выполнены условия $(2N+1)$ -периодичности по индексу j : $u_{j \pm (2N+1)} = u_j$; слагаемое $\gamma u_{j+1}(t - T)$ описывает влияние на накачку j -го лазера в текущий момент времени t интенсивности излучения соседнего лазера в момент $(t - T)$;

γ — коэффициент связи между лазерами, который может принимать как положительные, так и отрицательные небольшие значения $|\gamma| < 1$; $T > 0$ — время задержки сигнала в оптоэлектронной цепи связи, которое может варьироваться от пренебрежимо малых до больших значений; аргументы других функций u_j, y_j , если не указаны, соответствуют текущему значению t .

Модель (2) цепочки с однонаправленными связями можно рассмотреть как частный случай более общей модели ансамбля лазеров, каждый из которых связан со всеми через ток накачки,

$$\begin{aligned} \dot{u}_j &= v u_j (y_j - 1), \\ \dot{y}_j &= q - y_j (1 + u_j) - \gamma \sum_{l=-N}^N (2N + 1)^{-1} g_{lj} u_{j+l} (t - T), \end{aligned} \quad (3)$$

где g_{lj} — коэффициенты, определяющие силу связей, причем $\sum_{l=-N}^N (2N + 1)^{-1} g_{lj} = 1$. Предполагаем, что g_{lj} зависят от расстояния между элементами так, что чем больше расстояние, то есть модуль разности индексов $|l - j|$, тем меньше сила связи. Тогда для замкнутой цепочки с однонаправленной связью все g_{lj} близки к нулю, кроме коэффициентов g_{1j} , и выполнены условия $(2N + 1)$ -периодичности по индексу j .

В настоящей работе рассмотрим цепочку, количество элементов в которой является достаточно большим, $N \gg 1$, а затем введем параметр $\varepsilon = 2\pi(2N + 1)^{-1}$, для которого выполнено условие

$$0 < \varepsilon \ll 1. \quad (4)$$

Параметр ε можно интерпретировать как расстояние между лазерами в цепочке длиной 2π . Тогда значение функций $u_j(t), y_j(t)$ можно ассоциировать со значением функций двух переменных $u(t, x), y(t, x)$, соответственно, в точках некоторой окружности с фазовыми координатами $x_j = \varepsilon j$. Условие (4) дает основание перейти от системы (3) к непрерывной пространственно распределенной системе для $u(t, x), y(t, x)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= v u (y - 1), \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= q - y (1 + u) - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} F(s) u(t - T, x + s) ds \end{aligned} \quad (5)$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x), \quad y(t, x + 2\pi) \equiv y(t, x), \quad (6)$$

где $F(s)$ — функция Гаусса,

$$F(s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(s - \varepsilon)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(s) ds = 1. \quad (7)$$

Интегральное слагаемое в системе (5) обобщает соответствующие дискретные выражения, описывающие связь между элементами в уравнениях (3). Для модели цепочки с однонаправленной связью с соседним элементом удобно выбрать $F(s)$ в виде функции Гаусса по нескольким причинам.

Во-первых, функция (7) описывает ситуацию, при которой элемент цепочки в точке x наиболее сильно связан с элементом в точке $x + \varepsilon$, а сила связи между другими элементами

цепочки экспоненциально уменьшается с увеличением расстояния между ними. Действительно, для каждой фиксированной функции $W(x)$ при $\sigma \rightarrow 0$ имеет место асимптотическое равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(s)W(x+s)ds = W(x+\varepsilon) + o(1). \quad (8)$$

Параметр σ характеризует ширину пространственной области эффективного взаимодействия элементов. Эту область в непрерывной модели естественно выбрать меньше, чем расстояние ε между лазерами в дискретной модели цепочки. Поэтому далее вместо σ будем рассматривать параметр $\varepsilon^2\sigma \ll 1$. Во-вторых, использование интеграла по бесконечному промежутку для 2π -периодической функции удобнее, чем интеграла по периоду 2π для более сложных функций. В-третьих, рассматриваемая связь удобна для аналитического исследования, поскольку точно вычисляются соответствующие интегралы от экспоненциальных функций:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(s) \exp(iks) ds = \exp(ik\varepsilon) \exp(-\sigma^2\varepsilon^4 k^2/2). \quad (9)$$

Таким образом, далее будем исследовать решения интегродифференциальной системы (5), (6) с бесконечномерным фазовым пространством $C_{[0,2\pi]}(R^2) \times C_{[-T,0]}(R^2)$.

2. Анализ устойчивости состояния равновесия

Система (5), (6) при $q > 1$ имеет однородное ненулевое состояние равновесия $u(x, t) \equiv u_s$, $y(x, t) \equiv y_s$, где

$$u_s = \frac{q-1}{1+\gamma}, \quad y_s = 1. \quad (10)$$

Для исследования устойчивости состояния равновесия (10) удобно в системе (5), (6) перейти к малым отклонениям от равновесных значений $\Delta u = u - u_s$ и $\Delta y = y - y_s$. В результате, опуская префикс « Δ », переходим к краевой задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= vy(u_s + u), \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -y(1 + u_s + u) - u - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} F(s)u(t-T, x+s)ds \end{aligned} \quad (11)$$

с периодическими граничными условиями

$$u(t, x+2\pi) \equiv u(t, x), \quad y(t, x+2\pi) \equiv y(t, x). \quad (12)$$

Рассмотрим далее задачу о локальной динамике системы (11), (12) при $t \rightarrow \infty$ и при малых ε с начальными условиями из некоторой достаточно малой и независимой от ε окрестности нуля. Поведение решений этой краевой задачи во многом определяется поведением решений линеаризованной системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= vu_s y, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -y(1 + u_s) - u - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} F(s)u(t-T, x+s)ds. \end{aligned} \quad (13)$$

С учетом граничных условий (12) решения линейной системы (13) ищем в виде

$$u = u_k \exp(ikx + \lambda_k t), \quad y = y_k \exp(ikx + \lambda_k t), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Тогда для нахождения значений $\lambda = \lambda_k$ получим характеристическое уравнение

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & vu_s \\ -1 - \gamma g(z) \exp(-\lambda T) & -1 - u_s - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 + (1 + u_s)\lambda + vu_s [1 + \gamma g(z) \exp(-\lambda T)] = 0, \quad (14)$$

где $g(z) = \exp(iz - \sigma^2 \varepsilon^2 z^2 / 2)$, $z = \varepsilon k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Справедливы следующие утверждения общего характера.

Утверждение 1. Пусть при всех $z \in (-\infty, \infty)$ все корни уравнения (14) имеют отрицательные вещественные части. Тогда все решения краевой задачи (12), (13) с начальными условиями из некоторой достаточно малой и независимой от ε окрестности нулевого состояния равновесия стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

При этом условии задача о локальной динамике нелинейной системы (11), (12) тривиальна.

Утверждение 2. Пусть найдется такое z_0 , что при $z = z_0$ уравнение (14) имеет корень с положительной вещественной частью. Тогда при всех достаточно малых ε нулевое решение в (12), (13) неустойчиво и в малой его окрестности не существует аттракторов этой краевой задачи.

В условии этого Утверждения задача о динамике системы (11), (12) становится нелокальной.

2.1. Критический случай при $\sigma = 0$. Рассмотрим критический случай в задаче об устойчивости периодического состояния равновесия. Пусть характеристическое уравнение (14) при всех $z \in (-\infty, \infty)$ не имеет корней с положительной вещественной частью и пусть существует такое z_0 , что при $z = z_0$ это уравнение имеет корень с нулевой вещественной частью.

Положив сначала в (14) формально $\sigma = 0$, приходим к уравнению

$$\lambda^2 + (1 + u_s)\lambda + vu_s = vu_s \gamma \exp(iz - \lambda T). \quad (15)$$

Выделим для (15) критический случай, когда есть корень $\lambda = i\omega$ и нет корней с положительной вещественной частью. Введем многочлен

$$P(\omega) = -\omega^2 + i\omega(1 + u_s) + vu_s,$$

и пусть

$$\min_{\omega} |P(\omega)|^2 = |P(\omega_0)|^2.$$

При нахождении минимума $|P(\omega)|^2$ приходим к алгебраическому уравнению четвертой степени относительно γ ,

$$(q + \gamma)^2 [4v(q - 1)(1 + \gamma) - (q + \gamma)^2] - 4[v(q - 1)\gamma(1 + \gamma)]^2 = 0. \quad (16)$$

Действительный корень γ_0 уравнения (16) определяет коэффициент связи, при котором стационарное решение теряет устойчивость. Расчеты показывают, что существуют два таких корня γ_0^{\pm} ,

положительный и отрицательный, удовлетворяющие физическому требованию для коэффициента связи $|\gamma_0^\pm| < 1$. Далее будем указывать верхние индексы \pm критических параметров в случае необходимости и опускать их в общем случае.

Значение γ_0 определяет частоту колебаний $\omega_0 = \omega(\gamma_0)$, где

$$\omega_0^2 = v u_0 - \frac{(1 + u_0)^2}{2}, \quad u_0 = \frac{q - 1}{1 + \gamma_0}. \quad (17)$$

Обозначим фазу $P(\omega_0)$ в точке экстремума

$$\phi_0 = \arctan \frac{\omega_0(1 + u_0)}{v u_0 - \omega_0^2} \quad (18)$$

и заметим, что из уравнения (15) следует $\phi_0^+ + \pi(2n + 1) = z - \omega_0^+ T$ при $\gamma_0^+ > 0$ или $\phi_0^- + 2\pi n = z - \omega_0^- T$ при $\gamma_0^- < 0$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Следующее утверждение определяет условия возникновения критических случаев для характеристического уравнения (14).

Лемма 1. *Характеристическое уравнение (14) имеет решение $\lambda = i\omega_0^+$ при $\gamma = \gamma_0^+$ и $z = z_n^+ = \phi_0^+ + \pi(2n + 1) + \omega_0^+ T$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а также решение $\lambda = i\omega_0^-$ при $\gamma = \gamma_0^-$ и $z = z_n^- = \phi_0^- + 2\pi n + \omega_0^- T$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$*

Поскольку значения параметра $z = \varepsilon k$ связаны с волновыми числами k решений вида $\exp(ikx + i\omega t)$ линеаризованной системы, то критическое значение z определяет «центральное» волновое число $k \sim z_n \varepsilon^{-1}$ тех мод, которые возбуждаются при потере устойчивости стационарного состояния. Волновые числа k должны быть целыми в силу периодических краевых условий, поэтому введем поправку $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 1)$, которая дополняет величину $z_0 \varepsilon^{-1}$ до целого числа. Тогда в закритической области линейная система имеет решения вида $\exp(ik_{mn}x + i\omega_0 t)$ с волновыми числами k_{mn} из множества целых чисел K_ε , которые можно представить в виде:

$$K_\varepsilon = \{z_0 \varepsilon^{-1} + \theta + 2\pi n \varepsilon^{-1} + m, \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad (19)$$

где $2\pi n \varepsilon^{-1} = (2N + 1)n$ — целое число, $z_0 = \phi_0^+ + \pi + \omega_0^+ T$ при $\gamma = \gamma_0^+ > 0$ или $z_0 = \phi_0^- + \omega_0^- T$ при $\gamma = \gamma_0^- < 0$.

Введение поправки θ , дополняющей волновое число до целого, влечет за собой отклонение параметра z от критического z_0 и частоты ω от ω_0 в критическом случае. Соответствующие поправки приведены в следующем пункте.

2.2. Критический случай при $\sigma \neq 0$. Здесь получим асимптотическое представление корней характеристического уравнения (14), которым отвечают собственные функции $\exp(ik_{mn}x + \lambda t)$ линеаризованной системы с волновыми числами из множества целых чисел K_ε , определенных в (19).

Учтем также $\sigma \neq 0$ и малое отклонение параметра связи от критического значения γ_0 на величину порядка ε^2 , то есть положим в уравнении (14)

$$\gamma = \gamma_0 + \varepsilon^2 \gamma_1, \quad (20)$$

при этом в (14) значение u_s представляется в виде $u_s = u_0 - \varepsilon^2 \gamma_1 u_0 (1 + \gamma_0)^{-1} + O(\varepsilon^4)$.

Для тех корней $\lambda = \lambda_{mn}(\varepsilon)$, $n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, выполнено асимптотическое равенство:

$$\begin{aligned}\lambda_{mn} &= i\omega_0 + \varepsilon\lambda_{mn1} + \varepsilon^2\lambda_{mn2} + \dots, \\ \lambda_{mn1} &= i\delta(\theta + m), \\ \lambda_{mn2} &= -\delta_2(\theta + m)^2 - \delta\sigma^2(z_0 + 2\pi n)^2/2 - \gamma_1\delta_3,\end{aligned}\tag{21}$$

где

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{1 + u_0}{2 + T(1 + u_0)}, \quad \delta > 0, \\ \delta_2 &= \delta[(1 - \delta T)^2/2 + \delta^2(vu_0\gamma_0)^{-1}e^{-i\phi_0}], \\ \delta_3 &= \delta[(1 + i\omega_0v^{-1})e^{-i\phi_0} - 1](\gamma_0 + \gamma_0^2)^{-1}.\end{aligned}$$

Для последующей интерпретации результатов нужно отметить, что $\varepsilon\lambda_{mn1}$ — чисто мнимая величина, которая является поправкой к основной частоте ω_0 при волновом числе k_{mn} .

Из разложения (21) следует, что при $\gamma = \gamma_0 + \varepsilon^2\gamma_1$ существует бесконечно много корней характеристического уравнения (14), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Таким образом, специфика рассматриваемой задачи состоит в том, что критические случаи имеют бесконечную размерность.

2.3. Решения линеаризованной системы (13). Каждому характеристическому корню $\lambda_{mn}(\varepsilon)$ отвечает частное решение линеаризованной системы (13)

$$\begin{pmatrix} u_{mn} \\ y_{mn} \end{pmatrix} = [a_0 + \varepsilon(m + \theta)a_1]\xi_{mn} \exp(ik_{mn}x + \lambda_{mn}t),\tag{22}$$

где ξ_{mn} — амплитуда моды, определяемая начальными условиями, и

$$a_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ r(1 + \delta\omega_0^{-1}) \end{pmatrix}, \quad r = \frac{i\omega_0}{vu_0}.$$

Общим решением линейной краевой задачи (12), (13) является совокупность найденных частных решений,

$$\begin{pmatrix} u(t, x, \varepsilon) \\ y(t, x, \varepsilon) \end{pmatrix} = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} [a_0 + \varepsilon(m + \theta)a_1]\xi_{mn} \exp(ik_{mn}x + \lambda_{mn}t).\tag{23}$$

Это решение можно записать в следующем виде, учитывая разложения (21) для характеристических корней $\lambda_{mn} = i\omega_0 - \varepsilon i\delta(\theta + m) + O(\varepsilon^2)$ и выражения для волновых чисел k_{mn} ,

$$\begin{pmatrix} u(t, x, \varepsilon) \\ y(t, x, \varepsilon) \end{pmatrix} = e^{iR} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} [(a_0 + \varepsilon\theta a_1) + \varepsilon m a_1] \xi_{mn} e^{(imX + inY + O(\varepsilon^2)t)},\tag{24}$$

где использованы обозначения: $R = \kappa x + \Omega t$ — бегущая переменная, $\kappa = z_0\varepsilon^{-1} + \theta$ — главное волновое число, $\Omega = \omega_0 + \varepsilon\delta\theta$ — основная частота, и введены переменные $X = x + \varepsilon\delta t$ и $Y = 2\pi\varepsilon^{-1}x$.

Заметим, что выражение

$$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \xi_{mn} e^{(imX+inY)}$$

можно рассматривать как разложение Фурье для функции $\xi(X, Y)$, которая 2π -периодична по обоим “квази”пространственным переменным, $\xi(X, Y) = \xi(X + 2\pi, Y)$, $\xi(X, Y) = \xi(X, Y + 2\pi)$. Учитывая, что

$$\frac{\partial \xi}{\partial X} = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} im \xi_{mn} e^{(imX+inY)},$$

решение (24) линеаризованной системы можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = \left[(a_0 + \varepsilon a_1 \theta) \xi - \varepsilon i a_1 \frac{\partial \xi}{\partial X} \right] e^{iR} e^{O(\varepsilon^2)t} + c.c. \quad (25)$$

3. Асимптотики решений нелинейной системы (11)

Решение нелинейной краевой задачи (11), (12) при $\gamma = \gamma_0 + \varepsilon^2 \gamma_1$ будем искать, используя решение (25) линеаризованной системы и предполагая, что амплитуды ξ_{mn} медленно меняются со временем.

Введем функцию $\xi(\tau, X, Y)$, которая зависит от медленной временной переменной $\tau = \varepsilon^2 t$ и которая 2π -периодична по пространственным переменным X, Y . Тогда решение $u(t, x, \tau, X, Y)$ и $y(t, x, \tau, X, Y)$ нелинейной краевой задачи (11), (12) представим в виде ряда по степеням ε

$$\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = \varepsilon \left[(a_0 + \varepsilon a_1 \theta) \xi - \varepsilon i a_1 \frac{\partial \xi}{\partial X} \right] e^{iR} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} u_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \varepsilon^3 \begin{pmatrix} u_3 \\ y_3 \end{pmatrix} + \dots + c.c. \quad (26)$$

Здесь функции

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 u_2 &= \varepsilon^2 (u_{20} + u_{22} e^{i2R} + c.c.), \quad \varepsilon^2 y_2 = \varepsilon^2 (y_{20} + y_{22} e^{i2R} + c.c.), \\ \varepsilon^3 u_3 &= \varepsilon^3 (u_{31} e^{iR} + u_{32} e^{i2R} + u_{33} e^{i3R} + c.c.), \quad \dots \end{aligned}$$

обозначают величины второго, третьего и т.д. порядка по степеням ε и амплитуды $u_{2j}(\tau, X, Y)$, $y_{2j}(\tau, X, Y)$, ... гармоник основной частоты так же, как и $\xi(\tau, X, Y)$, медленно зависят от времени и являются 2π -периодичными по пространственным переменным X, Y .

Подставим (20) и ряды (26) в нелинейную систему (11). Вспомогательные ряды для производных и интегрального слагаемого приведены в приложении. Собираем коэффициенты при одинаковых степенях ε и гармониках основной частоты. При этом последовательно находятся медленные амплитуды:

$$u_{20} = 0, \quad y_{20} = 0, \quad (27)$$

$$u_{22} = C \frac{r}{u_0} \xi^2, \quad y_{22} = (2rC - 1) \frac{r}{u_0} \xi^2, \quad (28)$$

где

$$C = \frac{1 + 2i\omega_0}{4i\omega_0 r + 2r(1 + u_0) + 1 + \gamma_0 e^{2i\phi_0}}.$$

Для разрешимости соответствующей системы относительно u_{31}, y_{31} должно быть выполнено условие существования. Последнее приводит к следующему комплексному уравнению для функции $\xi(\tau, X, Y)$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \alpha \xi + L \xi |\xi|^2 + v_X \frac{\partial \xi}{\partial X} + v_Y \frac{\partial \xi}{\partial Y} + D_X \frac{\partial^2 \xi}{\partial X^2} + D_Y \frac{\partial^2 \xi}{\partial Y^2}, \quad (29)$$

с периодическими краевыми условиями

$$\xi(\tau, X, Y) = \xi(\tau, X + 2\pi, Y), \quad \xi(\tau, X, Y) = \xi(\tau, X, Y + 2\pi), \quad (30)$$

где

$$\alpha = \gamma_1 \delta_3, \quad L = \frac{i\omega_0(i\omega_0 + 1)(rC - 1)}{u_0^2(2i\omega_0 + 1 + u_0 - T\gamma_0 v u_0 e^{i\phi_0})}$$

$$v_X = -2i\delta_2\theta, \quad v_Y = -2i\delta_2\sigma^2, \quad D_X = \delta_2, \quad D_Y = \delta\sigma^2 2\pi^2$$

и выражения для $\delta, \delta_2, \delta_3$ приведены в (21). Отметим, что коэффициент α при линейном члене уравнения (29) определяется величиной параметра надкритичности γ_1 , причем $\text{Re } \alpha > 0$, если $\gamma_0^+ > 0$ и $\gamma_1 > 0$ ($\gamma_0^- < 0$ и $\gamma_1 < 0$). Коэффициенты переноса v_X и диффузии D_X при пространственных производных в уравнении (29) являются комплексными и определяются только критическими значениями параметров. Коэффициенты v_Y и D_Y определяются параметром σ , который описывает ширину области эффективной связи между элементами кольца лазеров. Используя выражения для δ и δ_2 , можно показать, что коэффициенты диффузии имеют положительную действительную часть:

$$\text{Re } D_X = \delta \frac{8\omega_0^2}{(2 + T(1 + u_0))^2(\omega_0^2 + (1 + u_0)^2/2)} > 0, \quad \text{Re } D_Y = 2\pi^2\sigma^2\delta > 0,$$

поэтому уравнение (29) описывает диссипативную систему.

Краевая задача (29), (30) играет роль нормальной формы: ее нелокальная динамика определяет, при достаточно малых ε , поведение всех решений нелинейного уравнения (11) с начальными условиями из некоторой достаточно малой и не зависящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия. По самому построению краевой задачи (29), (30) следует связь между ее решениями и решениями уравнения (11), что устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть выполнено условие $\gamma = \gamma_0 + \varepsilon^2\gamma_1$ и пусть краевая задача (29), (30) имеет решение $\xi_0(\tau, X, Y)$, ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$ и $X \in (0, 2\pi], Y \in (0, 2\pi]$. Тогда функции

$$u(t, x) = \varepsilon \xi_0(\varepsilon^2 t, x + \varepsilon \delta t, 2\pi \varepsilon^{-1} x) e^{i(z_0 \varepsilon^{-1} + \theta)x + i\omega_0 t} + c.c.,$$

$$y(t, x) = \varepsilon r \xi_0(\varepsilon^2 t, x + \varepsilon \delta t, 2\pi \varepsilon^{-1} x) e^{i(z_0 \varepsilon^{-1} + \theta)x + i\omega_0 t} + c.c. \quad (31)$$

удовлетворяют уравнению (11) с точностью до $O(\varepsilon^2)$.

3.1. Периодические решения краевой задачи (29), (30). Краевая задача (29), (30) является двумерным комплексным уравнением Гинзбурга–Ландау с конвекцией [28].

Здесь рассмотрим простейшие решения при типичных для лазеров класса В значениях параметров.

В квазинормальной форме (29), (30) имеются слагаемые с коэффициентами, зависящими от параметра σ . Последний характеризует размер области эффективного пространственного

взаимодействия между элементами распределенной модели кольца (5). Дискретной модели (3) цепочки лазеров с однонаправленной связью наиболее естественно будет соответствовать квазинормальная форма (29), (30) с параметром $\sigma \rightarrow 0$, тогда коэффициенты $v_Y, D_Y \rightarrow 0$ и приходим к квазинормальной форме для функции $\xi(\tau, X)$, зависящей от одной пространственной переменной,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} &= \alpha \xi + L \xi |\xi|^2 + v_X \frac{\partial \xi}{\partial X} + D_X \frac{\partial^2 \xi}{\partial X^2}, \\ \xi(\tau, X) &= \xi(\tau, X + 2\pi). \end{aligned} \quad (32)$$

Простейшим решением квазинормальной формы (32) является однородное в пространстве и периодическое во времени решение

$$\xi_0(\tau, X) = \rho e^{i\omega_2 \tau + i\psi}, \quad (33)$$

где

$$\rho^2 = -\frac{\operatorname{Re} \alpha}{\operatorname{Re} L}, \quad \omega_2 = \operatorname{Im} \alpha + \rho^2 \operatorname{Im} L$$

и ψ — начальная фаза колебаний, определяемая начальными условиями. Коэффициент при нелинейном слагаемом в уравнении (32) является ляпуновской величиной, определяющей направление бифуркации. Известно, что при $\operatorname{Re} L < 0$ имеет место суперкритическая бифуркация, в результате которой возникает устойчивый цикл малой амплитуды в закритической области $\operatorname{Re} \alpha > 0$. При $\operatorname{Re} L > 0$ имеет место субкритическая бифуркация, в результате которой образуется неустойчивый цикл в докритической области $\operatorname{Re} \alpha < 0$. Тогда в исходной системе возможно наблюдение бистабильности режимов: при малых отклонениях начальных условий от стационара система остается устойчивой или, при достаточно больших отклонениях, уходит к другому аттрактору.

Однородному по пространственной переменной решению (33) уравнения (32) соответствует неоднородное решение уравнения (13) в виде устойчивой бегущей волны с волновым числом $\kappa = z_0 \varepsilon^{-1} + \theta$:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= 2\varepsilon \rho \cos(\kappa x + (\omega_0 + \varepsilon \delta \theta + O(\varepsilon^2))t) + O(\varepsilon^2), \\ y(t, x) &= 2\varepsilon \frac{\omega_0}{v u_0} \rho \sin(\kappa x + (\omega_0 + \varepsilon \delta \theta + O(\varepsilon^2))t) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (34)$$

причем в силу целого значения κ удовлетворены условия $u(t, x) = u(t, x + 2\pi)$ и $y(t, x) = y(t, x + 2\pi)$.

В свою очередь, неоднородное решение (34) соответствует устойчивому режиму фазовой синхронизации цепочки связанных лазеров. Каждый элемент цепочки (лазер) испытывает колебания интенсивности излучения с одинаковой для всех элементов амплитудой и частотой со сдвигом фазы на величину $z_0 + O(\varepsilon)$ относительно соседнего элемента, $u_j(t) = u(t, \varepsilon j)$.

Приведем пример расчета решений в виде бегущей волны при следующих значениях параметров: скорость накачки $q = 1.5$, скорость затухания фотонов в резонаторе $v = 100$, запаздывание в цепи оптоэлектронной связи $T = 0.2$ и пусть в цепочке связаны 63 лазера, тогда $\varepsilon = 2\pi/63 = 0.09973$. Отметим, что значение ε нужно вычислять с высокой точностью, чтобы при большом волновом числе были удовлетворены периодические граничные условия. Учитывая, что параметр v принимает достаточно большие значения в случае лазеров класса В, можно использовать оценочные формулы для коэффициентов квазинормальной формы (32). Из уравнения (16) находим критические значения коэффициента связи между лазерами:

$$\gamma_0^\pm = \pm \frac{q}{\sqrt{v(q-1)}} + O(v^{-1}). \quad (35)$$

Этим значениям коэффициентов связи соответствуют частоты возникающих бегущих волн, сопоставимые с частотой затухающих колебаний $\omega_R = \sqrt{v(q-1)}$ для уединенного лазера,

$$\omega_0^\pm = \omega_R \pm \frac{q}{2} + O(v^{-1}) \quad (36)$$

в окрестности (неустойчивого) стационарного состояния

$$u_0^\pm = q - 1 \pm \frac{q\sqrt{q-1}}{\sqrt{v}} + O(v^{-1}). \quad (37)$$

Комплексный коэффициент диффузии представляется как

$$D_X^\pm = \frac{2(1 + u_0^\pm) - 4i(1 + u_0^\pm)^2/\omega_0^\pm}{[2 + T(1 + u_0^\pm)]^3} + O(v^{-1}), \quad (38)$$

откуда следует, что коэффициент диффузии всегда имеет положительную действительную часть и уменьшается по модулю с увеличением запаздывания в цепи связи T . Для ляпуновской величины, определяющей направление бифуркации, получаем

$$L^\pm = \frac{-5q \pm i(\sqrt{v}q \pm 6\sqrt{v(q-1)})}{18(u_0^\pm)^2[2 + T(1 + u_0^\pm)]^3} + O(v^{-1/2}), \quad (39)$$

откуда следует, что $\text{Re } L^\pm < 0$ в случае большого v , что справедливо для лазеров класса В.

Получаем для положительного значения критического уровня коэффициента связи $\gamma_0^+ = 0.219$, частота $\omega_0^+ = 6.327$, параметр $\theta^+ = 0.332$, центральное волновое число $\kappa^+ = 59$, коэффициент диффузии $D_X^+ = 0.234 + 0.026i$, ляпуновская величина $L^+ = -1.059 - 6.274i$, параметр надкритичности $\alpha^+ = 2.719 - 2.286i$ при $\gamma_1 = 1$, амплитуда цикла $\rho^+ = 0.764$, частота возникающих колебаний с учетом поправки на целое волновое число $\omega^+ = 6.347$. На рис. 1 показано мгновенное распределение интенсивности излучения u_j , $j = 0, \pm 1, \dots, 31$ лазеров в цепочке относительно равновесного уровня u_s , где $u_j = u(\varepsilon j, 0)$ согласно формуле (34). Разность фаз между соседними элементами цепочки составляет $z_0^+ + O(\varepsilon) \approx 5.87$. С течением времени по кольцу циркулирует бегущая волна.

Для отрицательного значения критического уровня коэффициента связи $\gamma_0^- = -0.204$, частота возникающих колебаний равна $\omega_0^- = 7.843$, разность фаз между соседними элементами цепочки $z_0^- = 3.04$, параметр $\theta^- = 0.64$, центральное волновое число $\kappa^- = 31$, коэффициент диффузии $D_X^- = 0.256 + 0.027i$, ляпуновская величина $L^- = -0.484 - 2.436i$, параметр надкритичности $\alpha^- = -3.526 - 4249i$ при $\gamma_1 = 1$, амплитуда цикла $\rho^- = 1.202$, частота колебаний с учетом поправки на целое волновое

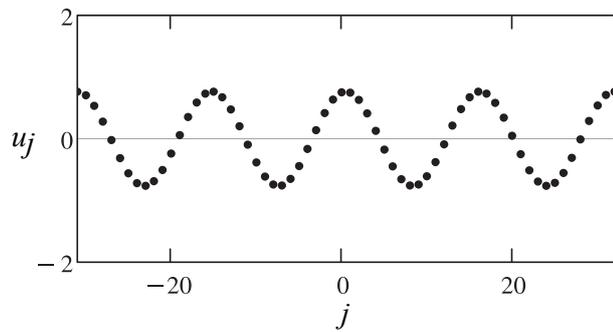


Рис. 1. Мгновенное распределение интенсивности излучения u_j , $j = 0, \pm 1, \dots, 31$ лазеров в цепочке относительно равновесного уровня u_s при $\gamma = \gamma_0^+ - \varepsilon^2 = 0.229$. Разность фаз между колебаниями соседних элементов цепочки $z_0^+ = 5.87$

Fig. 1. Instantaneous distribution of radiation intensity u_j , $j = 0, \pm 1, \dots, 31$ of lasers in the chain with respect to the equilibrium level u_s at $\gamma = \gamma_0^+ - \varepsilon^2 = 0.229$. Phase difference between oscillations of adjacent elements of the chain $z_0^+ = 5.87$

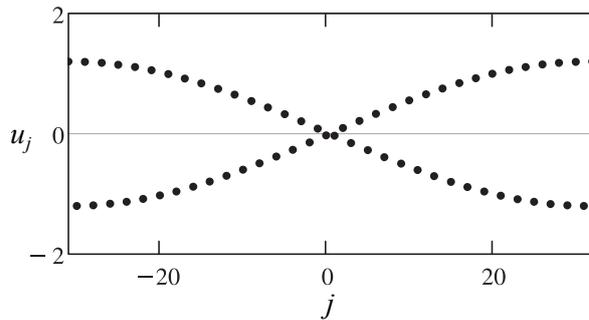


Рис. 2. Мгновенное распределение интенсивности излучения u_j , $j = 0, \pm 1, \dots, 31$ лазеров в цепочке относительно равновесного уровня u_s при $\gamma = \gamma_0^- + \varepsilon^2 = -0.214$. Разность фаз между колебаниями соседних элементов цепочки $z_0^- = 3.04$

Fig. 2. Instantaneous distribution of radiation intensity u_j , $j = 0, \pm 1, \dots, 31$ of lasers in the chain with respect to the equilibrium level u_s at $\gamma = \gamma_0^- - \varepsilon^2 = -0.214$. Phase difference between oscillations of adjacent elements of the chain $z_0^- = 3.04$

число $\omega^- = 7.89$. На рис. 2 показано мгновенное распределение интенсивности излучения u_j , $j=0, \pm 1, \dots, 31$ лазеров в цепочке относительно равновесного уровня u_s . Поскольку разность фаз колебаний интенсивности соседних лазеров близка к π , то можно наблюдать живущие некоторое время полосатые структуры.

Отметим, что комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау может иметь и другие нестационарные неоднородные решения, включая диффузионный хаос, которые рассматривались ранее во многих работах, например в [28]. Тогда и решения распределенной модели цепочки могут быть существенно сложнее. Требуются дополнительные исследования с учетом конвекции, присутствующей в нормализованном уравнении, устойчивости возможных режимов, что представляется предметом отдельного исследования.

Заключение

В настоящей работе предложена распределенная интегродифференциальная модель с запаздывающим аргументом для описания динамики цепочки лазеров в случае, если число элементов является достаточно большим.

В результате линейного анализа распределенной модели с учетом малого параметра, обратно пропорционального числу лазеров в цепочке, получены критические значения коэффициента связи, при которых стационарное состояние в цепочке становится неустойчивым. Показано, что в определенной окрестности точки бифуркации число корней характеристического уравнения с близкой к нулю действительной частью неограниченно возрастает при уменьшении малого параметра. Предложен алгоритм сведения исходной краевой задачи к уравнению для медленно меняющихся амплитуд применительно к критическим случаям (асимптотически) бесконечной размерности. Получено двумерное комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау с конвекцией и с периодическими граничными условиями в качестве нормальной формы. Его нелокальная динамика определяет поведение решений исходной краевой задачи.

Получены простейшие однородные периодические решения уравнения Гинзбурга–Ландау и соответствующие им неоднородные решения в виде бегущих волн в распределенной модели. Такие решения можно интерпретировать как режимы фазовой синхронизации в цепочке связанных лазеров. Определены частоты и амплитуды колебаний интенсивности излучения каждого лазера и разность фаз между соседними осцилляторами.

Приложение

Вспомогательные ряды для построения нормальной формы

Приведем вспомогательные выражения для слагаемых в уравнении (11). Поскольку $\tau = \varepsilon^2 t$ и $X = x - \varepsilon \delta t$, то $\xi'_t = \varepsilon^2 \xi'_\tau - \varepsilon \delta \xi'_X$. Далее, принимая во внимание выражения для a_0 и a_1 ,

получаем разложения в ряд по степеням малого параметра ε для производных по времени t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & \varepsilon e^{iR} i \omega_0 \xi + \varepsilon^2 \left[e^{iR} (\omega_0 + \delta) (\xi'_X + i \theta \xi) + e^{i2R} (i 2 \omega_0) u_{22} \right] + \\ & + \varepsilon^3 e^{iR} \left[(\xi'_\tau + i \delta \xi''_{XX} + 2 \delta \theta \xi'_X + i \delta \theta^2 \xi) + i \omega_0 u_{31} \right] + \\ & + \varepsilon^3 i \delta (u_{20})'_X + \varepsilon^3 e^{i2R} i \delta [(2 \theta u_{22} + (u_{22})'_X)] + \varepsilon^4 \dots + c.c. \end{aligned} \quad (40)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} = & \varepsilon e^{iR} r i \omega_0 \xi + \varepsilon^2 \left[e^{iR} r (i \theta (\omega_0 + 2 \delta) \xi \omega_0 \xi'_X) + e^{i2R} (2 i \omega_0) y_{22} \right] + \\ & + \varepsilon^3 e^{iR} \left[-i \delta (1 + \delta \omega^{-1}) (i \omega_0 \xi'_\tau + \xi''_{XX} - \theta^2 \xi) + i \omega_0 y_{31} \right] + \\ & + \varepsilon^3 i \delta (y_{20})'_X + \varepsilon^3 e^{i2R} i \delta [(2 \theta y_{22} + (y_{22})'_X)] + \varepsilon^4 \dots + c.c. \end{aligned} \quad (41)$$

Нелинейные слагаемые в системе представляются в виде ряда

$$\begin{aligned} uv = & \varepsilon^2 e^{2iR} r \xi^2 + \varepsilon^3 \delta (|\xi|^2)'_X + \\ & + \varepsilon^3 e^{iR} [\xi (y_{20} + r u_{20}) + \bar{\xi} (y_{22} - r u_{22})] + \\ & + \varepsilon^3 e^{2iR} (\delta + 2 \omega_0) (\xi \xi'_X + i \theta \xi^2) + \varepsilon^3 e^{3iR} \dots + c.c. \end{aligned} \quad (42)$$

Для разложения в ряд интегрального слагаемого в системе (11) воспользуемся равенством (9) и разложением функции

$$\begin{aligned} u(t - T, x + s) = & \sum_{m,n} \varepsilon (1 + \varepsilon (m + \theta)) \xi_{mn} e^{ik_{mn}(x+s) + i(\omega_0 + \varepsilon \delta (m + \theta))(t-T)} + \\ & + \varepsilon^2 (u_{20} + e^{i2R} u_{22}) + \varepsilon^3 (e^{iR} u_{31} + \dots) + c.c. \end{aligned}$$

Учтем, что значения амплитуд гармоник, зависящих от медленного времени $\tau = \varepsilon^2 t$, берем в момент $\varepsilon^2 (t - T)$, тогда

$$\xi_{mn}(\tau - \varepsilon^2 T) = \xi_{mn} - \varepsilon^2 T (\xi_{mn})'_\tau + \dots$$

Получаем разложение

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) u(t - T, x + s) ds = & \varepsilon e^{iR} r \xi + \\ & + \varepsilon^2 e^{iR} e^{i\phi_0} (r_1 \xi + r_2 \xi'_X) + \varepsilon^2 u_{20} + \varepsilon^2 e^{2iR} e^{2i\phi_0} u_{22} (1 + \varepsilon^2 \dots) + \\ & + \varepsilon^3 e^{iR} e^{i\phi_0} (-T \xi'_\tau + r_3 \xi'_X + r_4 \xi'_Y + r_5 \xi + r_6 \xi''_{XX} + r_7 \xi''_{YY}) + \\ & + \varepsilon^3 e^{iR} e^{i\phi_0} u_{31} + \dots + c.c., \end{aligned} \quad (43)$$

где $\phi_0 = z_0 - \omega_0 T$ и

$$\begin{aligned} r_1 = & i \theta (1 + T \delta - i), \quad r_2 = (1 + T \delta - i), \\ r_3 = & i \theta (1 + T \delta) (1 + T \delta - 2i), \quad r_4 = 2i \pi \sigma^2 z_0, \\ r_5 = & -[z_0^2 \sigma^2 + \theta^2 (1 + T \delta) (1 + T \delta - 2i)] / 2, \\ r_6 = & (1 + T \delta) (1 + T \delta - 2i) / 2, \quad r_7 = 2\pi^2 \sigma^2. \end{aligned}$$

Подставим (20) и ряды (40)–(43) в нелинейную систему (11) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε и гармониках основной частоты.

Коэффициенты при εe^{iR} в первом и втором уравнении системы (11) дают верные равенства при критических значениях параметров,

$$\xi \left(\omega^2 - (1 + u_0) i \omega_0 - v u_0 \xi - \gamma_0 v u_0 \exp(i\phi_0) \right) = 0.$$

На втором шаге, собирая коэффициенты при $\varepsilon^2 e^{iR}$ в первом уравнении также получаем верные равенства при критических параметрах, которые приводить не будем. Собирая коэффициенты при $\varepsilon^2 e^0$, приходим к системе,

$$0 = v u_0 y_{20}, \quad 0 = -(1 + u_0) y_{20} - u_{20} - \gamma_0 u_{20},$$

откуда имеем $y_{20} = 0$, $u_{20} = 0$.

Собирая коэффициенты при $\varepsilon^2 e^{2iR}$, приходим к системе, из которой находим $u_{22} = C(r/u_0) \xi^2$, $y_{22} = (2rC - 1)(r/u_0) \xi^2$, где

$$C = \frac{1 + 2i\omega_0}{4i\omega_0 r + 2r(1 + u_0) + 1 + \gamma_0 e^{2i\phi_0}}.$$

На третьем шаге, собирая коэффициенты при $\varepsilon^3 e^0$, приходим к системе, из которой можно исключить амплитуды u_{31} , y_{31} , умножая первое уравнение на $(i\omega_0 + 1 + u_0)$ и второе на $v u_0$, затем складывая эти уравнения. Для разрешимости системы необходимо, чтобы функция ξ удовлетворяла уравнению (29) для функции $\xi(\tau, X, Y)$.

Список литературы

1. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 411 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
2. *Stankovski T., Pereira T., McClintock P. V. E., Stefanovska A.* Coupling functions: Universal insights into dynamical interaction mechanisms // *Rev. Mod. Phys.* 2017. Vol. 89, no. 4. P. 045001. DOI: 10.1103/RevModPhys.89.045001.
3. *Клиньшов В. В., Некоркин В. И.* Синхронизация автоколебательных сетей с запаздывающими связями // *УФН.* 2013. Т. 183, № 12. С. 1323–1336. DOI: 10.3367/UFNr.0183.201312c.1323.
4. *Kuramoto Y.* Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Berlin: Springer-Verlag, 1984. 158 p. DOI: 10.1007/978-3-642-69689-3.
5. *Schuster H. G., Wagner P.* Mutual entrainment of two limit cycle oscillators with time delayed coupling // *Progress of Theoretical Physics.* 1989. Vol. 81, no. 5. P. 939–945. DOI: 10.1143/PTP.81.939.
6. *Perlikowski P., Yanchuk S., Popovych O. V., Tass P. A.* Periodic patterns in a ring of delay-coupled oscillators // *Phys. Rev. E.* 2010. Vol. 82, no. 3. P. 036208. DOI: 10.1103/PhysRevE.82.036208.
7. *Klinshov V., Shchapin D., Yanchuk S., Wolfrum M., D’Huys O., Nekorkin V.* Embedding the dynamics of a single delay system into a feed-forward ring // *Phys. Rev. E.* 2017. Vol. 96, no. 4. P. 042217. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.042217.
8. *Dahms T., Lehnert J., Schöll E.* Cluster and group synchronization in delay-coupled networks // *Phys. Rev. E.* 2012. Vol. 86, no. 1. P. 016202. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.016202.
9. *Ramana Reddy D. V., Sen A., Johnston G. L.* Experimental evidence of time-delay induced death in coupled limit-cycle oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 85, no. 16. P. 3381–3384. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.3381.

10. Soriano M. C., García-Ojalvo J., Mirasso C. R., Fischer I. Complex photonics: Dynamics and applications of delay-coupled semiconductor lasers // *Rev. Mod. Phys.* 2013. Vol. 85, no. 1. P. 421–470. DOI: 10.1103/RevModPhys.85.421.
11. Hohl A., Gavrielides A., Erneux T., Kovanis V. Localized synchronization in two coupled nonidentical semiconductor lasers // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78, no. 25. P. 4745–4748. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.4745.
12. Wünsche H.-J., Bauer S., Kreissl J., Ushakov O., Korneyev N., Henneberger F., Wille E., Erzgräber H., Peil M., Elsässer W., Fischer I. Synchronization of delay-coupled oscillators: A study of semiconductor lasers // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 94, no. 16. P. 163901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.163901.
13. Otten J., Müller J., Mönningmann M. Bifurcation-aware optimization and robust synchronization of coupled laser diodes // *Phys. Rev. E.* 2018. Vol. 98, no. 6. P. 062212. DOI: 10.1103/PhysRevE.98.062212.
14. Carra T. W., Taylor M. L., Schwartz I. B. Negative-coupling resonances in pump-coupled lasers // *Physica D.* 2006. Vol. 213, no. 2. P. 152–163. DOI: 10.1016/j.physd.2005.10.015.
15. Uchida A., Matsuura T., Kinugawa S., Yoshimori S. Synchronization of chaos in microchip lasers by using incoherent feedback // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 65, no. 6. P. 066212. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.066212.
16. Uchida A., Mizumura K., Yoshimori S. Chaotic dynamics and synchronization in microchip solid-state lasers with optoelectronic feedback // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 74, no. 6. P. 066206. DOI: 10.1103/PhysRevE.74.066206.
17. Kim M.-Y., Roy R., Aron J. L., Carr T. W., Schwartz I. B. Scaling behavior of laser population dynamics with time-delayed coupling: Theory and experiment // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 94, no. 8. P. 088101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.088101.
18. Vicente R., Tang S., Mulet J., Mirasso C. R., Liu J.-M. Dynamics of semiconductor lasers with bidirectional optoelectronic coupling: Stability, route to chaos, and entrainment // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol. 70, no. 4. P. 046216. DOI: 10.1103/PhysRevE.70.046216.
19. Vicente R., Tang S., Mulet J., Mirasso C. R., Liu J.-M. Synchronization properties of two self-oscillating semiconductor lasers subject to delayed optoelectronic mutual coupling // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 73, no. 4. P. 047201. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.047201.
20. Schwartz I. B., Shaw L. B. Isochronal synchronization of delay-coupled systems // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 75, no. 4. P. 046207. DOI: 10.1103/PhysRevE.75.046207.
21. Perego A. M., Lamperti M. Collective excitability, synchronization, and array-enhanced coherence resonance in a population of lasers with a saturable absorber // *Phys. Rev. A.* 2016. Vol. 94, no. 3. P. 033839. DOI: 10.1103/PhysRevA.94.033839.
22. Каценко С. А. О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией // Доклады Академии наук СССР. 1988. Т. 299, № 5. С. 1049–1052.
23. Kaschenko S. A. Normalization in the systems with small diffusion // *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 1996. Vol. 6, no. 6. P. 1093–1109. DOI: 10.1142/S021812749600059X.
24. Каценко С. А. Асимптотика пространственно-неоднородных структур в когерентных нелинейно-оптических системах // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1991. Т. 31, № 3. С. 467–473.
25. Grigorieva E. V., Haken H., Kaschenko S. A. Theory of quasiperiodicity in model of lasers with delayed optoelectronic feedback // *Optics Communications.* 1999. Vol. 165, no. 4–6. P. 279–292. DOI: 10.1016/S0030-4018(99)00236-9.
26. Kashchenko S. A. Dynamics of advectively coupled Van der Pol equations chain // *Chaos.* 2021. Vol. 31, no. 3. P. 033147. DOI: 10.1063/5.0040689.
27. Ханин Я. И. Основы динамики лазеров. М.: Наука, 1999. 368 с.

28. *Akhromeyeva T. S., Kurdyumov S. P., Malinetskii G. G., Samarskii A. A.* Nonstationary dissipative structures and diffusion-induced chaos in nonlinear media // *Phys. Rep.* 1989. Vol. 176, no. 5–6. P. 189–370. DOI: 10.1016/0370-1573(89)90001-X.

References

1. Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge: Cambridge University Press; 2001. 411 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
2. Stankovski T, Pereira T, McClintock PVE, Stefanovska A. Coupling functions: Universal insights into dynamical interaction mechanisms. *Rev. Mod. Phys.* 2017;89(4):045001. DOI: 10.1103/RevModPhys.89.045001.
3. Klinshov VV, Nekorkin VI. Synchronization of delay-coupled oscillator networks. *Phys. Usp.* 2013;56(12):1217–1229. DOI: 10.3367/UFNe.0183.201312c.1323.
4. Kuramoto Y. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Berlin: Springer-Verlag; 1984. 158 p. DOI: 10.1007/978-3-642-69689-3.
5. Schuster HG, Wagner P. Mutual entrainment of two limit cycle oscillators with time delayed coupling. *Progress of Theoretical Physics.* 1989;81(5):939–945. DOI: 10.1143/PTP.81.939.
6. Perlikowski P, Yanchuk S, Popovych OV, Tass PA. Periodic patterns in a ring of delay-coupled oscillators. *Phys. Rev. E.* 2010;82(3):036208. DOI: 10.1103/PhysRevE.82.036208.
7. Klinshov V, Shchapin D, Yanchuk S, Wolfrum M, D’Huys O, Nekorkin V. Embedding the dynamics of a single delay system into a feed-forward ring. *Phys. Rev. E.* 2017;96(4):042217. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.042217.
8. Dahms T, Lehnert J, Schöll E. Cluster and group synchronization in delay-coupled networks. *Phys. Rev. E.* 2012;86(1):016202. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.016202.
9. Ramana Reddy DV, Sen A, Johnston GL. Experimental evidence of time-delay induced death in coupled limit-cycle oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 2000;85(16):3381–3384. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.3381.
10. Soriano MC, García-Ojalvo J, Mirasso CR, Fischer I. Complex photonics: Dynamics and applications of delay-coupled semiconductor lasers. *Rev. Mod. Phys.* 2013;85(1):421–470. DOI: 10.1103/RevModPhys.85.421.
11. Hohl A, Gavrielides A, Erneux T, Kovanis V. Localized synchronization in two coupled nonidentical semiconductor lasers. *Phys. Rev. Lett.* 1997;78(25):4745–4748. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.4745.
12. Wünsche HJ, Bauer S, Kreissl J, Ushakov O, Korneyev N, Henneberger F, Wille E, Erzgräber H, Peil M, Elsässer W, Fischer I. Synchronization of delay-coupled oscillators: A study of semiconductor lasers. *Phys. Rev. Lett.* 2005;94(16):163901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.163901.
13. Otten J, Müller J, Mönnigmann M. Bifurcation-aware optimization and robust synchronization of coupled laser diodes. *Phys. Rev. E.* 2018;98(6):062212. DOI: 10.1103/PhysRevE.98.062212.
14. Carra TW, Taylor ML, Schwartz IB. Negative-coupling resonances in pump-coupled lasers. *Physica D.* 2006;213(2):152–163. DOI: 10.1016/j.physd.2005.10.015.
15. Uchida A, Matsuura T, Kinugawa S, Yoshimori S. Synchronization of chaos in microchip lasers by using incoherent feedback. *Phys. Rev. E.* 2002;65(6):066212. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.066212.
16. Uchida A, Mizumura K, Yoshimori S. Chaotic dynamics and synchronization in microchip solid-state lasers with optoelectronic feedback. *Phys. Rev. E.* 2006;74(6):066206. DOI: 10.1103/PhysRevE.74.066206.
17. Kim MY, Roy R, Aron JL, Carr TW, Schwartz IB. Scaling behavior of laser population dynamics with time-delayed coupling: Theory and experiment. *Phys. Rev. Lett.* 2005;94(8):088101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.088101.

18. Vicente R, Tang S, Mulet J, Mirasso CR, Liu JM. Dynamics of semiconductor lasers with bidirectional optoelectronic coupling: Stability, route to chaos, and entrainment. *Phys. Rev. E.* 2004;70(4):046216. DOI: 10.1103/PhysRevE.70.046216.
19. Vicente R, Tang S, Mulet J, Mirasso CR, Liu JM. Synchronization properties of two self-oscillating semiconductor lasers subject to delayed optoelectronic mutual coupling. *Phys. Rev. E.* 2006;73(4):047201. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.047201.
20. Schwartz IB, Shaw LB. Isochronal synchronization of delay-coupled systems. *Phys. Rev. E.* 2007;75(4):046207. DOI: 10.1103/PhysRevE.75.046207.
21. Perego AM, Lamperti M. Collective excitability, synchronization, and array-enhanced coherence resonance in a population of lasers with a saturable absorber. *Phys. Rev. A.* 2016;94(3):033839. DOI: 10.1103/PhysRevA.94.033839.
22. Kashchenko SA. On quasinormal forms for parabolic equations with small diffusion. *Soviet Mathematics. Doklady.* 1988;37(2):510–513.
23. Kaschenko SA. Normalization in the systems with small diffusion. *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 1996;6(6):1093–1109. DOI: 10.1142/S021812749600059X.
24. Kashchenko SA. Asymptotic form of spatially non-uniform structures in coherent nonlinear optical systems. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 1991;31(3):97–102.
25. Grigorieva EV, Haken H, Kaschenko SA. Theory of quasiperiodicity in model of lasers with delayed optoelectronic feedback. *Optics Communications.* 1999;165(4–6):279–292. DOI: 10.1016/S0030-4018(99)00236-9.
26. Kashchenko SA. Dynamics of advectively coupled Van der Pol equations chain. *Chaos.* 2021;31(3): 033147. DOI: 10.1063/5.0040689.
27. Khanin YI. *Fundamentals of Laser Dynamics.* Cambridge: Cambridge International Science Publishing; 2006. 361 p.
28. Akhromeyeva TS, Kurdyumov SP, Malinetskii GG, Samarskii AA. Nonstationary dissipative structures and diffusion-induced chaos in nonlinear media. *Phys. Rep.* 1989;176(5–6):189–370. DOI: 10.1016/0370-1573(89)90001-X.



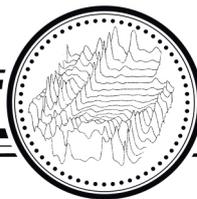
Григорьева Елена Викторовна — родилась в 1957 году, окончила Белорусский государственный университет (1979). Работала в институте физики АН БССР, БГУ, в настоящий момент работает в БГЭУ. Защитила диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук в БГУ (2004) в области нелинейной динамики лазерных систем. Опубликовала более 100 научных и научно-методических трудов.

Республика Беларусь, 220070 Минск, Партизанский пр., 26
 Белорусский государственный экономический университет
 E-mail: grigorieva@tut.by
 AuthorID: 24668



Кащенко Сергей Александрович — родился в Ярославле (1953), окончил Ярославский государственный университет (1975). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ННГУ (1976) и доктора физико-математических наук в МГУ (1989) в области теории нелинейных колебаний. Профессор, первый проректор ЯрГУ. Автор монографий «Модели волновой памяти» (совместно с В. В. Майоровым) и «Релаксационные колебания в лазерах» (совместно с Е. В. Григорьевой). Опубликовал более 250 научных работ и 8 монографий.

Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14
 Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
 E-mail: kasch@uniyar.ac.ru
 ORCID: 0000-0002-8777-4302
 AuthorID: 8238



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(2)

Научная статья

УДК 575.174, 517.9

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-208-232

Простая и сложная динамика в модели эволюции двух миграционно связанных популяций с непересекающимися поколениями

М. П. Кулаков[✉], Е. Я. Фрисман

Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН, Биробиджан, Россия

E-mail: ✉k_matvey@mail.ru, frisman@mail.ru

Поступила в редакцию 6.02.2022, принята к публикации 1.03.2022, опубликована 31.03.2022

Аннотация. Цель работы — исследование механизмов, приводящих к возникновению генетической дивергенции (устойчивых генетических различий между двумя популяциями, связанными миграцией). Рассматривается «классическая» модельная ситуация: панмиктические популяции с менделевскими правилами наследования, в которых действие естественного отбора (различия по приспособленностям) одинаково и определяется генотипами только одного диалельного локуса. Предполагается, что смежные поколения не перекрываются и эволюционные преобразования можно отслеживать моделью с дискретным временем. Эта модель описывает изменение концентрации одного из аллелей в каждой популяции, а также отношение численностей популяций к общей численности. **Методы.** На основе аналога карт седел построены параметрические портреты, показывающие области параметров качественно разных режимов динамики. Исследование дополнено фазовыми портретами, бассейнами притяжения и бифуркационными диаграммами. **Результаты.** Обнаружено, что режимы динамики рассматриваемой модели качественно совпадают с режимами аналогичной модели с непрерывным временем, но только в случае слабой миграционной связи. В случае сильной связи возможны колебания фазовых переменных. Показано, что дивергенция, возможная лишь при пониженной приспособленности гетерозигот, является результатом ряда бифуркаций: бифуркации вил, удвоения периода или седлоузловой бифуркации. После этих качественных перестроек динамика становится бистабильной или квадростабильной. В первом случае соответствующие дивергенции решения неустойчивы и возможны лишь как часть переходного процесса. Во втором случае они устойчивы, и при сильной связи дивергенция проявляется в виде колебаний с периодом 2. **Заключение.** В области биологически значимых параметров движение к одной из предельных генетических структур (мономорфизм, полиморфизм или дивергенция) в смежных популяциях может быть строго монотонным, либо в виде затухающих колебаний, либо устойчивых колебаний с периодом 2. Вне этой области возникают сложные режимы динамики, которые состоят из серии расходящихся колебаний вокруг неподвижных точек и квазислучайных переходов между ними.

Ключевые слова: генетическая дивергенция, модель с дискретным временем, динамика, бифуркации, колебания, бистабильность, квадростабильность.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН.

Для цитирования: Кулаков М. П., Фрисман Е. Я. Простая и сложная динамика в модели эволюции двух миграционно связанных популяций с непересекающимися поколениями // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 2. С. 208–232.

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-208-232

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Simple and complex dynamics in the model of evolution of two populations coupled by migration with non-overlapping generations

M. P. Kulakov✉, E. Ya. Frisman

Institute for Complex Analysis of Regional Problems,
Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Birobidzhan, Russia

E-mail: ✉k_matvey@mail.ru, frisman@mail.ru

Received 6.02.2022, accepted 1.03.2022, published 31.03.2022

Abstract. *Purpose* is to study the mechanisms leading to genetic divergence (stable genetic differences between two adjacent populations). We considered the following classical model situation. Populations are panmictic with Mendelian rules of inheritance. The action of natural selection (differences in fitness) on each of population is the same and is determined by the genotypes of only one diallel locus. We assume that adjacent generations do not overlap and genetic transformations can be described by a discrete time model. This model describes the change in the concentration of one of the alleles in each population and the ratio (weight) of first population to the total size. *Methods.* We used the analogue of saddle charts to construct parametric portraits showing the domains of qualitatively different dynamic modes. The study is supplemented with phase portraits, basins of attraction and bifurcation diagrams. *Results.* We found that the model dynamic regimes qualitatively coincide with the regimes of a similar model with continuous time, but only for a weak migration. With a strong coupling, fluctuations of the phase variables are possible. We showed that the genetic divergence is possible only with reduced fitness of heterozygotes and is the result of a series of bifurcations: pitchfork bifurcation, period doubling, or saddle-node bifurcation. After these qualitative changes, the dynamics become bi- or quadstable. In the first case, the solutions corresponding to the genetic divergence are unstable and are just a part of the transient process to monomorphic state. In the second case, the divergence is stable and appears as 2-cycle for a strong migration coupling. *Conclusion.* In neighboring populations, movement towards an asymptotic genetic structure (monomorphism, polymorphism or divergence) can be strictly monotonous or in the form of damped unstable or undamped stable fluctuations with a period of 2 for biologically significant parameters. For insignificant parameters, we found a complex dynamics (chaos) that consist of divergent fluctuations around fixed points and quasi-random transitions between them.

Keywords: genetic divergence, discrete time model, dynamics, bifurcations, fluctuations, bi- and quad-stability.

Acknowledgements. This work was carried out within the framework of the state targets of the Institute for Complex Analysis of Regional Problem of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences.

For citation: Kulakov MP, Frisman EYa. Simple and complex dynamics in the model of evolution of two populations coupled by migration with non-overlapping generations. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2022;30(2):208–232. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-208-232

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Теоретическое изучение эволюции и микроэволюции биологических популяций, находящихся под действием естественного отбора, имеет давнюю и богатую историю [1–3]. Одна из интереснейших задач связана с поиском базовых механизмов видообразования, а ее сложность определяется следующими обстоятельствами. С одной стороны, под действием отбора в популяции происходит закрепление (фиксация) такого признака (генотипа), который обеспечивает наибольшую приспособленность особей и, как следствие, наибольшую скорость воспроизводства. В результате в изолированных популяциях такой генотип фиксируется, а иные пропадают или растворяются среди гетерозигот, и никакая последующая эволюция, предшествующая новому видообразованию, не происходит. С другой, при наличии географической изолированности

между первоначально сходными по генотипам совокупностям особей (популяциями) могут возникать выраженные наследственные различия генетических структур этих популяций: первичная генетическая дивергенция.

Важно понять, при каких условиях первичная генетическая дивергенция будет устойчивой и сохранится при нарушении пространственной изоляции между популяциями.

Эта задача рассматривалась многими исследователями [4–7], которыми было показано, что для достижения дивергенции между разными популяциями недостаточно только лишь генетических механизмов — необходим еще сильный экологический механизм, обеспечивающий регулирование роста численности и существенно влияющий на эволюционные процессы. Кроме того генетические и экологические процессы должны действовать с сопоставимыми скоростями [8, 9]. Ограничения роста могут быть связаны с разнообразными механизмами самолимитирования внутри популяции [10–13] или межвидовыми взаимодействиями [14–16]. По всей видимости, это верно и для более общего случая, когда отбор идет по двум или более признакам (генотипам) [17–19].

Настоящая работа продолжает начатое в [20] описание механизмов и исследование условий возникновения первичной генетической дивергенции. Рассматривается математическая модель с дискретным временем, основанная на рекуррентных уравнениях (отображениях) и описывающая изменение частот аллелей и соотношения численностей в системе двух смежных панмиктических популяций, связанных миграцией. С содержательной, биологической точки зрения, модели с дискретным временем оказываются более адекватными, чем модели, основанные на дифференциальных уравнениях, в случаях, когда рассматриваются популяции биологических видов, имеющих фиксированный сезон размножения, занимающий весьма небольшой период жизненного цикла [21]. В частности, это обычно характерно для видов с выраженными стадиями развития, метаморфозом и неперекрывающимися поколениями, когда все участвующие в размножении особи не доживают до следующего сезона размножения.

В данной работе методами бифуркационного анализа исследуются возможности, условия и механизмы формирования устойчивого различия генетических структур рассматриваемых популяций. Исследуемая модель, являясь дискретным аналогом модели из работы [20], имеет ряд особенностей динамики, связанных с колебаниями и сложными режимами (хаос). Их исследование, в какой-то мере, выходит за рамки содержательной части задачи, однако оно может быть интересно для специалистов по теории динамических систем.

1. Краткое описание модели

Как и в предыдущей работе [20], ограничимся описанием простейшей ситуации, когда все разнообразие в популяции определяется одним диаллельным локусом с аллеломорфами A и a . Для описания действия естественного отбора каждому генотипу — AA , Aa и aa — можно поставить в соответствие по одному коэффициенту w_{AA} , w_{Aa} и w_{aa} , называемому приспособленностью. Этот коэффициент равен половине отношения числа гамет, которые вошли в зиготы потомков данного генотипического класса, выживших и приступивших к миграции и гаметопродукции (размножению), к общему числу рожденных организмов данного генетического класса. Примем, что существует локальная панмиксия, то есть в каждой популяции происходит свободное скрещивание особей с различными генотипами. Несложно показать, что в случае панмиксии для описания динамики генетической структуры локальной популяции достаточно следить за одной-единственной величиной q — концентрацией гамет, несущих, например, аллель A , поскольку между концентрациями оплодотворенных зигот (особей), несущих генотипы AA , Aa и aa , и концентрациями аллелей A и a , присутствовавших в сформировавшихся их гаметах особей, в этом случае выполняются соотношения, следующие из закона Харди–Вайнберга.

В случае локальной популяции с непересекающимися поколениями концентрация гамет с аллелем A , а также общая численность N популяции, определяются следующими классическими уравнениями [4–6], которые связывают их значения в смежных поколениях:

$$\begin{cases} q(t+1) = q_n \left(w_{AA}q(t) + w_{Aa}(1-q(t)) \right) / \bar{w}(t), \\ N(t+1) = \bar{w}(t)N(t), \end{cases} \quad (1)$$

где $t = 0, 1, 2, \dots$ — номер поколения, $\bar{w}(t) = w_{AA}q^2(t) + 2w_{Aa}q(t)(1-q(t)) + w_{aa}(1-q(t))^2$ — средняя приспособленность популяции. Первое уравнение системы (1) не зависит от второго и описывает изменение концентрации аллеля A под действием естественного отбора. Различные соотношения параметров w_{AA} , w_{Aa} и w_{aa} определяют конкретный тип отбора в популяции. Поскольку модель достаточно агрегированная, то для понимания качественных свойств модели (1) важны не столь абсолютные значения параметров, сколько их соотношение. В случае так называемого движущего отбора $w_{AA} > w_{Aa} > w_{aa} > 0$ ($w_{aa} > w_{Aa} > w_{AA} > 0$) устойчива только неподвижная точка $\bar{q} = 1$ ($\bar{q} = 0$). Других неподвижных точек нет. В результате концентрация аллеля A растет (падает) по логистическому закону из любого начального состояния $0 < q(0) < 1$, а в популяции остаются только гомозиготы с аллелями AA (aa), а вторые гомозиготы и гетерозиготы неизбежно гибнут. В случае, когда приспособленность гетерозигот лежит вне диапазона приспособленностей гомозигот, между неподвижными точками 0 и 1 появляется дополнительная точка $q^* = (w_{aa} - w_{Aa}) / (w_{AA} - 2w_{Aa} + w_{aa})$. При $w_{Aa} > w_{AA}$ и $w_{Aa} > w_{aa}$ она устойчива, и со временем в популяции устанавливается устойчивый полиморфизм, при котором сосуществуют все три генотипа с постоянным значением как их концентраций, так и частот аллелей их составляющих. При $w_{Aa} < w_{AA}$ и $w_{Aa} < w_{aa}$ точка q^* — неустойчива. В последнем случае при $0 < q(0) < q^*$ частота аллеля A падает до 0, а при $q^* < q(0) < 1$ растет до 1. Впрочем, полиморфизм в этом случае может сохраняться в популяции достаточно продолжительное время (во время переходного процесса), если $q(0)$ близко к q^* (но строго не равно этому значению).

В любом из этих трех случаев средняя приспособленность $\bar{w}(t)$ может только расти по мере того как генетическая структура (величина $q(t)$) будет стремиться к одному из возможных стационарных состояний (неподвижным точкам 0, 1 или $0 < q^* < 1$). В начале этого роста приспособленность, как правило, не превосходит единицу. В результате при определенных значениях $N(0)$ численность $N(t)$ в модели (1) может упасть настолько, что достигнет нулевого значения, в то время как q продолжит расти или падать. Очевидно, что модель (1) здесь теряет смысл. Однако раньше может случиться, что величина $\bar{w}(t)$ достигнет единицы и падение численности остановится. Либо с какого-то номера сезона t величина $\bar{w}(t)$ превзойдет единицу, и падение сменится экспоненциальным ростом. Достигнув окончательной генетической структуры (предельного значения $q(t)$ при $t \rightarrow \infty$), приспособленность также достигает своего предельного значения в зависимости от того, какое предельное состояние устойчиво: $\bar{w}(t) \rightarrow w_{aa}$, если $q(t) \rightarrow 0$; $\bar{w}(t) \rightarrow w_{AA}$, если $q(t) \rightarrow 1$; $\bar{w}(t) \rightarrow (w_{AA}w_{aa} - w_{Aa}^2) / (w_{AA} - 2w_{Aa} + w_{aa})$, если $q(t) \rightarrow q^*$. Очевидно, что здесь уже важны абсолютные значения параметров w_{AA} , w_{Aa} и w_{aa} , а также начальная генетическая структура и стартовая численность $q(0)$ и $N(0)$.

Рассмотрим теперь две такие смежные популяции, которые обмениваются мигрантами с интенсивностью миграционных потоков, пропорциональной численности той популяции, откуда эти мигранты проистекают. Коэффициент пропорциональности или, другими словами, коэффициент миграции m одинаков для всех генотипов в обеих популяциях. В этом случае возможна следующая последовательность популяционных процессов: формирование зигот из гамет, смертность или отбор зигот, миграция между популяциями после отбора, продуцирование новых гамет. Ограничимся случаем, когда обе популяции идентичны по значениям приспособленностей w_{AA} ,

w_{Aa} и w_{aa} , а также гаметопродукции. Будем считать, что гетерозиготы производят одинаковое количество гамет каждого типа, нет дифференциации выживаемости гамет, а гаметопродукция рассчитывается с учетом потери гамет. Описав эти процессы через изменение численностей гамет и зигот на разных этапах развития популяции, можно получить следующую систему рекуррентных уравнений с четырьмя переменными:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1(t+1) = \frac{1}{G_1(t)} \left((1-m)q_1(t) \left(w_{AA}q_1(t) + w_{Aa}(1-q_1(t)) \right) + \right. \\ \left. + m \frac{1-p(t)}{p(t)} q_2(t) \left(w_{AA}q_2(t) + w_{Aa}(1-q_2(t)) \right) \right), \\ q_2(t+1) = \frac{1}{G_2(t)} \left((1-m)q_2(t) \left(w_{AA}q_2(t) + w_{Aa}(1-q_2(t)) \right) + \right. \\ \left. + m \frac{p(t)}{1-p(t)} q_1(t) \left(w_{AA}q_1(t) + w_{Aa}(1-q_1(t)) \right) \right), \\ p(t+1) = \frac{G_1(t)}{G(t)} p(t), \\ N(t+1) = G(t)N(t), \end{array} \right. \quad (2)$$

где q_1 и q_2 — концентрации аллеля A в первой и второй популяции ($0 \leq q_i \leq 1$), $p = N_1/(N_1+N_2)$ — вес первой популяции ($0 < p < 1$), $N = N_1 + N_2$ — численность обеих популяций в t -й сезон. Коэффициенты $G_1(t) = (1-m)\bar{w}_1(t) + m \frac{1-p(t)}{p(t)} \bar{w}_2(t)$, $G_2(t) = (1-m)\bar{w}_2(t) + m \frac{p(t)}{1-p(t)} \bar{w}_1(t)$ и $G(t) = p(t)G_1(t) + (1-p(t))G_2(t) = p(t)\bar{w}_1(t) + (1-p(t))\bar{w}_2(t)$ равны средней обобщенной приспособленности первой, второй и в целом всей системы популяций, где $\bar{w}_i = w_{AA}q_i^2(t) + 2w_{Aa}q_i(t)(1-q_i(t)) + w_{aa}(1-q_i(t))^2$ ($i = 1, 2$). Модель (2) представляет собой две связанные между собой системы (1) с переменным коэффициентом миграции. В силу независимости концентраций q_i и веса p от общей численности можно ограничиться рассмотрением только первых трех уравнений.

Надо заметить, что в традиционном подходе при описании динамики частот аллелей численность как переменная используется не часто. Считается, что особой достаточно много и отбор существенно не меняет общую численность — меняется лишь соотношение генотипов. Например, в статьях [10, 22] рассматривается схожая модельная ситуация, однако численность рассматривается как параметр, вариация которого меняет область мономорфизма и полиморфизма в смежных популяциях. Использование численности или веса популяции усложняет модель по сравнению с моделями в этих двух работах — в (2) коэффициент связи оказывается переменной величиной. Несложно показать, что в случае синхронного монотонного роста обеих популяций ($p = 1/2$) качественно поведение системы (2) и моделей из этих работ совпадет. Для полноты исследования в последнем параграфе статьи рассмотрен этот случай.

Здесь также важно подчеркнуть, что модель (2) соответствует ситуации, когда в указанной цепочке популяционных процессов миграция происходит после отбора. Можно также рассмотреть случай, когда миграция предшествует отбору. Однако несложно показать, что модельные уравнения в случае одинакового отбора в смежных популяциях не зависят от последовательности указанных популяционных процессов и в этих ситуациях полностью совпадают [6].

Конкретизируем тип отбора. Нас интересует возможность и условия формирования генетической дивергенции (устойчивого различия генетических структур) в системе двух смежных популяций, обитающих на однородном ареале. Возникает вопрос: какой тип отбора может привести к генетической дивергенции? Движущий отбор, когда $w_{AA} > w_{Aa} > w_{aa}$ или $w_{aa} > w_{Aa} > w_{AA}$,

здесь явно не подходит. Значит надо разбирать ситуацию, когда приспособленность гетерозиготы лежит вне диапазона приспособленностей гомозигот. Ограничимся рассмотрением «симметричного» случая $w_{AA} = w_{aa}$ и, поскольку без учета уравнения, описывающего динамику численности, важны лишь соотношения этих параметров, положим, что $w_{AA} = w_{aa} = 1$, $w_{Aa} = 1 + s > 0$, где $s > -1$ — коэффициент отбора для гетерозигот [10,22,23]. Учитывая это, перепишем уравнения (2) следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1(t+1) = \frac{1}{G_1(t)} \left((1-m)q_1(t)(1+s(1-q_1(t))) + \right. \\ \left. + m \frac{1-p(t)}{p(t)} q_2(t)(1+s(1-q_2(t))) \right), \\ q_2(t+1) = \frac{1}{G_2(t)} \left((1-m)q_2(t)(1+s(1-q_2(t))) + \right. \\ \left. + m \frac{p(t)}{1-p(t)} q_1(t)(1+s(1-q_1(t))) \right), \\ p(t+1) = \frac{G_1(t)}{G(t)} p(t). \end{array} \right. \quad (3)$$

Здесь средние приспособленности равны следующим величинам: $G_1(t) = (1-m)(1+2sq_1(t) \times (1-q_1(t))) + m \frac{1-p(t)}{p(t)} (1+2sq_2(t)(1-q_2(t)))$, $G_2(t) = (1-m)(1+2sq_2(t)(1-q_2(t))) + m \frac{p(t)}{1-p(t)} (1+2sq_1(t)(1-q_1(t)))$ и $G(t) = 1+2s(p(t)q_1(t)(1-q_1(t)) + (1-p(t))q_2(t)(1-q_2(t)))$.

Численность, как и прежде, можно найти из уравнения: $N(t+1) = G(t)N(t)$. Из биологических соображений имеет смысл говорить только о тех решениях системы (3), которые целиком лежат в единичном кубе: $0 \leq q_1 \leq 1$, $0 \leq q_2 \leq 1$ и $0 < p < 1$.

Для модели (3) наиболее интерес случай $s < 0$, поскольку каждое отдельное ее уравнение, как и локальная модель (1) оказывается бистабильной. В результате в случае полной изоляции ($m = 0$) на разных территориях могут сохраняться существенные различия в генетической структуре (дивергенция) — на одной присутствуют особи с аллелем A , на другой — с аллелем a . Возникает вопрос. Каковы условия существования и поддержания различий в случае ненулевой миграционной связи между популяциями? Есть ли существенные отличия от случая непрерывно развивающейся популяции, рассмотренного в предыдущей работе [20]? Для поиска ответа выполним качественное исследование системы (3).

Для начала отметим, что содержательно необходимо рассматривать только случай $s \geq -1$. Поскольку в противном случае приспособленность w_{Aa} для гетерозигот окажется отрицательной величиной. В результате может сложиться ситуация, при которой численности (вес) или концентрации аллеля A могут достигать отрицательных значений или испытывать колебания, которые выходят за пределы единичного куба. Однако, как будет показано ниже, даже при $-2 < s < -1$ несложно отыскать ограниченные решения системы (3), которые целиком лежат в единичном кубе и, на первый взгляд, не противоречат биологическому содержанию. Это становится возможным благодаря связи между популяциями, когда отрицательные значения частот аллелей на одном участке «компенсируются» миграционным притоком с другого участка, и итоговая частота оказывается положительной. Для полного понимания поведения решений системы (3) будем рассматривать не только биологически значимый диапазон значений коэффициента отбора $s \geq -1$, но и значения $s < -1$, при которых, в частности, возникает нерегулярная динамика.

2. Исследование устойчивости решений

Несмотря на громоздкий вид системы (3), удается выполнить достаточно полное исследование устойчивости каждой неподвижной точки, включающее вычисление собственных чисел матрицы Якоби в каждой из точек, определение областей их существования и описание механизмов формирования разных режимов динамики.

Система (1) имеет следующие неподвижные точки:

- $E_0(0, 0, 1)$ — обе популяции представлены только особями с генотипом aa (отсутствуют генотип AA или Aa) (мономорфная популяция);
- $E_1(1, 1, 1)$ — обе популяции состоят только из особей с генотипом AA (мономорфная популяция);
- $E_2(1/2, 1/2, 1/2)$ — обе популяции включают особей всех генотипов при одинаковой концентрации каждого из двух аллелей (полиморфная популяция);
- пара точек $E_{3,4}\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{s^2 + 4ms}}{2s}, \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{s^2 + 4ms}}{2s}, \frac{1}{2}\right)$, которая существует при $s < 0$ и $s + 4m < 0$. При $s > 0$ она существует для любого $0 \leq m \leq 1$, но лежит за пределами единичного куба, что противоречит смыслу фазовых переменных. На линии $m = -s/4$ рождается (или исчезает) пара точек E_3 и E_4 вследствие бифуркации вил. В этом случае точка E_1 «расщепляется» на пару точек $E_{3,4}$. Каждая из этих точек соответствует дивергентному состоянию системы популяций (в каждой популяции преобладают разные аллели). Однако, как и в случае модели с непрерывным временем, они неустойчивы при любых значениях параметров.

Для исследования общего характера динамики рассмотрим величину $Q(t) = q_1(t)p(t) + q_2(t)(1 - p(t))$, которая равна концентрации аллеля A в обеих популяциях. Подставляя в это выражение правые части системы (3) и приводя подобные члены, получаем неавтономное рекуррентное уравнение:

$$Q(t+1) = \frac{1}{G(t)} \left(Q(t) + \frac{G(t) - 1}{2} \right). \quad (4)$$

Приращение величины Q равно:

$$\Delta Q = Q(t+1) - Q(t) = \frac{G(t) - 1}{G(t)} \left(\frac{1}{2} - Q(t) \right).$$

Таким образом, отображение (4) имеет неподвижную точку $Q = 1/2$ (при $\Delta Q = 0$). Это означает, что в фазовом пространстве системы (3) выражение $Q = 1/2$ задает поверхность, которая оказывается инвариантной относительно отображения (3) (отображается в себя). Тогда все траектории, начала которых лежат на этой поверхности, целиком принадлежат ей.

Легко убедиться, что точки E_2 , E_3 и E_4 принадлежат поверхности $Q = 1/2$. Устойчивость неподвижных точек и характер глобальной динамики тесно связан со свойствами этой поверхности. Несложно показать, что при $s > 0$ выполняется неравенство $0 \leq \frac{G-1}{G} < 1$, тогда поверхность $Q = 1/2$, как и точка E_2 , является притягивающей. При $-2 < s < 0$ выполняется $-1 < \frac{G-1}{G} \leq 0$, тогда поверхность $Q = 1/2$ является отталкивающей сепаратрисной поверхностью, разделяющей единичный куб на два равных бассейна притяжения устойчивых точек E_0 и E_1 . Обозначим эту поверхность как W^S .

Для понимания характера движения всевозможных траекторий рассмотрим локальную устойчивость каждой из неподвижных точек системы (3), которая определяется значениями

собственных чисел матрицы Якоби, вычисленными в каждой неподвижной точке (мультипликаторы λ_i). На рис. 1 показано выявленное для системы (1) расположение собственных чисел относительно единичной окружности. Установлено, что система (1) имеет только действительные собственные числа, что, по всей видимости, верно и для многочисленных периодических точек, возникающих в системе (3) (на рис. 1 показана только пара $2P_{1,2}$).

Численный анализ устойчивости неподвижных точек при вариации параметра s от -2 до 2 и m от 0 до 1 выявил 11 сочетаний типов устойчивости неподвижных точек (сток, исток или седло

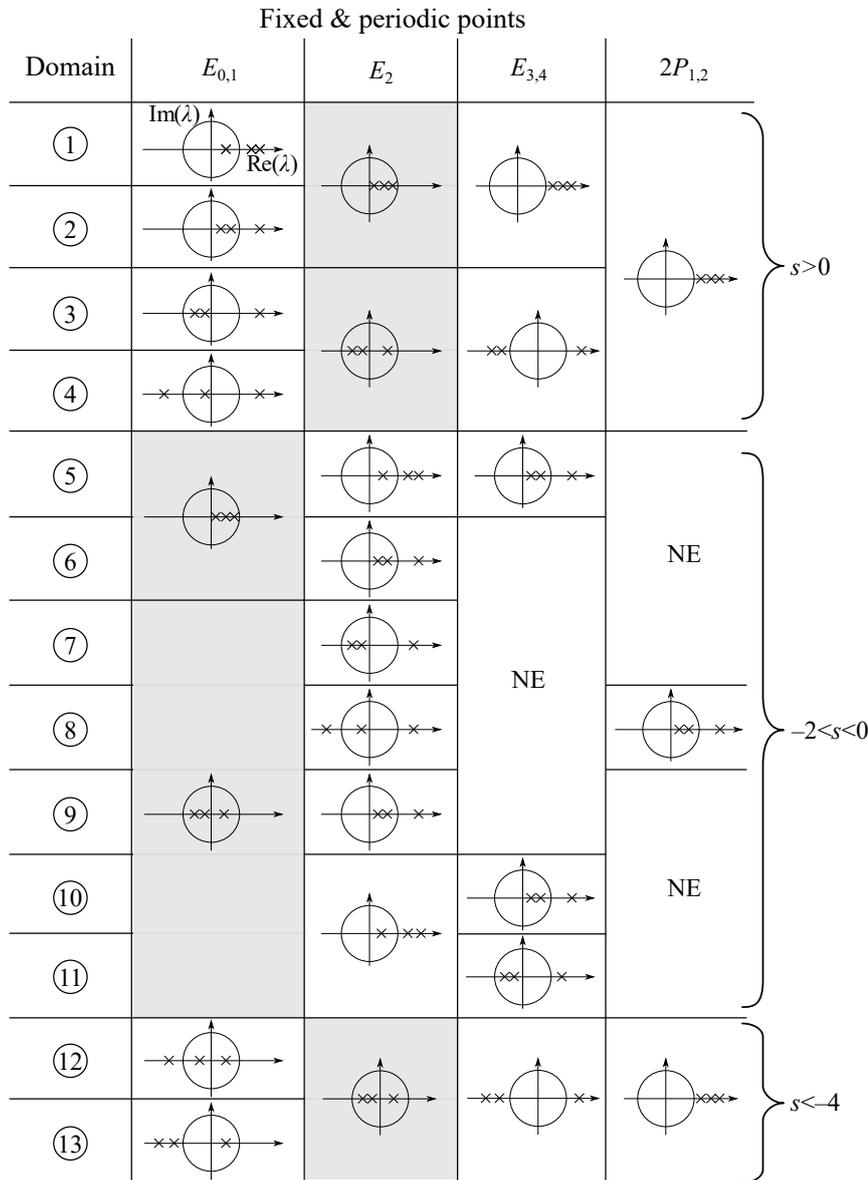


Рис. 1. Расположение собственных чисел неподвижных (E_i) и периодических точек ($2P$) относительно единичной окружности в разных областях на параметрическом портрете. Для пар $E_{0,1}$, $E_{3,4}$ и $2P_{1,2}$ значения собственных чисел совпадают, выделенная клетка — точка (или пара точек) устойчива, NE — точка не существует

Fig. 1. Location of eigenvalues on a unit circle for fixed (E_i) and periodic points ($2P$) in different domains of the parametric portrait. For couples $E_{0,1}$, $E_{3,4}$ and $2P_{1,2}$, the eigenvalues are the same. The highlighted cell corresponds to a stable point or a pair of points. NE is point does not exist

с разным числом устойчивых и неустойчивых собственных подпространств). В этом диапазоне параметров минимум одна точка устойчива (на рис. 1 это соответствует выделенной клетке): при $s > 0$ устойчива точка E_2 , при $-2 < s < 0$ — точка E_0 и E_1 . При $-4 \leq s \leq -2$ в системе (3) нет устойчивых точек, и наблюдается сложная динамика. При $s < -4$ вновь появляются устойчивые точки, и к 11 сочетаниям устойчивых и неустойчивых точек добавляются еще две (области 12 и 13 на рис. 1). Каждое из этих сочетаний сохраняется при определенном соотношении параметров s и m . В результате на плоскости параметров можно выделить 13 областей, характеризуемых определенным соотношением устойчивых и седловых неподвижных точек (аналог карт седел [24]). Можно утверждать, что в каждой из этих областей формируются качественно эквивалентные типы динамики. На рис. 1 и 2, а эти области параметров обозначены кружками с числами 1–13.

2.1. Простые режимы динамики. Рассмотрим области устойчивости и возникающие в них простые режимы динамики.

В областях 1–4 устойчива только точка E_2 , остальные — седла. Как видно из рис. 1, эти области отличаются размерностью устойчивых и неустойчивых собственных подпространств (многообразий) в окрестности каждой из неподвижных точек (см. рис. 1). Например, в областях 1 и 4 седловые точки E_0 и E_1 имеют одномерное устойчивое многообразие (одно собственное число лежит внутри единичной окружности), а в областях 2 и 3 — двумерное устойчивое многообразие (два собственных числа лежат внутри единичной окружности). Но более существенное их отличие заключается в том, что как только параметр миграции m оказывается больше $1/2$ (но не более 1), часть собственных значений матрицы Якоби (мультипликатор λ_i) оказываются отрицательными, и происходит это одновременно со всеми неподвижными точками. В результате для параметров из области 3 возникают режимы динамики, в которых стремление к единственной устойчивой точке E_2 сопровождается затухающими вокруг нее колебаниями (см. рис. 2, с). При этом траектория остается строго по одну сторону от поверхности $Q = 1/2$. В области 4 затухающим колебаниям вокруг точки E_2 предшествует монотонное движение в ее сторону, совмещенное с расходящимися колебаниями, если начальные условия взять в окрестности неустойчивых точек E_0 или E_1 . Характер этих колебаний хорошо заметен у переменной p (рис. 2, е). В противном случае колебаний нет, и наблюдается лишь монотонное движение к точке E_2 . Важно подчеркнуть, что эти колебания, если и возникают, никогда не выходят за пределы единичного куба, в отличие от схожих колебаний в других областях при $s < 0$. Кроме того, в областях 1–4 неподвижные точки E_3 и E_4 , которые соответствуют генетической дивергенции, лежат за пределами единичного куба и являются неустойчивыми узлами (истоками).

В противоположность этой ситуации в областях 12 и 13, а также в области 4 при $s < -4$ (топологически эквивалентна области 4 при $s > 0$) точки E_3 и E_4 , а также периодические точки $2P_{1,2}$ лежат в единичном кубе. При $0 \leq m < 0.5$ точки $2P_{1,2}$ лежат на прямой $q_1 = 1 - q_2$, $p = 0.5$ между точками E_3 и E_4 , а при $0.5 < m \leq 1$ точки E_3 и E_4 лежат между $2P_{1,2}$. В результате складывается ситуация, когда затухающие колебания почти всегда выходят за пределы единичного куба. Более того, в этих областях траектория периодически оказывается по разные стороны от поверхности $Q = 1/2$ при движении к устойчивой в этих областях точке E_2 .

Решения системы (3), соответствующие генетической дивергенции, лежащие в единичном кубе, ожидаемо можно обнаружить при пониженной приспособленности гетерозигот, то есть при $s < 0$. Параметрическое пространство в этом случае оказывается состоящим из большего числа областей, часть из которых пронумерована (там, где есть устойчивые точки), а часть со сложной динамикой требует отдельного рассмотрения (на рис. 2, а обозначена как *Chaos*). Рассмотрим для начала те, что имеют содержательный биологический смысл и соответствуют простым устойчивым режимам динамики, а именно тем, для которых коэффициент отбора гетерозигот лежит в диапазоне $-1 \leq s < 0$.

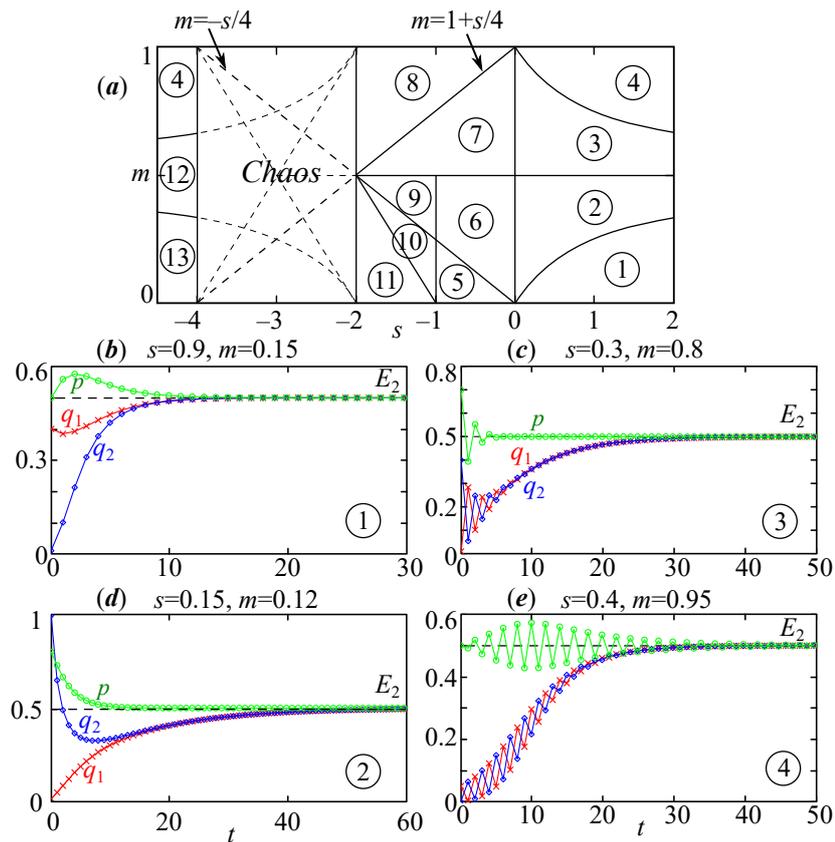


Рис. 2. *a* – Параметрический портрет системы (3), *b–e* – примеры динамики для параметров из областей 1–4 при $s > 0$ (цвет онлайн)

Fig. 2. *a* – Parametric portrait of the system (3) and *b–e* – examples of dynamics in the domains 1–4 (polymorphic state is stable) for $s > 0$ (color online)

В области 5 при пересечении линии $m = -s/4$ от точки E_2 отщепляется пара неподвижных точек E_3 и E_4 , соответствующих генетической дивергенции. Они расположены в единичном кубе на линии $q_1 + q_2 = 1$, но оказываются неустойчивыми. В области 6 эта пара пропадает. В обоих случаях неподвижные точки E_0 и E_1 , соответствующие мономорфному состоянию смежных популяций, – устойчивы. Поэтому динамика системы (3) является бистабильной. Бассейны их притяжения, как уже отмечалось, ограничены гранями единичного куба и сепаратрисной поверхностью W^S . Если стартовая точка лежит ниже W^S ($Q < 1/2$), в обеих популяциях со временем остаются особи только с генотипом aa ($q_1 = 0, q_2 = 1$), если выше W^S ($Q > 1/2$) – с генотипом AA ($q_1 = 1, q_2 = 0$). Однако наличие в области 5 даже неустойчивой пары точек E_3 и E_4 значительно изменяет характер перехода к одному из этих мономорфных состояний. Например, для параметров из области 6, где точек E_3 и E_4 нет, переход к E_0 или E_1 монотонный и соответствует логистическому росту (переход к E_1) или падению (к E_0). В то время как в области 5 наличие пары седловых точек E_3 и E_4 приводит к тому, что при определенных условиях возникают довольно немонотонные переходные режимы динамики (рис. 3, *a*). Они возникают, если траектория проходит в окрестности неустойчивого одномерного многообразия, исходящего из точки E_3 или E_4 и переходящего в устойчивое многообразие точек E_0 или E_1 (гетероклинический контур W^U).

Для параметров из областей 7 и 8 устойчивыми также оказываются точки E_0 и E_1 , а пары E_3 и E_4 не существует. В результате также наблюдается бистабильность динамики. Но в отличие от предыдущего случая здесь есть несколько особенностей.

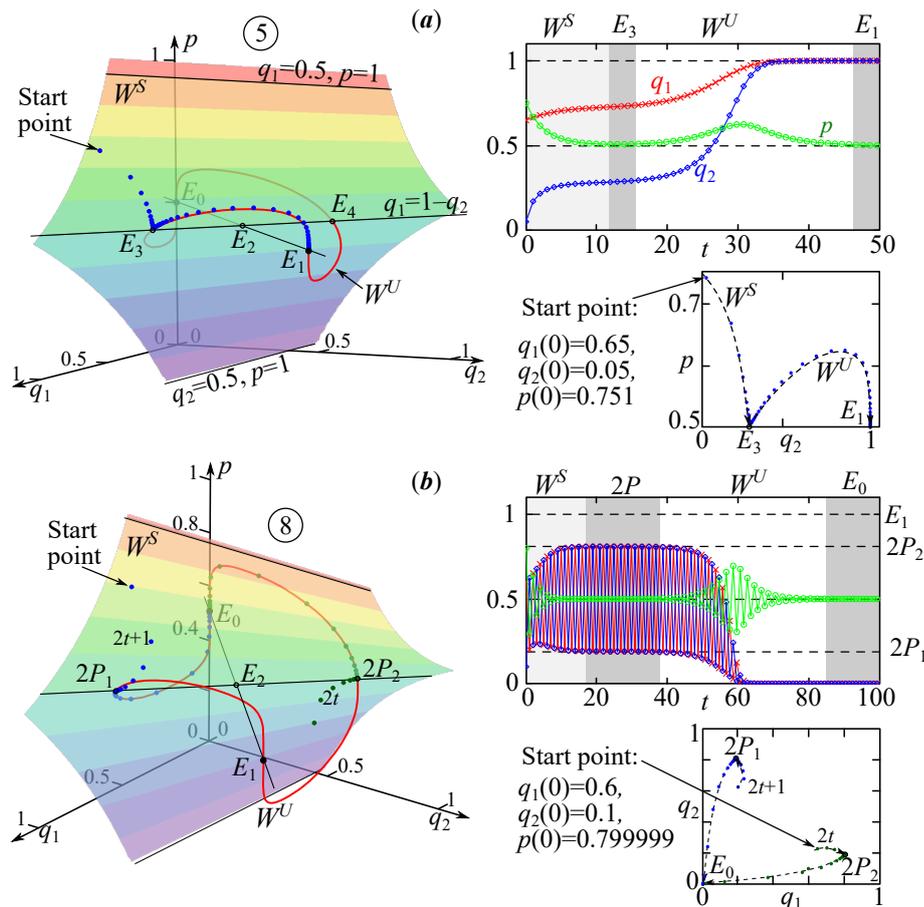


Рис. 3. Слева – фазовый портрет, справа – примеры динамики системы (3) для параметров из области 5 и 8 на рис. 2, $a - s = -0.5$, $m = 0.1$ и $b - s = -0.65$, $m = 0.9$ (цвет онлайн)

Fig. 3. Phase portrait (on the left) and examples of dynamics (3) (on the right) for parameters from domain 5 and 8 (monomorphic states are stable) at $a - s = -0.5$, $m = 0.1$ and $b - s = -0.65$, $m = 0.9$ (color online)

Во-первых, аналогично областям 3 и 4, два собственных значения в точках $E_0 - E_2$ становятся отрицательными при $m > 0.5$. Это означает, что в окрестности неподвижных точек формируются пилообразные колебания. Можно ожидать, что при движении к одной из устойчивых точек (E_0 или E_1) возникают затухающие колебания. Однако несложно показать, что не любое возмущение или стартовая точка приводит к колебаниям, особенно у переменных q_1 и q_2 . Такие колебания возникают только, если координаты стартовой точки расположены симметрично относительно 1 или 0. Например, если $0 < q_1(0) < 1 < q_2(0)$ или $q_1(0) < 0 < q_2(0) < 1$, что противоречит смыслу данных фазовых переменных. Однако, даже если это не так ($0 < q_1(0) \leq q_2(0) < 1$), и переменные q_1 и q_2 не демонстрируют затухающие колебания, то колебания могут присутствовать у переменной p . Но только если $p(0) \neq 0.5$; и чем больше $p(0)$ отличается от 0.5 (но не выходит из единичного куба), тем больше размах колебаний и более длителен переходный процесс. Вместе с тем в окрестности точки E_2 , расположенной в центре единичного куба, возникают колебания всех трех фазовых переменных. Условие их возникновения: $q_1(0) \neq q_2(0)$ и $p(0) \neq 0.5$. Так как оба отрицательных собственных числа в этой точке лежат в единичном круге, а третье больше единицы, то эти колебания быстро сменяются монотонным ростом или падением к точке E_0 или E_1 .

Во-вторых, в дополнение к описанному динамическому поведению в окрестности точек $E_0 - E_2$ для параметров из области 8 и в отображении (3) появляется пара седловых периоди-

ческих точек. Эта пара отщепляется от E_2 при пересечении линии $m = 1 + s/4$, и ее появление сопровождается выходом одного из отрицательных собственных чисел из единичного круга. Но так как третье собственное число по-прежнему больше единицы, периодическая точка оказывается неустойчивой, то есть в данном случае имеет место субкритическая бифуркация удвоения периода. Обозначим пару этих точек через $2P_{1,2}$. Одну из ее координат легко вычислить, положив $p = 0.5$, $q_1 = 1 - q_2$ и дважды проитерировав одномерное отображение:

$$q \mapsto \frac{m + (1 + s - 2m)q - sq^2}{1 + 2sq(1 - q)}.$$

В результате периодическая точка системы (3) имеет вид:

$$2P_{1,2} \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{s(s - 4m + 4)}}{2s}, \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{s(s - 4m + 4)}}{2s}, \frac{1}{2} \right).$$

Эти две точки лежат на прямой $q_1 + q_2 = 1$ и, в какой-то мере, «замещают» отсутствующие в области δ неподвижные точки E_3 и E_4 , соответствующие генетической дивергенции. Надо отметить, что эта же пара точек существует при $s > 0$, но лежит за пределами единичного куба.

Как и для неподвижных точек, для периодической точки можно вычислить соответствующие собственные значения матрицы Якоби, вычисленной для дважды итерированной системы (3). В результате несложно увидеть, что в области δ пара $2P_{1,2}$ — это седло с одномерным неустойчивым многообразием, которое образует гетероклинический контур W^U , замкнутый на устойчивые точки E_0 и E_1 . Так как все собственные числа в точках $2P_{1,2}$ положительные, то отображение (3) является ориентируемым. Следовательно, существует четыре контура, а из точек $2P_{1,2}$ можно прийти как к E_0 , так и к E_1 . В результате движение к устойчивым точкам E_0 и E_1 для любых начальных условий состоит из двух ветвей: для четных t траектория лежит ниже плоскости $p = 0.5$, для нечетных — выше, или наоборот в зависимости от того, где расположена начальная точка. В результате возникают колебания всех трех переменных, пример которых показан на рис. 3, б, где начальная точка расположена в окрестности многообразия W^S . В этом случае траектория вначале движется по сепаратрисной поверхности W^S в сторону периодической точки $2P$, где она «задерживается» на некоторое время, а затем устремляется к точке E_0 или E_1 вдоль двух ветвей контура W^U . Надо заметить, что ни одна траектория не пересекает поверхность W^S в этом случае.

Таким образом, при пониженной приспособленности гетерозигот, то есть при $-1 \leq s < 0$, генетическая дивергенция возможна только лишь как часть переходного процесса аналогично тому, как это происходит в модели с непрерывным временем [20]. Более того, при $m < -s/4$ решения моделей с непрерывным и дискретным временем совпадают. Однако при $m \geq 1 + s/4$ дискретный характер воспроизводства приводит к тому, что переход к одному из мономорфных состояний сопровождается пилообразными колебаниями, когда периодическим образом изменяется соотношение концентрации аллеля A в разных популяциях, чего в принципе не может быть в модели с непрерывным временем. Вполне ожидаемо, что пара неподвижных точек E_3 и E_4 , соответствующая дивергенции, становится устойчивой при $m = 0$, когда две популяции несвязанны и развиваются независимо. Аналогично случаю модели с непрерывным временем [20] точки E_3 и E_4 переходят в прямые неподвижных точек $(0, 1, \bar{p})$ и $(1, 0, \bar{p})$ ($\bar{p} \in R$ — любое число). В результате концентрации аллелей на разных участках в асимптотическом случае принимают значения 0 или 1, в то время как их численности, выраженные через вес p , принимают любые значения (в зависимости от начальных условий). Схожие решения системы (3), соответствующие дивергенции, наблюдаются при $m = 1$. В этом случае устойчива пара периодических точек $2P_{1,2}$ с координатами $(0, 1, \bar{p})$ и $(1, 0, \bar{p})$ ($\bar{p} \in R$). В результате концентрации аллелей q_1 и q_2 колеблются

между 0 и 1 с противоположными фазами, а размах колебаний веса p принимает любое значение в зависимости от начального его значения.

Рассмотрим особенности динамики при $s < -1$, когда система, на первый взгляд, теряет содержательный смысл. С одной стороны при $-2 < s < -1$ решения, по большей части, лежат в единичном кубе. Например, для областей 7 и 8 значения параметра s лежат в интервале $[-2; 0]$, и указанные выше типы динамики наблюдаются и там, и они не имеют каких-то особенностей, которые противоречат содержательному смыслу задачи. Однако при $0 \leq m < 0.5$ есть четкая граница $s = -1$ между областями 6–7 и 9–11. В области 9, как и в 6, нет точек E_3 и E_4 , соответствующих дивергенции. Устойчивы, по-прежнему, точки E_0 и E_1 , но в отличие от области 6 все мультипликаторы положительны. Следовательно, здесь возможно только монотонное движение к одной из этих точек.

При пересечении линии $m = -s/4$ появляется пара точек E_3 и E_4 , а два собственных значения в точках E_0 и E_1 оказываются отрицательными. В результате для параметров из области 10 и 11 неизбежно возникают затухающие колебания вокруг точки E_0 или E_1 , которые всегда выходят из единичного куба почти при любых начальных условиях, за исключением случая, когда начальная точка лежит на ребрах единичного куба, то есть $(q_1(0), q_2(0), p(0)) = E_0$ или E_1 ($p(0)$ может быть любым). Область 10 отличается от 11 лишь тем, что два собственных значения в точках E_3 и E_4 становятся отрицательными.

2.2. Сложные режимы. Пересекая границу $s = -2$, то есть далеко за пределом биологически значимых параметров, в системе (3) формируются сложно организованные хаотические колебания, выходящие далеко за пределы единичного куба и теряющие содержательный смысл. Несмотря на это, кратко рассмотрим их особенности, поскольку такая динамика может представлять определенный интерес для теории динамических систем как пример сложно организованных колебаний.

На линии $s = -2$ наибольшее по модулю собственное число для каждой неподвижной точки равно -1 . В результате возникает вырожденный 2-цикл вокруг точек E_0 , E_1 или E_2 , амплитуда которого зависит от начальных условий и значения m . При $s < -2$ этот цикл разрушается и возникают хаотические колебания. Особенности их появления и трансформации уже невозможно описывать, анализируя лишь значения собственных чисел.

В случае сложной динамики необходимы другие критерии. Например, несложно численно определить показатели Ляпунова, а затем оценить размерность аттрактора по формуле Каплана–Йорке. Результат можно дополнить картой динамических режимов. На рис. 4, а показаны вычисленные показатели хаотической динамики системы (3), из которых следует важное наблюдение. При $-4 < s < -2$ период колебания переменных $q_1(t)$ и $q_2(t)$ — всегда неограниченная величина, то есть не существует предела $\lim_{t \rightarrow \infty} \|q(t) - q(t+T)\| = 0$, $T \in \mathbb{N}$ (невозможно оценить период T по конечному ряду решения системы (3)). В то время как вес $p(t)$ может вообще не испытывать колебаний в достаточно широкой полосе параметров (черная полоса на правой части рис. 4, а). В этом диапазоне параметров после переходного процесса $p(t)$ оказывается равным 0.5 (при $t \rightarrow \infty$). Это сопровождается полной синхронизацией динамики переменных q_1 и q_2 . В результате точки траектории лежат на прямой $q_1(t) = q_2(t)$, $p(t) = 0.5$ в асимптотическом случае.

Численные эксперименты показывают, что если $p(0) \neq 0.5$, то процесс хаотической синхронизации может быть достаточно длительным, содержащим перемежающиеся участки частичной синхронизации и участки несинхронной динамики. Кроме того возможны сильные скачки переменной p на фоне вроде бы устоявшейся динамики. В результате область синхронных режимов на карте динамических режимов немного зашумлена единичными белыми точками внутри, а граница немного нечеткая, особенно при s , близких к -2 и -4 . Но показатель Ляпунова и размерность аттрактора нечувствительны к таким явлениям из-за усреднения и четко регистрируют описанную

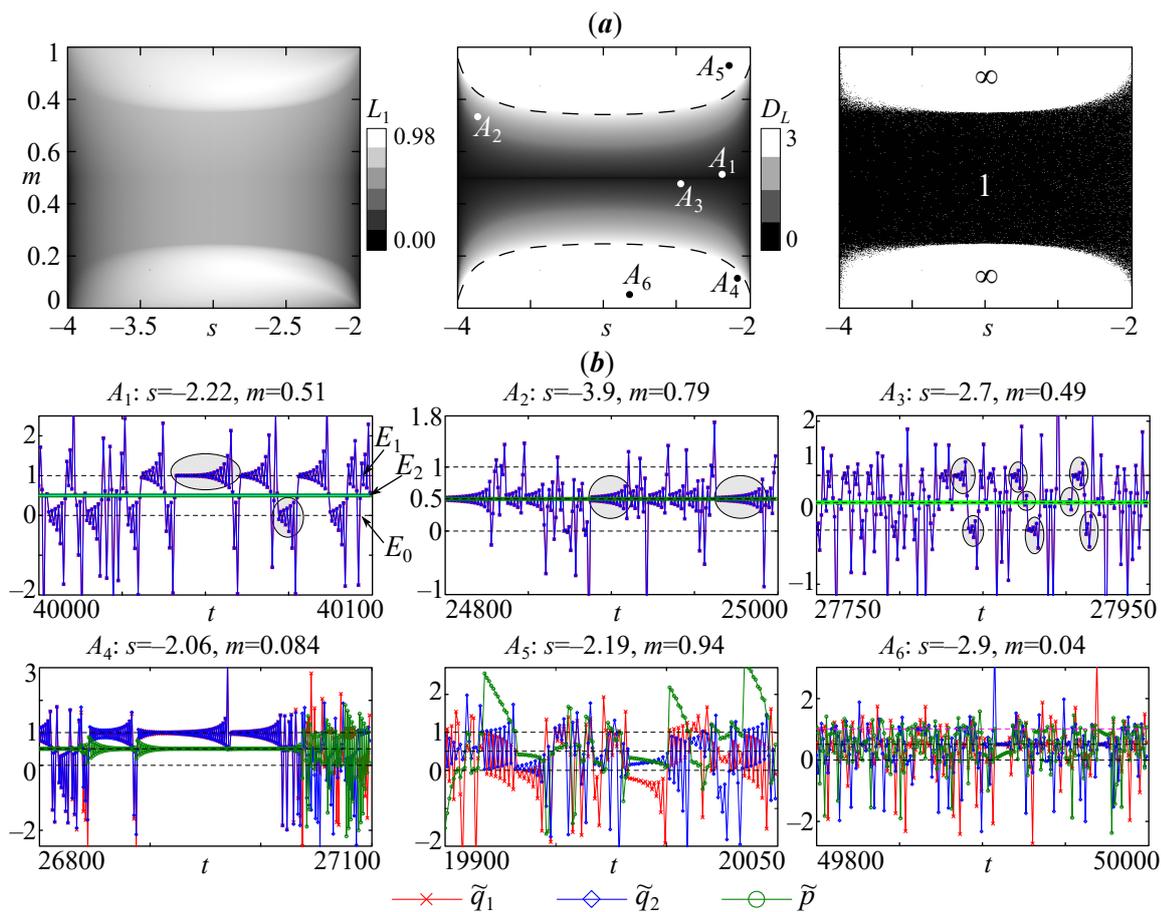


Рис. 4. *a* — Слева — старший показатель Ляпунова (L_1), в центре — ляпуновская размерность (D_L), справа — период колебания фазовой переменной $p(t)$ (карта динамических режимов). *b* — Примеры синхронной (в точках A_1 – A_3) и несинхронной (A_4 – A_6) динамики системы (3) при указанных значениях параметров (цвет онлайн)

Fig. 4. *a* — Maximal Lyapunov exponent (L_1), Lyapunov dimension (D_L) and oscillation period of $p(t)$ (dynamic regimes chart). *b* — Examples of synchronous (at points A_1 – A_3) and non-synchronous (A_4 – A_6) dynamics of system (3) with the shown parameter values (color online)

границу. Вне этой полосы при любых начальных условиях переменная p начинает испытывать нерегулярные колебания, q_1 и q_2 оказываются несинхронными между собой, а динамика становится гиперхаотической (с положительной суммой всех ляпуновских показателей и оценкой размерности, равной 3). Ближе к границе все еще регистрируются режимы, в которых синхронизация перемежается с несинхронным поведением. При удалении от границы как при малых, так и при больших m , динамика становится абсолютно несинхронной. Рис. 4, *b* показывает примеры, демонстрирующие такой переход. Расположение использованных в этих примерах значений параметров отмечено точками A_i на параметрической плоскости (см. рис. 4, *a*).

Главная особенность таких сложных режимов динамики не столько в чередовании синхронных и несинхронных режимов (перемежаемости) и росте степени хаотизации при отдалении от линии $m = 0.5$, сколько в структуре хаотического множества, которая вполне четко прослеживается. При минимальной степени хаотизации ($m \sim 0.5$, $s \sim -2$) динамику системы (3) можно представить в виде повторяющейся серии колебаний, которая состоит из чередующихся расходящихся колебаний вокруг точек E_0 и E_1 с квазислучайной длительностью. Так, в первом примере (точка A_1) эллипсами выделено несколько продолжительных участков такой динамики,

которые заканчиваются резким скачком переменных q_1 и q_2 . После скачка траектория переходит в окрестность другой неподвижной точки, где вновь формируются расходящиеся колебания. Их продолжительность, естественно, не случайна, а зависит от того насколько близко к неподвижной точке после скачка оказалась траектория. Чем ближе, тем дольше длятся расходящиеся колебания. Несложно увидеть, что переход к точке E_0 происходит «снизу», то есть траектория уходит в область с отрицательными координатами, а переход к E_1 происходит «сверху», то есть из области с очень большими координатами. По всей видимости, там существуют седловые периодические точки, порождающие сепаратрисы, не допускающие неограниченных траекторий. Действительно, численно обнаружено несколько из них с небольшими периодами (2, 3, 4).

Важно подчеркнуть, что скачок фазовых переменных часто оказывается настолько большим, что на линейной шкале оси координат сложно изобразить характер колебаний. Для решения этой проблемы можно выполнить масштабирование значений фазовых переменных по следующему правилу. Для небольших по модулю значений фазовых переменных (например, от -1.5 до 1.5) не применяется никакое масштабирование. Для больших положительных (больше 1.5) или малых отрицательных значений (меньше -1.5) выполняется логарифмирование, сохраняющее знак масштабируемой переменной. В результате новая переменная, которая используется только для построения соответствующих графиков (см. рис. 4 и 5), имеет вид:

$$\tilde{q}_i = \begin{cases} \ln(q_i) + 1.5, & \text{if } q_i > 1.5, \\ q_i, & \text{if } -1.5 \leq q_i \leq 1.5, \\ -\ln(-q_i) - 1.5, & \text{if } q_i < -1.5. \end{cases}$$

Аналогичное масштабирование производится для переменной p .

Во втором примере (точка A_2) также наблюдаются расходящиеся колебания с квазислучайной длительностью, но преимущественно вокруг полиморфной точки E_2 . После нескольких «витков» на отрезке $0 \leq q_1(t) = q_2(t) \leq 1$ ($p(t) = 0.5$) траектория покидает единичный куб, достигая больших абсолютных значений, а затем возвращается к точке E_2 . Но более интересна ситуация, когда траектория движется между тремя точками E_0 , E_1 и E_2 , совершая вокруг каждой из них несколько «витков», количество которых редко велико. Квазислучайным в этом случае является не столько продолжительность расходящихся колебаний, сколько точка, в окрестности которой окажется траектория после скачка фазовых переменных. В первом примере на рис. 4, b возможна только одна серия переходов: $E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_0 \rightarrow \dots$, где знак « \rightarrow » показывает переход траектории из окрестности одной неподвижной точки к другой. Во втором примере нет никаких переходов, и наблюдаются колебания только вокруг точки E_2 . В третьем примере вариантов перехода траектории между тремя точками значительно больше. Например, возможны переходы $E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \dots \rightarrow E_2 \rightarrow \dots$ с достаточно редкими обходами траекторией окрестности точки E_2 , или напротив, частые переходы $E_0 \rightarrow E_2 \rightarrow E_1 \rightarrow E_0 \rightarrow \dots$ или $E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_0 \rightarrow \dots$ и т. д.

Наконец, когда время пребывания в окрестности каждой из неподвижных точек становится минимальным (равным 1–2 периодам) динамика системы (3) становится по-настоящему непредсказуемой, хотя и реализуемая на одномерном многообразии: $q_1 = q_2$, $p = 0.5$. В этом случае система (1) представима в виде одномерного отображения:

$$q \mapsto \frac{2q(1 + s(1 - q))}{2 + 4sq(1 - q)},$$

которое имеет неподвижные точки E_0 , E_1 и E_2 .

Выход из области синхронной динамики, как уже отмечалось, сопровождается перемежаемостью участков синхронной и несинхронной динамики, как в четвертом примере на рис. 4, b (A_4). В этот момент на синхронных участках возможны серии переходов $E_0 \rightarrow E_0$ или $E_1 \rightarrow E_1$,

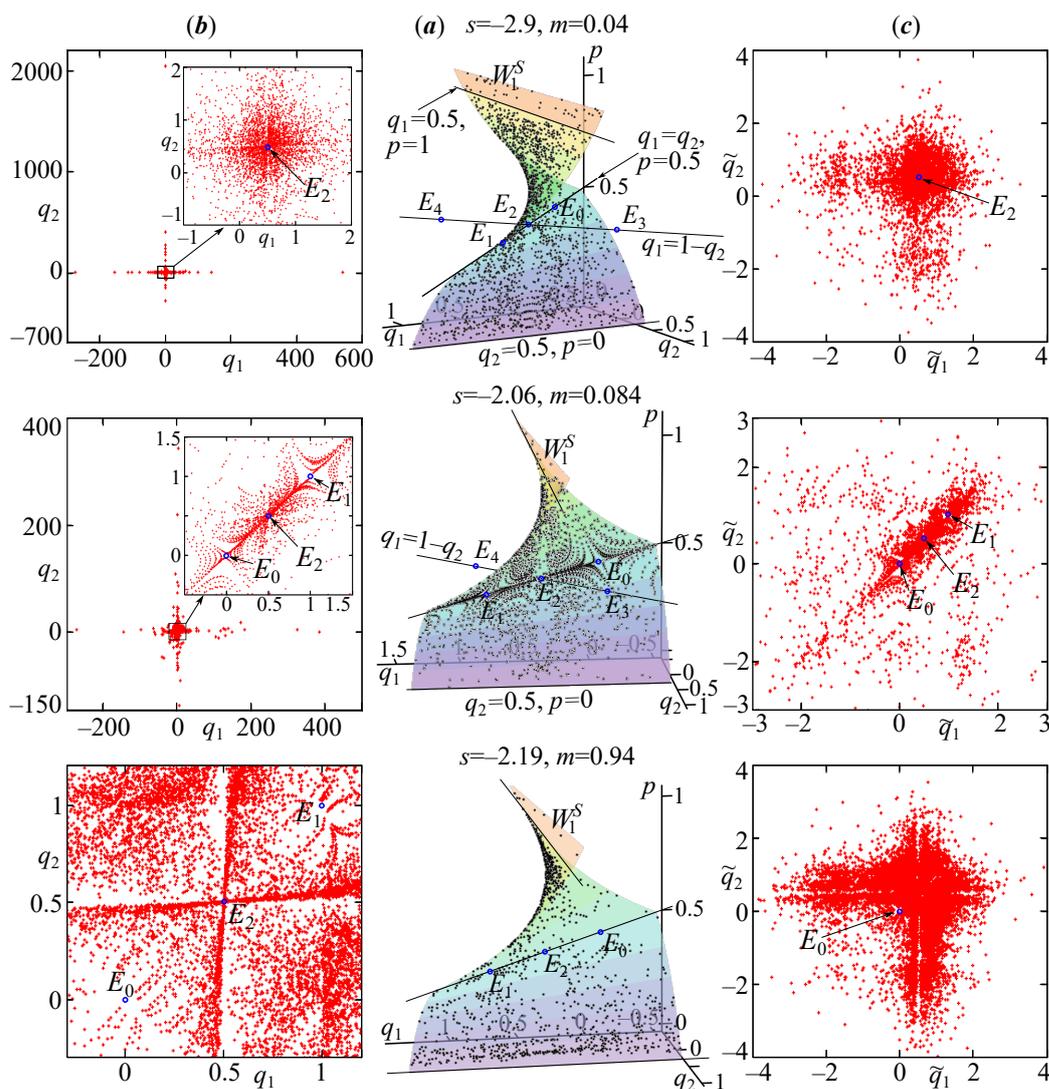


Рис. 5. Примеры гиперхаотической динамики системы (3) при указанных значениях параметров. *a* — Двумерное многообразие W_1^S с расположенными на нем фазовыми точками, а также их проекция на фазовую плоскость с естественными (*b*) и масштабированными (*c*) координатами (цвет онлайн)

Fig. 5. Examples of hyperchaotic dynamics (sum of all Lyapunov exponents is greater than zero) of system (3) for the shown parameters values. *a* — 2D manifold W_1^S with the orbit lying on it, and its projection onto the phase plane in natural (*b*) and scaled (*c*) coordinates (color online)

разделенные скачками фазовых переменных. Но более интересно, что в этой области, прежде чем полностью потерять синхронизацию, возникают режимы, содержащие участки расходящихся или затухающих колебаний переменных q_1 и q_2 , и достаточно монотонные переменной p (точка A_5 на рис. 4, *b*). В этом случае колебания переменных q_1 и q_2 противофазные, которые сходятся (или расходятся) к разным значениям. Это указывает на то, что на двумерном многообразии, на котором в этом случае реализуются все несинхронные режимы, существуют седловые неподвижные (помимо E_0 , E_1 и E_2) или периодические точки, притягивающие фазовую траекторию. Аналогично синхронным режимам между ними происходят переходы с сильными скачками переменных.

Наконец при малых или больших значениях m динамика всех переменных оказывается абсолютно несинхронной и гиперхаотической, как в последнем примере на рис. 4, *b*.

Рассмотрим величину $Q'(t) = p(t)q_1(t) - (1-p(t))q_2(t) - p(t)$. Численные расчеты показывают, что все сложные режимы динамики лежат на поверхности, задаваемой уравнением: $Q' = 1/2$. Кроме того синхронные режимы лежат на части этой поверхности (на прямой $q_1(t) = q_2(t)$, $p(t) = 0.5$). Действительно, подставив в Q' значения фазовых переменных, соответствующих устоявшейся хаотической динамики, можно убедиться, что сумма квадратов отклонения фазовой траектории от этой поверхности не превосходит 10^{-9} , то есть

$$\sum_{t=M}^N \left(p(t)q_1(t) - (1-p(t))q_2(t) - p(t) - 0.5 \right)^2 \lesssim 10^{-9},$$

где $N > M$ — достаточно большие целые числа, $q_1(t)$, $q_2(t)$ и $p(t)$ — координаты фазовых точек системы (3) при $-4 < s < -2$. Строго доказать существование этого многообразия пока не удалось.

Обозначим многообразие, задаваемое уравнением $Q' = 1/2$, как W_1^S . Нетрудно заметить, что W_1^S пересекается с W^S вдоль следующих прямых: $q_1 = 0.5$, $q_2 \in R$, $p = 1$; $q_1 \in R$, $q_2 = 0.5$, $p = 0$; $q_1 = q_2 = 0.5$, $p \in R$. На рис. 5, а показана эта поверхность с лежащими на ней фазовыми точками в случае гиперхаотической динамики.

Правый и левый столбцы рис. 5 показывают, что при разных значениях параметров фазовые точки системы (3) неоднородно заполняют многообразие W_1^S . В показанных примерах фазовые точки концентрируются вдоль собственных подпространств седловых точек E_0 и E_1 , а хаотическое множество содержит неподвижную точку E_2 . Этот факт требует отдельного обстоятельного исследования.

3. Особенности динамики в случае постоянной численности

Рассмотрим ситуацию, при которой на разных территориях численности популяций остаются постоянными во времени или изменяются синхронно. В результате отношение численностей $p = N_1/(N_1 + N_2)$ оказывается постоянной величиной, такой что $0 < p < 1$. В этом случае система (3) имеет вид:

$$\begin{cases} q_1(t+1) = \frac{1}{G_1(t)} \left((1-m)q_1(t)(1+s(1-q_1(t))) + m\frac{1-p}{p}q_2(t)(1+s(1-q_2(t))) \right), \\ q_2(t+1) = \frac{1}{G_2(t)} \left((1-m)q_2(t)(1+s(1-q_2(t))) + m\frac{p}{1-p}q_1(t)(1+s(1-q_1(t))) \right), \end{cases} \quad (5)$$

где нормировочные множители, как и прежде, будут $G_1(t) = (1-m)(1+2sq_1(t)(1-q_1(t))) + m\frac{1-p}{p}(1+2sq_2(t)(1-q_2(t)))$ и $G_2(t) = (1-m)(1+2sq_2(t)(1-q_2(t))) + m\frac{p}{1-p}(1+2sq_1(t)(1-q_1(t)))$.

Система отображений (5) при разных значениях параметров s , m и p имеет от трех до девяти неподвижных точек. Аналитически в данном случае можно выразить лишь первые три точки, которые всегда совпадают с точками E_0 , E_1 и E_2 системы (3) и существуют всегда. Оставшиеся точки находятся лишь численно как корни полинома шестой степени. Это несколько не мешает определить, что они появляются либо путем расщепления точек E_0 , E_1 и E_2 на дополнительную пару неподвижных точек (бифуркация вил), либо в результате седло-узловой бифуркации. На рис. 6, а, с показаны конкретные границы рождения этих неподвижных точек, а также области их устойчивости при вариации параметров. Ниже показаны нульклины системы (5), точки пересечения которых соответствуют неподвижным точкам системы (5). Выколотая точка показывает, что неподвижная точка — седло или неустойчивый узел (исток), жирная точка — устойчивый узел (сток).

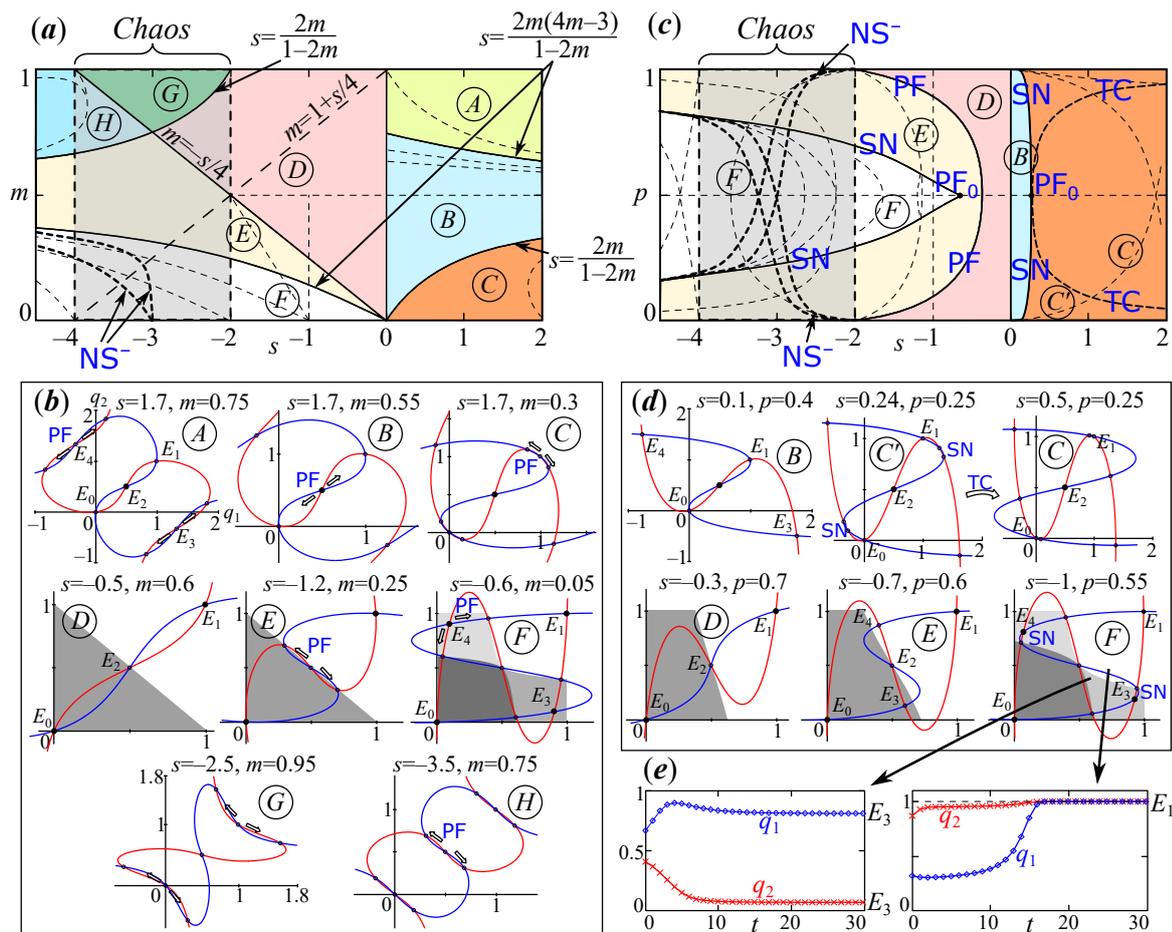


Рис. 6. *a, c* – Параметрический портрет с выделенной областью хаотической динамики (*Chaos*). *b, d* – Нульклины системы (5), показывающие число и расположение неподвижных точек в разных областях параметрического пространства. Нульклины совмещены с бассейнами притяжения би- и квадростабильных режимов. *e* – Пример динамики в случае квадростабильности. Используются следующие значения параметров: *a, b* – $p = 0.5$ и *c, d, e* – $m = 0.1$, остальные значения указаны на рисунке (цвет онлайн)

Fig. 6. *a, c* – Parametric portrait (bifurcation diagram) with highlighted area of chaotic dynamics (*Chaos*). *b, d* – Nullclines of system (5), showing the number and location of fixed points in different regions of the parametric space, are combined with attraction basins of bi- and quadstable regimes. *e* – Examples of dynamics in the case of quadstability (two divergent and two monomorphic states are stable). The following parameter values have been used: *a, b* – $p = 0.5$ and *c, d, e* – $m = 0.1$, other values are shown in the figure (color online)

Как и в общем случае (система (3)) при высокой приспособленности гетерозигот, то есть $s > 0$, в популяции всегда устанавливается полиморфизм (устойчива точка E_2). Вариация других параметров лишь меняет число неподвижных точек, тип устойчивости (седла переходят в неустойчивые узлы или наоборот), а также механизм их рождения. На рис. 6, *a, c* области разного цвета (оттенки серого) соответствуют параметрам, при которых в системе (5) существует разное число неподвижных точек. Соответственно при пересечении их границ рождаются или исчезают некоторые из точек. Так, рис. 6, *b* показывает, например, что при переходе из области *B* в *A*, от точек E_3 и E_4 одновременно отщепляется две пары точек. Причем таким образом, что точка E_3 или E_4 лежит между ними, на равном от них расстоянии. Но происходит это только при большом значении коэффициента миграции $m > 0.5$ и $p = 0.5$. В общем случае $p \neq 0.5$ дополнительные пары точек появляются в результате седло-узловой бифуркации в

стороне от точек E_3 и E_4 . Аналогичным образом при $p = 0.5$ и переходе из области B в C рождается одна пара точек вокруг полиморфной точки E_2 . При $p \neq 0.5$ она появляется в результате седло-узловой бифуркации (см. рис. 6, *c*). Аналогично системе (3) при высоких значениях параметра миграции $m > 0.5$ часть собственных чисел оказывается отрицательной (в том числе для устойчивой точки E_2). В результате движение к устойчивой полиморфной точке E_2 при определенных начальных условиях сопровождается затухающими колебаниями фазовых переменных q_1 и q_2 . Здесь можно пояснить, что пунктирные линии на рис. 6, *a*, *c* показывают параметры, при которых действительная часть собственных чисел меняет свой знак или они расположены на единичной окружности. То есть при пересечении этих линий в системе (5) происходят определенные качественные изменения, которые при $s > 0$ хоть и не влияют на устойчивость точки E_2 , но существенно изменяют характер переходной динамики. Вообще режимы динамики здесь аналогичны отмеченным для полной системы (3).

При низкой приспособленности гетерозигот ($s < 0$) наблюдается бистабильность динамики. В этом случае точки E_0 и E_1 , существовавшие и при $s > 0$, приобретают устойчивость при переходе из областей A , B или E в область параметров D , то есть при $-2 < s < 0$ и $0 < p < 1$. Вместе с тем, при относительно низком коэффициенте миграции в системе (5) устойчивыми оказываются уже четыре точки. Происходит это при переходе в область F . В этом случае можно говорить, что система (5) становится квадростабильной, а в системе двух популяций возможна устойчивая генетическая дивергенция (рис. 6, *e*). Это становится возможным благодаря дополнительной бифуркации. Строго при $p = 0.5$ на границе между E и F от седловых точек E_3 и E_4 отщепляется пара неустойчивых точек, а сами E_3 и E_4 , напротив, приобретают устойчивость (рис. 6, *b*). При $p \neq 0.5$ точки E_3 и E_4 всегда неустойчивы, а дополнительные две пары устойчивой и неустойчивой точек (седло и узел) появляются в стороне от них (рис. 6, *d*). Однако в дальнейшем они могут испытать транскритическую бифуркацию и устойчивая точка окажется между двумя седлами, хоть и не так симметрично как в случае $p = 1/2$. Подробнее об этой бифуркации в случае модели с непрерывным временем написано в [20]. Здесь важно отметить, что чем сильнее величина параметра p отличается от $1/2$, тем при более низких значениях s происходит эта бифуркация (появление квадростабильных режимов) (см. рис. 6, *c*). Кроме того рост коэффициента миграции m «отодвигает» эту границу ближе к области хаотической динамики, границы которой не зависят от m и p . В результате при высоких значениях m неподвижные точки, соответствующие генетической дивергенции (E_3 и E_4), оказываются неустойчивыми либо не существуют, и вне области хаотической динамики ($-2 < s < 0$) устойчивы лишь мономорфные точки E_0 и E_1 , соответствующие мономорфному состоянию популяций.

При высоких значениях параметра миграции m вместо отсутствующих точек, соответствующих дивергенции, появляются периодические точки периода 2, которые вновь делают модель (5) квадростабильной в определенном смысле. При $p = 1/2$ одна из этих пар совпадает с точкой $2P_{1,2}$, найденной для системы (3). При таком значении веса p можно точно определить диапазон параметров рождения этих точек и указать область их устойчивости. Она существует и имеет положительные координаты при $4(m - 1) < s < 0$. Ее появление связано с субкритической бифуркацией удвоения периода точки E_2 при пересечении линии PD^- и переходе параметров из области D в D' (рис. 7, *a*). При $-2 < s < 2(1 - m)(4m - 1)/(1 - 2m)$ и $m > 0.5$ пара точек $2P_{1,2}$ оказывается устойчивой. В момент пересечения линии PF и переходе из области D' в D'' , от нее отщепляется пара седловых точек, и точки $2P_{1,2}$ приобретают устойчивость. В этот момент от бассейна притяжения точек E_0 и E_1 (слева на рис. 7, *b*) отделяются две области притяжения точек $2P_{1,2}$ (справа на рис. 7, *b*). Размер этих областей увеличивается по мере роста коэффициента миграции и роста расстояний между седловыми точками.

Содержательно появление пары периодических точек $2P_{1,2}$ свидетельствует о том, что в системе двух связанных популяций с низкой приспособленностью гетерозигот генетическая

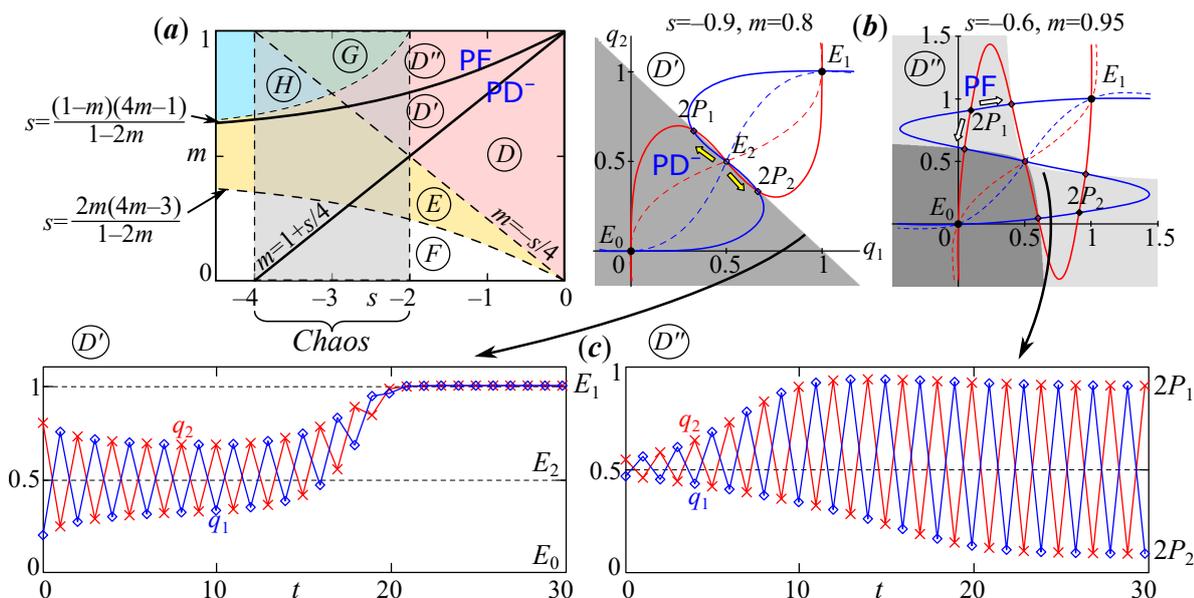


Рис. 7. *a* – Параметрический портрет системы (5) при $p = 0.5$ с нанесенной на него линией субкритической бифуркации удвоения периода PD^- и последующей бифуркации вил PF , после которой периодическая точка $2P_{1,2}$ (2-цикл) приобретает устойчивость. *b* – Нульклины системы (5) (пунктирная линия) и второй итерации системы (5) (сплошная), а также бассейны притяжения устойчивых точек E_0 , E_1 и $2P_{1,2}$. *c* – Примеры динамики в случае би- (слева) и квадростабильности (справа). Начало стрелки показывает примерное расположение стартовой точки (цвет онлайн)

Fig. 7. *a* – Parametric portrait of system (5) at $p = 0.5$ with a line of subcritical period doubling bifurcation PD^- and subsequent supercritical pitchfork bifurcation PF after which the periodic point $2P_{1,2}$ (2-cycle) becomes stable. *b* – Nullclines of system (5) (dotted line) and second iteration of (5) (solid) as well as the attraction basins of stable points E_0 , E_1 and $2P_{1,2}$. *c* – Examples of dynamics in the case of bi- (left) and quadstability (right). The arrow start shows the location of the starting point (color online)

дивергенция оказывается возможной не только при низком коэффициенте миграции, и не только как часть переходной динамики. Это становится возможным, если сохраняется соотношение численностей ($p = const$). Однако в отличие от случая слабой миграции, дивергенция в этом случае проявляется в виде периодических колебаний между двумя состояниями, которые также сосуществуют с двумя устойчивыми мономофными состояниями популяции (E_0 или E_1). Эти колебания проявляются в том, что концентрации аллеля A на разных участках испытывают периодические противофазные колебания с периодом 2 между состояниями с высокой концентрацией аллеля A на первой территории и низкой концентрацией аллеля a на второй территории или наоборот. Если при этом пара точек $2P_{1,2}$ существует, но пока не устойчива (в области параметров D'), то генетическая дивергенция в виде колебаний может наблюдаться лишь как часть переходного процесса при специально подобранных начальных условиях. Пример такой динамики показан слева на рис. 7, *c* и в целом схож с динамикой на рис. 3, *b*. В данном случае стартовая точка выбрана близко к сепаратрисе $q_2 = 1 - q_1$. Однако при достаточно большом коэффициенте миграции (область D'') эти колебания оказываются устойчивыми и наблюдаются неограниченное время (пример справа на рис. 7, *b*). Интересно, что при более низких значениях коэффициента отбора гетерозигот s дивергенция возможна при более низком коэффициенте связи. Однако, пересекая границу при $s < -1$ устойчивые периодические точки $2P_{1,2}$ выходят из единичного квадрата и система (5), как и полная система (3), теряет содержательный смысл.

В общем случае $p \neq 1/2$ описанный сценарий рождения устойчивого периодического режима качественно не меняется. По мере того как значение веса p отдалается от 0.5, точки

$2P_{1,2}$ и окружающие их седла оказываются расположенными менее симметрично. В результате амплитуда колебаний концентраций аллеля A на разных участках оказывается разной (больше там, где меньше численность). Кроме того бифуркационные линии PD^- и PF смещаются выше, то есть 2-цикл возникает при еще более высоких значениях m по мере роста разницы $|p - 0.5|$.

В области хаотической динамики эти периодические точки также существуют, но не устойчивы. Кроме того в системе (5) эти точки существуют и при $s > 0$, однако лежат они за пределами первого квадранта и всегда неустойчивы.

Свойства хаотической динамики системы (3) и (5) в целом схожи. Однако помимо синхронных (при высоких и низких p) и абсолютно несинхронных хаотических режимов (при p близких к 0.5) система (5) также демонстрирует противофазные хаотические колебания переменных q_1 и q_2 . В любом случае динамика состоит из участков расходящихся колебаний вокруг точек E_0 , E_1 и E_2 с квазислучайной длительностью, как и для модели (3).

Из других особенностей системы (5) можно отметить появление девяти неподвижных точек при высоких значениях $m > 0.5$ и $s < -2$. Их появление связано с последовательностью «удвоенный» точек E_0 , E_1 и E_2 , что не наблюдалось в модели (3). В области G пара точек отщепляется от точек E_0 и E_1 , а в области H еще и от E_2 . Здесь также верно, что при $p = 0.5$ эти дополнительные точки рождаются вследствие бифуркации вил (PF), а при $p \neq 0.5$ вследствие седло-узловой бифуркации (SN). Однако среди этих дополнительных точек никогда не бывает устойчивых. Лишь покидая область хаотической динамики (при $s < -4$), из девяти неподвижных точек устойчивой становится полиморфная точка E_2 (крайняя левая часть диаграммы на рис. 6, а, с).

Другая особенность системы (5) связана с тем, что к линиям локальных бифуркаций системы (5), в общем-то, схожих с бифуркациями полной системы (3) или аналогичной модели с непрерывным временем [20], добавляются несколько границ, на которых часть собственных чисел — это комплексно-сопряженные величины. Однако существуют они только в области хаотической динамики (*Chaos* на рис. 6, а, с) при $-4 < s < -2$ и $0 < p < 1$. На рис. 6, а, с эти линии обозначены символом NS^- , где знак « \leftrightarrow » указывает на то, что этой бифуркации подвержены только неустойчивые точки, которые появляются совместно с точками, соответствующими генетической дивергенции. Поэтому довольно сложно судить об изменениях в динамике, связанных с этими точками, особенно в области хаотической динамики.

Заключение

В данной работе была рассмотрена простейшая модель первичной генетической дивергенции в системе двух связанных панмиктических популяций с непересекающимися поколениями и четкой стадийностью развития. В отличие от большинства подобных работ, посвященных поиску условий сохранения полиморфизма, дивергенции и географической изменчивости [7, 10, 11, 18], рассмотрена наиболее полная модель, учитывающая как частоты аллелей, так и численности связанных популяций. Современными методами анализа динамических систем указаны конкретные бифуркации, которые приводят к дивергенции. Построены бифуркационные диаграммы, фазовые портреты и бассейны притяжений. На основе аналога карт седел произведена классификация областей в пространстве параметров, которые отличаются типом динамики (в том числе, переходной динамики).

Дискретное представление времени в модели приводит к некоторым отличиям от аналогичной модели с непрерывным временем, рассмотренной нами ранее [20]. При небольших значениях коэффициента миграции ($m < 0.5$) совпадают бифуркационные линии, на которых рождаются решения, соответствующие дивергенции. Решения в этом случае качественно эквиваленты. Существенные отличия наблюдаются при высоких значениях коэффициента миграции ($m > 0.5$), когда при определенных условиях возникают колебания частот аллелей или соотношения численностей.

Режимы, соответствующие дивергенции, возможны при пониженной приспособленности гетерозигот, когда динамика оказывается бистабильной или даже квадростабильной. В случае бистабильности дивергенция возможна только как часть переходного процесса, если соответствующие дивергенции решения существуют, но пока неустойчивы (хотя бистабильность возможна и без существования этого дополнительного решения). Стабилизация дивергентного состояния происходит при определенных ограничениях, накладываемых на рост численности. Например, при введении экологического лимитирования роста численности. Появление устойчивой генетической дивергенции сопровождается рядом качественных перестроек. При слабой связи происходит субкритическая бифуркация вил полиморфной неподвижной точки, за ней следует суперкритическая бифуркация вил (в случае равных численностей на обеих территориях), либо седло-узловая бифуркация (при неравных численностях). При сильной связи сценарий аналогичен, однако вместо субкритической бифуркации полиморфной неподвижной точки происходит субкритическое удвоение периода, а последующая бифуркация рождает устойчивую периодическую точку (2-цикл). В этом случае динамика оказывается квадростабильной — в зависимости от начальной генетической структуры обе популяции оказываются генетически однородными (мономорфизм), либо они демонстрируют существенные различия в структуре (дивергенция). При высоких значениях коэффициента миграции дивергенция сопровождается противофазными колебаниями частот аллелей на разных территориях.

Обнаружены сложные режимы динамики, которые хотя и не имеют содержательного биологического смысла, но могут быть интересны как пример сложноорганизованной динамики. Их особенность заключается в серии расходящихся колебаний вокруг разных неподвижных точек, соответствующих мономорфизму или полиморфизму в смежных популяциях, и квазислучайных переходов между ними.

Список литературы

1. *Haldane J. B. S.* A mathematical theory of natural and artificial selection. Part II. The influence of partial self-fertilisation, inbreeding, assortative mating, and selective fertilisation on the composition of Mendelian populations, and on natural selection // *Biological Reviews*. 1924. Vol. 1, no. 3. P. 158–163. DOI: 10.1111/j.1469-185X.1924.tb00546.x.
2. *Fisher R. A.* The Genetical Theory of Natural Selection. Oxford: Clarendon Press, 1930. 272 p. DOI: 10.5962/bhl.title.27468.
3. *Wright S.* Evolution in Mendelian populations // *Genetics*. 1931. Vol. 16, no. 2. P. 97–159. DOI: 10.1093/genetics/16.2.97.
4. *Фрисман Е. Я., Шаниро А. П.* Избранные математические модели дивергентной эволюции популяций. М.: Наука, 1977. 152 с.
5. *Свирижев Ю. М., Пасеков В. П.* Основы математической генетики. М.: Наука, 1982. 512 с.
6. *Фрисман Е. Я.,* Первичная генетическая дивергенция (Теоретический анализ и моделирование). Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1986. 160 с.
7. *Bürger R.* A survey of migration-selection models in population genetics // *Discrete & Continuous Dynamical Systems - B*. 2014. Vol. 19, no. 4. P. 883–959. DOI: 10.3934/dcdsb.2014.19.883.
8. *Carroll S. P., Hendry A. P., Reznick D. N., Fox C. W.* Evolution on ecological time-scales // *Functional Ecology*. 2007. Vol. 21, no. 3. P. 387–393. DOI: 10.1111/j.1365-2435.2007.01289.x.
9. *Pelletier F., Garant D., Hendry A. P.* Eco-evolutionary dynamics // *Phil. Trans. R. Soc. B*. 2009. Vol. 364, no. 1523. P. 1483–1489. DOI: 10.1098/rstb.2009.0027.
10. *Yeaman S., Otto S. P.* Establishment and maintenance of adaptive genetic divergence under migration, selection, and drift // *Evolution*. 2011. Vol. 65, no. 7. P. 2123–2129. DOI: 10.1111/j.1558-5646.2011.01277.x.
11. *Bertram J., Masel J.* Different mechanisms drive the maintenance of polymorphism at loci

- subject to strong versus weak fluctuating selection // *Evolution*. 2019. Vol. 73, no. 5. P. 883–896. DOI: 10.1111/evo.13719.
12. *Neverova G. P., Zhdanova O. L., Frisman E. Y.* Effects of natural selection by fertility on the evolution of the dynamic modes of population number: bistability and multistability // *Nonlinear Dyn.* 2020. Vol. 101, no. 1. P. 687–709. DOI: 10.1007/s11071-020-05745-w.
 13. *Zhdanova O. L., Frisman E. Y.* Genetic polymorphism under cyclical selection in long-lived species: The complex effect of age structure and maternal selection // *Journal of Theoretical Biology*. 2021. Vol. 512. P. 110564. DOI: 10.1016/j.jtbi.2020.110564.
 14. *Telschow A., Hammerstein P., Werren J. H.* The effect of Wolbachia on genetic divergence between populations: Models with two-way migration // *The American Naturalist*. 2002. Vol. 160, no. S4. P. S54–S66. DOI: 10.1086/342153.
 15. *Fussmann G. F., Loreau M., Abrams P. A.* Eco-evolutionary dynamics of communities and ecosystems // *Functional Ecology*. 2007. Vol. 21, no. 3. P. 465–477. DOI: 10.1111/j.1365-2435.2007.01275.x.
 16. *Tellier A., Brown J. K. M.* Stability of genetic polymorphism in host–parasite interactions // *Proc. R. Soc. B*. 2007. Vol. 274, no. 1611. P. 809–817. DOI: 10.1098/rspb.2006.0281.
 17. *Nagylaki T., Lou Y.* The dynamics of migration–selection models // In: Friedman A. (ed) *Tutorials in Mathematical Biosciences IV*. Vol. 1922 of *Lecture Notes in Mathematics*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. P. 117–170. DOI: 10.1007/978-3-540-74331-6_4.
 18. *Akerman A., Bürger R.* The consequences of gene flow for local adaptation and differentiation: a two-locus two-deme model // *J. Math. Biol.* 2014. Vol. 68, no. 5. P. 1135–1198. DOI: 10.1007/s00285-013-0660-z.
 19. *Пасеков В. П.* К анализу слабого двулокусного отбора по жизнеспособности и квазиравновесия по сцеплению // *Доклады Академии наук*. 2019. Т. 484, № 6. С. 781–785. DOI: 10.31857/S0869-56524846781-785.
 20. *Фрисман Е. Я., Кулаков М. П.* О генетической дивергенции в системе двух смежных популяций, обитающих на однородном ареале // *Известия вузов. ПНД*. 2021. Т. 29, № 5. С. 706–726. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-706-726.
 21. *Фрисман Е. Я., Жданова О. Л., Кулаков М. П., Неверова Г. П., Ревуцкая О. Л.* Математическое моделирование популяционной динамики на основе рекуррентных уравнений: результаты и перспективы. Ч. II // *Известия РАН. Серия биологическая*. 2021. № 3. С. 227–240. DOI: 10.31857/S000233292103005X.
 22. *Altrock P. M., Traulsen A., Reeves R. G., Reed F. A.* Using underdominance to bi-stably transform local populations // *Journal of Theoretical Biology*. 2010. Vol. 267, no. 1. P. 62–75. DOI: 10.1016/j.jtbi.2010.08.004.
 23. *Láruson Á. J., Reed F. A.* Stability of underdominant genetic polymorphisms in population networks // *Journal of Theoretical Biology*. 2016. Vol. 390. P. 156–163. DOI: 10.1016/j.jtbi.2015.11.023.
 24. *Гонченко А. С., Гонченко С. В., Казаков А. О., Козлов А. Д.* Математическая теория динамического хаоса и её приложения: Обзор. Часть 1. Псевдогиперболические аттракторы // *Известия вузов. ПНД*. 2017. Т. 25, № 2. С. 4–36. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-2-4-36.

References

1. Haldane JBS. A mathematical theory of natural and artificial selection. Part II. The influence of partial self-fertilisation, inbreeding, assortative mating, and selective fertilisation on the composition of Mendelian populations, and on natural selection. *Biological Reviews*. 1924;1(3): 158–163. DOI: 10.1111/j.1469-185X.1924.tb00546.x.

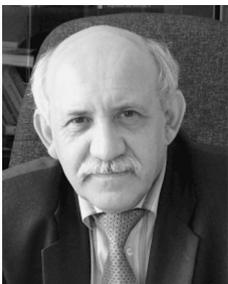
2. Fisher RA. The Genetical Theory of Natural Selection. Oxford: Clarendon Press; 1930. 272 p. DOI: 10.5962/bhl.title.27468.
3. Wright S. Evolution in Mendelian populations. *Genetics*. 1931;16(2):97–159. DOI: 10.1093/genetics/16.2.97.
4. Frisman EY, Shapiro AP. Selected Mathematical Models of Divergent Evolution of Populations. Moscow: Nauka; 1977. 152 p. (in Russian).
5. Svirezhev YM, Pasekov VP. Fundamentals of Mathematical Genetics. Moscow: Nauka; 1982. 512 p. (in Russian).
6. Frisman EY. Primary Genetic Divergence (Theoretical Analysis and Modeling). Vladivostok: FESC AS USSR; 1986. 160 p. (in Russian).
7. Bürger R. A survey of migration-selection models in population genetics. *Discrete & Continuous Dynamical Systems - B*. 2014;19(4):883–959. DOI: 10.3934/dcdsb.2014.19.883.
8. Carroll SP, Hendry AP, Reznick DN, Fox CW. Evolution on ecological time-scales. *Functional Ecology*. 2007;21(3):387–393. DOI: 10.1111/j.1365-2435.2007.01289.x.
9. Pelletier F, Garant D, Hendry AP. Eco-evolutionary dynamics. *Phil. Trans. R. Soc. B*. 2009;364(1523):1483–1489. DOI: 10.1098/rstb.2009.0027.
10. Yeaman S, Otto SP. Establishment and maintenance of adaptive genetic divergence under migration, selection, and drift. *Evolution*. 2011;65(7):2123–2129. DOI: 10.1111/j.1558-5646.2011.01277.x.
11. Bertram J, Masel J. Different mechanisms drive the maintenance of polymorphism at loci subject to strong versus weak fluctuating selection. *Evolution*. 2019;73(5):883–896. DOI: 10.1111/evo.13719.
12. Neverova GP, Zhdanova OL, Frisman EY. Effects of natural selection by fertility on the evolution of the dynamic modes of population number: bistability and multistability. *Nonlinear Dyn.* 2020;101(1):687–709. DOI: 10.1007/s11071-020-05745-w.
13. Zhdanova OL, Frisman EY. Genetic polymorphism under cyclical selection in long-lived species: The complex effect of age structure and maternal selection. *Journal of Theoretical Biology*. 2021;512:110564. DOI: 10.1016/j.jtbi.2020.110564.
14. Telschow A, Hammerstein P, Werren JH. The effect of Wolbachia on genetic divergence between populations: Models with two-way migration. *The American Naturalist*. 2002;160(S4):S54–S66. DOI: 10.1086/342153.
15. Fussmann GF, Loreau M, Abrams PA. Eco-evolutionary dynamics of communities and ecosystems. *Functional Ecology*. 2007;21(3):465–477. DOI: 10.1111/j.1365-2435.2007.01275.x.
16. Tellier A, Brown JKM. Stability of genetic polymorphism in host–parasite interactions. *Proc. R. Soc. B*. 2007;274(1611):809–817. DOI: 10.1098/rspb.2006.0281.
17. Nagylaki T, Lou Y. The dynamics of migration–selection models. In: Friedman A, editor. *Tutorials in Mathematical Biosciences IV*. Vol. 1922 of *Lecture Notes in Mathematics*. Berlin, Heidelberg: Springer; 2008. P. 117–170. DOI: 10.1007/978-3-540-74331-6_4.
18. Akerman A, Bürger R. The consequences of gene flow for local adaptation and differentiation: a two-locus two-deme model. *J. Math. Biol.* 2014;68(5):1135–1198. DOI: 10.1007/s00285-013-0660-z.
19. Passekov VP. On the analysis of weak two-locus viability selection and quasi-linkage equilibrium. *Dokl. Biol. Sci.* 2019;484(1):23–26. DOI: 10.1134/S0012496619010071.
20. Frisman EJ, Kulakov MP. On the genetic divergence of two adjacent populations living in a homogeneous habitat. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2021;29(5):706–726 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-706-726.
21. Frisman EY, Zhdanova OL, Kulakov MP, Neverova GP, Revutskaya OL. Mathematical modeling of population dynamics based on recurrent equations: Results and prospects. Part II. *Biology Bulletin*. 2021;48(3):239–250. DOI: 10.1134/S1062359021030055.

22. Altrock PM, Traulsen A, Reeves RG, Reed FA. Using underdominance to bi-stably transform local populations. *Journal of Theoretical Biology*. 2010;267(1):62–75. DOI: 10.1016/j.jtbi.2010.08.004.
23. Láruson ÁJ, Reed FA. Stability of underdominant genetic polymorphisms in population networks. *Journal of Theoretical Biology*. 2016;390:156–163. DOI: 10.1016/j.jtbi.2015.11.023.
24. Gonchenko AS, Gonchenko SV, Kazakov AO, Kozlov AD. Mathematical theory of dynamical chaos and its applications: review part 1. Pseudohyperbolic attractors. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017;25(2):4–36. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-2-4-36.



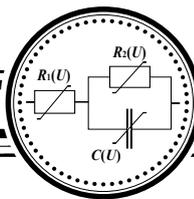
Кулаков Матвей Павлович — родился в Биробиджане Еврейской автономной области (1982). Окончил Биробиджанский государственный педагогический институт (2004). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, по специальности «биофизика» (2018). Старший научный сотрудник лаборатории математического моделирования популяционных и экологических систем Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН. Научные интересы связаны с использованием методов нелинейной динамики, качественной теории дифференциальных уравнений, бифуркаций, хаоса и синхронизации для изучения особенностей функционирования пространственно распределенных живых систем: популяций животных и биологических сообществ.

Россия, 679016, Биробиджан, ул. Шолом-Алейхема, 4
Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН
E-mail: k_matvey@mail.ru
ORCID: 0000-0002-7060-2731
AuthorID: 170285



Фрисман Ефим Яковлевич — родился в 1948 году в г. Сталинабад (ныне Душанбе). Окончил Новосибирский государственный университет (1971). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата биологических наук по специальности «генетика» (1982) и доктора биологических наук по специальности «биофизика» (1989). Член-корреспондент Российской академии наук по специальности «общая биология» (2011). После окончания университета работал в Институте автоматизации и процессов управления ДВО РАН: занимал должности от стажера-исследователя до заведующего лабораторией. С 2002 по 2017 — директор Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН. Ныне — научный руководитель этого института. Автор более 200 публикаций по общим вопросам математического моделирования и по конкретным моделям экологических и популяционных систем. Научные интересы связаны с моделированием динамики популяционных и экологических систем, математической популяционной генетикой и задачами оптимального управления.

Россия, 679016, Биробиджан, ул. Шолом-Алейхема, 4
Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН
E-mail: frisman@mail.ru
ORCID: 0000-0003-1629-2610
AuthorID: 1986



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(2)

Краткое сообщение
УДК 53.082.7
DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-233-238

Нелинейное усиление сигнала магнитной индукции в магнитомодуляционном датчике с аморфным ферромагнитным сердечником

О. Л. Сокол-Кутыловский

Институт геофизики имени Ю. П. Булашевича
Уральского отделения РАН, Екатеринбург, Россия
E-mail: s-k52@mail.ru

Поступила в редакцию 8.08.2021, принята к публикации 26.01.2022,
опубликована 31.03.2022

Аннотация. Цель настоящего исследования — показать возможность использования управляемой магнитным полем нелинейности изменения амплитуды в колебательном LC -контуре, содержащем сердечник из аморфного ферромагнитного сплава с компенсированной продольной магнитострикцией, что позволяет получить высокий коэффициент преобразования датчиков слабого магнитного поля, работающих при комнатной температуре. **Методы.** Рассмотрен реализованный на практике метод построения магнитомодуляционных датчиков магнитной индукции с фиксированным магнитным полем смещения, которое соответствует максимальной крутизне нелинейной характеристики колебательного LC -контур с аморфным ферромагнитным сердечником в области автопараметрического резонанса. **Результаты.** Показано, что устойчивый коэффициент преобразования датчика длиной 35 мм на основе LC -контур с автопараметрическим усилением на частоте модуляции 256 кГц может достигать 10 мВ/нТл, что позволяет при имеющейся элементной базе регистрировать сигналы слабого переменного магнитного поля с амплитудой $0.03 \text{ пТл/Гц}^{1/2}$ в частотном диапазоне от 10 до 1000 Гц. Отмечено, что возбуждение датчика слабым гармоническим магнитным полем высокой частоты и постоянное нахождение аморфного ферромагнитного сердечника вблизи состояния технического насыщения значительно снижает уровень собственного магнитного шума магнитомодуляционного датчика. **Заключение.** Магнитомодуляционные датчики с автопараметрическим усилением сигнала магнитной индукции могут найти применение в геофизике, магнитобиологии и биомедицине.

Ключевые слова: магнитомодуляционный датчик, автопараметрический резонанс, нелинейность намагничивания, измерение слабого магнитного поля.

Для цитирования: Сокол-Кутыловский О. Л. Нелинейное усиление сигнала магнитной индукции в магнитомодуляционном датчике с аморфным ферромагнитным сердечником // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 2. С. 233–238.
DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-233-238

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Nonlinear amplification of the magnetic induction signal in a magnetomodulation sensor with an amorphous ferromagnetic core

O. L. Sokol-Kutylovskii

Yu. P. Bulashevich Institute of Geophysics,
Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia
E-mail: s-k52@mail.ru

Received 8.08.2021, accepted 26.01.2022, published 31.03.2022

Abstract. The purpose of this work is to show the possibility of using a magnetic field-controlled nonlinearity of the amplitude change in an oscillatory LC -circuit containing a core made of an amorphous ferromagnetic alloy with compensated longitudinal magnetostriction, which makes it possible to obtain a high conversion coefficient of weak magnetic field sensors operating at room temperature. **Methods.** A practical method for constructing magnetomodulation sensors of magnetic induction with a fixed magnetic displacement field, which corresponds to the maximum steepness of the nonlinear characteristic of an oscillatory circuit with an amorphous ferromagnetic core in the region of autparametric resonance, is considered. **Results.** It has been shown that the stable conversion factor of a 35 mm long sensor based on an oscillatory circuit with autparametric amplification at a modulation frequency of 256 kHz can reach 10 mV/nT, which allows, with the available element base, to record signals of a weak alternating magnetic field with an amplitude of 0.03 pT/Hz^{1/2} in the frequency range 10...1000 Hz. It is noted that the excitation of the sensor by a weak harmonic magnetic field of a high frequency and the constant presence of the amorphous ferromagnetic core near the state of technical saturation significantly reduces the level of intrinsic magnetic noise of the magnetomodulation sensor. **Conclusion.** Magnetomodulation sensors with autparametric amplification of the magnetic induction signal can find application in geophysics, magnetobiology and biomedicine.

Keywords: magnetomodulation sensor, autparametric resonance, magnetization nonlinearity, weak magnetic field measurement.

For citation: Sokol-Kutylovskii OL. Nonlinear amplification of the magnetic induction signal in a magnetomodulation sensor with an amorphous ferromagnetic core. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(2):233–238.

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-233-238

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Измерение слабого магнитного поля низких частот с амплитудой менее 1 пТл остается одним из востребованных направлений современных прикладных исследований в геофизике, магнитобиологии и биомедицине. Несмотря на большое количество имеющихся датчиков магнитного поля продолжается их совершенствование и идет разработка новых методов измерения магнитной индукции. Это связано как с техническими особенностями разработанных приборов, так и с условиями и методами их работы. Индукционные датчики надежны и просты в изготовлении, но для работы на низких частотах они имеют достаточно большие размеры, измеряют не магнитную индукцию, а ее производную по времени, что делает их практически непригодными для измерения широкополосных сигналов и сигналов магнитного поля низких частот близко расположенных к ним объектов [1]. Феррозондовые приборы имеют относительно высокий уровень собственного магнитного шума (5...10 пТл/Гц^{1/2}), хотя в последнее время появились сообщения о феррозондах с ортогональным возбуждением, имеющих порог чувствительности 2 пТл/Гц^{1/2} [2]. Квантовые магнитометры с оптической накачкой измеряют модуль магнитной индукции и требуют постоянного подогрева паров рабочего вещества. Использование в квантовых магнитометрах с оптической накачкой твердотельного датчика в виде кристалла алмаза с замещением части атомов углерода атомами азота позволяет получить высокую чувствительность только при использовании

ферритового концентратора магнитного потока [3]. Самыми совершенными векторными магнитометрами считаются низкотемпературные сверхпроводящие квантовые интерференционные детекторы (СКВИДы), которые имеют порог чувствительности $1 \text{ фТл/Гц}^{1/2}$ [4], но они работают при температуре около 4 К, что резко ограничивает их широкое применение. Разработанные позднее высокотемпературные СКВИДы по порогу чувствительности приближаются к низкотемпературным СКВИДам, но также требуют применения криогенной техники, так как работают при температуре жидкого азота [5].

1. Магнитомодуляционные датчики с автопараметрическим усилением

Создание высокочувствительных датчиков магнитного поля с автопараметрическим усилением сигнала магнитной индукции стало возможным с появлением аморфных ферромагнитных сплавов с компенсированной продольной магнитострикцией, получаемых методом быстрой заковки из расплава. Отсутствие кристаллической решетки в аморфных ферромагнитных сплавах приводит к тому, что механическое напряжение является действующим фактором первого порядка, как и внешнее магнитное поле [6]. В результате этого механическое напряжение может обратимо привести аморфный ферромагнетик в состояние, подобное насыщению его внешним магнитным полем. При этом в аморфных ферромагнетиках, полученных методом быстрой заковки из расплава, возникает эффективное прямое и обратное магнитноупругое взаимодействие, которое имеет место даже в аморфных ферромагнитных сплавах с компенсированной продольной магнитострикцией. При возбуждении аморфных ферромагнетиков внешним магнитным полем, из-за четности магнитноупругих эффектов, после обратного магнитноупругого преобразования в них, кроме первичного сигнала возбуждения, появляются сигналы магнитного поля четных гармоник частоты возбуждения. При этом амплитуда ряда гармоник может быть сопоставима с амплитудой сигнала возбуждения. В LC -контуре с аморфным ферромагнитным сердечником при определенном соотношении частоты и амплитуды модуляции, во внешнем магнитном поле, направленном вдоль аморфного ферромагнитного сердечника, возникает автопараметрический резонанс, приводящий к скачкообразному изменению амплитуды напряжения на LC -контуре.

На рисунке показана типовая экспериментальная зависимость амплитуды напряжения U на колебательном LC -контуре с аморфным ферромагнитным сердечником от величины внешнего постоянного магнитного поля H , направленного вдоль продольной оси аморфного ферромагнитного сердечника в области параметрического резонанса. При превышении уровня возбуждения сердечника возникает скачкообразное изменение амплитуды напряжения на LC -контуре (рис. а). Направление намагничивания показано стрелками. Пунктирные линии показывают разрывы зависимости и соответствуют скачкам амплитуды напряжения. При уменьшении амплитуды возбуждения LC -контур расстояние между скачками (гистерезис) уменьшается и, начиная с некоторой амплитуды возбуждения, нелинейная резонансная зависимость амплитуды напряжения на LC -контуре становится непрерывной (рис. б). Здесь область максимальной крутизны преобразования отмечена овалом, а пунктирной линией показана нерезонансная зависимость амплитуды напряжения на LC -контуре.

При неизменной частоте и амплитуде магнитного поля модуляции амплитуда напряжения на LC -контуре зависит только от величины составляющей внешнего магнитного поля, совпадающей с продольной осью аморфного ферромагнитного сердечника. Так как зависимость «амплитуда напряжения – магнитная индукция» на LC -контуре нелинейная и неоднозначная, то для измерительных целей ее необходимо преобразовать в линейную и сделать однозначной. Линеаризация этой зависимости технически достигается тем, что магнитное поле смещения, соответствующее выбранному коэффициенту преобразования, поддерживается системой отрицательной обратной связи по магнитному полю, а измеряемый сигнал снимается с катушки обратной

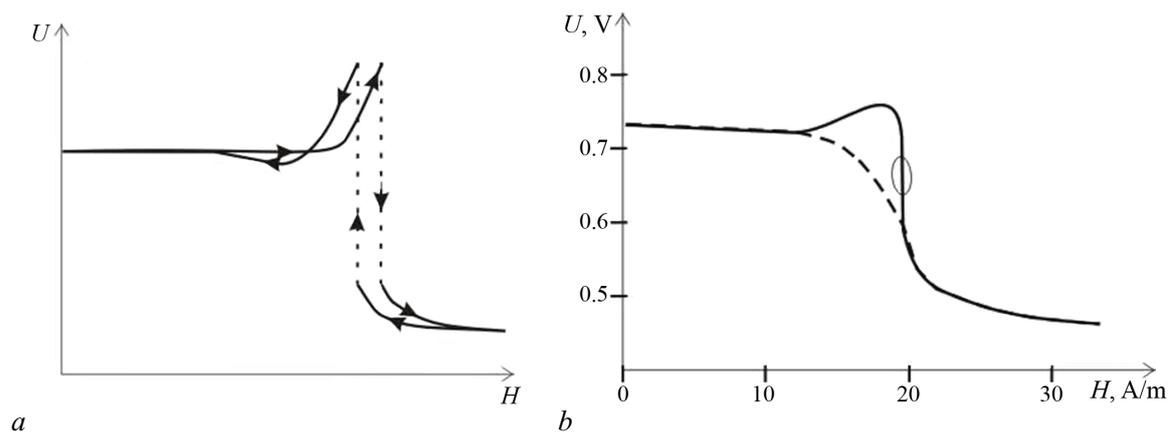


Рисунок. Амплитуда напряжения на LC -контуре с сердечником из аморфного ферромагнитного сплава при автопараметрическом резонансе в зависимости от внешнего магнитного поля H : a – при сильном возбуждении, b – при слабом возбуждении

Figure. Voltage amplitude across the LC -circuit with an amorphous ferromagnetic alloy core at autoparametric resonance depending on the external magnetic field H : a – with strong arousal, b – with weak arousal

связи, охватывающей аморфный ферромагнитный сердечник. При этом постоянное магнитное поле смещения непрерывно поддерживается путем сравнения его с соответствующим напряжением прецизионного источника опорного напряжения. Захват рабочей точки на зависимости «амплитуда напряжения – магнитная индукция» осуществляется кратковременным отключением источника питания отрицательной полярности операционного усилителя, осуществляющего пропорционально-интегрирующее регулирование тока в катушке обратной связи. В результате этого захват области рабочей точки всегда происходит с одной стороны резонансной кривой. Принципиальная электрическая схема одного из вариантов магнитомодуляционного преобразователя опубликована в [7].

Экспериментальная зависимость, показанная на рис. b , была получена на сердечнике в виде ленты аморфного ферромагнитного сплава базового состава $Fe_5Co_{70}Si_{15}B_{10}$ с размерами $35 \times 0.6 \times 0.02$ мм. Катушка колебательного LC -контурa содержала около 600 витков медного провода диаметром 0.071 мм. Частота возбуждения LC -контурa равнялась 256 кГц, а амплитуда тока возбуждения – менее 0.45 мА. Коэффициент преобразования магнитомодуляционного датчика с LC -контуром в рабочей области, отмеченной на рис. b овалом, может быть установлен в пределах от 1 мкВ/нТл до 10 мВ/нТл. При этом мощность возбуждения LC -контурa при наибольшей чувствительности не превышает 0.3 мВт. Если после детектирования высокочастотного напряжения на LC -контуре коэффициент преобразования будет составлять всего 1 мВ/нТл, то при применении на входе электрической схемы операционного усилителя ОР-27, имеющего входной шум 3 нВ/Гц^{1/2} в диапазоне частот от 10 Гц и выше, в магнитомодуляционном датчике с автопараметрическим усилением можно получить разрешение по магнитному полю около 0.03 пТл/Гц^{1/2}.

Порог чувствительности датчика зависит от собственного магнитного шума аморфного ферромагнитного сердечника и шумов активных и пассивных элементов электронной схемы. Тепловым шумом катушки индуктивности LC -контурa можно пренебречь, так как ее активное сопротивление составляет всего около 20 Ом. Как следует из опыта работы с индукционными датчиками, собственный магнитный шум ферромагнитных сердечников в пассивном состоянии в слабом магнитном поле достаточно мал [1]. В активных датчиках на основе ферромагнитных сердечников потеря энергии при их возбуждении состоит из потерь на вихревые токи и потерь на перемагничивание, которые характеризуются площадью петли гистерезиса. В аморфных ферромаг-

нетиках потерь на вихревые токи практически нет. Это следует как из их относительно высокого удельного электрического сопротивления, так и из геометрии сердечника в виде узкой тонкой полоски аморфного ферромагнитного сплава. Что касается магнитомодуляционных датчиков с автопараметрическим усилением на основе аморфных сплавов с компенсированной продольной магнитострикцией, то, в отличие от феррозондов, их возбуждение осуществляется слабым магнитным полем высокой частоты по частной петле, занимающей ничтожно малую часть полной петли гистерезиса. Кроме того, значительная часть энергии высокочастотного перемагничивания сердечника по частной петле не является безвозвратно потерянной, а при автопараметрическом резонансе возвращается в энергию колебательного LC -контура в виде энергии четных гармоник, возникающих в результате магнитоупругого взаимодействия. Поэтому реальные потери энергии и случайный магнитный шум при высокочастотном перемагничивании аморфных ферромагнетиков в области автопараметрического резонанса могут быть значительно меньше.

Расчетная магнитная проницаемость формы сердечника из примененного аморфного ферромагнитного сплава с компенсированной продольной магнитострикцией примерно равна 18600. Так как магнитная проницаемость материала сердечника из данного аморфного ферромагнитного сплава близка к 500000, то магнитная проницаемость собственно сердечника оказывается равной 18000. Как следует из рис. *b*, напряженность внешнего магнитного поля в рабочей точке, соответствующей области максимальной крутизны резонанса, $H = 20$ А/м. В таком случае магнитная индукция в аморфном ферромагнитном сердечнике в области рабочей точки равна 0.36 Тл. Это значение достаточно близко к индукции насыщения данного аморфного ферромагнитного сплава, $B_s = 0.43$ Тл. То есть аморфный ферромагнитный сердечник во время работы постоянно находится в полунасыщенном состоянии, что способствует снижению собственного магнитного шума, вызываемого процессом перемагничивания и тепловыми флуктуациями намагниченности.

Заключение

1. *Чувствительность датчика.* Использование участка нелинейной зависимости «магнитная индукция — напряжение в колебательной LC -контуре с аморфным ферромагнитным сердечником» в области максимальной крутизны характеристики автопараметрического резонанса позволяет получить в магнитомодуляционном датчике с аморфным ферромагнитным сердечником коэффициент преобразования, достигающий 10 мВ/нТл.
2. *Порог чувствительности датчика.* Возбуждение колебательного LC -контура с аморфным ферромагнитным сердечником слабым гармоническим магнитным полем высокой частоты и смещение рабочей точки аморфного ферромагнитного сердечника в область его технического насыщения обеспечивает низкий уровень собственных шумов.
3. *Сфера применения датчика.* Магнитомодуляционные датчики с автопараметрическим усилением сигнала магнитной индукции могут найти применение в различных областях науки и техники при измерении слабого переменного магнитного поля низких частот.

Список литературы

1. Поляков С. В., Резников Б. И., Щенников А. В., Копытенко Е. А., Самсонов Б. В. Линейка индукционных датчиков магнитного поля для геофизических исследований // Сейсмические приборы. 2016. Т. 52, № 1. С. 5–27.
2. Janosek M., Butta M., Dressler M., Saunderson E., Novotny D., Fourie C. 1-pT noise fluxgate magnetometer for geomagnetic measurements and unshielded magnetocardiography // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. 2020. Vol. 69, no. 5. P. 2552–2560. DOI: 10.1109/TIM.2019.2949205.

3. *Fescenko I., Jarmola A., Savukov I., Kehayias P., Smits J., Damron J., Ristoff N., Mosavian N., Acosta V.M.* Diamond magnetometer enhanced by ferrite flux concentrators // *Physical Review Research*. 2020. Vol. 2, no. 2. P. 023394. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.2.023394.
4. *Yang K., Chen H., Lu L., Kong X., Yang R., Wang J.* SQUID array with optimal compensating configuration for magnetocardiography measurement in different environments // *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*. 2019. Vol. 29, no. 6. P. 1600707. DOI: 10.1109/TASC.2019.2904483.
5. *Faley M.I., Maslennikov Y.V., Koshelets V.P., Dunin-Borkowski R.E.* Flip-chip high-Tc dc SQUID magnetometer with a ferromagnetic flux antenna // *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*. 2018. Vol. 28, no. 4. P. 1600505. DOI: 10.1109/TASC.2018.2791414.
6. *Сокол-Кутыловский О.Л.* О влиянии механического напряжения на ленты аморфных ферромагнитных сплавов // *Деп. ВИНТИ*. 2002. № 1338-B2002. 9 с.
7. *Sokol-Kutylovskii O.L.* A magneto-modulating meter of a weak variable magnetic field // *Instruments and Experimental Techniques*. 2019. Vol. 62, no. 4. P. 554–557. DOI: 10.1134/S0020441219040110.

References

1. Poliakov SV, Reznikov BI, Shchennikov AV, Kopytenko EA, Samsonov BV. The range of induction-coil magnetic field sensors for geophysical explorations. *Seismic Instruments*. 2016; 52(1):5–27 (in Russian).
2. Janosek M, Butta M, Dressler M, Saunderson E, Novotny D, Fourie C. 1-pT noise fluxgate magnetometer for geomagnetic measurements and unshielded magnetocardiography. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*. 2020;69(5):2552–2560. DOI: 10.1109/TIM.2019.2949205.
3. Fescenko I, Jarmola A, Savukov I, Kehayias P, Smits J, Damron J, Ristoff N, Mosavian N, Acosta VM. Diamond magnetometer enhanced by ferrite flux concentrators. *Physical Review Research*. 2020;2(2):023394. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.2.023394.
4. Yang K, Chen H, Lu L, Kong X, Yang R, Wang J. SQUID array with optimal compensating configuration for magnetocardiography measurement in different environments. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*. 2019;29(6):1600707. DOI: 10.1109/TASC.2019.2904483.
5. Faley MI, Maslennikov YV, Koshelets VP, Dunin-Borkowski RE. Flip-chip high-Tc dc SQUID magnetometer with a ferromagnetic flux antenna. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*. 2018;28(4):1600505. DOI: 10.1109/TASC.2018.2791414.
6. Sokol-Kutylovskii OL. On the effect of mechanical stress on strips of amorphous ferromagnetic alloys. *Dep. VINITI*. 2002. No. 1338-B2002. 9 p. (in Russian).
7. Sokol-Kutylovskii OL. A magneto-modulating meter of a weak variable magnetic field. *Instruments and Experimental Techniques*. 2019;62(4):554–557. DOI: 10.1134/S0020441219040110.



Сокол-Кутыловский Олег Леонидович — родился в 1952 году. Окончил Кубанский государственный университет (1978). Доктор технических наук (1998). Работает в Институте геофизики имени Ю. П. Булашевича Уральского отделения РАН в должности старшего научного сотрудника. Научные интересы: физика магнитных явлений.

Россия, 620016 Екатеринбург, ул. Амундсена, 100
 Институт геофизики имени Ю. П. Булашевича Уральского отделения РАН
 E-mail: s-k52@mail.ru
 ORCID: 0000-0003-1221-7322
 AuthorID: 28781



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(2)

Научная статья
УДК 530.182
DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-239-252

Особенности многоэлектродной регистрации эпизодических разрядов слабоэлектрических рыб

В. М. Ольшанский¹✉, Д. В. Зленко^{1,2}, А. А. Орлов¹, А. О. Касумян²,
П. Моллер³, Е. МакМагон⁴, Сюэ Вэй⁵

¹Институт проблем экологии и эволюции имени А. Н. Северцова РАН, Москва, Россия

²Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия

³Хантерский колледж, Нью-Йорк, США

⁴Biosphere Environmental Ltd, Киллало, Ирландия

⁵Харбинский инженерный университет, Китай

E-mail: ✉vmolsh@yandex.ru, dvzlenko@gmail.com, and.a.orlov@gmail.com, alex_kasumyan@mail.ru,
pmoller@hunter.cuny.edu, biosphere.eoin@gmail.com, xuewei@hrbeu.edu.cn.

Поступила в редакцию 9.11.2021, принята к публикации 23.11.2021, опубликована 31.03.2022

Аннотация. Цель данной работы заключалась в разработке многоэлектродной матричной регистрации для построения образов электрических полей эпизодических разрядов слабоэлектрических рыб. **Методы.** Описаны особенности многоэлектродной регистрации для исследований электрических рыб: конструкция электродной решётки, схемы усилителей, организация общих точек для дифференциальных измерений и восстановление абсолютных значений потенциалов, применение метода главных компонент. **Результаты.** Методика иллюстрируется примером регистрации электрических разрядов у клариевого сома *Clarias gariepinus* с помощью решётки 8×8 электродов при частоте оцифровки 20 кГц. Приводятся осциллограммы разрядов и картины их пространственного распределения для главных компонент. Показаны преимущества разработанной технологии многоэлектродной матричной регистрации по отношению к традиционной двухэлектродной регистрации эпизодических разрядов электрических рыб: заметное улучшение соотношения сигнал/шум при регистрации слабых электрических сигналов; возможность построения картин поля для единичных электрических событий; разделение источников электрических полей и возможность идентификации их источников; возможность бесконтактной локализации расположения электрогенерирующих структур; получение количественных данных распределений электрических потенциалов для всех точек дна аквариума.

Ключевые слова: многоэлектродная матричная регистрация, распределение потенциалов, образы электрического поля, слабоэлектрические рыбы, электрические разряды, *Clarias gariepinus*.

Благодарности. Авторы выражают благодарность С. В. Скородумову и Д. Э. Эльяшеву за помощь в разработках аппаратуры и программного обеспечения.

Для цитирования: Ольшанский В. М., Зленко Д. В., Орлов А. А., Касумян А. О., Моллер П., МакМагон Е., Сюэ Вэй. Особенности многоэлектродной регистрации эпизодических разрядов слабоэлектрических рыб // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 2. С. 239–252. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-239-252

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Multielectrode registration of episodic discharges generated by weakly electric fishes

V. M. Olshansky¹ ✉, D. V. Zlenko^{1,2}, A. A. Orlov¹, A. O. Kasumyan²,
P. Moller³, E. MacMahon⁴, Xue Wei⁵

¹A. N. Severtsov Institute of Ecology and Evolution of the RAS, Moscow, Russia

²Lomonosov Moscow State University, Russia

³Department of Psychology Hunter College, New York, USA

⁴Biosphere Environmental Ltd. Killaloe, Ireland

⁵Harbin Engineering University, Harbin, China

E-mail: ✉vmolsh@yandex.ru, dvzlenko@gmail.com, and.a.orlov@gmail.com, alex_kasumyan@mail.ru,
pmoller@hunter.cuny.edu, biosphere.eoin@gmail.com, xuewei@hrbeu.edu.cn

Received 9.11.2021, accepted 23.11.2021, published 31.03.2022

Abstract. Purpose of this study introduces a multielectrode array (MEA) registration system in order to generate electric field images of the episodic discharges generated by weakly electric fish. A multielectrode registration system has several important features: the design of the multielectrode lattice, the amplifier circuit, the choice of reference points for differential measurements, the recovery of the absolute values of the electric field potentials, and the application of principal components analysis. **Methods.** There are several advantages of our MEA registration as compared with the traditional twoelectrode registration: (a) the signal-to-noise ratio is significantly increased, (b) it is possible to construct the spatial distribution of the electric field for a single electric discharge, (c) the signals' sources can be easily separated and identified, and (d) quantitative data on the electrical potential distribution can be obtained throughout the entire experimental tank. **Results.** The results illustrate an example of applied MEA registration. Electric discharges were recorded from a weakly electric catfish, *Clarias gariepinus*, using an array of 8 × 8 electrodes at a sampling rate of 20 kHz. Data show oscillograms and two-dimensional plots of the spatial distribution of the electrical field.

Keywords: multielectrode array (MEA) registration, electric field spatial distribution, weakly electric fish, electric discharges, *Clarias gariepinus*.

Acknowledgements. Authors acknowledge Sergey V. Skorodumov and Dmitry E. Elyashev for their help in the development of hardware and software.

For citation: Olshansky VM, Zlenko DV, OrlovAA, Kasumyan AO, Moller P, MacMahon E, Xue Wei. Multielectrode registration of episodic discharges generated by weakly electric fishes. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(2):239–252. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-239-252

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Проводимые с конца XVIII века экспериментальные исследования сильноэлектрических рыб (таких как электрический угорь и электрические скаты) сыграли заметную роль в становлении большинства естественных наук — физики, химии, биологии, особенно электрофизиологии [1]. В частности, работа Генри Кавендиша [2], посвящённая имитации разрядов скатов *Torpedo* и впервые объясняющая базовые отличия электрических явлений в проводящих средах от электростатики, содержит картину токов вокруг электрического ската. Позднее, во многом благодаря работам Г. Лиссманна [3, 4], у двух больших групп слабоэлектрических рыб — мормирид (*Mormyriiformes*) и гимнотид (*Gymnotiformes*) — были зарегистрированы постоянно генерируемые электрические разряды и обнаружена новая сенсорная система — электрорецепция. Кроме того, были сформированы общие принципы совместной деятельности электрорецепторных и электрогенераторных систем (электрических органов), обеспечивающие электролокацию (обнаружение объектов), электроориентацию и коммуникацию [5, 6].

Ольшанский В. М., Зленко Д. В., Орлов А. А.,
Касумян А. О., Моллер П., МакМагон Е., Сюэ Вэй
Известия вузов. ПНД, 2022, т. 30, № 2

При исследованиях слабоэлектрических рыб для регистрации их разрядов используют, как правило, стандартные и давно применяемые в электрофизиологии двух и трёхэлектродные (учитывая электрод заземления при использовании дифференциальных усилителей) системы. Эта методика позволяет наблюдать и анализировать осциллограммы разрядов, но не их пространственные распределения. В то же время известны многоэлектродные устройства регистрации, описанные в ряде исследований, посвященных различным аспектам поведения рыб и других животных. Например, многоэлектродная матричная регистрация была применена для отслеживания перемещений свободно плавающих слабоэлектрических рыб (гимнотид) в природных условиях [7]. Попытки исследования пространственной структуры создаваемого рыбами электрического поля и его искажений, вызванных присутствием вблизи них конспецифичных особей, были предприняты рядом авторов благодаря применению линейки из 4–8 электродов [8–10]. Успешное использование методов многоэлектродной регистрации при изучении структуры электрических полей гимнотид и мормирид обусловлено, главным образом, их способностью непрерывно генерировать разряды очень стабильной формы и амплитуды, что позволяет синтезировать цельный пространственный образ поля на основе многократных регистраций на разных расстояниях от рыбы.

В противоположность случаю мормирид и гимнотид, непрерывно генерирующих свои разряды, изучение электрической активности электрических рыб с эпизодическими разрядами, к числу которых относятся многочисленные сомы (*Siluriformes*), сопряжено с некоторыми методическими проблемами [11–13], требующими перехода от традиционной двухэлектродной регистрации к многоэлектродной матричной, обеспечивающей ряд преимуществ. Во-первых, значительно возрастает соотношение сигнал/шум. Во-вторых, становится возможной реконструкция пространственного распределения электрического поля во время любого отдельного электрического разряда. В-третьих, появляется возможность разделения и идентификации разных источников в регистрируемой смеси. В-четвертых, имеется возможность указать значение потенциала во время разряда для каждой точки на дне аквариума.

1. Методика

1.1. Многоэлектродная матрица. Эксперименты проводятся в аквариуме размером $60 \times 50 \times 30$ см, на дне которого размещена многоэлектродная решётка. В листе из пластика, размер которого соответствует дну аквариума, с шагом 6 см закреплены 64 регистрирующих электрода, образующих матрицу 8×8 . В качестве электродов использованы 64 шайбы из нержавеющей стали, диаметром 1.5 см. Электроды защищены от прямых касаний рыб поролоном или тканью, что не приводит к искажениям электрических полей. Помимо регистрирующих электродов, в воду также был помещен электрод заземления в виде инертной металлической сетки, площадью 100 см^2 , закрепленной вертикально на одной из стенок аквариума. Электроды соединялись со входами 64-канального дифференциального усилителя (коэффициент усиления 1100). Соединения осуществлялись витыми парами, второй провод в которых выполнял функцию экрана, защищающего от статических помех.

1.2. Схемы усилителей сигналов и организация аналоговой общей точки. Общие схемы многоканальных дифференциальных усилителей были разработаны и использовались для регистрации ЭЭГ [14]. Модифицированная нами принципиальная схема многоканального усилителя показана на рис. 1 (схема собрана на чипах TL082 и TL084, Texas Instruments, USA). Схема содержит интегрирующий модуль 4, разработанный для подавления квазипостоянных гальванических потенциалов на электродах. Дифференциальная регистрация обеспечивает высокую степень подавления синфазных помех, включая наводку 50 Гц.

Поскольку нас интересуют абсолютные значения потенциалов на регистрирующих электродах, необходимо сформировать общий опорный сигнал, относительно которого они измеряются.

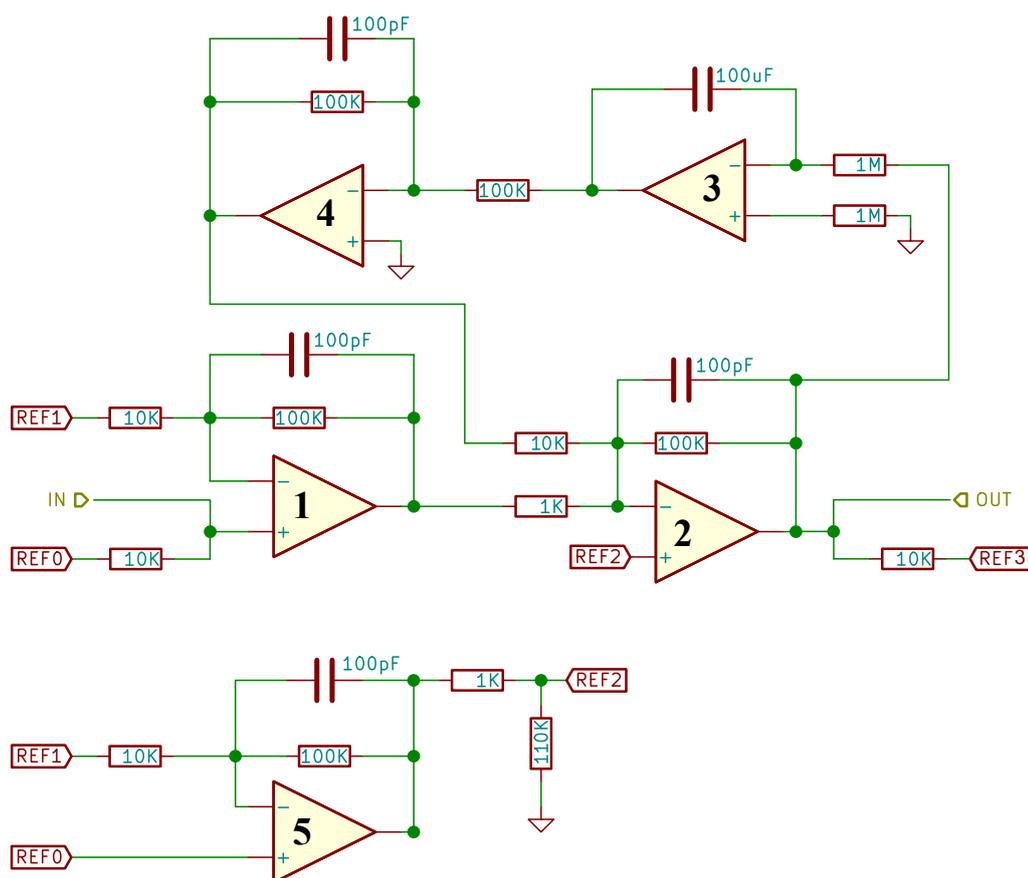


Рис. 1. Принципиальная схема многоканального дифференциального усилителя. Верхняя часть схемы описывает структуру одного из 64 измерительных каналов 1–4, а нижняя – конфигурацию общего для всех 64 каналов опорного усилителя 5. В состав каждого измерительного канала входят предусилитель 1, дифференциальный усилитель 2, интегратор 3 и инвертор 4. Метка IN соответствует входному сигналу непосредственно с измерительных электродов; OUT – выход сигналов на входы АЦП; REF0 – шина референсного потенциала опорного усилителя 5; REF1 – шина симметричной обратной связи предусилителей 1; REF2 – шина опорного потенциала дифференциальных усилителей; REF3 – опорный потенциал АЦП

Fig. 1. Multichannel differential amplifier circuit. Upper part of the diagram describes the structure of one of 64 registration channels 1–4; the lower one describes the configuration of the common reference amplifier 5. Each registration channel includes a preamplifier 1, a differential amplifier 2, an integrator 3, and an inverter 4. The IN mark corresponds to the input signal fed directly from the electrodes, and OUT to the signal output fed to ADC analog inputs. REF0 is a common reference potential of the amplifier as a whole; REF1 – the reference potential of preamplifiers; REF2 – reference potential for differential amplifiers; REF3 – reference potential for the ADC

Для этого все предусилители 1 имеют общий опорный вход REF1. Он сформирован путем объединения всех 64 предусилителей, с общим референсным усилителем 5. Далее формируется опорный потенциал REF2 для вторых каскадов дифференциальных усилителей по отношению к заземлению. Общий опорный усилитель принимает определенный общий опорный потенциал REF0 для вычисления дифференциальных потенциалов.

На первый взгляд, REF0 мог бы быть заземлён. Проблема в том, что внутри экспериментального аквариума исходно заземления нет. Оно необходимо, но может быть осуществлено только добавлением специального электрода, связанного проводом с землёй схемы (средней точкой аккумуляторного питания). Этот земляной электрод не может быть большим, поскольку иначе он сильно исказит поле, в то время как небольшой заземляющий электрод, расположенный

в конкретной и небольшой области аквариума, не является нулевым, то есть не соответствует потенциалу гипотетической бесконечно удаленной точки. Его потенциал зависит от расстояния до источника и ориентации источника. Рыба может дать разряд, находясь на разных расстояниях от земляного электрода, в том числе непосредственно вблизи него. Поэтому такое решение привело бы к усилению всех флуктуаций потенциала заземления и сказалось бы на выходном сигнале. Для того чтобы избежать этого негативного эффекта, общий потенциал был сформирован как сумма потенциалов всех 64 регистрирующих электродов, объединенных через резисторы 10 кОм. Поскольку тестируемые рыбы всегда находятся внутри решётки, сумма всех потенциалов должна быть близка к нулю, что обеспечивает близость к нулю потенциала REF0. Усиленные сигналы подаются на входы двух 32-канальных 16-битных АЦП (E502, L-CARD, Россия). Общий аналоговый вход АЦП также не заземлён, а соединён с суммой выходов усилителей через резисторы 10 кОм (REF3).

1.3. Выбор частоты оцифровки. Для сбора данных оба 32-канальных АЦП были синхронизированы по внутреннему источнику опорной частоты одного из устройств. Частота оцифровки составляла 20 кГц, типичное время проведения одного поведенческого эксперимента — 50 минут. Выбор частоты оцифровки представляется крайне принципиальным. Характерное время электрофизиологических процессов составляет единицы или доли миллисекунд. Одной из самых существенных особенностей специализированной генерации электрических разрядов электрическими рыбами является высокая степень синхронизации возбуждения множества клеток. Синхронизация при этом осуществляется с точностью доли миллисекунд. Действительно, приведем в качестве примера главный электрический орган электрического угря *Electrophorus*, который занимает большую часть тела рыбы. При этом длительность разряда составляет около 1 мс [15]. Характерное время синхронизации должно быть короче по меньшей мере на порядок.

Соответственно, в исследовании активности мормирид и гимнотид при традиционной двух-электродной регистрации частоты оцифровки достигают 1 МГц. Между тем в других областях биологии, например, электроэнцефалографии, при многоэлектродной матричной регистрации частота оцифровки редко превышает 2 кГц [16]. Одновременное повышение числа регистрирующих электродов и частоты сэмплирования приводит к большим потокам информации и большим объемам файлов данных, что вызывает очевидные трудности. Поэтому необходим компромисс между желанием наблюдать подробности синхронизации электровозбуждения клеток и возможностями передавать на компьютер большие потоки информации и обрабатывать файлы большого объема. Применение частоты сэмплирования в 20 кГц представляется таким компромиссом и позволяет наблюдать как единичные срабатывания группы клеток, так и паузы между срабатываниями на предельных частотах возбуждения [17].

1.4. Использование метода главных компонент. Электрические поля от источников биологического происхождения, как правило, очень быстро затухают с удалением от источника. Сигналы от них на разных электродах очень заметно различаются по амплитуде. При этом для интересующих нас физиологических процессов частотные особенности распространения электрических полей не сказываются, поскольку размеры аквариума существенно меньше величины скин-слоя в воде [18]. Таким образом, форма одного и того же излученного разряда на разных регистрирующих электродах остается одинаковой. В то же время большинство помех, попадающих в воду из воздуха, в частности помеха 50 Гц или импульсные помехи, имеют значительно более равномерное пространственное распределение, заметно отличное от распределений интересующих нас сигналов. Это позволяет эффективно отфильтровывать полезные, то есть сильно неоднородные в пространстве паттерны, с использованием метода главных компонент (Principal Component Analysis — PCA). Применение PCA, так же, как независимого компонентного анализа (Independent Component Analysis — ICA) успешно используется в электроэнцефалографии [19].

Имея 64 канала, с помощью PCA можно разделить регистрируемые процессы на независимые источники, соответственно, общим числом до 64. Это позволяет на фоне главного процесса, например, электрического разряда клариевого сома, увидеть иные электрические явления, например, поляризацию тела рыбы во внешнем электрическом поле. Метод PCA позволяет не только очистить полезный сигнал, то есть сгенерированный животным импульс, от разного рода помех, но и предоставляет естественный путь визуализации поля в пространстве. Для этого достаточно построить двумерную поверхность по величинам вкладов интересующих нас главных компонент. Вычисление ковариационных матриц и их диагонализация осуществлялась средствами библиотеки sklearn (Python3).

2. Результаты

Ранее нами было установлено [20], что во время разряда голова клариевых сомов (*Clarias gariepinus*) имеет отрицательный потенциал, а тело — положительный. Осциллограммы разряда при 64-электродной регистрации представлены на рис. 2. Поскольку оранжево-красные кривые на рисунке соответствуют отрицательной полярности, они показывают ориентацию головы над электродами, имеющими такие, наиболее отрицательные, значения. Зеленые и синие кривые соответствуют положительной полярности, что отражает примерное расположение тела рыбы над соответствующими электродами. Это соответствие можно видеть без необходимости привлечения дополнительных математических процедур.

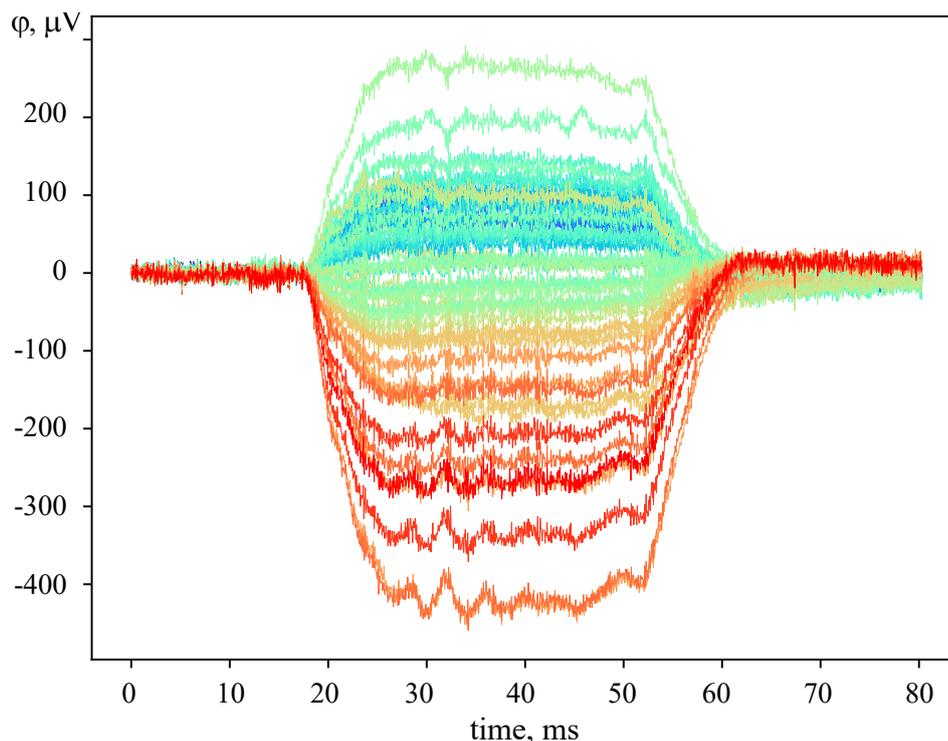


Рис. 2. Электрический разряд сома *Clarias gariepinus*, зарегистрированный с помощью матрицы из 64 электродов. Цветовые обозначения соответствуют цветовой маркировке на рис. 4 (см. ниже), что позволяет сопоставить цвет осциллограмм с пространственным расположением электродов в матрице (цвет online)

Fig. 2. Dynamics of the electric potential in the course of the discharge generated by *Clarias gariepinus* catfish using 64 electrode square array. The color legend corresponds to that in Fig. 4 (see further), which makes it possible to compare the color of the curve with the spatial position of the corresponding electrode in the lattice (color online)

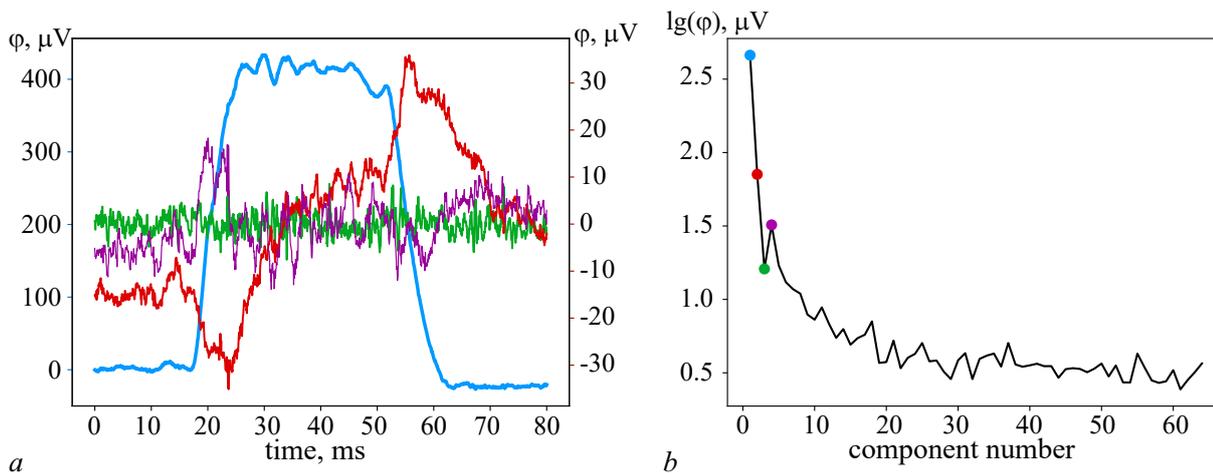


Рис. 3. *a* — Четыре первые главные компоненты разряда, показанного на рис. 2. Первая компонента показана синим, значения потенциалов указаны на левой оси ординат (синие цифры). Правая ось (красные цифры) соответствует трём остальным компонентам: второй (красный), третьей (зелёный) и четвёртой (фиолетовый). *b* — Десятичные логарифмы амплитуд вкладов всех главных компонент в суммарный потенциал на электродах. Цветные точки отображают значения вкладов для четырёх главных компонент (цвет online)

Fig. 3. *a* — The first four principal components (the first is shown in blue, the second in red, the third in green, and the fourth in purple) of the curves' family is shown in Fig. 2. The left ordinate axis (shown in blue) corresponds to the first component, and the right one (shown in red) corresponds to the second-to-fourth components. *b* — Decimal logarithms of the amplitudes of all 64 principal components. The colored dots show the data for the curves shown in fig. *a* (color online)

Отметим, однако, что исходный сигнал достаточно сильно зашумлён: peak-to-peak амплитуда шума составляет примерно 20 мкВ, что даже для электродов с максимальной амплитудой полезного сигнала порядка 500 мкВ даёт не слишком хорошее соотношение сигнал/шум — около 25. Для очистки его от шумов воспользуемся методом главных компонент (рис. 3). Для анализа был взят фрагмент записи с разрядом длительностью 80 мс, что при частоте оцифровки 20 кГц соответствует 1600 сэмплам по каждому из 64 каналов.

Анализ главных компонент семейства кривых, представленных на рис. 3, показывает, что весь полезный сигнал сосредотачивается в 1, 2 и 4 главных компонентах, в то время как третья и все остальные компоненты представляют собой белый шум, амплитуда вкладов которого быстро убывает с ростом номера компоненты (рис. 3, *b*).

Наибольший вклад в суммарный сигнал, а также наибольший вес в разложении имеет первая компонента (рис. 3, *a*, синий). Форма кривой соответствует форме разрядов, которые ранее были зарегистрированы для *Clarias gariepinus*. Продолжительность разряда на полувывоте составила 35 мс. На отфильтрованной кривой хорошо различима тонкая структура, отражающая работу электрогенерирующей структуры в теле рыбы [17]. Период осцилляций на плато разряда составил 3.9 ± 0.7 мс, а амплитуда 20...50 мкВ.

Общий вид кривой второй компоненты (см. рис. 3, *a*, красный) соответствует первой производной основного сигнала. Такой эффект может возникать в том случае, если в системе присутствует некоторая ёмкость, при протекании тока через которую и возникает сигнал в виде производной от основного импульса. Природа этой ёмкости может быть различной, в частности, это может быть тело исследуемого сома, либо какой-то элемент электрической схемы. Однако использование предварительной калибровки аппаратуры с помощью искусственного дипольного источника, соединенного с генератором прямоугольных импульсов, показывает, что электрическая схема передаёт регистрируемые сигналы без заметных искажений, а ёмкостные искажения вызывают тела рыб, помещенных в аквариум (см. также ниже, рис. 4, II).

Четвёртая компонента имеет небольшую амплитуду и довольно сильно зашумлена, но обладает особенностью — двойным пиком между 20 и 30 мс рассматриваемого сигнала. Амплитуда эффекта составляет примерно 20 мкВ, продолжительность — порядка 10 мс. Обсуждение природы этого сигнала также требует привлечения данных о пространственном положении его источника (см. ниже, рис. 4, IV).

3. Обсуждение

Согласно нашим представлениям, электрические разряды клариевых сомов представляют собой суммарное электрическое возбуждение одной и той же мышечной структуры серией запускающих нервных импульсов [17]. В ответ на каждый нервный импульс генерируется элементарный разряд длительностью около 8 мс. Предполагается, что интервалы между запускающими нервными импульсами заметно меньше (ок. 1.7 мс), что приводит к формированию монополярного электрического разряда с изрезанностью вершины и с амплитудой большей, чем у слагающих разряд элементарных электрических импульсов (см. рис. 3, а, синий). Эта модель основана на данных экспериментов, выполненных по традиционной двухэлектродной методике регистрации [17].

Переход к многоэлектродной методике и PCA-анализу даёт ряд преимуществ. Во-первых, мы получаем гораздо более чистую форму разряда, чем при двухэлектродной регистрации. В частности, мы полностью избавились от помехи 50 Гц. Во-вторых, мы можем определить количественные величины электрических потенциалов вблизи тела рыбы. При двухэлектродной регистрации амплитуда регистрируемого разряда зависит от положения и ориентации рыбы-источника в аквариуме. Многоэлектродная же регистрация позволяет наблюдать характер затухания и учитывать его.

Анализ распределения представленности той или иной главной компоненты среди электродов позволяет судить о том вкладе, который данный сигнал вносит в суммарное электрическое поле на каждом из электродов, а значит, и о пространственном распределении такого «поля единичной главной компоненты» (см. рис. 4). Иными словами, можно построить распределение в пространстве коэффициентов, описывающих вклад данной компоненты в электрический потенциал, зарегистрированный на каждом из 64 электродов. Поскольку любая компонента представляет собой набор значений, а не одно-единственное число, то существенным становится вопрос о том, какая же физическая величина будет отображена на плоскости при таком подходе. Мы домножили каждый из коэффициентов разложения на полную амплитуду соответствующей главной компоненты, тем самым сообщив полученным пространственным распределениям физический смысл. С количественной точки зрения полученные величины являются максимально достигаемой на данном электроде амплитудой изменения электрического потенциала, связанного с соответствующей главной компонентой. При этом первая компонента (см. рис. 3, а, синий) будет представлять поле разряда. Её пространственное распределение (см. рис. 4, I) даёт исключительно поле разряда, не учитывая другие компоненты.

Распределение в пространстве амплитуды первой компоненты на рис. 4, I имеет ярко выраженный дипольный характер с положительным полюсом в районе точки с координатами (18, 13) и отрицательным — (27, 0). У клариевых сомов отрицательный полюс находится на голове, а положительный — на туловище. Соответственно, электрогенерирующая структура должна располагаться в области между полюсами диполя, то есть в области, где потенциал обнуляется. Это соответствует неоднократно высказывавшимся предположениям [21], что электрогенерирующая структура у клариевых сомов находится между задним краем черепа и началом спинного плавника. В отсутствие более надёжных данных о расположении электрогенерирующих структур у клариевых сомов, приблизительная локализация электрогенерирующей структуры облегчает предстоящую работу гистологам и морфологам.

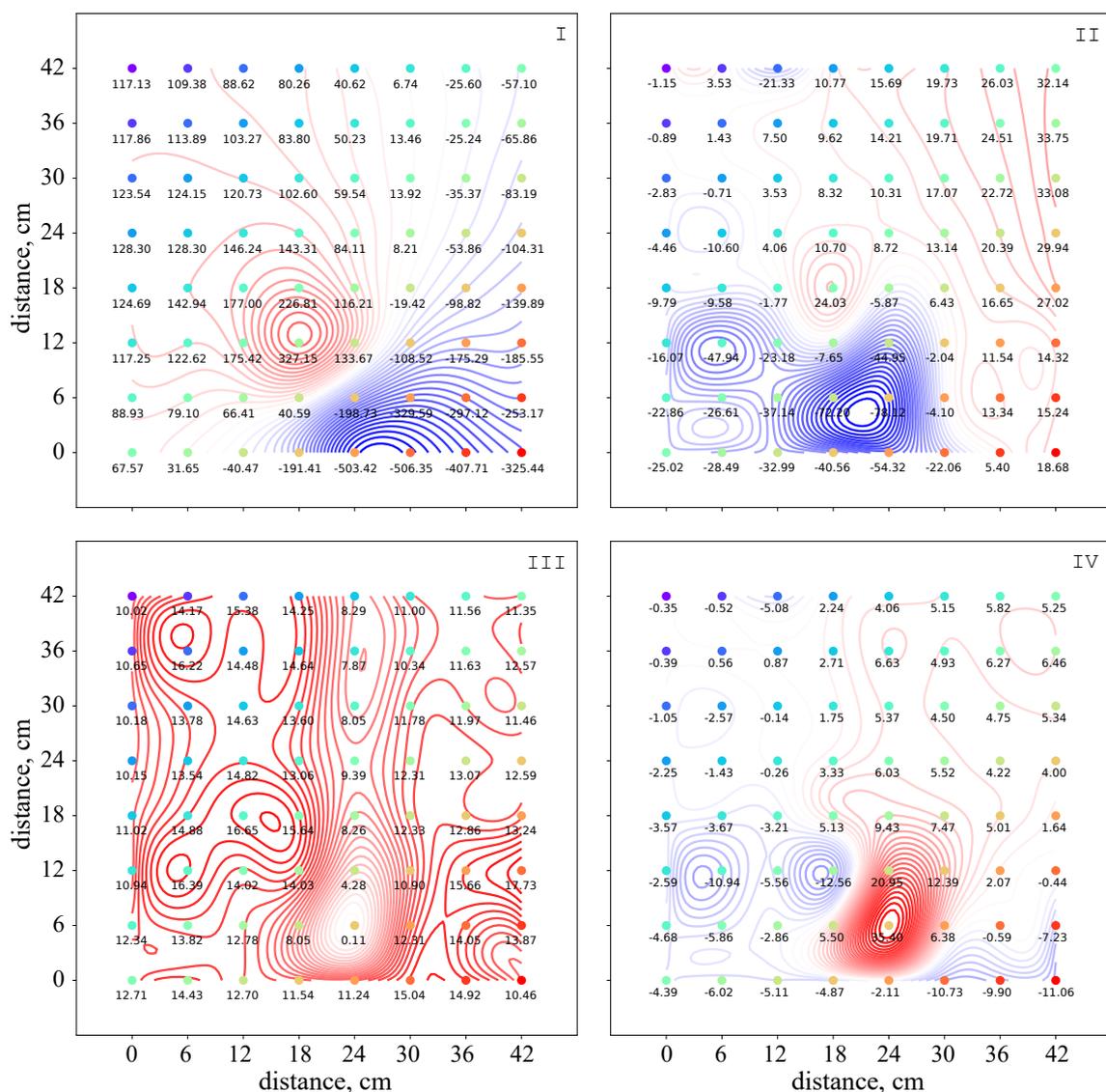


Рис. 4. Пространственные распределения потенциалов первых четырёх главных компонент (номер компоненты указан римской цифрой в верхнем углу каждого распределения) электрического события, представленного на рис. 2. Кружками показано положение 64 измерительных электродов, а их цветом отражено соответствие исходным кривым (см. рис. 2) (цвет online)

Fig. 4. Spatial distributions of the electric potentials corresponding to the first four principal components shown in Fig. 2. The numbers of the components designated by the digits in the plots. The circles mark the position of electrodes, and their color corresponds to the color of the original curves in Fig. 2 (color online)

Распределение в пространстве второй компоненты (см. рис. 4, II), содержащей дифференциальный сигнал, соответствует скорее полю монополя, нежели диполя. Выявление вклада дифференцирования в общий регистрируемый сигнал – значимое преимущество новой методики. При моделировании паттернов разрядов клариевых сомов мы обычно наблюдали хорошую сходимость модели и реального сигнала в начале разряда, но заметные расхождения в конце [17]. Более того, задний фронт разрядов часто регистрировался с заметным дифференцированием и было непонятно – это особенность генерации или внешний фактор. Применение многоэлектродной регистрации и PCA позволяет ответить на вопросы такого рода и оценить степень дифференцирования сигнала телом рыбы. Заметное смещение полюсов на картинах поля для второй компоненты

по отношению к полю первой компоненты показывает, что источник дифференцирования не совпадает с источником основного разряда.

Пространственные распределения, характерные для главных компонент, содержащих шумы, не демонстрируют заметных особенностей структуры поля (см. рис. 4, III), имеют небольшие значения потенциалов (не более десятков мкВ) и мало меняются от электрода к электроду, что является типичным для поля помех от внешних источников.

Пространственное распределение амплитуды четвёртой компоненты (см. рис. 4, IV) напоминает таковое для второй и имеет выраженную монополярную форму. Максимум располагается также в особой области пространства неподалёку от электрогенерирующей структуры. Малые значения потенциалов этой компоненты и низкая разрешающая способность нашей системы в пространстве (шаг решетки 6 см при размерах рыб около 15 см) не позволяет предложить для этой компоненты конкретный физиологический смысл.

Заключение

Переходя от частных проблем многоэлектродной матричной регистрации к общим, вернёмся к вопросу о соотношении числа электродов и частоты оцифровки. Можно ли совместить микросекундное разрешение по времени, десятки тысяч электродов и разумный объём данных? Опыт исследований слабоэлектрических рыб показывает, что это возможно при использовании определенных приемов формирования амплитудно-фазовых образов электрических событий мозгом воспринимающих их рыб [22]. В целом, технология многоэлектродной матричной регистрации представляется эффективным инструментом исследования слабых электрических сигналов в водной среде применительно к широкому кругу задач, включая исследование роли электрических полей и электрокоммуникации в жизни многих водных животных.

Список литературы

1. *Finger S., Piccolino M.* The Shocking History of Electric Fishes: From Ancient Epochs to the Birth of Modern Neurophysiology. Oxford: Oxford University Press, 2011. 470 p. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780195366723.001.0001.
2. *Cavendish H.* An account of some attempts to imitate the effects of the torpedo by electricity // *Phil. Trans. R. Soc.* 1776. Vol. 66. P. 196–225. DOI: 10.1098/rstl.1776.0013.
3. *Lissmann H. W.* Continuous electrical signals from the tail of a fish, *Gymnarchus niloticus* Cuv. // *Nature*. 1951. Vol. 167, no. 4240. P. 201–202. DOI: 10.1038/167201a0.
4. *Lissmann H. W.* On the function and evolution of electric organs in fish // *J. Exp. Biol.* 1958. Vol. 35, no. 1. P. 156–191. DOI: 10.1242/jeb.35.1.156.
5. *Bennett M. V. L.* Electric organs // In: Hoar W. S., Randall D. J. (eds) *Fish Physiology*. Vol. 5. New York: Academic Press, 1971. P. 347–491.
6. *Bennett M. V. L.* Electroreception // In: Hoar W. S., Randall D. J. (eds) *Fish Physiology*. Vol. 5. New York: Academic Press, 1971. P. 493–574.
7. *Henninger J., Krahe R., Sinz F., Benda J.* Tracking activity patterns of a multispecies community of gymnotiform weakly electric fish in their neotropical habitat without tagging // *J. Exp. Biol.* 2020. Vol. 223, no. 3. P. jeb206342. DOI: 10.1242/jeb.206342.
8. *Rasnow B.* Measuring and visualizing EOD fields // In: Ladich F., Collin S. P., Moller P., Kapoor B. G. (eds) *Communication in Fishes*. Enfield, USA: Science Publishers Inc., 2006. P. 599–622.
9. *Rasnow B., Bower J. M.* Imaging with electricity: How weakly electric fish might perceive objects // In: Bower J. M. (ed) *Computational Neuroscience: Trends in Research*. New York: Plenum, 1997. P. 795–800.

Ольшанский В. М., Зленко Д. В., Орлов А. А.,
Касумян А. О., Моллер П., МакМагон Е., Сюэ Вэй
Известия вузов. ПНД, 2022, т. 30, № 2

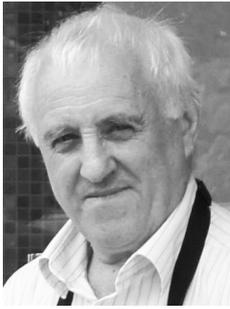
10. *Assad C., Rasnow B., Stoddard P.K.* Electric organ discharges and electric images during electrolocation // *J. Exp. Biol.* 1999. Vol. 202, no. 10. P. 1185–1193.
11. *Hagedorn M., Womble M., Finger T.E.* Synodontid catfish: A new group of weakly electric fish // *Brain Behav. Evol.* 1990. Vol. 35, no. 5. P. 268–277. DOI: 10.1159/000115873.
12. *Baron V.D., Morshnev K.S., Olshansky V.M., Orlov A.A.* Electric organ discharges of two species of African catfish (*Synodontis*) during social behavior // *Animal Behaviour.* 1994. Vol. 48, no. 6. P. 1472–1475. DOI: 10.1006/anbe.1994.1387.
13. *Baron V.D., Orlov A.A., Golubtsov A.S.* African *Clarias* catfish elicits long-lasting weak electric pulses // *Experientia.* 1994. Vol. 50, no. 7. P. 664–647. DOI: 10.1007/BF01952864.
14. *Metting van Rijn A.C., Peper A., Grimbergen C.A.* High-quality recording of bioelectric events. Part 2. Low-noise, low-power multichannel amplifier design // *Med. Biol. Eng. Comput.* 1991. Vol. 29, no. 4. P. 433–440. DOI: 10.1007/BF02441666.
15. *Catania K.C.* An optimized biological taser: Electric eels remotely induce or arrest movement in nearby prey // *Brain Behav. Evol.* 2015. Vol. 86, no. 1. P. 38–47. DOI: 10.1159/000435945.
16. *Грищенко А. А., Сысоева М. В., Сысоев И. В.* Определение основного временного масштаба эволюции информационных свойств сигнала локальных потенциалов мозга при абсансной эпилепсии // *Известия вузов. ПНД.* Т. 28, № 1. С. 98–110. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-1-98-110.
17. *Орлов А. А., Ольшанский В. М., Барон В. Д.* Реконструкция паттернов электрических разрядов и механизмы электрогенерации у африканского клариевого сома *Clarias gariepinus* (Clariidae, Siluriformes) // *Доклады Российской академии наук. Науки о жизни.* 2021. Т. 500, № 1. С. 428–431. DOI: 10.31857/S2686738921050243.
18. *Ольшанский В. М.* Бионическое моделирование электросистем слабоэлектрических рыб. М.: Наука, 1990. 208 с.
19. *Makeig S., Onton J.* ERP features and EEG dynamics: An ICA perspective // In: Luck S. J., Kappenman E. S. (eds) *The Oxford Handbook of Event-Related Potential Components.* New York: Oxford University Press, 2011. P. 51–86. DOI: 10.1093/oxfordhb/9780195374148.013.0035.
20. *Ольшанский В. М., Моршнева К. С., Насека А. М., Нгуен Тхи Нга.* Электрические разряды клариевых сомов, культивируемых в Южном Вьетнаме // *Вопросы ихтиологии.* 2002. Т. 42, № 4. С. 549–557.
21. *Olshanskiy V.M., Kasumyan A.O., Moller P.* On mating and function of associated electric pulses in *Clarias macrocephalus* (Günther, 1864): Probing an old puzzle, first posed by Charles Darwin // *Environmental Biology of Fishes.* 2020. Vol. 103, no. 1. P. 99–114. DOI: 10.1007/s10641-019-00936-w.
22. *Ольшанский В. М., Зленко Д. В.* Формирование образов электрического поля и попытка преодолеть внутривидовой барьер // В сб.: *Труды Седьмой Всероссийской конференции «Нелинейная динамика в когнитивных исследованиях».* 20–24 сентября 2021 года, Нижний Новгород, Россия. Нижний Новгород: Институт прикладной физики РАН, 2021. С. 90–93.

References

1. Finger S, Piccolino M. *The Shocking History of Electric Fishes: From Ancient Epochs to the Birth of Modern Neurophysiology.* Oxford: Oxford University Press; 2011. 470 p. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780195366723.001.0001.
2. Cavendish H. An account of some attempts to imitate the effects of the torpedo by electricity. *Phil. Trans. R. Soc.* 1776;66:196–225. DOI: 10.1098/rstl.1776.0013.
3. Lissmann HW. Continuous electrical signals from the tail of a fish, *Gymnarchus niloticus* Cuv. *Nature.* 1951;167(4240):201–202. DOI: 10.1038/167201a0.

4. Lissmann HW. On the function and evolution of electric organs in fish. *J. Exp. Biol.* 1958;35(1): 156–191. DOI: 10.1242/jeb.35.1.156.
5. Bennett MVL. Electric organs. In: Hoar WS, Randall DJ, editors. *Fish Physiology*. Vol. 5. New York: Academic Press; 1971. P. 347–491.
6. Bennett MVL. Electroreception. In: Hoar WS, Randall DJ, editors. *Fish Physiology*. Vol. 5. New York: Academic Press; 1971. P. 493–574.
7. Henninger J, Krahe R, Sinz F, Benda J. Tracking activity patterns of a multispecies community of gymnotiform weakly electric fish in their neotropical habitat without tagging. *J. Exp. Biol.* 2020;223(3):jeb206342. DOI: 10.1242/jeb.206342.
8. Rasnow B. Measuring and visualizing EOD fields. In: Ladich F, Collin SP, Moller P, Kapoor BG, editors. *Communication in Fishes*. Enfield, USA: Science Publishers Inc.; 2006. P. 599–622.
9. Rasnow B, Bower JM. Imaging with electricity: How weakly electric fish might perceive objects. In: Bower JM, editor. *Computational Neuroscience: Trends in Research*. New York: Plenum; 1997. P. 795–800.
10. Assad C, Rasnow B, Stoddard PK. Electric organ discharges and electric images during electrolocation. *J. Exp. Biol.* 1999;202(10):1185–1193.
11. Hagedorn M, Womble M, Finger TE. Synodontid catfish: A new group of weakly electric fish. *Brain Behav. Evol.* 1990;35(5):268–277. DOI: 10.1159/000115873.
12. Baron VD, Morshnev KS, Olshansky VM, Orlov AA. Electric organ discharges of two species of African catfish (*Synodontis*) during social behavior. *Animal Behaviour*. 1994;48(6):1472–1475. DOI: 10.1006/anbe.1994.1387.
13. Baron VD, Orlov AA, Golubtsov AS. African *Clarias* catfish elicits long-lasting weak electric pulses. *Experientia*. 1994;50(7):664–647. DOI: 10.1007/BF01952864.
14. Metting van Rijn AC, Peper A, Grimbergen CA. High-quality recording of bioelectric events. Part 2. Low-noise, low-power multichannel amplifier design. *Med. Biol. Eng. Comput.* 1991;29(4): 433–440. DOI: 10.1007/BF02441666.
15. Catania KC. An optimized biological taser: Electric eels remotely induce or arrest movement in nearby prey. *Brain Behav. Evol.* 2015;86(1):38–47. DOI: 10.1159/000435945.
16. Grishchenko AA, Sysoeva MV, Sysoev IV. Detecting the primary time scale of evolution of information properties for local field potentials in brain at absence epilepsy. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics* 2020;28(1):98–110 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-1-98-110.
17. Orlov AA, Olshanskiy VM, Baron VD. Reconstruction of electric discharge patterns and electrogenesis mechanisms in African sharptooth catfish *Clarias gariepinus* (Clariidae, Siluriformes). *Dokl. Biol. Sci.* 2021;500(1):145–148. DOI: 10.1134/S0012496621050082.
18. Olshanskiy VM. Bionic Modeling of Electrical Systems of Weak Electric Fish. Moscow: Nauka; 1990. 208 p. (in Russian).
19. Makeig S, Onton J. ERP features and EEG dynamics: An ICA perspective. In: Luck SJ, Kappenman ES, editors. *The Oxford Handbook of Event-Related Potential Components*. New York: Oxford University Press; 2011. P. 51–86. DOI: 10.1093/oxfordhb/9780195374148.013.0035.
20. Olshanskii VM, Morshnev KS, Naseka AM, Nguyen TN. Electric discharges of clariid catfishes cultivated in South Vietnam. *Journal of Ichthyology*. 2002;42(6):477–484.
21. Olshanskiy VM, Kasumyan AO, Moller P. On mating and function of associated electric pulses in *Clarias macrocephalus* (Günther, 1864): Probing an old puzzle, first posed by Charles Darwin. *Environmental Biology of Fishes*. 2020;103(1):99–114. DOI: 10.1007/s10641-019-00936-w.
22. Olshanskiy VM, Zlenko DV. Reconstruction of electrical field images and an attempt to overcome the intraspecific barrier. In: *Proceedings of the Seventh All-Russian Conference «Nonlinear Dynamics in Cognitive Research»*. 20-24 September 2021, Nizhny Novgorod, Russia. Nizhny Novgorod: Institute of Applied Physics RAS; 2021. P. 90–93 (in Russian).

Ольшанский В. М., Зленко Д. В., Орлов А. А.,
Касумян А. О., Моллер П., МакМагон Е., Сюэ Вэй
Известия вузов. ПНД, 2022, т. 30, № 2



Ольшанский Владимир Менделевич — родился в Петропавловске-Камчатском (1950). Окончил 40-ю школу в городе Горьком, радиофизический факультет Горьковского государственного университета. Доктор физико-математических наук по специальности «Биофизика» (2004). Старший научный сотрудник Института проблем экологии и эволюции им. А.Н. Северцова Российской академии наук (ИПЭЭ РАН).

Россия, 119071 Москва, Ленинский проспект, 33
Институт проблем экологии и эволюции имени А. Н. Северцова РАН
E-mail: vmolsh@yandex.ru
ORCID: 0000-0002-2810-9900
AuthorID: 22362



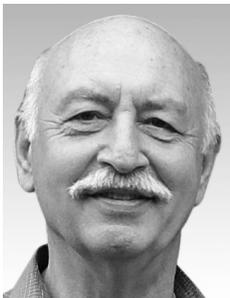
Зленко Дмитрий Владимирович — родился в Москве (1983). Окончил лицей «Вторая Школа» (2000), биологический факультет МГУ (2005), защитил кандидатскую диссертацию по специальности «Биофизика» (2008). Старший научный сотрудник кафедры биофизики биологического факультета МГУ.

Россия, 119991 Москва, Ленинские горы, 1
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: dvzlenko@gmail.com
ORCID: 0000-0002-4126-3080
AuthorID: 599278



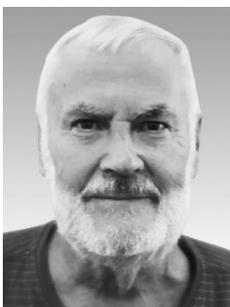
Орлов Андрей Александрович — родился в Москве (1948). Окончил физический факультет МГУ (1971). Кандидат биологических наук (1985). Старший научный сотрудник Института проблем экологии и эволюции имени А. Н. Северцова Российской академии наук (ИПЭЭ РАН).

Россия, 119071 Москва, Ленинский проспект, 33
Институт проблем экологии и эволюции имени А. Н. Северцова РАН
E-mail: and.a.orlov@gmail.com
ORCID: 0000-0003-3272-6167
AuthorID: 84419



Касумян Александр Ованесович — родился в Адлере (Сочи, 1951). Окончил биологический факультет МГУ (1973) и аспирантуру (1976). Доктор биологических наук (1995). С 1977 года работает на кафедре ихтиологии биологического факультета МГУ, с 2020 — в должности заведующего кафедрой. Область интересов: хеморецепция и другие сенсорные системы и поведение рыб.

Россия, 119991 Москва, Ленинские горы, 1
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: alex_kasumyan@mail.ru
ORCID: 0000-0002-4931-8787
AuthorID: 674



Моллер Питер — родился в Гамбурге, Германия (1941). Получил академическое образование в университетах Марбурга и Берлина (Запад). После получения докторской степени в 1967 г. он работал в аспирантуре с Томасом Сабо в Париже, прежде чем переехать в Нью-Йорк, где в настоящее время он является профессором психологии в Колледже Хантера и аспирантуре Городского университета Нью-Йорка. Его научные интересы связаны с ориентацией и электрокоммуникацией животных. Область интересов: поведение в лабиринте, приобретение и закрепление памяти, поведенческая эндокринология. Автор книги «Electric Fishes: History and behavior» (London, Chapman and Hall, 1995).

США, Манхэттен, Нью-Йорк
Хантерский колледж
E-mail: pmoller@hunter.cuny.edu
ORCID: 0000-0001-7250-8776



Еоин МакМахон — родился в Лимерике, Ирландия. В течение последних 20 лет работал в сфере охраны окружающей среды и борьбы с вредителями. В настоящее время является директором компании Biosphere Environmental Ltd. Еоин участник морских экспедиций. На корабле Илен (ilen.ie), в постройке которого принимал участие, посетил западное побережье Гренландии в 2019 году. В настоящее время разрабатываются планы по использованию Илен в качестве платформы для исследований в области морской биологии.

3 Johns St., Killaloe, Co. Clare, V94PN3F
Biosphere Environmental Ltd.
E-mail: biosphere.eoin@gmail.com
ORCID: 0000-0002-7005-5926



Сюэ Вэй — родился в 1970 году в провинции Хэйлунцзян, Китай. Окончил радиофизический факультет Санкт-Петербургского политехнического университета (2007), профессор, кандидат технических наук. Работает в Институте информатики и технологий связи Харбинского университета. Область интересов — цифровая обработка сигналов и технологий беспроводной связи.

Китай, Харбин, ул. Чэньгэн
Харбинский инженерный университет
E-mail: xuewei@hrbeu.edu.cn
ORCID: 0000-0003-1104-0959

EDITOR-IN-CHIEF

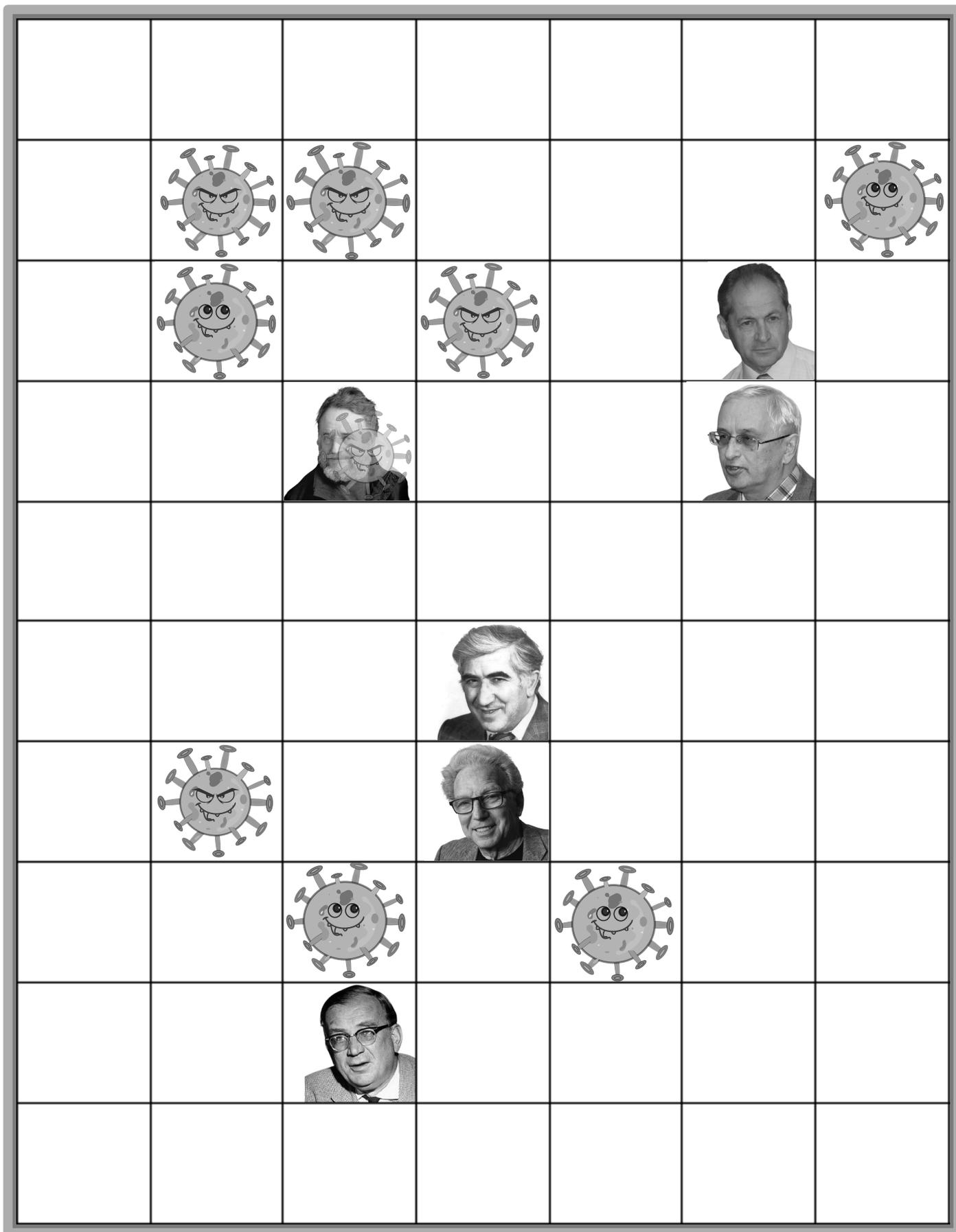
Yu. V. Gulyaev, Ph.D., Professor, Member of the RAS,
Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS, Moscow

DEPUTY EDITORS

I. V. Sysoev, Ph.D., Professor, Saratov State University, Saratov
A. N. Chumachenko, Ph.D., Professor, Saratov State University, Saratov

EDITORIAL BOARD

V. M. Anikin, Ph.D., Professor, Saratov State University, Saratov
B. P. Bezruchko, Ph.D., Professor, Saratov State University, Saratov
S. V. Gonchenko, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny
Novgorod, Nizhny Novgorod
N. S. Ginzburg, Ph.D., Professor, Corresponding Member of the RAS, Institute of Applied
Physics of the RAS, Nizhny Novgorod
A. S. Dmitriev, Ph.D., Professor, Institute of Radioengineering and Electronics
of the RAS, Moscow
S. A. Kashchenko, Ph.D., Professor, P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl
P. S. Landa, Ph.D., Professor, Moscow State University, Moscow
G. G. Malinetskii, Ph.D., Professor, Institute of Applied Mathematics of the RAS, Moscow
V. V. Matrosov, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny
Novgorod, Nizhny Novgorod
V. I. Nekorkin, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS,
Nizhny Novgorod
A. V. Porubov, Ph.D., Professor, Institute for Problems in Mechanical Engineering
of the RAS, St. Petersburg
Yu. M. Romanovsky, Ph.D., Professor, Moscow State University, Moscow
V. V. Tuchin, Ph.D., Professor, Corresponding Member of the RAS,
Saratov State University, Saratov
A. M. Feigin, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS, Nizhny Novgorod
V. A. Tsarev, Ph.D., Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov
M. V. Shitikova, Ph.D., Professor, Voronezh State Technical University, Voronezh
V. G. Yakhno, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS, Nizhny Novgorod
S. Boccaletti, Ph.D., Senior Researcher of Institute for Complex Systems
of the National Research Council (CNR), Sesto Fiorentino, Italy
A. V. Kraskov, Ph.D., Principal Investigator, UCL Institute of Neurology,
Sobell Department, London, UK
N. V. Kuznetsov, Visiting Professor, University of Jyväskylä, Finland
G. van Luijtelaar, Professor, Radboud University Nijmegen, Nijmegen, The Netherlands
A. K. Lüttjohann, Ph.D., Postdoctoral researcher, Institut für Physiologie I, Westfälische
Wilhelms-Universität, Münster, Germany
A. B. Neiman, Dr. of Sciences, Physics and Mathematics, Associate professor
of Department of Physics and Astronomy, Ohio University, USA
A. S. Pikovsky, Dr. rer. Nat. habil., Professor, Universität Potsdam, Germany
A. N. Pisarchik, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid,
Centre for Biomedical Technology, Spain
V. A. Vakorin, Ph.D., Data Scientist, NeuroInformatics and NeuroAnalytics
Lead, ImageTech Lab, Simon Fraser University, Vancouver, Canada



Структуры, возникающие в «Жизни» Конвея.

ISSN 0869-6632



9 770869 663203 >