

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Модель роста экономических агентов с учетом взаимодействия и запаздывания на взаимные воздействия

© 2023 г. Т.Р. Кильматов

Т.Р. Кильматов,

*Дальневосточный федеральный университет; Морской государственный университет им. адмирала
Г.И. Невельского, Владивосток; e-mail: talgat_k@mail.ru*

Поступила в редакцию 11.04.2023

Аннотация. Построена динамическая модель экономического роста агентов с учетом взаимного партнерства. Предполагается возможность временного запаздывания взаимных воздействий. В основе модели — система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Представлены простые частные аналитические решения, позволяющие провести экономическую интерпретацию результатов. Приведены сравнительные количественные расчеты модельного роста агентов при различных сценариях развития. Расчеты представлены на глубину порядка десятилетия при характерных мировых темпах развития 3% в год. Выделяются два основных сценария. Первый (фактор кооперации) — изоляции агента в процессе взаимодействия и обмена технологиями. Здесь вследствие изоляции масштаб отставания агента составляет 60% базового сценария за рассматриваемый период времени. Второй (сценарный расчет) — учет эффекта временного запаздывания—опережения использования достижений других агентов. В этом случае при прочих равных условиях динамический рост агента, который не только участвует в кооперации, но и опережает других на один-два года во внедрении достижений партнеров, обгоняя в динамическом росте в полтора раза. Таким образом, показано, что наиболее эффективный рост происходит при опережающей скорости реакции на партнерские воздействия. Это является результатом мультипликативного накопления преимущества. Ускоренный экономический рост послевоенной Японии является примером такого опережения.

Ключевые слова: динамическая модель экономики, экономическое взаимодействие и кооперация, временное запаздывание, дифференциальные уравнения с отклоняющимися переменными.

Классификация JEL: CO2, C39.

Для цитирования: **Кильматов Т.Р.** (2023). Модель роста экономических агентов с учетом взаимодействия и запаздывания на взаимные воздействия // *Экономика и математические методы*. Т. 59. № 3. С. 132–136. DOI: 10.31857/S042473880026952-6

ВВЕДЕНИЕ

Классические динамические модели макроэкономического роста (Solow, 1956; Romer 1990) предназначены для оценки значимых факторов роста и прогнозирования роста экономических процессов. Варианты развития динамического моделирования в экономике и обзор моделей представлены, в частности, в работе (Андрианов и др., 2015). Подобные модели непрерывно совершенствуются и в них добавляются новые факторы. Современное усложнение, удорожание и ускорение НИОКР изменяет социально-экономические условия. В частности, растет специализация и разделение труда на уровне отдельных государств, регионов и даже континентов. В высокотехнологичных конечных продуктах (например, в авиастроении) используются комплектующие детали из большого числа стран. Одновременно скорость изменения технологических процессов столь велика, что перед предприятиями практически непрерывно стоит проблема своевременного освоения и замены старых, и даже слегка устаревших, технологий. В этом случае особое значение приобретает экономический параметр — время реакции на современные воздействия. Математическая теория для моделирования процессов временной реакции на внешние воздействия в приложении к технике разрабатывалась с середины прошлого века (Bellman, 1949; Эльсгольц, Норкин, 1971), развитие этой теории можно найти в (Бекларян, 2007).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В статье строится динамическая модель роста в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Цель моделирования — рассмотреть совместный рост n экономических агентов с учетом их взаимодействия, оценить влияние фактора «кооперации — индивидуализации» и фактора «временной задержки — опережения» на динамику развития.

Рассмотрим n экономических агентов (стран), которые взаимодействуют между собой. Пусть $x_i(t)$ — параметр, характеризующий уровень роста агента i (например, ВВП) в заданный момент времени. Динамический рост осуществляется за счет собственных внутренних ресурсов или в результате кооперации, что модельно можно представить в виде динамических уравнений

$$\dot{x}_i = \beta_i x_i + \sum_j \alpha_{ij} x_j x_i, \quad \alpha_{ii} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Здесь первый член в правой части — положительные эндогенные параметры модели β_i — характеризует рост соответствующего агента за счет собственных ресурсов, второй член — параметры α_{ij} — рост за счет кооперации с другими агентами. Аналогом α_{ij} могут служить подходы моделей популяции (Смит, 1974; Макаров и др., 2020), где рассматриваются специализация и кооперация для совместного сосуществования.

В матричной форме уравнения (1) можно переписать в виде $\dot{X} = BX + AX$, где $B = (\beta_1 \dots \beta_n)$,

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12}X_1 & \dots & \alpha_{1n}X_1 \\ \alpha_{21}X_2 & 0 & \dots & \alpha_{2n}X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1}X_n & \alpha_{n2}X_n & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

по диагонали квадратной матрицы A стоят нули. Размерность β_i — величина, обратная времени; размерность α_{ij} — величина, обратная произведению времени t на уровень роста $x_i(t)$.

Система (1) с начальными условиями

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

описывает динамическую траекторию роста агентов во времени при условии применения собственных ресурсов, а также кооперации с другими агентами и с различными значениями параметров. Если система (1) предполагает задание функций в разные моменты времени, тогда она переходит в уравнения с отклоняющимися переменными, и начальные условия надо задавать в окрестности начальной точки (подробности см. в (Эльсгольц, Норкин, 1971; Бекларян, 2007)). В общем случае реализация (1)–(2) возможна в виде численной компьютерной имитации, которая целесообразна скорее всего только при адекватном статистическом наполнении модели.

ЧАСТНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим простые частные случаи, допускающие аналитические решения и ясную экономическую интерпретацию. Например случай, когда агенты имеют одинаковые симметричные экономические параметры, т.е.

$$\beta_i = \beta, \quad \alpha_{ij} = \alpha \quad \text{при } i \neq j, \quad x(t) = x_i(t), \quad x_i(0) = x_0. \quad (3)$$

Если нет отклонений аргументов, то все функции в модели в один и тот же момент зависят от времени. Тогда система (1) сводится к одному уравнению

$$\dot{x} = \beta x + \alpha(n-1)x^2 \quad (4)$$

и аналитическое решение системы с начальными условиями (2) имеет вид

$$\frac{x(t)}{x_0} = \frac{\beta e^{\beta t}}{\beta + x_0 \alpha (n-1)(1 - e^{\beta t})}. \quad (5)$$

При самостоятельном развитии агента, т.е. при $n = 1$ ($\alpha = 0$), решение имеет экспоненциальный вид

$$x(t)/x_0 = e^{\beta t}. \quad (6)$$

Если агент развивается только как реципиент (аналог островного туристического государства), т.е. только за счет партнеров, тогда $\beta = 0$ и решение (5) имеет гиперболический вид

$$x(t)/x_0 = (1 - x_0 \alpha (n-1)t)^{-1}. \quad (7)$$

Ясно, что (6)–(7) являются частными случаями решения (5).

МОДЕЛЬНЫЙ ЭФФЕКТ ВРЕМЕННЫХ ЗАДЕРЖЕК ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ АГЕНТОВ

Будем полагать, что взаимодействие и кооперация для некоторых агентов происходят с некоторой временной задержкой τ , т.е. для других — соответственно с опережением. Здесь будем проводить аналитические выкладки в приближении модели (4), в которой второй член в правой части уравнения зависит от отклоняющегося аргумента $t - \tau$, причем для построения аналитического решения полагаем, что время задержки является малым параметром. Такие приближения предполагают простые аналитические построения (Кильматов, 2003, 2013). Разлагая второй член в правой части (4) по малому параметру, получаем обобщение модели с учетом временных задержек при учете кооперативных эффектов

$$\dot{x} = \beta x + \alpha(n-1)(x^2 - 2x\dot{x}\tau). \quad (8)$$

Уравнение (8) и его решения построены и имеют смысл только при ограничении, что безразмерный параметр $\tau\beta < 1$. При значительной величине τ модель теряет устойчивость и однозначность решения (Бекларян, 2004, 2007).

В предположении, что в τ -окрестности точки t_0 функция постоянная и равна $x(0) = x_0$, частный интеграл уравнения (8) будет иметь вид

$$\frac{x}{x_0} \left(\frac{\alpha(n-1)x_0 + \beta}{\alpha(n-1)x + \beta} \right)^{1-2\tau\beta} - e^{\beta t} = 0. \quad (9)$$

Здесь решение (5) является частным случаем (9) при $\tau = 0$.

Проведем количественный анализ влияния разных факторов на основании представленных аналитических решений. Предполагаем, что характерные численные значения входящих экзогенных переменных соответствуют средним значениям роста мировой экономики.

ЧИСЛЕННЫЕ СЦЕНАРИИ ДИНАМИЧЕСКОГО РОСТА С УЧЕТОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АГЕНТОВ

Оценим влияние различных факторов на динамику роста агента в рамках приведенной аналитической модели. Зададим правдоподобные экзогенные переменные для временного масштаба 1 год. Предполагаем, что среднемировая экономика развивается за счет собственных ресурсов с темпом 3% в год, т.е. $\beta = 0,03 \text{ год}^{-1}$. Для более простых модельных сценариев роста будем считать, что в начальный момент времени $t_0 = 0$, $x_0 = 1$. Ниже в расчетах динамика $x(t)$ приводится в долях относительно начального состояния $x(t)/x_0$. За базовый сценарий примем значение безразмерной величины $x_0 \alpha (n-1) \beta^{-1} = 1$, т.е. на начальном этапе внутренний фактор роста и внешнее воздействие равновелики. В частности, если порядок взаимодействующих агентов равен 10 ($n = 11$), то $x_0 \alpha = 0,003 \text{ год}^{-1}$.

Здесь следует отметить временную прогностическую ограниченность приложения представленных аналитических решений. Ограничение соответствует случаю, когда знаменатель принимает нулевое значение. В частности, для (5) это момент времени $t_* \beta = \ln(1 + \beta/[x_0 \alpha (n-1)]) \sim 0,7$. Для представленного численного примера глубина прогноза не более 20 лет.

Влияние различных факторов будем рассматривать относительно базового сценария — формула (5) за временной прогноз в 12 лет. Обозначим этот сценарий через C0. Остальные сценарии рассматриваются, когда один параметр отклоняется от базового.

Сценарий C1 — агент действует один и не пользуется достижениями партнеров, $n = 1$, рост агента происходит только за счет собственных ресурсов. Этот случай соответствует соотношению (6), где эффект временных задержек не учитывается.

Сценарий C2 — агент является реципиентом, растет только за счет внешних партнеров, $\beta = 0$. Расчет производится по формуле (7), эффект временных задержек не учитывается.

Таблица. Сценарии динамики роста экономического агента при значениях параметров

t , год	C0	C1	C2	C3
0	1,00	1,00	1,00	1,00
3	1,21	1,09	1,10	1,25
6	1,49	1,20	1,22	1,65
9	1,90	1,31	1,37	2,25
12	2,53	1,43	1,56	4,00

Сценарий C3 — учитывается эффект временных задержек, агент опережает остальных при взаимодействии на 2 года, $\tau = -2$; формула (8). Таким образом, базовый сценарий C0 отстает от сценария C3, поскольку в данном случае агент вследствие опережающего использования потенциала партнеров имеет временное преимущество 2 года при внедрении технологий.

Расчеты показывают (см. таблицу), что динамический рост агента чувствителен к временным задержкам при использовании современных достижений. Легко оценить, что даже при опережении в 1 год ($\tau = -1$) для нашего примера получим $x(12)/x_0 \approx 3$, что также существенно опережает базовый сценарий. Таким образом, временной фактор задержек/опережения при взаимодействии агентов является важным фактором динамического развития.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленная динамическая модель роста в виде системы дифференциальных уравнений с отклоняющимися переменными позволяет выделить влияние факторов совместного кооперативного развития и временной реакции на внешние изменения. Количественные сценарии показывают, что эффект временного опережения на внешние вызовы выводит экономического агента на предпочтительные позиции преимущества перед другими. Появляется эффект мультипликативного накопления выгоды, т.е. более ранний старт во времени увеличивает преимущество лидера. В исторической ретроспективе этот эффект можно интерпретировать в том числе как одну из причин бурного экономического роста послевоенной Японии, начавшей стартовать с опережением при внедрении передовых технологий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Андрианов Д.Л., Арбузов В.О., Ивлиев С.В., Максимов В.П., Симонов П.М. (2015). Динамические модели экономики: теория, приложения, программная реализация // *Вестник Пермского университета. Экономика*. Т. 27. № 4. С. 8–32. [Andrianov D.L., Arbuzov V.O., Ivliev S.V., Maksimov V.P., Simonov P.M. (2015). Dynamic economy models: theory, applications, software implementation. *Perm University Herald. Economy*, 27, 4, 8–32 (in Russian).]
- Бекларян Л.А. (2007). Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход. М.: Факториал Пресс. 288 с. [Beklaryan L.A. (2007). *Introduction to the theory of functional differential equations. Group approach*. Moscow: Faktorial Press. 2007. 288 p. (in Russian).]
- Кильматов Т.Р. (2003). Моделирование временного запаздывания в динамических экономических системах // *Вестник ДВГАЭУ*. № 2. С. 81–87. [Kilmatov T.R. (2003). Modeling the delay process in dynamic economic systems. *Bulletin of the Far Eastern Federal University*, 2, 81–87 (in Russian).]
- Кильматов Т.Р. (2013). Временной лаг как фактор потери устойчивости экономической системы // *Экономика и математические методы*. Т. 49. № 3. С. 120–122. [Kilmatov T.R. (2013). Time lag as a factor of the economic system destabilization. *Economics and Mathematical Methods*, 49 (3), 120–122 (in Russian).]
- Макаров В.Л., Бахтизин А.Р., Бекларян Г.Л., Акопов А.С., Ровенская Е.А., Стрелковский Н.В. (2020). Агентное моделирование популяционной динамики двух взаимодействующих сообществ: мигрантов и коренных жителей // *Экономика и математические методы*. Т. 56. № 2. С. 5–19. [Makarov V.L., Bahtizin A.R., Beklaryan G.L., Akopov A.S., Rovenskaya E.A., Strelkovskiy N.V. (2020). Agent-based modelling of population dynamics of two interacting social communities: migrants and natives. *Economics and Mathematical Methods*, 56 (2), 5–19 (in Russian).]
- Смит Д.М. (1976). Модели в экологии. Пер. с англ. М.: Мир. 184 с. [Smith J.M. (1976). *Models in ecology*. Transl. from English. Moscow: Mir (in Russian). Originally publ. in 1974 by University of Sussex. Cambridge: University Press.]

- Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. (1971). Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука. 296 с. [Elsgolc L.E., Norkin S.B. (1971). *Introduction to the theory of differential-difference equations*. Moscow: Nauka. 296 p. (in Russian).]
- Bellman R. (1949). On the existence and boundedness of solutions differential-difference equations. *Annals of Mathematics*, 50, 2, 347–355. DOI: 10.2307/1969460
- Romer P. (1990). Endogenous technological change. *Journal of Political Economy*, 98, 5, 71–102.
- Solow R.M. (1956). Contribution to the theory of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 70, 1, 65–94.

Dynamic model of economic agents including interaction and delay effects

© 2023 T.R. Kilmatov

T.R. Kilmatov,

Far Eastern Federal University, Maritime State University named after admiral G.I. Nevelskoy, Vladivostok, Russia; e-mail: talgat_k@mail.ru

Received 11.04.2023

Abstract. The dynamic model of economic growth of several agents is presented. This is a system of non-linear differential-difference equations. The model takes into account the interaction of economic agents and the delay effect. Some simple analytic particular solutions are shown. These analytical solutions allow some clear economic interpretation. The comparative scenario quantitative calculations are given. The calculations are presented for time period of a decade and the typical global development rate of 3% per year. There are two main scenarios. The first scenario of cooperative or isolated agent development is considered. There is the scenario of the agent development due to the support of other partners. The consequence of isolation is the backlog of 60% per decade. The second scenario is the time delay effect using the achievements of other agents. An advance time lag of one-two years is considered. In this case, ceteris paribus, the dynamic growth of the agent is 1.5 times ahead of the others. More effective growth occurs with the faster and advance reaction rate to partners' achievements. In this case there is the effect of the multiplicative accumulation of advantage. This scenario can be interpreted as the illustration of the accelerated economic growth of post-war Japan.

Keywords: economic dynamic model, economic interaction and cooperation, delay, differential-difference equations.

JEL Classification: CO2, C39.

For reference: Kilmatov T.R. (2023). Dynamic model of economic agents including interaction and delay effects. *Economics and Mathematical Methods*, 59, 3, 132–136. DOI: 10.31857/S042473880026952-6 (in Russian).