

ISSN 0374-0641

Том 60, Номер 12

Декабрь 2024



ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ



НАУКА

— 1727 —

Российская академия наук

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Том 60 № 12 2024 Декабрь

Издается с января 1965 г.

ISSN: 0374-0641

Ежемесячный математический журнал

*Журнал издается под руководством Отделения Математических наук
Российской академии наук, Отделения Нанотехнологий и информационных технологий РАН*

Главный редактор
В.А. Садовничий

Редакционная коллегия:

А.В. Арутюнов, И.В. Астащова, В.А. Винокуров,
Д.В. Георгиевский, Н.А. Изобов, А.В. Ильин (зам. главного редактора),
В.И. Корзюк, А.Б. Куржанский, Ю.С. Осипов, С.И. Репин,
В.Г. Романов, Я.Т. Султанаев, В.В. Фомичев, Ф.Л. Черноусько

Ответственный секретарь: Н.В. Зайцева

*Адрес редколлегии: 119991, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы,
МГУ имени М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, комната 733б.
Телефон: 8 (495) 932-88-53.*

Москва
ФГБУ «Издательство «Наука»

СОДЕРЖАНИЕ

Том 60, номер 12, 2024

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Классификация квазилинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и её применение при нормализации систем в критическом случае Богданова–Такенса

B. B. Басов

1587

Исследование пространства параметров многомерной системы с релейным гистерезисом и возмущением

B. B. Евстафьева, M. Ю. Гусева

1601

Построение решений с отрицательными показателями дифференциальной системы в двумерном антиперроновском эффекте при возмущениях высшего порядка

H. A. Изобов, A. B. Ильин

1616

О чувствительности решений уравнений Риккати при малых изменениях коэффициентов и анализе оптимальности в линейных стохастических системах управления

E. C. Паламарчук

1623

Об устойчивости по нелинейному нестационарному гибридному приближению

A. B. Платонов

1640

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Единственность энтропийного решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения с мерозначным потенциалом в гиперболическом пространстве

B. Ф. Вильданова

1653

Локализация собственных функций задачи Дирихле около контура на границе тонкой области

C. A. Назаров

1664

Разрешимость нелинейных краевых задач для дифференциальных уравнений равновесия непологих оболочек типа Тимошенко ненулевой гауссовой кривизны в изометрических координатах

C. H. Тимергалиев

1685

Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с нагруженным членом в классе периодических функций

Г. Уразбоев, M. M. Хасанов, O. B. Исмоилов

1703

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Краевая задача для уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями
в полуполосе

H. Ю. Капустин, Д. Д. Васильченко

1713

Авторский указатель тома 60, 2024

1719

— ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ —

УДК 517.925

КЛАССИФИКАЦИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ НОРМАЛИЗАЦИИ СИСТЕМ
В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ БОГДАНОВА–ТАКЕНСА

© 2024 г. В. В. Басов

Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: vlvbasov@rambler.ru

Поступила в редакцию 29.04.2024 г., после доработки 16.06.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

Рассмотрена двумерная автономная система с квазиоднородным многочленом первой степени с весом $(1, 2)$ в невозмущённой части. Проведена классификация невозмущённой части, согласно которой множество таких многочленов конструктивным образом разбито на восемь классов эквивалентности относительно квазиоднородных замен нулевой степени и в каждом классе выделена образующая, называемая канонической формой. Получены все структуры обобщённых нормальных форм для остававшейся неисследованной системы с одной из канонических форм в невозмущённой части. Методом резонансных уравнений и наборов осуществлена нормализация в системе с невозмущённой частью $(x_2, ax_1x_2 + bx_1^3)$, что значительно усилило уже имеющиеся результаты исследований в одном из критических случаев классификации Богданова–Такенса.

Ключевые слова: обобщённая нормальная форма, квазиоднородный многочлен, резонансное уравнение

DOI: 10.31857/S0374064124120016, EDN: IPTQYI

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим двумерную вещественную автономную систему

$$\dot{x} = P_{(1,2)}^{[1]}(x) + X(x) \quad (x = \text{colon}(x_1, x_2)), \quad (1)$$

невозмущённую часть которой образует квазиоднородный многочлен (КОМ) $P_{(1,2)}^{[1]}$ первой степени, а возмущение $X = \text{colon}(X_1, X_2)$ разложено в сумму КОМ степени n с весом $(1, 2)$, т.е. $X = \sum_{n=2}^{\infty} X^{[n]}(x_1, x_2)$, где $X_i^{[n]} = \sum_{q_1+2q_2-i=n} X_i^{[q_1, 2q_2]} x_1^{q_1} x_2^{q_2}$ ($i = 1, 2$).

Основной целью этой и многих других работ является получение различных обобщённых нормальных форм (ОНФ), формально эквивалентных системе (1).

Нормализацию системы (1) удобно осуществлять в два этапа.

Этап 1. Сначала к нормальной форме приводится невозмущённая часть системы (1). Для этого множество невозмущённых систем

$$\dot{x} = P_{(1,2)}^{[1]}(x), \quad \text{или} \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a x_2 + b x_1^2, \\ \dot{x}_2 &= c x_1 x_2 + d x_1^3, \end{aligned} \quad (2)$$

правые части которых, как и они сами, отождествляются с матрицей

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

разбивается на классы эквивалентности относительно квазилинейных замен нулевой степени. В каждом классе, основываясь на должным образом введённых принципах, выделяются образующие — наиболее простые системы, называемые *нормальными формами* невозмущённой системы (2). Их правые части будем обозначать CF и называть *каноническими формами*.

В п. 2 приведены структурные и нормировочные принципы, на основании которых получены следующие невырожденные канонические формы (под невырожденностью понимается отсутствие в матрице M нулевых строк) системы (2):

$$\begin{aligned} CF_1^2 &= \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad CF_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad CF_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad CF_4^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad (\sigma = \pm 1); \\ CF_1^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad CF_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (u \in (-1/2, 0) \cup (0, 1/2]), \\ CF_3^3 &= \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad u \in (0, \sqrt{2}); \quad CF_4^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$

Кроме того, в теореме 1 для каждой канонической формы CF из (3) в явном виде найдены условия на коэффициенты системы (2) и квазилинейные замены, приводящие при данных условиях правую часть (2) к выбранной CF , а также получаемые при этом значения параметров u и σ .

Этап 2. При помощи формальных почти тождественных замен (нормализующих) последовательно приводятся системы (1), имеющие одну из канонических форм (3) в невозмущённой части. К настоящему моменту исследованы системы (1), имеющие в качестве невозмущённых частей следующие канонические формы: CF_1^2 [1], CF_2^2 [2], CF_3^2 [2], CF_4^2 [3–5], CF_2^3 [6], частный случай CF_3^3 [7].

В продолжение этих исследований в п. 3 выделены все возможные структуры ОНФ для системы (1) с достаточно простой канонической формой CF_1^3 в невозмущённой части и приведены примеры ОНФ с выбранными типами структур.

Нормализация, как и в предшествующих случаях, осуществляется так называемым *методом резонансных уравнений и наборов* (см., например, [2, 3, 8]). В этих же работах даётся определение используемого здесь понятия ОНФ, которое фактически соответствует определению ОНФ первого порядка из статьи [7].

К сожалению, аналогичные результаты для систем с CF_3^3 в невозмущённой части пока отсутствуют из-за того, что в линейной алгебраической связующей системе возникает пятидиагональная матрица, у которой не удается оценить собственные числа.

Как было отмечено, в работе [7] осуществлена нормализация системы (1) вида

$$\dot{x}_1 = x_2 + X_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = \alpha x_1 x_2 + \beta x_1^3 + X_2(x_1, x_2) \quad (\alpha, \beta \neq 0), \quad (4)$$

невозмущённая часть которой относится к одному из неисследованных критических случаев классификации Богданова–Такенса (см. [9]). При серьёзном предположении о том, что число $\alpha^{-2}\beta$ не является алгебраическим (не позволяет обращаться в нуль собственным числам связующей системы), была получена одна из возможных структур ОНФ:

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = \alpha y_1 y_2 + \beta y_1^3 + \sum_{n=4}^{\infty} a_n y_1^n. \quad (5)$$

В п. 4 предложен и реализован один из возможных способов нормализации системы в критическом случае Богданова–Такенса, а в замечании 4 исправлена ошибка, допущенная в [7] при описании членов младшего порядка возмущения полученной ОНФ (5).

Дело в том, что классификация Богданова–Такенса, относящаяся к системам (1), отличается от классификации, предложенной в настоящей работе. Простейшая нормализация для двумерных систем $\dot{x} = Ax + X(x)$ с вырожденной матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, задающей линейную невозмущённую часть, была осуществлена Ф. Такенсом в [10]. В свою очередь, именно полученная им нормальная форма, имеющая вид $\dot{y}_1 = y_2$, $\dot{y}_2 = f(x) + yg(x)$, точнее вся её правая часть, была выбрана в статье [9] в качестве невозмущённой и использована для создания классификации, названной авторами классификацией Богданова–Такенса, поскольку её основы были заложены в работах Р.И. Богданова [11] и Ф. Такенса [10].

Недостаток такой классификации заключается в том, что нормализации не подвергается квазилинейная часть системы (4), а с её помощью происходит нормализация членов более высокого порядка.

Действительно, матрица $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$, введённая для невозмущённой системы (2), является не канонической, а структурной формой из класса SF_4^3 (см. определения 1, 2 и (13) в п. 2), и поэтому допускает упрощения.

Оказывается, что в случае когда у системы (4)

$$\beta \geq -\alpha^2/8, \quad (6)$$

её квазилинейная часть квазиоднородной заменой нулевой степени сводится по теореме 1 к более простой форме CF_2^3 . Системы с CF_2^3 в невозмущённой части исследованы в [6] и для них методом резонансных наборов и уравнений в явном виде выписаны все структуры ОНФ.

Таким образом, нормализация матрицы M позволяет существенно продвинуться в исследовании критических случаев классификации Богданова–Такенса и, в частности, не требовать трансцендентности числа $\alpha^{-2}\beta$.

Что касается случая, когда неравенство (6) не выполняется, то SF_4^3 может быть сведена только к CF_3^3 , для неё сохраняется пока не решённая проблема с оценкой собственных чисел матрицы связующей системы.

Следует отметить, что полученные в п. 4 результаты не полностью решают проблему нормализации в критическом случае Богданова–Такенса, поскольку в полученных ОНФ в квазилинейной части вместо слагаемого βy_1^3 во втором уравнении появляется слагаемое iy_1^2 в первом уравнении, а его отсутствие может требоваться при решении конкретных задач, связанных с нормализацией системы. В конечном счёте всё упирается в одну из ключевых проблем, связанных с обобщёнными нормальными формами: какие слагаемые в правой части системы использовать в качестве невозмущённой части.

2. КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ВЕСОМ (1,2)

Рассмотрим двумерную вещественную квазилинейную систему (2), правая часть которой является невырожденным квазиоднородным многочленом первой степени с весом (1, 2). Этот многочлен обозначается $P_{(1,2)}^{[1]}(x)$ и отождествляется, как и сама система, с матрицей M . Напомним, что невырожденность $P_{(1,2)}^{[1]}$ означает отсутствие в матрице M нулевых строк, т.е. наличие ограничения $a^2 + b^2 \neq 0$, $c^2 + d^2 \neq 0$.

Структура системы (2) сохраняется при выполнении произвольной вещественной обратимой квазиоднородной замены нулевой степени с весом (1, 2), которая имеет вид

$$x_1 = \tau_1 z_1, \quad x_2 = \tau_2 z_2 + \delta z_1^2 \quad \text{или} \quad L = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ \delta & \tau_2 \end{pmatrix} \quad (\tau_1, \tau_2 \neq 0). \quad (7)$$

Замену (7), отождествляемую с матрицей L , удобно записать в виде композиции двух замен: нормированной и нормирующей.

Структурирующая замена

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2 + \gamma y_1^2 \quad (8)$$

преобразует (2) в квазилинейную систему

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= a y_2 + (b + a\gamma) y_1^2, \\ \dot{y}_2 &= (c - 2a\gamma) y_1 y_2 + (d + (c - 2b)\gamma - 2a\gamma^2) y_1^3 \end{aligned} \quad \text{или} \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где $\tilde{a} = a$, $\tilde{b} = b + a\gamma$, $\tilde{c} = c - 2a\gamma$, $\tilde{d} = d + (c - 2b)\gamma - 2a\gamma^2$.

В свою очередь, нормирующая замена

$$y_1 = \tau_1 z_1, \quad y_2 = \tau_2 z_2 \quad (\tau_1, \tau_2 \neq 0) \quad (10)$$

преобразует систему (9) в квазилинейную систему

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \tau_1^{-1} \tau_2 \tilde{a} z_2 + \tau_1 \tilde{b} z_1^2, \\ \dot{z}_2 &= \tau_1 \tilde{c} z_1 z_2 + \tau_1^3 \tau_2^{-1} \tilde{d} z_1^3 \end{aligned} \quad \text{или} \quad \widehat{M} = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Утверждение 1. 1. В замене (7), являющейся композицией замен (8) и (10), $\delta = \tau_1^2 \gamma$.
2. Условие $a = 0$ инвариантно относительно замены (7).

Обозначим через D дискриминант выражения $a\gamma^2 - (c/2 - b)\gamma - d/2$, тогда

$$D = (c/2 - b)^2 + 2ad \quad \text{или} \quad D = (c/2 + b)^2 + 2 \det M. \quad (12)$$

Аналогичным образом введём дискриминанты \tilde{D} и \widehat{D} .

Утверждение 2. Для дискриминантов систем (9) и (11), полученных из системы (2), справедливы следующие равенства: $\tilde{D} = D$, $\widehat{D} = \tau_1^2 \tilde{D}$.

Следуя [12], введём формальное понятие структурной формы, упорядочим множество структурных форм, основываясь на должным образом выбранном структурном принципе, разобъём их на классы эквивалентности относительно замены (7) и выделим в каждом классе образующую — простейшую с учётом выбранного нормировочного принципа структурную форму, называемую канонической.

Определение 1. Вещественную матрицу M из (2) будем называть *структурной m -формой* ($m = 2, 3, 4$) и обозначать SF^m , если какие-либо m её элементов отличны от нуля, а остальные равны нулю.

Очевидно, что структурные m -формы отличаются одна от другой различным расположением ненулевых элементов и имеется всего девять структурных форм.

Вполне упорядочим множество структурных форм при помощи следующего структурного принципа: SF^m предшествует SF^k , если $m < k$, а среди форм с одинаковым m порядок предшествования таков: $a = 0, d = 0, c = 0$.

Для каждого m ($m = 2, 3, 4$) расставим структурные формы SF^m в соответствии с введённым порядком и присвоим каждой соответствующий ей номер i , вводя обозначение SF_i^m :

$$\begin{aligned} SF_1^2 &= \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad SF_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad SF_3^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad SF_4^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}; \\ SF_1^3 &= \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad SF_2^3 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad SF_3^3 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad SF_4^3 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}; \quad SF_1^4 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $a, b, c, d \neq 0$. Каждую SF_i^m из (13) нормируем при помощи замены (10) в соответствии с нормировочным принципом: из элементов, расположенных в порядке a, d, c, b , первый ненулевой нормируется к 1, а второй, если возможно, — к 1 или -1 .

Нормированную SF_i^m будем обозначать NSF_i^m , а её оставшиеся ненормированными элементы, если такие имеются, будем называть *параметрами*.

Определение 2. Нормированную каноническую форму NSF_i^m будем называть *канонической формой* и обозначать CF_i^m , если выделено такое минимальное множество допустимых значений её параметров, называемое *каноническим* и обозначаемое cs_i^m , что CF_i^m ни при каких значениях параметров из cs_i^m не может быть сведена заменой (7) к какой-либо предшествующей структурной форме. Под минимальностью cs_i^m понимается максимальное ограничение значений его параметров по модулю или по знаку при помощи должным образом подобранный замены (7).

Разумеется, в CF_i^m параметры могут не иметь ограничений или, наоборот, могут оказаться константами. В этих случаях каноническое множество не указывается, оно тривиально.

Замечание 1. Предложенные структурный и нормировочный принципы введены таким образом, что позволяют максимально сократить технические трудности, связанные с нормализацией возмущённых систем, имеющих в невозмущённой части какую-либо из выделенных форм CF . А требование невырожденности CF или, что то же самое, отсутствия нулевой строки у матрицы M вызвано желанием полноценно нормализовать возмущённую систему, т.е. иметь возможность при помощи почти тождественных преобразований получать максимальное число нулевых коэффициентов в возмущении.

Докажем, что матрица M системы (2) сводится к одной из восьми форм CF в (3), и покажем, что матрица M в ряде случаев заменой (7) может быть сведена не только к каноническим, но и к вырожденным (с нулевой второй строкой) каноническим формам, обозначаемым $CF_{d,\iota}^\mu$.

Три вырожденные канонические формы системы (2) имеют вид

$$CF_{d,1}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad CF_{d,2}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad CF_{d,1}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для случая когда в (12) дискриминант $D \geq 0$, введём константы

$$\gamma_1 = \frac{c/2 - b - \sqrt{D}}{2a}, \quad \gamma_2 = \frac{c/2 - b + \sqrt{D}}{2a}; \quad \eta_1 = \frac{c/2 + b - \sqrt{D}}{2}, \quad \eta_2 = \frac{c/2 + b + \sqrt{D}}{2}. \quad (14)$$

Теорема 1. С помощью замен (8) и (10) правая часть системы (2) сводится к одной из восьми попарно неэквивалентных друг другу относительно замен (7) канонических форм (3).

Ниже для каждой CF из (3) приведены: а) условия на коэффициенты системы (2); б) замены (8) и (10), приводящие при данных условиях правую часть системы (2) к выбранной CF ; в) получаемые при этом значения параметров и σ :

CF_2^2 : а) $a = 0, c = 0$; б) $\gamma = 0, \tau_1 = b^{-1}, \tau_2 = b^{-3}d$;

CF_1^3 : а) $a = 0, c = 2b, d \neq 0$; б) $\gamma = 0, \tau_1 = b^{-1}, \tau_2 = b^{-3}d$;

CF_1^2 : а) $a = 0, c \neq 0$ ($c \neq 2b$ или $c = 2b, d = 0$); б) $\gamma = (2b - c)^{-1}d, \tau_1 = c^{-1}$ или $\gamma = 0, \tau_1 = (2b)^{-1}, \tau_2 = 1$; в) $\sigma = bc^{-1}$;

CF_4^2 : а) $a \neq 0, c = -2b, ad + 2b^2 \neq 0$; б) $\gamma = -a^{-1}b, \tau_1 = |d + 2a^{-1}b^2|^{-1/2} \operatorname{sign} a, \tau_2 = a^{-1}\tau_1$; в) $\sigma = \operatorname{sign}(d + 2a^{-1}b^2)$;

CF_1^4 : а) $a \neq 0, c = -2b, d = -2a^{-1}b^2$; б) $\gamma = 0, \tau_1 = b^{-1}, \tau_2 = (ab)^{-1}$;

CF_3^2 : а) $a \neq 0, c + 2b \neq 0, d = a^{-1}bc$ ($D > 0$); б) $\gamma = \gamma_1$ при $c + 2b > 0$ или $\gamma = \gamma_2$ при $c + 2b < 0$, $\tau_1 = (c + 2b)^{-1}, \tau_2 = a^{-1}\tau_1$;

CF_2^3 : a) $a \neq 0$, $c+2b \neq 0$, $d \neq a^{-1}bc$ ($D \geq 0$); b) $\gamma = \gamma_\iota$, $\tau_1 = (c - 2a\gamma_\iota)^{-1}$, $\tau_2 = a^{-1}\tau_1$; c) $u = (b + a\gamma_\iota)(c - 2a\gamma_\iota)^{-1}$, где $\iota = 1$ при $c + 2b > 0$, $\iota = 2$ при $c + 2b < 0$;

CF_3^3 : a) $a \neq 0$, $c+2b \neq 0$ ($D < 0$); b) $\gamma = (2a)^{-1}c$, $\tau_1 = (bc - ad)^{-1/2} \operatorname{sign}(c+2b)$, $\tau_2 = a^{-1}\tau_1$; c) $u = |c/2+b|(bc - ad)^{-1/2}$.

Доказательство. 1. Рассмотрим случай $a = 0$ ($b \neq 0$), т.е. в (2) $M = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}$. В результате замены (8) получаем систему (9) с $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d + (c - 2b)\gamma \end{pmatrix}$.

1.1. Пусть $c = 0$ ($d \neq 0$). Выбирая, например, $\gamma = 0$, чтобы сохранить невырожденность, имеем $M = \tilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ и после нормировки (10) с $\tau_1 = b^{-1}$, $\tau_2 = b^{-3}d$ получаем CF_2^2 , а при $\gamma = (2b)^{-1}d$ и $\tau_1 = b^{-1}$ ($\tau_2 = 1$) получаем $CF_{d,1}^1$.

1.2. Если $c = 2b$, то при любом γ , например при $\gamma = 0$, матрица $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 2b & d \end{pmatrix}$.

1.2.1. При $d = 0$ нормировка (10) с $\tau_1 = (2b)^{-1}$ ($\tau_2 = 1$) даёт CF_1^2 с $u = 1/2$.

1.2.2. При $d \neq 0$ нормировка (10) с $\tau_1 = b^{-1}$, $\tau_2 = b^{-3}d$ даёт CF_1^3 .

1.3. Пусть $c \neq 0, 2b$. Тогда при $\gamma = (2b - c)^{-1}d$ матрица $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ и её нормировка (10) с $\tau_1 = c^{-1}$ ($\tau_2 = 1$) даёт CF_1^2 с $u = bc^{-1} \neq \{0, 1/2\}$.

2. Случай $a \neq 0$. Из системы (2) с помощью замены (8) получаем систему (9).

2.1. Пусть $c = -2b$. Это условие позволяет при желании аннулировать в (9) элементы \tilde{b} и \tilde{c} , так как в этом случае $\tilde{M} = \begin{pmatrix} a & b + a\gamma \\ -2(b + a\gamma) & d - 4b\gamma - 2a\gamma^2 \end{pmatrix}$.

2.1.1. Пусть $\psi_1 = d + 2a^{-1}b^2 \neq 0$. При $\gamma = -a^{-1}b$ имеем матрицу $\tilde{M} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \psi_1 \end{pmatrix}$ и её нормировка (10) с $\tau_1 = |\psi_1|^{-1/2} \operatorname{sign} a$, $\tau_2 = a^{-1}\tau_1$ даёт CF_4^2 с $\sigma = \operatorname{sign} \psi_1$.

2.1.2. Если $d = -2a^{-1}b^2$ ($\psi_1 = 0$), то $\tilde{M} = \begin{pmatrix} a & b + a\gamma \\ -2(b + a\gamma) & -2a^{-1}(b + a\gamma)^2 \end{pmatrix}$.

Теперь при $\gamma = 0$ имеем $M, \tilde{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & -2a^{-1}b^2 \end{pmatrix}$ и нормировка (10) с $\tau_1 = b^{-1}$, $\tau_2 = (ab)^{-1}$ даёт CF_1^4 , а при $\gamma = -a^{-1}b$ и $\tau_1 = a$ ($\tau_2 = 1$) получаем $CF_{d,2}^1$.

2.2. При $c + 2b \neq 0$ в матрице \tilde{M} из (9) предпочтительнее всего согласно структурному принципу аннулировать элемент $\tilde{d} = -2(a\gamma^2 - (c/2 - b)\gamma - d/2)$. Это возможно сделать, если дискриминант D из (12) неотрицательный.

2.2.1. $D = (c/2 + b)^2 + 2(ad - bc) \geq 0$. Тогда в (14) γ_1, γ_2 — нули элемента \tilde{d} из \tilde{M} , $\eta_1 = b + a\gamma_1 = (c - 2a\gamma_2)/2$, $\eta_2 = b + a\gamma_2 = (c - 2a\gamma_1)/2$.

Пусть в замене (8) $\gamma = \gamma_i$, тогда в системе (9) $\tilde{M}_i = \begin{pmatrix} a & b + a\gamma_i \\ c - 2a\gamma_i & 0 \end{pmatrix}$ ($i = 1, 2$).

2.2.1.1. Условие $d = a^{-1}bc$ равносильно условию $D = (c/2 + b)^2 > 0$ ($\gamma_1 \neq \gamma_2$).

i) Если $c + 2b > 0$, то выбираем $\gamma = \gamma_1$. Тогда в \tilde{M}_1 согласно (14) элемент $\tilde{b} = b + a\gamma_1 = \eta_1 = 0$, элемент $\tilde{c} = c - 2a\gamma_1 = 2\eta_2 = c + 2b$, т.е. $\tilde{M}_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c + 2b & 0 \end{pmatrix}$.

ii) Если $c + 2b < 0$, то выбираем $\gamma = \gamma_2$. Тогда в \tilde{M}_2 согласно (14) элемент $\tilde{b} = b + a\gamma_2 = \eta_2 = 0$, элемент $\tilde{c} = c - 2a\gamma_2 = 2\eta_1 = c + 2b$, т.е. $\tilde{M}_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c + 2b & 0 \end{pmatrix}$.

После нормировки (10) с $\tau_1 = (c + 2b)^{-1}$, $\tau_2 = a^{-1}\tau_1$ \tilde{M}_1 и \tilde{M}_2 превращаются в CF_3^2 .

Если в случае 1 взять $\gamma = \gamma_2$, а в случае 2 — $\gamma = \gamma_1$, то будет получена матрица $\begin{pmatrix} a & c+2b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, которую также нормировка сведёт к $CF_{d,1}^2$.

2.2.1.2. Условие $d \neq a^{-1}bc$ равносильно условиям $\eta_1, \eta_2 \neq 0$.

i) При $c+2b > 0$ выбираем $\gamma = \gamma_1$, тогда в \tilde{M}_1 согласно (14) $\tilde{d} = 0$, поскольку γ_1 — корень уравнения $2\gamma^2 - \alpha\gamma - \beta = 0$, далее, $\tilde{b} = \eta_1$, $\tilde{c} = 2\eta_2$, причём $\eta_2 > |\eta_1|$ при $D > 0$ и $\eta_2 = \eta_1$ при $D = 0$. После нормировки (10) с $\tau_1 = (2\eta_2)^{-1}$, $\tau_2 = a^{-1}\tau_1$ в системе (11) $\tilde{M} = CF_2^3$ с $u = \eta_1(2\eta_2)^{-1} = (b+a\gamma_1)(c-2a\gamma_1)^{-1}$, причём $u \in (-1/2, 0) \cup (0, 1/2]$.

ii) При $c+2b < 0$ выбираем $\gamma = \gamma_2$, тогда в \tilde{M}_2 согласно (14) $\tilde{b} = \eta_2$, $\tilde{c} = 2\eta_1$, причём $-\eta_1 > |\eta_2|$ при $D > 0$ и $\eta_1 = \eta_2$ при $D = 0$. После замены (10) с $\tau_1 = (2\eta_1)^{-1}$, $\tau_2 = a^{-1}\tau_1$ получаем CF_2^3 с $u = \eta_2(2\eta_1)^{-1} = (b+a\gamma_2)(c-2a\gamma_2)^{-1}$, при этом $u \in (-1/2, 0) \cup (0, 1/2]$.

2.2.2. Пусть $D = (c/2+b)^2 + 2(ad-bc) < 0$ ($ad-bc < 0$). Тогда при $\gamma = (2a)^{-1}c$ в (9) матрица $\tilde{M} = \begin{pmatrix} a & c/2+b \\ 0 & a^{-1}(ad-bc) \end{pmatrix}$ и её нормировка (10) с $\tau_1 = (bc-ad)^{-1/2} \operatorname{sign}(c+2b)$, $\tau_2 = a^{-1}\tau_1$ даёт CF_3^3 с $u = |c/2+b|(bc-ad)^{-1/2}$. При этом $0 < u < \sqrt{2}$, так как равносильны неравенства $D < 0$ и $D = u^2 - 2 < 0$. Теорема доказана.

Замечание 2. В случае 2.2.2 при $\gamma = -a^{-1}b$ в (9) $\tilde{M} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c+2b & a^{-1}(ad-bc) \end{pmatrix}$ и та же нормировка приводит эту матрицу к NSF_4^3 вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta & -1 \end{pmatrix}$ с $\theta = |c+2b|(bc-ad)^{-1/2}$ ($0 < \theta < \sqrt{8}$). Очевидно, что такая NSF_4^3 для любого $\theta \in (0, \sqrt{8})$ заменой (8) с $\gamma = \theta/2$ сводится к предшествующей ей CF_3^3 , у которой $u = \theta/2$.

Замечание 3. В случаях 1.1, 2.1.2 и 2.2.1.1 установлено, что вместо CF_2^2 , CF_1^4 и CF_3^2 можно получить соответственно $CF_{d,1}^1$, $CF_{d,2}^1$ и $CF_{d,1}^2$. Нормализацию возмущённых систем с CF_d в невозмущённой части имеет смысл проводить в тех случаях, когда эквивалентная CF достаточно сложна, как, например, CF_1^4 . Тогда для получения полноценной нормализации из правой части второго уравнения возмущённой системы в нулевую невозмущённую часть выделяют некоторые члены возмущения, позволяющие ввести новый вес и определить степень созданного невырожденного квазиоднородного многочлена.

3. ОБОБЩЁННАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА СИСТЕМЫ С CF_1^3 В НЕВОЗМУЩЁННОЙ ЧАСТИ

Рассмотрим систему (1), невозмущённая часть которой представлена канонической формой CF_1^3 :

$$\dot{x}_1 = x_1^2 + X_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = 2x_1x_2 + x_1^3 + X_2(x_1, x_2), \quad (15)$$

в которой $X_i = \sum_{n=2}^{\infty} X_i^{[n]}(x_1, x_2)$ ($i = 1, 2$), а $X_i^{[n]} = \sum_{q_1+2q_2-i=n} X_i^{[q_1, 2q_2]} x_1^{q_1} x_2^{q_2}$.

Пусть вещественная почти тождественная замена

$$x_i = y_i + h_i(y_1, y_2) \quad (i = 1, 2) \quad (16)$$

преобразует систему (15) в формально эквивалентную ей систему

$$\dot{y}_1 = y_1^2 + Y_1(y_1, y_2), \quad \dot{y}_2 = 2y_1y_2 + y_1^3 + Y_2(y_1, y_2), \quad (17)$$

здесь $h_i = \sum_{n=2}^{\infty} h_i^{[n-1]}(y_1, y_2)$, $h_i^{[n-1]} = \sum_{q_1+2q_2-i=n-1} h_i^{[q_1, 2q_2]} y_1^{q_1} y_2^{q_2}$ и Y_i аналогичны X_i .

Дифференцируя по t равенства (16) в силу систем (15) и (17), получаем тождества

$$\begin{aligned} (y_1 + h_1)^2 + X_1(y_1 + h_1, y_2 + h_2) &= y_1^2 + Y_1 + \frac{\partial h_1}{\partial y_1}(y_1^2 + Y_1) + \frac{\partial h_1}{\partial y_2}(2y_1 y_2 + y_1^3 + Y_2), \\ 2(y_1 + h_1)(y_2 + h_2) + (y_1 + h_1)^3 + X_2(y_1 + h_1, y_2 + h_2) &= \\ &= 2y_1 y_2 + y_1^3 + Y_2 + \frac{\partial h_2}{\partial y_1}(y_1^2 + Y_1) + \frac{\partial h_2}{\partial y_2}(2y_1 y_2 + y_1^3 + Y_2). \end{aligned}$$

Для любого $n \geq 2$ компоненты КОМ степени n из этих тождеств запишем в виде

$$\begin{aligned} y_1^2 \frac{\partial h_1^{[n-1]}}{\partial y_1} + (2y_1 y_2 + y_1^3) \frac{\partial h_1^{[n-1]}}{\partial y_2} - 2y_1 h_1^{[n-1]} &= \tilde{Y}_1^{[n]} - Y_1^{[n]}, \\ y_1^2 \frac{\partial h_2^{[n-1]}}{\partial y_1} + (2y_1 y_2 + y_1^3) \frac{\partial h_2^{[n-1]}}{\partial y_2} - (3y_1^2 + 2y_2) h_1^{[n-1]} - 2y_1 h_2^{[n-1]} &= \tilde{Y}_2^{[n]} - Y_2^{[n]}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\tilde{Y}_1^{[n]} = \{X_1(y_1 + h_1, y_2 + h_2) + h_1^2 - Y_1 \partial h_1 / \partial y_1 - Y_2 \partial h_1 / \partial y_2\}^{[n]}$, $\tilde{Y}_2^{[n]} = \{X_2(y_1 + h_1, y_2 + h_2) + h_1 h_2 + 3y_1 h_1^2 + h_1^3 - Y_1 \partial h_2 / \partial y_1 - Y_2 \partial h_2 / \partial y_2\}^{[n]}$, причём квазиоднородный многочлен $\tilde{Y}^{[n]} = (\tilde{Y}_1^{[n]}, \tilde{Y}_2^{[n]})$ уже известен, поскольку содержит только слагаемые из предшествующих КОМ $Y^{[s]}$ и $h^{[s-\kappa]}$ ($\kappa+1 \leq s \leq n-1$).

Приравнивая в выписанном КОМ коэффициенты при $y_1^{q_1} y_2^{q_2}$, где по определению $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $q_1 + 2q_2 = n+i$, $n \geq 2$, а $i \in \{1, 2\}$ — номер компоненты КОМ в (18), и приводя подобные члены, получаем линейную связующую систему

$$\begin{aligned} (q_2 + 1)h_1^{[q_1-3, 2q_2+2]} + (q_1 + 2q_2 - 3)h_1^{[q_1-1, 2q_2]} &= \tilde{Y}_1^{[q_1, 2q_2]} - Y_1^{[q_1, 2q_2]}, \\ 3h_1^{[q_1-2, 2q_2]} - 2h_1^{[q_1, 2q_2-2]} + (q_2 + 1)h_2^{[q_1-3, 2q_2+2]} + (q_1 + 2q_2 - 3)h_2^{[q_1-1, 2q_2]} &= \tilde{Y}_2^{[q_1, 2q_2]} - Y_2^{[q_1, 2q_2]}. \end{aligned}$$

Для чисел n , q_1 , q_2 введём следующие разложения:

$$n = 2r + \nu \quad (r \in \mathbb{N}, \quad \nu = 0, 1), \quad q_1 = 2\tau + \nu + i, \quad q_2 = r - \tau \quad (i = 1, 2).$$

Тогда связующая система примет вид

$$\begin{aligned} (r - \tau + 1)h_1^{[2(\tau-1)+\nu, 2(r-\tau+1)]} + (2r - 2 + \nu)h_1^{[2\tau+\nu, 2(r-\tau)]} &= \hat{Y}_1^{[2\tau+1+\nu, 2(r-\tau)]} \quad (-\nu \leq \tau \leq r), \\ (r - \tau + 1)h_2^{[2(\tau-1)+1+\nu, 2(r-\tau+1)]} + (2r - 1 + \nu)h_2^{[2\tau+1+\nu, 2(r-\tau)]} - 3h_1^{[2\tau+\nu, 2(r-\tau)]} - 2h_1^{[2(\tau+1)+\nu, 2(r-\tau-1)]} &= \\ &= \hat{Y}_2^{[2(\tau+1)+\nu, 2(r-\tau)]} \quad (-1 \leq \tau \leq r), \end{aligned} \quad (19)$$

где $\hat{Y}_i^{[2\tau+i+\nu, 2(r-\tau)]} = \tilde{Y}_i^{[2\tau+i+\nu, 2(r-\tau)]} - Y_i^{[2\tau+i+\nu, 2(r-\tau)]}$ ($i = 1, 2$).

Здесь и в дальнейшем договоримся считать нулевым любой коэффициент, у которого один из верхних индексов окажется отрицательным.

При $\nu = 0$, $r = 1$ система (19) принимает вид

$$\begin{aligned} 0 \cdot h_1^{[0,2]} &= \hat{Y}_1^{[1,2]}, \quad h_1^{[0,2]} + 0 \cdot h_1^{[2,0]} = \hat{Y}_1^{[3,0]}, \quad -2h_1^{[0,2]} = \hat{Y}_2^{[0,4]}, \\ h_2^{[1,2]} &= \hat{Y}_2^{[2,2]} + 2h_1^{[2,0]} + 3h_1^{[0,2]}, \quad h_2^{[3,0]} = \hat{Y}_2^{[4,0]} + 3h_1^{[2,0]} - h_2^{[1,2]}. \end{aligned}$$

Она однозначно разрешима при выполнении следующих двух резонансных связей:

$$\widehat{Y}_1^{[1,2]} = 0, \quad 2\widehat{Y}_1^{[3,0]} + \widehat{Y}_2^{[0,4]} = 0 \quad (h_1^{[2,0]} — любое). \quad (20)$$

Пусть $\nu = 0$, $r \geq 2$. Выделим из системы (19₂) первое уравнение ($i = 2$, $\tau = -1$):

$$-2h_1^{[0,2r]} = \widehat{Y}_2^{[0,2r+2]}. \quad (21)$$

Оставшиеся после этого уравнения системы (19_i), у которых $\tau = \overline{1, r}$, являются линейными неоднородными с двухдиагональными $(r+1) \times (r+1)$ -матрицами линейной части, на главных диагоналях которых расположены элементы $2r-3+i > 0$ ($i = 1, 2$), а поддиагональ образует вектор $(r, r-1, \dots, 1)$. Поэтому при $r \geq 2$ обе системы однозначно разрешимы.

В системе (19₁) уравнение с $\tau = 0$ имеет вид $2(r-1)h_1^{[0,2r]} = \widehat{Y}_1^{[1,2r]}$ и вместе с уравнением (21) задаёт единственную резонансную связь

$$\widehat{Y}_1^{[1,2r]} + (r-1)\widehat{Y}_2^{[0,2r+2]} = 0 \quad (r \geq 2), \quad (22)$$

совпадающую при $r = 1$ со связью (20₁).

Пусть $\nu = 1$, $r \geq 1$. Выделим из системы (19₁) первое уравнение ($i = 1$, $\tau = -1$)

$$\widehat{Y}_1^{[0,2(r+1)]} = 0, \quad (23)$$

а остальные уравнения системы (19) запишем в виде

$$\begin{aligned} (r-\tau+1)h_1^{[2(\tau-1)+1,2(r-\tau+1)]} + (2r-1)h_1^{[2\tau+1,2(r-\tau)]} &= \widehat{Y}_1^{[2(\tau+1),2(r-\tau)]} \quad (0 \leq \tau \leq r), \\ (r-\tau+1)h_2^{[2\tau,2(r-\tau+1)]} + 2rh_2^{[2(\tau+1),2(r-\tau)]} &= \\ = \widehat{Y}_2^{[2(\tau+1)+1,2(r-\tau)]} + 3h_1^{[2\tau+1,2(r-\tau)]} + 2h_1^{[2(\tau+1)+1,2(r-\tau-1)]} & \quad (-1 \leq \tau \leq r). \end{aligned} \quad (24)$$

В результате (24₁) и (24₂) — это линейные неоднородные системы с двухдиагональными $(r+i) \times (r+i)$ -матрицами линейной части, на главных диагоналях которых стоят элементы $2r-2+i > 0$ ($i = 1, 2$), а поддиагональ образует вектор $(r-1+i, r-2+i, \dots, 1)$, поэтому при $r \geq 1$ они последовательно однозначно разрешимы.

Переходя к формулировке полученных результатов, запишем резонансные связи (20), (22) ($n = 2r$) и (23) ($n = 2r+1$) в виде следующих резонансных уравнений (используя введённые в (19) и (18) обозначения):

$$2Y_1^{[3,0]} + Y_2^{[0,4]} = \tilde{c} \quad (r = 1); \quad Y_1^{[1,2r]} + (r-1)Y_2^{[0,2r+2]} = \tilde{c}, \quad Y_1^{[0,2r+2]} = \tilde{c} \quad (r \geq 1), \quad (25)$$

при этом в замене (16) коэффициент $h_1^{[2,0]}$ не имеет ограничений.

Теорема 2. *Любая ОНФ, полученная из произвольной системы (15) почти тождественной заменой (16), имеет вид*

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_1^2 + Y_1^{[1,2]}y_1y_2 + Y_1^{[0,4]}y_2^2 + \sigma_1 Y_1^{[3,0]}y_1^3 + \sum_{j=2}^{\infty} (\sigma_j Y_1^{[1,2j]}y_1y_2^j + Y_1^{[0,2j+2]}y_2^{j+1}), \\ \dot{y}_2 &= 2y_1y_2 + (1-\sigma_1)Y_2^{[0,4]}y_2^2 + y_1^3 + \sum_{j=2}^{\infty} (1-\sigma_j)Y_2^{[0,2j+2]}y_2^{j+1}, \end{aligned} \quad (26)$$

причём её коэффициенты удовлетворяют уравнениям (25), а $\sigma_i \in \{0, 1\}$ ($i \in \mathbb{N}$).

Пример. ОНФ (26) может иметь, например, такие две структуры:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_1^2 + Y_1^{[3,0]} y_1^3 + \sum_{j=1}^{\infty} (Y_1^{[1,2j]} y_1 y_2^j + Y_1^{[0,2j+2]} y_2^{j+1}), \quad \dot{y}_2 = 2y_1 y_2 + y_1^3; \\ \dot{y}_1 &= y_1^2 + Y_1^{[1,2]} y_1 y_2 + \sum_{j=2}^{\infty} Y_1^{[0,2j]} y_2^j, \quad \dot{y}_2 = 2y_1 y_2 + y_1^3 + \sum_{j=2}^{\infty} Y_2^{[0,2j]} y_2^j.\end{aligned}$$

В ОНФ первой структуры во втором уравнении отсутствует возмущение (в (26) все $\sigma_\ell = 1$), а в ОНФ второй структуры возмущение не зависит от y_1 , кроме слагаемого $Y_1^{[1,2]} y_1 y_2$ (в (26) все $\sigma_\ell = 0$).

4. ОБОБЩЕННАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА СИСТЕМЫ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ БОГДАНОВА–ТАКЕНСА

В работе [7] рассматривается система (4) $\dot{x}_1 = x_2 + X_1(x_1, x_2)$, $\dot{x}_2 = \alpha x_1 x_2 + \beta x_1^3 + X_2(x_1, x_2)$, невозмущённая часть которой относится к одному из неисследованных критических случаев классификации Богданова–Такенса. При условии, что число $\alpha^{-2}\beta$ не является алгебраическим для системы (4), была получена система (5) — одна из возможных ОНФ, называемая в [7] обобщённой нормальной формой первого порядка.

Нормализуем систему (4) при условии (6), означающем, что введённый в (12) дискриминант $D = (\alpha/2)^2 + 2\beta \geq 0$. Тогда согласно (14)

$$\gamma_{1,2} = \eta_{1,2} = (\alpha \mp (\alpha^2 + 8\beta)^{1/2})/4 \neq 0, \quad \text{или} \quad \beta = -2\gamma_1\gamma_2. \quad (27)$$

Как установлено в теореме 1, матрица M системы (4) при условии (6) сводится к CF_2^3 . Найдём коэффициенты замены и значение параметра u , учитывая (27) и утверждение 1. При $\alpha > 0$ имеем $\gamma = \gamma_1$, $\tau_1 = \tau_2 = (\alpha - 2\gamma_1)^{-1} = (2\gamma_2)^{-1} = -\beta^{-1}\gamma_1$. Тогда в замене (7) $\delta = \tau_1^2\gamma_1 = \beta^{-2}\gamma_1^3 = \gamma_1(2\gamma_2)^{-2}$ и в CF_2^3 параметр $u = \gamma_1(2\gamma_2)^{-1} = -\beta^{-1}\gamma_1^2$. При $\alpha < 0$ нужно во всех полученных формулах поменять местами γ_1 и γ_2 .

Теорема 3. Система (4) при условии (6) заменой (7) вида

$$x_1 = \rho_\iota z_1, \quad x_2 = \delta_\iota z_1^2 + \rho_\iota z_2 \quad (\iota = 1 \text{ при } \alpha > 0 \quad u = 2 \text{ при } \alpha < 0), \quad (28)$$

где $\rho_\iota = -\beta^{-1}\gamma_\iota$, $\delta_\iota = \beta^{-2}\gamma_\iota^3 = \rho_\iota^2\gamma_\iota$, сводится к системе

$$\dot{z}_1 = uz_1^2 + z_2 + Z_1(z_1, z_2), \quad \dot{z}_2 = z_1 z_2 + Z_2(z_1, z_2) \quad (u \in (-1/2, 0) \cup (0, 1/2]), \quad (29)$$

невозмущённая часть которой представляет собой CF_2^3 с $u = -\beta^{-1}\gamma_\iota^2$, а в возмущении $Z_1 = 2\gamma_{3-\iota}X_1(\rho_\iota z_1, \delta_\iota z_1^2 + \rho_\iota z_2)$, $Z_2 = 2\gamma_{3-\iota}X_2(\rho_\iota z_1, \delta_\iota z_1^2 + \rho_\iota z_2) - 2\gamma_\iota\rho_\iota z_1 X_1(\rho_\iota z_1, \delta_\iota z_1^2 + \rho_\iota z_2)$. При этом $|u| < 1/2$ при $D > 0$ и $u = 1/2$, $\gamma_{1,2} = \alpha/4$ при $D = 0$.

Доказательство. Подставим в производные по t равенств (28) $\dot{x}_1 = \rho_\iota \dot{z}_1$, $\dot{x}_2 = 2\delta_\iota z_1 \dot{z}_1 + \rho_\iota \dot{z}_2$ правые части систем (4) и (29):

$$\begin{aligned}\delta_\iota z_1^2 + \rho_\iota z_2 + X_1(\rho_\iota z_1, \delta_\iota z_1^2 + \rho_\iota z_2) &= \rho_\iota(uz_1^2 + z_2) + \rho_\iota Z_1(z_1, z_2), \\ \alpha\rho_\iota z_1(\delta_\iota z_1^2 + \rho_\iota z_2) + \beta\rho_\iota^3 z_1^3 + X_2(\rho_\iota z_1, \delta_\iota z_1^2 + \rho_\iota z_2) &= \\ &= 2\delta_\iota z_1(uz_1^2 + z_2) + 2\delta_\iota z_1 Z_1(z_1, z_2) + \rho_\iota z_1 z_2 + \rho_\iota Z_2(z_1, z_2).\end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при z_1^2 в первом тождестве и при z_1^3 , $z_1 z_2$ во втором, получаем три равенства: $\delta_\iota = \rho_\iota u$, $\alpha\rho_\iota\delta_\iota + \beta\rho_\iota^3 = 2\delta_\iota u$, $\alpha\rho_\iota^2 = 2\delta_\iota + \rho_\iota$. Они верны в силу выбора в теореме констант ρ_ι , δ_ι и u с учётом того, что γ_ι является корнем уравнения $2\gamma^2 - \alpha\gamma - \beta = 0$. Возмущения также имеют указанный в теореме вид, поскольку при $\iota = 1$, например, $\rho_1^{-1} = -2\gamma_2$, а $\delta_1\rho_1^{-2} = \gamma_1$. Теорема доказана.

Утверждение 3. В системе (29), полученной из системы (4) заменой (28), для любого $n \geq 2$

$$\begin{aligned} Z_1^{[n]} &= 2\gamma_{3-\iota} X_1^{[n]}(\rho_\iota z_1, \delta_\iota z_1^2 + \rho_\iota z_2), \\ Z_2^{[n]} &= 2\gamma_{3-\iota} X_2^{[n]}(\rho_\iota z_1, \delta_\iota z_1^2 + \rho_\iota z_2) - 2\gamma_\iota \rho_\iota z_1 X_1^{[n]}(\rho_\iota z_1, \delta_\iota z_1^2 + \rho_\iota z_2). \end{aligned}$$

Выпишем для примера коэффициенты КОМ $Z^{[2]}$ системы (29) через коэффициенты КОМ $X^{[2]}$ системы (4) в случае, когда $\alpha > 0$, т.е. $\iota = 1$.

Выполнив замену $x_1 = \rho_1 z_1$, $x_2 = \delta_1 z_1^2 + \rho_1 z_2$ в $X_1^{[2]} = X_1^{[3,0]} x_1^3 + X_1^{[1,2]} x_1 x_2$, $X_2^{[2]} = X_2^{[4,0]} x_1^4 + X_2^{[2,2]} x_1^2 x_2 + X_2^{[0,4]} x_2^2$ в (29) и приравняв коэффициенты при соответствующих степенях z_1 , z_2 в тождествах для $Z_1^{[2]}$ и $Z_2^{[2]}$ системы (29), будем иметь

$$\begin{aligned} Z_1^{[3,0]} &= 2\gamma_2(\rho_1^3 X_1^{[3,0]} + \rho_1 \delta_1 X_1^{[1,2]}), \quad Z_1^{[1,2]} = 2\gamma_2(\rho_1^2 X_1^{[1,2]}); \\ Z_2^{[4,0]} &= 2\gamma_2(\rho_1^4 X_2^{[4,0]} + \rho_1^2 \delta_1 X_2^{[2,2]} + \delta_1^2 X_2^{[0,4]}) - 2(\rho_1^4 X_1^{[3,0]} + \rho_1^2 \delta_1 X_1^{[1,2]}), \\ Z_2^{[2,2]} &= 2\gamma_2(\rho_1^2 X_2^{[2,2]} + 2\rho_1 \delta_1 X_2^{[0,4]}) - 2\gamma_1(\rho_1^3 X_1^{[1,2]}), \quad Z_2^{[0,4]} = 2\gamma_2(\rho_1^2 X_2^{[0,4]}). \end{aligned}$$

В работе [6] для системы (29) методом резонансных уравнений и наборов в явном виде получены все возможные структуры ОНФ, что фактически позволяет получить их и для системы (4) при условии (6).

Рассмотрим формальную почти тождественную замену

$$z_i = y_i + h_i(y_1, y_2) \quad (i = 1, 2), \quad (30)$$

где $h_i = \sum_{n=2}^{\infty} h_i^{[n-1]}(y_1, y_2)$, а $h_i^{[n-1]} = \sum_{q_1+2q_2-i=n-1} h_i^{[q_1, 2q_2]} y_1^{q_1} y_2^{q_2}$, преобразующую (29) в систему (17) с $Y_i = \sum_{n=2}^{\infty} Y_i^{[n]}(y_1, y_2)$.

В [6] ключевую роль играют семейство $\{\alpha, r\}_1^d$, отвечающее ему число τ_1^d и последовательность $\{s_n\}_{n=2}^{\infty}$, которые в текущих обозначениях можно записать в виде

$$u_{kl} = -k/(2k+2l), \quad r_{kl}^m = (2k+l)m+1 \geq 4, \quad \tau_{kl}^m = (k+l)m+1;$$

$$s_n = \begin{cases} 1, & \text{если } 1) u \neq 1/4, n=3, 2) (u, n) \neq (u_{kl}, 2r_{kl}^m), n \geq 3, \\ 2, & \text{если } 1) n=2, 2) (u, n) = (1/4, 3), 3) (u, n) = (u_{kl}, 2r_{kl}^m), \end{cases} \quad (31)$$

где $k, l, m \in \mathbb{N}$, k и l — взаимно простые, при этом $u_{kl} \in (-1/2, 0)$.

Согласно теореме 1 из [6] система (29) формально эквивалентна системе (17), если для всякого $n \geq 2$ коэффициенты КОМ $Y^{[n]}$ удовлетворяют s_n резонансным уравнениям. Например, резонансные уравнения для младших степеней возмущения имеют вид

$$\begin{aligned} n=2: \quad (3u-1)Y_1^{[3,0]} + Y_2^{[4,0]} &= \tilde{c}, \quad Y_1^{[1,2]} + 6Y_1^{[3,0]} + (1-2u)Y_2^{[0,4]} + 2Y_2^{[2,2]} = \tilde{c}; \\ n=3: \quad u^2 Y_1^{[0,4]} - Y_1^{[4,0]} + u^2 Y_2^{[1,4]} - u Y_2^{[3,2]} + Y_2^{[5,0]} &= \tilde{c}, \quad Y_2^{[5,0]} = \tilde{c} \quad \text{при } u = 1/4. \end{aligned} \quad (32)$$

Но система (29) получена из системы (4) при помощи квазиоднородной замены нулевой степени (28). Поэтому, чтобы сформулировать теорему о формальной эквивалентности для системы (4), нужно установить связь параметров α и β с параметром u . Для этого положим

$$v = \beta/\alpha^2 \quad (v \in [-1/8, 0) \cup (0, +\infty)), \quad (33)$$

тогда $\gamma_{1,2} = \alpha(1 \mp (1+8v)^{1/2})/4$, причём условие на v в (33) равносильно условию (6).

Параметры u из (29) и v из (33) связаны следующим образом:

$$u = u(v) = \frac{(1+8v)^{1/2} - 4v - 1}{8v} \Leftrightarrow v = v(u) = -\frac{u}{(2u+1)^2} \quad (u \in (-1/2, 0) \cup (0, 1/2]), \quad (34)$$

причём $v_{kl} = v(u_{kl}) = k(k+l)l^{-2}/2$, где u_{kl} из (31).

Очевидно, что $u(0) = 0$, $u(v)$ возрастает от $-1/2$ до $1/2$, $v(u)$ убывает от $+\infty$ до $-1/8$.

Используя композицию замен (28), (30) и теорему 1 [6], получаем следующее утверждение.

Теорема 4. Система (4) при условии (33), равносильном условию (6) для системы (29), формально эквивалентна системе (17), если для всякого $n \geq 2$ коэффициенты КОМ $Y^{[n]}$ удовлетворяют s_n резонансным уравнениям (см. [6]). При этом в замене (30) не имеют ограничений коэффициенты $h_1^{[0,2]}$ при любом $v \neq 0$, $h_1^{[3,0]}$ при $v = -1/9$ ($u = 1/4$) и $h_1^{[2(k+l)m+2,2km]}$ ($m \in \mathbb{N}$) при $v = v_{kl}$ из (34) ($u = u_{kl}$ из (31)).

Разберём подробнее три наиболее интересных случая, когда в (31) $s_n = 2$, а значит, для системы (29) возникает второе резонансное уравнение.

Пусть $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n = 2$. Тогда система (4) всегда имеет два резонансных уравнения, получаемых подстановкой в оба уравнения (32₁) $u(v) = u(\beta/\alpha^2)$ из (34).

Если $v = -1/9$, $n = 3$, то, наряду с первым резонансным уравнением, имеющимся при любых u и получаемым подстановкой в первое уравнение (32₂) $u(-1/9) = 1/4$, система (4) при $\beta = -\alpha^2/9$ имеет второе резонансное уравнение $Y_2^{[5,0]} = \tilde{c}$.

Пусть $v = v_{kl} (> 0)$ из (34), $n = 2r_{kl}^m (\geq 6)$ из (31), а значит, в системе (29) $u = u_{kl} = -k/(2l)$. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ два резонансных уравнения имеют вид

$$\sum_{j=0}^{r_{kl}^m+1} (\xi_j^0 Y_1^{[2j-1,2(r-j+1)]} + \zeta_j^0 Y_2^{[2j,2(r-j+1)]}) = \tilde{c}, \quad \sum_{j=lm+2}^{r_{kl}^m+1} (\xi_j^0 Y_1^{[2j-1,2(r-j+1)]} + \zeta_j^0 Y_2^{[2j,2(r-j+1)]}) = \tilde{c},$$

где $\xi_0^0 = 0$, $\zeta_{lm+2}^0 = 0$, а остальные $\xi_j^0, \zeta_j^0 \neq 0$, и все $\xi_j^0, \zeta_j^0 \neq 0$ (см. [6, лемма 5]).

Выпишем также при $v = v_{kl}$ единственные резонансные уравнения для $n \neq 2r_{kl}^m$ ($n \geq 3$). При $n = 2r$, где $r \geq 2$, $r \neq (k+l)m+1$, имеем (см. [6, лемма 4])

$$\zeta_0^0 Y_2^{[0,2(r+1)]} + \sum_{j=1}^{r+1} (\xi_j^0 Y_1^{[2j-1,2(r-j+1)]} + \zeta_j^0 Y_2^{[2j,2(r-j+1)]}) = \tilde{c}, \quad \xi_j^0, \zeta_j^0 \neq 0.$$

При $n = 2r+1$ резонансное уравнение в зависимости от r имеет один из двух видов:

– при $r = (k+l)m$ (см. [6, лемма 11])

$$Y_2^{[2lm+1,2(r-lm+1)]} + \sum_{j=lm+1}^{r+1} (\xi_j^1 Y_1^{[2j,2(r-j+1)]} + \zeta_j^1 Y_2^{[2j+1,2(r-j+1)]}) = \tilde{c}, \quad \text{все } \xi_j^1, \zeta_j^1 \neq 0,$$

– при $r \neq (k+l)m$ (см. [6, лемма 9])

$$\sum_{j=0}^{r+1} (\xi_j^1 Y_1^{[2j,2(r-j+1)]} + \zeta_j^1 Y_2^{[2j+1,2(r-j+1)]}) = \tilde{c}, \quad \xi_0^1, \xi_1^1, \zeta_0^1, \zeta_1^1, \zeta_2^1 \neq 0,$$

остальные ξ_j^1, ζ_j^1 могут равняться нулю.

В следствии к теореме 1 из [6] для каждого $n \geq 2$ приведены все резонансные наборы, состоящие из s_n коэффициентов КОМ $Y^{[n]}(y_1, y_2)$, относительно которых можно разрешить резонансные уравнения.

Таким образом, если для любого $n \geq 2$ в КОМ $Y^{[n]}$ выбрать нулевыми все коэффициенты, не входящие в произвольным образом зафиксированный резонансный набор, то система (17) окажется ОНФ с заданной структурой, формально эквивалентной системе (29).

Но система (29) получена из исходной системы (4) при помощи квазиоднородной замены нулевой степени (28). Тем самым все структуры ОНФ для системы (4) также найдены. Поэтому для системы (4) верна теорема об ОНФ, аналогичная теореме 2 из [6].

Теорема 5. Пусть система (4) при выполнении условия (5) композицией замен (28) и (30) сводится к системе (17) и для всякого $n \geq 2$ зафиксированы обобщённые порядки тех s_n членов КОМ $Y^{[n]}$ системы (17), коэффициенты которых входят в один из резонансных наборов (указанных в следствии 1 [6]), а также в замене (30) зафиксированы коэффициенты $h_1^{[0,2]}$ при любом $v \neq 0$, $h_1^{[3,0]}$ при $v = -1/9$ и $h_1^{[2(k+l)m+2,2km]}$ ($m \in \mathbb{N}$) при $v = v_{kl}$ из (34), где $v = \beta/\alpha^2$. Тогда существует и единственная нормализующая замена, преобразующая систему (4) к ОНФ (17) с выбранной структурой.

Другими словами, последовательно для каждого $n \geq 2$ коэффициенты системы (17) из выбранного резонансного набора однозначно находятся из тех резонансных уравнений, в которые они входят, при условии, что остальные коэффициенты выбираются нулевыми.

Замечание 4. Вычисления показывают, что квазиоднородный многочлен второго порядка в ОНФ (5) должен содержать два различных от нуля члена, а не один член $a_1 y_1^4$, стоящий во второй компоненте (он как раз может отсутствовать). Точнее, для младшего порядка возмущения ОНФ (5) системы (4) все резонансные наборы задаются системой резонансных уравнений $2\alpha Y_1^{[3,0]} - 3\beta Y_1^{[1,2]} - 2Y_2^{[4,0]} - \beta Y_2^{[0,4]} = \tilde{c}_1$, $6Y_1^{[3,0]} + \alpha Y_1^{[1,2]} + 2Y_2^{[2,2]} + \alpha Y_2^{[0,4]} = \tilde{c}_2$.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Басов, В.В. Обобщённая нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевым квадратичным приближением. I / В.В. Басов, А.В. Скитович // Дифференц. уравнения. — 2003. — Т. 39, № 8. — С. 1016–1029.
- Басов, В.В. Обобщённая нормальная форма двумерных систем ОДУ с линейно-квадратичной невозмущенной частью // В.В. Басов, А.А. Федотов / Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. — 2007. — Т. 1, № 1. — С. 13–33.
- Басов, В.В. Обобщённая нормальная форма и формальная эквивалентность систем дифференциальных уравнений с нулевыми характеристическими числами / В.В. Басов // Дифференц. уравнения. — 2003. — Т. 39, № 2. — С. 154–170.
- Басов, В.В. Обобщённые нормальные формы систем ОДУ с линейно-кубической невозмущенной частью / В.В. Басов, Л.С. Михлин // Дифференц. уравнения и процессы управления. — 2012. — № 2. — С. 129–153.
- Басов, В.В. Обобщённые нормальные формы систем ОДУ с невозмущенной частью $(x_2, \pm x_1^{2n-1})$ / В.В. Басов, Л.С. Михлин // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. — 2015. — Т. 2 (60), № 1. — С. 14–22.
- Басов, В.В. Обобщённые нормальные формы систем обыкновенных дифференциальных уравнений с квазиоднородным многочленом $(\alpha x_1^2 + x_2, x_1, x_2)$ в невозмущенной части / В.В. Басов, А.В. Зефиров // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. — 2021. — Т. 8 (66), № 1. — С. 12–28.
- Kokubu, H. Linear grading function and further redaction of normal forms / H. Kokubu, H. Oka, D. Wang // J. Differ. Equat. — 1996. — V. 132, № 2. — P. 293–318.
- Басов, В.В. Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы — I / В.В. Басов // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. — 2016. — Т. 3 (61), № 2. — С. 181–195.

9. Baider, A. Further reduction of the Takens–Bogdanov normal form / A. Baider, J. Sanders // *J. Differ. Equat.* — 1992. — V. 99. — P. 205–244.
10. Takens, F. Singularities of vector fields / F. Takens // *IHES*. — 1974. — V. 43, № 2. — P. 47–100.
11. Богданов, Р.И. Версальная деформация особой точки векторного поля на плоскости в случае нулевых собственных чисел / Р.И. Богданов // Функц. анализ и его прил. — 1975. — Т. 9, № 2. — С. 37–65.
12. Басов, В.В. Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы — II / В.В. Басов // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. — 2016. — Т. 3 (61), № 3. — С. 355–371.

**CLASSIFICATION OF THE QUASILINEAR SYSTEMS
OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS AND ITS APPLICATION
FOR NORMALIZATION OF SYSTEMS IN CRITICAL CASE OF BOGDANOV–TAKENS**

© 2024 / V. V. Basov

Saint Petersburg State University, Russia
e-mail: vlvlbasov@rambler.ru

Two-dimensional autonomous system with a quasihomogenous polynomial of a first degree and weight (1, 2) in an unperturbed part is considered. The classification of an unperturbed parts is provided. According to it, the set of polynomials is constructively divided into eight equivalence classes with respect to quasihomogenous zero degree substitutions. In each class the representatives, called the canonical forms, are determined. All structures of the generalized normal forms for the so far unstudied system with one of the canonical forms in its unperturbed part are obtained. Normalization in the system with unperturbed part $(x_2, ax_1x_2 + bx_1^3)$ is performed using method of the resonant equations and sets. This significantly improves the already obtained results of the research in one of the critical cases of Bogdanov–Takens classification.

Keywords: generalized normal form, quasihomogenous polynomial, resonant equation

REFERENCES

1. Basov, V.V. and Skitovich, A.V., A generalized normal form and formal equivalence of two-dimensional systems with quadratic zero approximation. I, *Differ. Equat.*, 2003, vol. 39, no. 8, pp. 1067–1081.
2. Basov, V.V. and Fedotov, A.A., Generalized normal forms for two-dimensional systems of ordinary differential equations with linear and quadratic unperturbed parts, *Vestnik St. Petersburg Univ., Mathematics*, 2007, vol. 40, no. 1, pp. 6–26.
3. Basov, V.V., Generalized normal forms and formal equivalence of systems of differential equations with zero eigenvalues, *Differ. Equat.*, 2003, vol. 39, no. 2, pp. 154–170.
4. Basov, V.V. and Mikhlin, L.S., Generalized normal forms of systems of ODE with linear-cubic unperturbed part, *Differ. Uravn. i Protsessy Upravleniya* (Differential Equations and Control Processes), 2012, no. 2, pp. 129–153.
5. Basov, V.V. and Mikhlin, L.S., Generalized normal forms of ODE systems with unperturbed part $(x_2, \pm x_1^{2n-1})$, *Vestn. S.-Peterb. un-ta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya*, 2015, vol. 2 (60), no. 1, pp. 14–22.
6. Basov, V.V. and Zefirov, A.V., Generalized normal forms of the systems of ordinary differential equations with a quasi-homogeneous polynomial $(ax_1^2 + x_2, x_1x_2)$ in the unperturbed part, *Vestnik St. Petersburg Univ., Mathematics*, 2021, vol. 54, no. 1, pp. 8–21.
7. Kokubu, H., Oka, H., and Wang, D., Linear grading function and further reduction of normal forms, *J. Differ. Equat.*, 1996, vol. 132, no. 2, pp. 293–318.
8. Basov, V.V., Two-dimensional homogeneous cubic systems: classification and normal forms. I, *Vestnik St. Petersburg Univ., Mathematics*, 2016, vol. 49, no. 2, pp. 99–110.
9. Baider, A. and Sanders, J., Further reduction of the Takens–Bogdanov normal form, *J. Differ. Equat.*, 1992, vol. 99, pp. 205–244.
10. Takens, F., Singularities of vector fields, *IHES*, 1974, vol. 43, no. 2, pp. 47–100.
11. Богданов, Р.И., Versal deformations of a singular point of a vector field on the plane in the case of zero eigenvalues, *Funktional. Anal. i Prilozhen.*, 1975, vol. 9, no. 2, pp. 37–65.
12. Basov, V.V., Two-dimensional homogeneous cubic systems: classification and normal forms. II, *Vestn. St. Petersburg Univ., Mathematics*, 2016, vol. 49, no. 3, pp. 204–218.

— ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ —

УДК 517.925

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ
МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ С РЕЛЕЙНЫМ
ГИСТЕРЕЗИСОМ И ВОЗМУЩЕНИЕМ

© 2024 г. В. В. Евстафьева¹, М. Ю. Гусева²

Санкт-Петербургский государственный университет

e-mail: ¹v.evstafieva@spbu.ru, ²st089778@student.spbu.ru

Поступила в редакцию 04.05.2024 г., после доработки 13.10.2024 г.; принята к публикации 31.10.2024 г.

Исследована n -мерная система обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащая постоянную диагональную матрицу с вещественными собственными значениями, двухпозиционную релейную нелинейность гистерезисного типа с параметром и непрерывную периодическую функцию возмущения с параметром. В случае специального вида вектора обратной связи (один ненулевой элемент) получены условия на параметры системы, обеспечивающие существование единственного двухточечно-колебательного периодического решения с периодом, кратным периоду функции возмущения. Установлена функциональная зависимость параметра нелинейности от параметра функции возмущения. Изучено влияние значений параметра функции возмущения на существование решения. Предложен алгоритм нахождения параметров системы и момента первого переключения реле для случая, когда период решения задан. Теоретические результаты, в том числе разработанный алгоритм, проиллюстрированы на примере трёхмерной системы.

Ключевые слова: система обыкновенных дифференциальных уравнений, релейная нелинейность с гистерезисом, периодическая функция возмущения, двухточечно-колебательное периодическое решение, точки и моменты переключения, пространство параметров системы

DOI: 10.31857/S0374064124120021, EDN: IPTIYC

ВВЕДЕНИЕ

Автоматические системы с релейными элементами охватывают широкий класс систем регулирования (см., например, [1–6]), различные типы релейных элементов представлены в монографии [7, с. 52]. В некоторых задачах теории автоматического управления и регулирования математические модели релейных систем описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [2–4]). Системы с реле являются существенно нелинейными [7, с. 11], поэтому аналитическое исследование их моделей — непростая задача [4]. В данной статье рассматривается неидеальное реле, операторное представление которого дано в монографии [8, с. 181].

Релейные системы могут обладать большим быстродействием (быстрые переключения) вследствие интенсивного управляющего воздействия, которое может стать причиной возникновения незатухающих колебаний (автоколебаний). Во многих системах режим автоколебаний нежелателен, поэтому для его устранения их подвергают внешнему периодическому воздействию [7, с. 12]. При условии захватывания частоты в динамике системы возникает требуемое гармоническое или субгармоническое вынужденное колебание с периодом, равным или кратным периоду внешнего воздействия соответственно.

В данной работе рассматривается многомерная система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в канонической форме с постоянной диагональной матрицей в линейной её части, релейным гистерезисом и непрерывной периодической функцией возмущения в нелинейной части. Вектор обратной связи имеет специальный вид, а именно, один ненулевой элемент. В этом случае поверхности разрыва располагаются ортогонально одной из осей в пространстве состояний системы. Изучаются непрерывные двухточечно-колебательные периодические решения с двумя точками переключения на поверхностях разрыва в пространстве состояний системы и возвращением изображающей точки решения в каждую из точек переключения за одно и то же время (период).

Настоящая статья продолжает аналитическое исследование, начатое в работе [9] и развитое в [10–12], по вопросу существования в такой системе периодических решений с периодом, равным или кратным периоду функции возмущения. В [9] впервые даны определения двухточечно-колебательного решения, момента первой встречи с поверхностью переключения (поверхностью разрыва) и в случае неустойчивой линейной части системы доказана теорема существования решения с периодом, равным периоду функции возмущения. В [10] рассмотрена вещественная симметричная матрица системы с кратными собственными значениями и получены условия существования решения. В статье [11] разработан алгоритм выбора параметров нелинейности как управления, при которых система имеет единственное асимптотически орбитально устойчивое периодическое решение с двумя точками переключения за период, кратный периоду функции возмущения. В [12] доказан критерий существования единственного периодического решения с заданным периодом.

Согласно [7, с. 12] для разработки релейных автоматических систем необходимо уметь определять зависимость их режима работы от параметров отдельных элементов (в том числе релейных), а также вида и параметров внешнего воздействия. В связи с этим здесь рассматривается система с двумя параметрами в нелинейной части, относительно которых исследуется существование решения, при этом линейная часть системы может быть как устойчивой, так и неустойчивой, поскольку допускается наличие у матрицы одного положительного собственного значения. Получена новая теорема и предложен алгоритм нахождения значений параметров системы, которые отвечают существованию решения системы.

В последние годы для анализа нелинейных систем активно используется компьютерное моделирование, которое позволяет за короткое время исследовать большое число вариантов проектируемой системы и различных режимов её работы. Вычислительные эксперименты, как разновидность такого моделирования, использованы в настоящей работе и частично описаны в п. 5. Результаты данного исследования можно использовать при разработке автоматических релейных систем с гистерезисом на первых этапах компьютерного моделирования.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим модель релейной автоматической системы в виде приведённой (неособое преобразование см., например, в [12]) n -мерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = A_0 X + B_0 u(\sigma) + K_0 f(t), \quad \sigma = (\Gamma, X), \quad (1)$$

где $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ — вектор состояний системы; A_0 — диагональная матрица с простыми, ненулевыми, вещественными собственными значениями λ_i , $i = \overline{1, n}$; $B_0 = (b_1^0, \dots, b_n^0)^T$ и $K_0 = (k_1^0, \dots, k_n^0)^T$ — постоянные, ненулевые, вещественные векторы; $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T$ — постоянный, ненулевой, вещественный вектор, определяющий обратную связь в системе; (Γ, X) — скалярное произведение векторов Γ и X .

Разрывным оператором $u(\sigma)$ задана характеристика двухпозиционного реле с вещественными пороговыми нижним ℓ_1 и верхним ℓ_2 значениями, вещественными значениями выхода m_1, m_2 (пусть $m_1 < m_2$) и положительным гистерезисом (рис. 1). Согласно [8, с. 182] неидеальное реле является детерминированным преобразователем, определённым на всех непрерывных входах. Описание реле далее приведём в соответствии с [13]. Непрерывная входная функция $\sigma(t), t \geq t_0$, преобразуется в выходную кусочно-непрерывную функцию $u(t)$, определяемую по формуле

$$u(t) = \begin{cases} m_1, & \text{если } (\sigma(t) \leq \ell_1) \vee (\sigma(t) \in (\ell_1, \ell_2) \wedge \sigma(\xi(t)) = \ell_1), \\ m_2, & \text{если } (\sigma(t) \geq \ell_2) \vee (\sigma(t) \in (\ell_1, \ell_2) \wedge \sigma(\xi(t)) = \ell_2), \\ u_0, & \text{если } \sigma(\tau) \in (\ell_1, \ell_2) \text{ для любого } \tau \in [t_0, t], \end{cases}$$

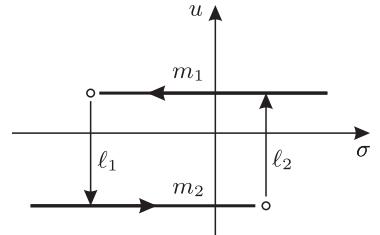


Рис. 1. Характеристика реле с положительным гистерезисом

где $\xi(t) = \sup\{\tau: \tau \leq t, \sigma(\tau) = \ell_1 \vee \sigma(\tau) = \ell_2\}$ и $u_0 = u(t_0) \in \{m_1, m_2\}$. Допустимыми состояниями реле называют все пары $(\sigma, u) \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющие условию $(u = m_1 \wedge \sigma < \ell_2) \vee (u = m_2 \wedge \sigma > \ell_1)$. В релейных автоматических системах функция $\sigma(t)$ задаёт управляющий сигнал, $u(t)$ — управляющее воздействие.

Функция возмущения $f(t)$ задаётся определённой на $t \geq 0$ непрерывной, периодической функцией вида

$$f(t) = f_0 + f_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + f_2 \sin(2\omega t + \varphi_2),$$

где $f_0, f_1, f_2, \omega, \varphi_1$ и φ_2 — вещественные постоянные, причём $f_1 \neq 0, \omega > 0$. Период функции $f(t)$ равен $T = 2\pi/\omega$.

Ниже приведём общие сведения и определения из [9, 12] в обозначениях данной работы.

Определение 1. Точкой переключения называется состояние системы (1), при котором входная функция $\sigma(t)$ достигает одного из пороговых значений ℓ_μ , $\mu = 1, 2$, а выходная функция $u(t)$ при этом меняет значение выхода m_1 на m_2 или наоборот.

Определение 2. Гиперплоскостью (поверхностью) переключения называется гиперплоскость

$$L_\mu = \{X \in \mathbb{R}^n : (\Gamma, X) = \ell_\mu\}, \quad \mu = 1, 2.$$

Определение 3. Если в некоторый момент времени t' изображающая точка принадлежит гиперплоскости L_μ , $\mu = 1, 2$, то наименьший момент времени $t'' > t'$, в который изображающая точка принадлежит гиперплоскости $L_{3-\mu}$, называется моментом первой встречи изображающей точки с $L_{3-\mu}$.

Определение 4. Решение $X(\cdot)$ системы (1) называется двухточечно-колебательным с периодом возврата T_r на поверхность переключения, если в пространстве состояний существуют точки переключения X^1 и X^2 , в каждую из которых изображающая точка решения возвращается через время T_r , т.е. если $X^1 = X_0$ или $X^2 = X_0$, то для любого $\kappa \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $X_0 = X(t_0 + \kappa T_r)$, где $t_0 \geq 0$ — начальный момент времени, $T_r > 0$.

Определение 5. Двухточечно-колебательное с периодом возврата T_r решение $X(\cdot)$ системы (1) называется T_r -двуточечно-колебательным простейшего поведения, если существуют вещественные положительные числа τ_1 и τ_2 такие, что $\tau_1 + \tau_2 = T_r$, и точки $X^1 \in L_1$ и $X^2 \in L_2$, для которых выполняются следующие условия: 1) $X(t_0 + \kappa T_r) = X^1$ и $X(t_0 + \tau_1 + \kappa T_r) = X^2$, $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; 2) для всех $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ на полуинтервале $\Delta_\kappa^1 = [t_0 + \kappa T_r, t_0 + \tau_1 + \kappa T_r)$ имеет место равенство $u = m_1$, а на полуинтервале $\Delta_\kappa^2 = [t_0 + \tau_1 + \kappa T_r, t_0 + (\kappa + 1)T_r)$ — равенство $u = m_2$.

Заметим, что определение 5 выделяет из множества всевозможных двухточечно-колебательных решений такие, для которых на каждом временному промежутке $[t_0 + \kappa T_r, t_0 + (\kappa+1)T_r)$ изображающая точка только один раз попадает в X^1 и X^2 . В общем случае таких попаданий может быть больше.

В настоящей статье решение системы (1) рассматривается в соответствии с определением 5 в классе определённых на полуоси $t \geq t_0$ непрерывных вектор-функций $X(t)$ с начальным условием $X(t_0) = X^1$ таким, что $\sigma(t_0) = (\Gamma, X^1) = \ell_1$. Решение будем называть *Ψ -периодическим*, $\Psi > 0$, если $X(t+\Psi) = X(t)$ для всех $t \geq t_0$. В точке X^μ , $\mu = 1, 2$, происходит “сшивание” траекторий, заданных разными правыми частями системы (1) с $u(\sigma) = m_1$ или $u(\sigma) = m_2$. Число τ_μ называется *временем перехода* изображающей точки решения из точки X^μ в точку $X^{3-\mu}$, а времена перехода и точки переключения — *параметрами решения*. Согласно определению 3 значение $t_0 + \tau_1 + \kappa T_r$ является моментом первой встречи с гиперплоскостью L_2 , а значение $t_0 + (\kappa+1)T_r$ — моментом первой встречи с L_1 .

Следуя методу сечений пространства параметров [14, с. 22], рассмотрим вектор Γ в специальном виде, а именно, с одним ненулевым элементом, что соответствует сечению первого рода. Пусть s — индекс ненулевого элемента. Тогда систему (1) перепишем в координатном виде

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + b_i^0 u(\sigma) + k_i^0 f(t), \quad \sigma = \gamma_s x_s, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Здесь и далее b_s^0 , k_s^0 , γ_s — ненулевые элементы.

При таком выборе вектора Γ поверхности переключения ориентированы ортогонально оси x_s в пространстве состояний системы (2) и утверждение $X^\mu \in L_\mu$ равносильно выполнению равенства $\gamma_s x_s^\mu = \ell_\mu$, $\mu = 1, 2$.

Полагаем, что собственные значения матрицы A_0 , элементы векторов B_0 , K_0 , постоянные γ_s , m_1 , m_2 , ℓ_1 нелинейности и постоянные f_0 , f_1 , f_2 , ω , φ_2 функции возмущения заданы, а постоянные φ_1 и ℓ_2 являются параметрами системы (2). Отметим, что параметр φ_1 описывает фазу основной (ненулевой) составляющей периодического возмущения, а параметр ℓ_2 определяет ширину петли гистерезиса (зоны неоднозначности) и положение гиперплоскости L_2 в пространстве состояний системы.

Ставится следующая задача: исследовать пространство параметров системы (2) и найти области в этом пространстве, которые соответствуют существованию решения с начальным условием $x_i(t_0) = x_i^1$ и периодом возврата T_r , кратным периоду T функции возмущения, а также установить функциональные зависимости параметров системы и параметров решения.

Для аналитического представления решения используем формулу Коши

$$x_i(t) = e^{\lambda_i(t-\nu)} x_i(\nu) + \int_{\nu}^t e^{\lambda_i(t-\tau)} (b_i^0 m_\mu + k_i^0 f(\tau)) d\tau, \quad i = \overline{1, n}, \quad \mu = 1, 2,$$

где ν — начальный момент времени.

2. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ

Систему (2) представим в виде двухмерной подсистемы для $i = s$

$$\dot{x}_s(t) = \lambda_s x_s(t) + b_s^0 u(\sigma) + k_s^0 f(t), \quad \sigma(t) = \gamma_s x_s(t) \quad (3)$$

и остальных уравнений для $i = j$

$$\dot{x}_j(t) = \lambda_j x_j(t) + b_j^0 u(\sigma) + k_j^0 f(t), \quad j = \overline{1, n}, \quad j \neq s. \quad (4)$$

Рассмотрим систему (3). Согласно определению 5 справедливы равенства

$$\sigma(t_0 + \kappa T_r) = \sigma(t_0 + (\kappa + 1)T_r) = \ell_1, \quad \sigma(t_0 + \kappa T_r + \tau_1) = \ell_2. \quad (5)$$

Далее выпишем решение задачи

$$\dot{\sigma}(t) = \lambda_s \sigma(t) + \gamma_s(b_s^0 u(t) + k_s^0 f(t)), \quad \sigma(t_0) = \ell_1.$$

Используя формулу Коши, имеем

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= e^{\lambda_s(t-\nu)} \sigma(\nu) + \gamma_s \int_{\nu}^t e^{\lambda_s(t-\tau)} (b_s^0 m_1 + k_s^0 f(\tau)) d\tau, \quad \nu = t_0 + \kappa T_r, \quad t \in \Delta_{\kappa}^1, \\ \sigma(t) &= e^{\lambda_s(t-\nu)} \sigma(\nu) + \gamma_s \int_{\nu}^t e^{\lambda_s(t-\tau)} (b_s^0 m_2 + k_s^0 f(\tau)) d\tau, \quad \nu = t_0 + \kappa T_r + \tau_1, \quad t \in \Delta_{\kappa}^2. \end{aligned} \quad (6)$$

После соответствующих подстановок в (6) согласно равенствам (5) и замены переменной в интегралах получим

$$\begin{aligned} \ell_2 &= e^{\lambda_s \tau_1} \ell_1 + \gamma_s \int_0^{\tau_1} e^{\lambda_s(\tau_1-\xi)} (b_s^0 m_1 + k_s^0 f(t_0 + \kappa T_r + \xi)) d\xi, \\ \ell_1 &= e^{\lambda_s \tau_2} \ell_2 + \gamma_s \int_0^{\tau_2} e^{\lambda_s \xi} (b_s^0 m_2 + k_s^0 f(t_0 + (\kappa + 1)T_r - \xi)) d\xi. \end{aligned} \quad (7)$$

По условию задачи период возврата кратен периоду функции возмущения, т.е. $T_r = kT$, $k \in \mathbb{N}$, поэтому функция возмущения и, значит, интегралы в (7) не зависят от $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Введём обозначения

$$\begin{aligned} Q_i(\tau, m_{\mu}) &= (b_i^0 m_{\mu} + k_i^0 f_0) / \lambda_i + k_i^0 H_i(\tau), \quad i = \overline{1, n}, \quad \mu = 1, 2, \\ H_i(\tau) &= \frac{f_1 \sin(\omega\tau + \varphi_1 + \delta_i^1)}{\sqrt{\lambda_i^2 + \omega^2}} + \frac{f_2 \sin(2\omega\tau + \varphi_2 + \delta_i^2)}{\sqrt{\lambda_i^2 + 4\omega^2}}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\delta_i^{\alpha} = \arctg(\alpha\omega/\lambda_i) + \pi q_i$, $\alpha = 1, 2$, причём $q_i = 0$ при $\lambda_i > 0$ и $q_i = 1$ при $\lambda_i < 0$.

Система равенств (7) после интегрирования с учётом (8) при $i = s$ принимает вид

$$\begin{aligned} \ell_2 &= (\ell_1 + \gamma_s Q_s(t_0, m_1)) e^{\lambda_s \tau_1} - \gamma_s Q_s(t_0 + \tau_1, m_1), \\ \ell_1 &= (\ell_2 + \gamma_s Q_s(t_0 + \tau_1, m_2)) e^{\lambda_s \tau_2} - \gamma_s Q_s(t_0, m_2). \end{aligned} \quad (9)$$

Условия на параметры системы (9), при которых существуют $\tau_1 \in (0, T_r)$ и $\tau_2 = T_r - \tau_1$ в случае, когда $T_r = kT$, $k \in \mathbb{N}$, устанавливает

Теорема. Пусть при некотором $k \in \mathbb{N}$ справедливы следующие условия:

1) значение параметра φ_1 удовлетворяет неравенствам

$$m_1 < L < m_2, \quad (10)$$

$$\gamma_s(Q_s(t_0, m_1) e^{\lambda_s \tau_1} - Q_s(t_0 + \tau_1, m_1)) > \ell_1(1 - e^{\lambda_s \tau_1}), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{b_s^0} \left(\frac{\lambda_s \ell_1}{\gamma_s} + k_s^0 f_0 + \lambda_s k_s^0 H_s(t_0) \right), \\ \tau_1 &= kT + \lambda_s^{-1} \ln \Omega, \quad \Omega = \frac{m_2 - m_1}{(e^{\lambda_s kT} - 1)L + m_2 - m_1 e^{\lambda_s kT}}; \end{aligned} \quad (12)$$

2) значение параметра ℓ_2 вычисляется по формуле

$$\ell_2 = (\ell_1 + \gamma_s Q_s(t_0, m_1)) e^{\lambda_s \tau_1} - \gamma_s Q_s(t_0 + \tau_1, m_1); \quad (13)$$

3) выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \ell_2 - (\ell_1 + \gamma_s Q_s(t_0, m_1)) e^{\lambda_s(t-t_0)} + \gamma_s Q_s(t_0+t, m_1) &> 0, \quad t \in \Delta_0^1, \\ \ell_1 - (\ell_2 + \gamma_s Q_s(t_0 + \tau_1, m_2)) e^{\lambda_s(t-\tau_1-t_0)} + \gamma_s Q_s(t_0 + \tau_1 + t, m_2) &< 0, \quad t \in \Delta_0^2. \end{aligned}$$

Тогда существует единственное T_r -двуточечноколебательное простейшего поведения решение системы (2) для $i = \overline{1, n}$, $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$x_i(t) = \begin{cases} e^{\lambda_i(t-\nu)} (x_i^1 + Q_i(\nu, m_1)) - Q_i(\nu+t, m_1), & \nu = t_0 + \kappa kT, \quad t \in \Delta_\kappa^1, \\ e^{\lambda_i(t-\nu)} (x_i^2 + Q_i(\nu, m_2)) - Q_i(\nu+t, m_2), & \nu = t_0 + \kappa kT + \tau_1, \quad t \in \Delta_\kappa^2, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} x_s^\mu &= \ell_\mu / \gamma_s, \quad \mu = 1, 2, \\ x_j^1 &= \frac{e^{\lambda_j kT}}{1 - e^{\lambda_j kT}} \left(\frac{b_j^0 (m_2 - m_1)}{\lambda_j e^{\lambda_j \tau_1}} + Q_j(t_0, m_1) \right) - Q_j(t_0, m_2), \\ x_j^2 &= e^{\lambda_j \tau_1} (x_j^1 + Q_j(t_0, m_1)) - Q_j(t_0 + \tau_1, m_1), \quad j = \overline{1, n}, \quad j \neq s, \end{aligned} \quad (14)$$

$Q_j(\tau, m_\mu)$ определяется по формуле (8), в которой $i = j$.

Доказательство. Рассмотрим систему равенств (9) с $\tau_2 = kT - \tau_1$ как систему уравнений относительно переменной $\tau_1 \in (0, kT)$ при некотором $k \in \mathbb{N}$. После сложения двух уравнений этой системы получим уравнение, из которого однозначно выражается значение τ_1 . Если имеют место неравенства (10), то $0 < e^{-\lambda_s kT} < \Omega < 1$ при $\lambda_s > 0$ и $1 < \Omega < e^{-\lambda_s kT}$ при $\lambda_s < 0$. Отсюда следует, что первое равенство из (12) имеет смысл и $\tau_1 \in (0, kT)$. Полученное значение τ_1 является решением системы (9), если удовлетворяет первому уравнению системы (9), что равносильно выполнению равенства (13). По предположению должно выполняться неравенство $\ell_2 > \ell_1$. Если в последнем неравенстве ℓ_2 заменить выражением из (13), то после преобразования получим соотношение (11).

Теперь докажем непосредственно теорему. Пусть имеют место условия 1), 2) теоремы и $\tau_2 = kT - \tau_1$. Тогда значение τ_1 , определяемое равенством (12), является решением системы (9) и принадлежит интервалу $(0, kT)$. При этом, как следует из неравенств (10) и (11), выполнено предположение, что $m_2 > m_1$ и $\ell_2 > \ell_1$.

Пусть выполняется условие 3) теоремы. Поскольку первое неравенство равносильно неравенству $\ell_2 - \sigma(t) > 0$ для всех $t \in [t_0, t_0 + \tau_1]$, второе — неравенству $\ell_1 - \sigma(t) < 0$ для всех $t \in [t_0 + \tau_1, t_0 + kT]$, то значение $t_0 + \tau_1$ является моментом первой встречи с L_2 , а значение $t_0 + kT$ — с L_1 , и справедливы равенства $\sigma(t_0 + \tau_1) = \ell_2$ и $\sigma(t_0 + \tau_1 + \tau_2) = \sigma(t_0 + kT) = \ell_1$. Исходя из построения системы (9) с начальным условием $\sigma(t_0) = \ell_1$ и $T_r = kT$, приходим к равенствам (5) для любого $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и, значит, к равенствам $x_s^\mu = \ell_\mu / \gamma_s$, $\mu = 1, 2$, и утверждению

теоремы относительно решения системы (2) для $i=s$. Единственность решения $x_s(t)$ следует из того, что значение его параметра τ_1 определяется однозначно при некотором заданном $k \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим теперь уравнения (4). После их интегрирования с учётом (8) для $i=j$ при известном значении τ_1 получим выражения для любого $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$\begin{aligned} x_j(t) &= e^{\lambda_j(t-\nu)}(x_j(\nu) + Q_j(\nu, m_1)) - Q_j(\nu+t, m_1), \quad t \in \Delta_\kappa^1, \quad \nu = t_0 + \kappa kT, \\ x_j(t) &= e^{\lambda_j(t-\nu)}(x_j(\nu) + Q_j(\nu, m_2)) - Q_j(\nu+t, m_2), \quad t \in \Delta_\kappa^2, \quad \nu = t_0 + \kappa kT + \tau_1. \end{aligned} \quad (15)$$

Согласно условию 1) определения 5 должны выполняться равенства

$$x_j(t_0 + \kappa kT) = x_j(t_0 + (\kappa + 1)kT) = x_j^1, \quad x_j(t_0 + \kappa kT + \tau_1) = x_j^2. \quad (16)$$

После подстановок (16) в выражения (15) получим

$$\begin{aligned} x_j^2 &= (x_j^1 + Q_j(t_0, m_1))e^{\lambda_j \tau_1} - Q_j(t_0 + \tau_1, m_1), \\ x_j^1 &= (x_j^2 + Q_j(t_0 + \tau_1, m_2))e^{\lambda_j \tau_2} - Q_j(t_0, m_2). \end{aligned} \quad (17)$$

Из (17) при ненулевых λ_j значения x_j^1 и x_j^2 определяются однозначно. Таким образом, получены формулы (15) для решения системы (2) при $i=j$ и начальных значений x_j^1 и x_j^2 , что совместно с формулами для $x_s(t)$ и x_s^1, x_s^2 отражено в утверждении теоремы. Теорема доказана.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОПУСТИМЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРА ФУНКЦИИ ВОЗМУЩЕНИЯ

По условию задачи φ_1 является параметром функции возмущения. Рассмотрим L как функцию от этого параметра:

$$L(\varphi_1) = P_L \sin(\omega t_0 + \varphi_1 + \delta_s^1) + C_L, \quad (18)$$

где

$$P_L = -\frac{\lambda_s k_s^0 f_1}{b_s^0 \sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}}, \quad C_L = -\frac{1}{b_s^0} \left(\frac{\lambda_s \ell_1}{\gamma_s} + k_s^0 f_0 + \frac{\lambda_s k_s^0 f_2 \sin(\omega t_0 + \varphi_2 + \delta_s^2)}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}} \right).$$

Далее воспользуемся равенством (12) и выпишем τ_1 как функцию от параметра φ_1 :

$$\tau_1(\varphi_1) = C_\tau^1 - \lambda_s^{-1} \ln(P_\tau \sin(\omega t_0 + \varphi_1 + \delta_s^1) + C_\tau^2), \quad (19)$$

где $C_\tau^1 = kT + \lambda_s^{-1} \ln(m_2 - m_1)$, $P_\tau = (e^{\lambda_s kT} - 1)P_L$, $C_\tau^2 = (e^{\lambda_s kT} - 1)C_L + m_2 - m_1 e^{\lambda_s kT}$.

Отсюда получим

$$e^{\lambda_s \tau_1(\varphi_1)} = \frac{e^{\lambda_s kT}(m_2 - m_1)}{P_\tau \sin(\omega t_0 + \varphi_1 + \delta_s^1) + C_\tau^2}.$$

Воспользуемся равенством (13) и выпишем функцию

$$\ell_2(\varphi_1) = \lambda_s^{-1} \gamma_s b_s^0 (m_1 - L(\varphi_1)) e^{\lambda_s \tau_1(\varphi_1)} - \lambda_s^{-1} \gamma_s (b_s^0 m_1 + k_s^0 f_0) - \gamma_s k_s^0 H_s(t_0 + \tau_1(\varphi_1))$$

или с учётом введённых выше обозначений

$$\begin{aligned} \ell_2(\varphi_1) &= \frac{P_{\ell_2}^1 \sin(\omega t_0 + \varphi_1 + \delta_s^1) + C_{\ell_2}^1}{P_\tau \sin(\omega t_0 + \varphi_1 + \delta_s^1) + C_\tau^2} + C_{\ell_2}^2 + \\ &+ P_{\ell_2}^2 \sin(\omega t_0 + \varphi_1 + \delta_s^1 + \omega \tau_1(\varphi_1)) + P_{\ell_2}^3 \sin(2\omega t_0 + \varphi_2 + \delta_s^2 + 2\omega \tau_1(\varphi_1)), \end{aligned} \quad (20)$$

где коэффициенты вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} P_{\ell_2}^1 &= -\lambda_s^{-1} \gamma_s b_s^0 P_L (m_2 - m_1) e^{\lambda_s k T}, \quad C_{\ell_2}^1 = \lambda_s^{-1} \gamma_s b_s^0 (m_2 - m_1) e^{\lambda_s k T} (m_1 - C_L), \\ C_{\ell_2}^2 &= -\lambda_s^{-1} \gamma_s (b_s^0 m_1 + k_s^0 f_0), \quad P_{\ell_2}^2 = -\frac{\gamma_s k_s^0 f_1}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}}, \quad P_{\ell_2}^3 = -\frac{\gamma_s k_s^0 f_2}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}}. \end{aligned}$$

Для определения допустимых значений параметра φ_1 , удовлетворяющих условиям 1) и 2) теоремы, предлагается использовать следующий порядок действий.

1. Вычисляем постоянные P_L , C_L и строим функцию $L(\varphi_1)$ по формуле (18).

2. Находим $L_{\inf} = \min\{P_L + C_L, -P_L + C_L\}$, $L_{\sup} = \max\{P_L + C_L, -P_L + C_L\}$, и если неравенства $L_{\inf} > m_1$, $L_{\sup} < m_2$ справедливы, то заключаем, что неравенства (10) выполняются для любого $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$. В противном случае решаем неравенство (10) относительно φ_1 . Имеем $m_1 - C_L < P_L \sin(\omega t_0 + \varphi_1 + \delta_s^1) < m_2 - C_L$, откуда $\varphi_1 \in D \subset [0, 2\pi]$, где

$$D = \begin{cases} (\arcsin(M_1), \arcsin(M_2)) \cup (\pi - \arcsin(M_2), \pi - \arcsin(M_1)), & \text{если } P_L > 0, \\ (\arcsin(M_2), \arcsin(M_1)) \cup (\pi - \arcsin(M_1), \pi - \arcsin(M_2)), & \text{если } P_L < 0, \end{cases}$$

$$M_\mu = (m_\mu - C_L)/P_L - \delta_s^1 - \omega t_0, \quad \mu = 1, 2.$$

3. Задаём $k \in \mathbb{N}$. Вычисляем постоянные P_τ^1 , C_τ^1 , C_τ^2 , строим функцию $\tau_1(\varphi_1)$ по формуле (19) и находим множество значений $E(\tau_1) \subset (0, kT)$, отвечающих множеству допустимых значений φ_1 .

4. Строим непрерывную функцию $\ell_2(\varphi_1)$ по формуле (20). Находим для неё нижнюю оценку

$$\ell_2^n = \frac{-|P_{\ell_2}^1| + C_{\ell_2}^1}{|P_\tau| + C_\tau^2} + C_\tau^2 - |P_{\ell_2}^2| - |P_{\ell_2}^3|,$$

и если $\ell_2^n > \ell_1$, то имеет место неравенство (11) для любого допустимого φ_1 . В случае если $\ell_2^n \leq \ell_1$, то находим её наименьшее значение на отрезке $[0, 2\pi]$ по формуле

$$\ell_2^{\inf} = \min \{ \ell_2(0), \ell_2(2\pi), \ell_2^{\min} \}, \quad (21)$$

где $\ell_2^{\min} = \ell_2(\varphi_1^{\min})$ — глобальный (абсолютный) минимум функции $\ell_2(\varphi_1)$ в точке φ_1^{\min} , и если $\ell_2^{\inf} > \ell_1$, то имеет место неравенство (11) для любого допустимого φ_1 . В противном случае решаем неравенство $\ell_2(\varphi_1) > \ell_1$, которое равносильно неравенству (11), и находим $\varphi_1 \in D^1 \subset [0, 2\pi]$.

5. Заключаем, что определены допустимые значения φ_1 , при которых условия 1) и 2) теоремы выполняются.

4. ВЫЧИСЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ И РЕШЕНИЯ

Неравенства в условии 3) теоремы (далее *условия переключения*) представим в следующем виде:

$$\ell_2 - \sigma(t) > 0 \quad \text{для } t \in \Delta_0^1, \quad (22)$$

$$\ell_1 - \sigma(t) < 0 \quad \text{для } t \in \Delta_0^2, \quad (23)$$

где функция $\sigma(t)$ задаётся равенствами (6).

Допустим, что справедливы условия 1), 2) теоремы и для параметра φ_1 определён интервал допустимых значений $[\varphi_1^0, \varphi_1^*]$. Значение τ_1 , определяемое равенством (12), является временем перехода с L_1 на L_2 , а значение $t_0 + \tau_1$ — моментом переключения лишь тогда, когда выполняются условия переключения.

Ниже предлагается алгоритм, с помощью которого можно найти подходящее значение параметра φ_1 из интервала допустимых значений, рассчитанных по формуле

$$\varphi_1^r = \varphi_1^0 + (\varphi_1^* - \varphi_1^0)r/m, \quad r = \overline{0, m}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (24)$$

и соответствующие ему момент переключения $t_0 + \tau_1(\varphi_1)$ при заданном периоде kT и верхнее пороговое значение $\ell_2(\varphi_1)$.

Алгоритм.

1. Задаём значения $r = 0$ и $m \in \mathbb{N}$.
2. Рассчитываем $\tau_1(\varphi_1^r)$ и $\ell_2(\varphi_1^r)$ по формулам (19) и (20) соответственно.
3. Задаём точность $\varepsilon > 0$ и шаг $h \geq \varepsilon$.
4. Рассчитываем значения функции $\sigma(t)$ по формуле (6), разность $\ell_2(\varphi_1^r) - \sigma(t)$ для $t \in [t_0, t_0 + \tau_1(\varphi_1^r) + h]$ с шагом h и переходим к п. 5.
- 4.1. Задаём новый шаг $h_1 = 0.1h$, рассчитываем значения функции $\sigma(t)$ по формуле (6) и разность $\ell_2(\varphi_1^r) - \sigma(t)$ для $t \in (t_0 + \tau^1, t_0 + \tau^1 + h)$ с шагом h_1 ; далее переопределяем шаг по формуле $h = h_1$ и переходим к п. 5.
5. Находим значение $t_0 + \tau^1$ переменной t , которое удовлетворяет условиям $\ell_2(\varphi_1^r) - \sigma(t_0 + \tau^1) > 0$ и $\ell_2(\varphi_1^r) - \sigma(t_0 + \tau^1 + h) < 0$. Если $\ell_2(\varphi_1^r) - \sigma(t_0 + \tau^1) < \varepsilon$, то переходим к п. 6, в противном случае, когда $\ell_2(\varphi_1^r) - \sigma(t_0 + \tau^1) \geq \varepsilon$, переходим к п. 4.1.
6. Вычисляем разность $\rho_1 = \tau_1(\varphi_1^r) - \tau^1$.
 - 6.1. Если $\rho_1 < \varepsilon$, то заключаем, что $t_0 + \tau_1(\varphi_1^r)$ является моментом первого переключения с точностью до ε и переходим к п. 7.
 - 6.2. Если $\varepsilon \leq \rho_1 < h$, то возвращаемся к п. 4.1.
 - 6.3. Если $\rho_1 \geq h$, то приходим к выводу, что условие переключения (22) не выполняется, значение $t_0 + \tau_1(\varphi_1^r)$ не является моментом первого переключения; задаём следующее значение индекса $r_1 = r + 1$ и переопределяем его по формуле $r = r_1$. Если $r \leq m$, то вычисляем φ_1^r по формуле (24) и возвращаемся к п. 2. Если $r > m$, то переходим к п. 11.
7. Рассчитываем значения функции $\sigma(t)$ по формуле (6) и разность $\ell_1 - \sigma(t)$ для $t \in [t_0 + \tau_1(\varphi_1^r), t_0 + kT + h]$ с шагом h и переходим к п. 8.
- 7.1. Задаём новый шаг $h_1 = 0.1h$, рассчитываем значения функции $\sigma(t)$ по формуле (6) и разность $\ell_1(\varphi_1^r) - \sigma(t)$ для $t \in (t_0 + \tau_1(\varphi_1^r) + \tau^2, t_0 + \tau_1(\varphi_1^r) + \tau^2 + h)$ с шагом h_1 ; далее переопределяем шаг по формуле $h = h_1$ и переходим к п. 9.
8. Находим значение $t_0 + \tau_1(\varphi_1^r) + \tau^2$ переменной t , которое удовлетворяет неравенствам $\ell_1 - \sigma(t_0 + \tau_1(\varphi_1^r) + \tau^2) < 0$ и $\ell_1 - \sigma(t_0 + \tau_1(\varphi_1^r) + \tau^2 + h) > 0$. Если выполняется неравенство $\ell_1 - \sigma(t_0 + \tau_1(\varphi_1^r) + \tau^2) > -\varepsilon$, то переходим к п. 9, иначе, когда $\ell_1 - \sigma(t_0 + \tau_1(\varphi_1^r) + \tau^2) \leq -\varepsilon$, переходим к п. 7.1.
9. Вычисляем разность $\rho_2 = kT - \tau_1(\varphi_1^r) - \tau^2$.
 - 9.1. Если $\rho_2 < \varepsilon$, то заключаем, что $t_0 + kT$ является моментом второго переключения с точностью до ε и переходим к п. 10.
 - 9.2. Если $\varepsilon \leq \rho_2 < h$, то возвращаемся к п. 7.1.
 - 9.3. Если $\rho_2 \geq h$, то приходим к выводу, что условие переключения (23) не выполняется, значение $t_0 + kT$ не является моментом переключения, а kT — периодом решения; задаём следующее значение индекса $r_1 = r + 1$ и переопределяем его по формуле $r = r_1$. Если $r \leq m$, то вычисляем φ_1^r по формуле (24) и возвращаемся к п. 2. Если $r > m$, то переходим к п. 11.
10. Завершаем алгоритм выводом: для значения φ_1^r параметра φ_1 и верхнего порогового значения $\ell_2(\varphi_1^r)$ условия переключения выполняются, причём значения $t_0 + \tau_1(\varphi_1^r)$ и $t_0 + kT$ являются моментами переключения, а kT — периодом решения с точностью до ε .
11. Завершаем алгоритм выводом: условия переключения не выполняются, $t_0 + \tau_1(\varphi_1^r)$ и $t_0 + kT$ не являются моментами переключения с заданной точностью для $r = \overline{0, m}$.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = 0.1x_1 + u(\sigma) - 2f(t), \quad \dot{x}_2 = -x_2 + u(\sigma) + f(t), \quad \dot{x}_3 = -2x_3 + u(\sigma) + 0.5f(t), \quad \sigma = -0.14x_1. \quad (25)$$

Здесь $u = -1.11$ и $\sigma < \ell_2$ или $u = 5.3$ и $\sigma > 0.75$, $f(t) = 1 + 2 \sin(t + \varphi_1) + 5 \sin(2t)$ с периодом $T = 2\pi$. Найдём значения параметров φ_1 и ℓ_2 , при которых существует решение (25) с начальным моментом времени t_0 и периодом возврата, равным или кратным периоду функции $f(t)$, т.е. $T_r = 2\pi k$, $k \in \mathbb{N}$.

Сначала найдём допустимые значения параметра φ_1 , удовлетворяющие условиям 1) и 2) теоремы (условиям замкнутости траектории) согласно порядку действий, предложенных в п. 3. Расчёты выполнены в формате двойной точности (16 цифр), а результаты представлены с тремя десятичными знаками.

1. Пусть $t_0 = 0$. По формуле (18) строим функцию $L(\varphi_1) = 0.398 \sin(\varphi_1 + 1.471) + 3.034$.
2. Находим $L_{\inf} = 2.636 > -1.11$ и $L_{\sup} = 3.432 < 5.3$. Неравенства (10) выполняются для любого $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$.
3. Пусть $k = 1$. По формуле (19) строим функцию

$$\tau_1(\varphi_1) = 24.861 - 10 \ln(0.348 \sin(\varphi_1 + 1.471) + 10.034)$$

и её график (рис. 2, а). Множеством значений $E(\tau_1)$, отвечающих множеству допустимых значений параметра φ_1 , является отрезок $[1.462, 2.153] \in (0, 2\pi)$.

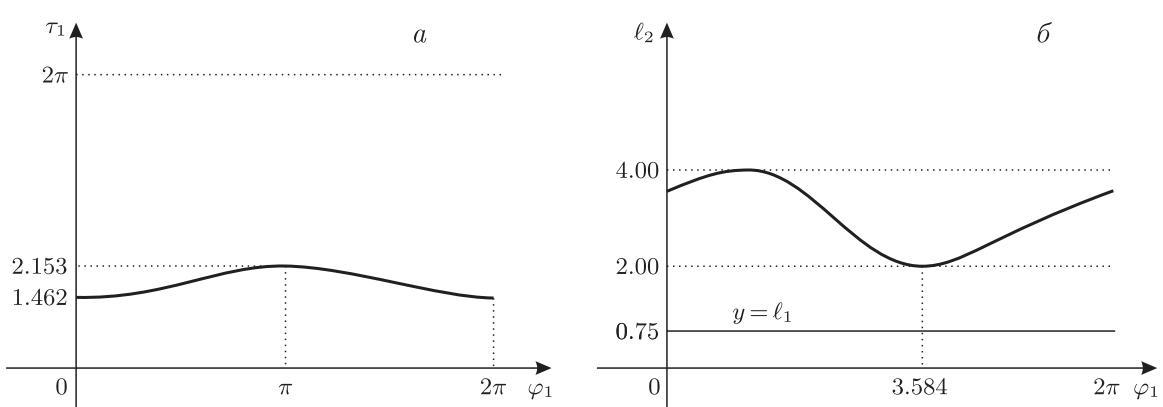


Рис. 2. Графики функций $\tau_1(\varphi_1)$ (а) и $\ell_2(\varphi_1)$ (б)

4. По формуле (20) строим функцию (рис. 2, б)

$$\begin{aligned} \ell_2(\varphi_1) = & \frac{6.695 \sin(\varphi_1 + 1.471) + 69.715}{0.348 \sin(\varphi_1 + 1.471) + 10.034} - 4.354 + \\ & + 0.699 \sin(-51.244 + 20 \ln(0.348 \sin(\varphi_1 + 1.471) + 10.034)) + \\ & + 0.557 \sin(-\varphi_1 - 26.332 + 10 \ln(0.348 \sin(\varphi_1 + 1.471) + 10.034)). \end{aligned}$$

Имеем $\ell_2(\varphi_1) \geq \ell_2^n = 0.460$, а значит, $\ell_2^n < 0.75 = \ell_1$. В этом случае находим наименьшее значение функции $\ell_2(\varphi_1)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ по формуле (21). Итак, $\ell_2(0) = \ell_2(2\pi) = 3.563$ и $\ell_2^{\min} = \ell_2(3.584) = 2.072$. Тогда $\ell_2^{\inf} = 2.072 > 0.75 = \ell_1$, а значит, имеет место неравенство (11) для

любого допустимого φ_1 . Множеством значений $E(\ell_2)$, отвечающих множеству допустимых значений параметра φ_1 , является отрезок $[2.072, 3.999]$.

5. Заключаем, что условия 1) и 2) теоремы выполняются для любого $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$.

Далее представим результаты численной реализации предложенного в п. 4 статьи алгоритма по нахождению параметров системы и решения.

Рассмотрим **пример 1** с выполнением условий переключения (22), (23).

1. Задаём $r = 0$ (т.е. $\varphi_1^r = \varphi_1^0 = 0$) и $m = 6$.

2. По формулам (19) и (20) находим $\tau_1(0) = 1.462$ и $\ell_2(0) = 3.563$ соответственно.

3. Задаём $\varepsilon = 10^{-3}$ и $h = 0.1$.

4. Рассчитываем значения функции $\sigma(t)$ по формуле (6) и разность $3.563 - \sigma(t)$ для $t \in [0, 1.562]$ с шагом h и переходим к п. 5.

4.1. Задаём новый шаг $h_1 = 0.01$, рассчитываем значения функции $\sigma(t)$ по формуле (6) и разность $3.563 - \sigma(t)$ для $t \in (1.4, 1.5)$ с шагом $h_1 = 0.01$; далее переопределяем шаг по формуле $h = h_1$ и переходим к п. 5.1.

4.2. Задаём новый шаг $h_1 = 0.001$, рассчитываем значения функции $\sigma(t)$ по формуле (6) и разность $3.563 - \sigma(t)$ для $t \in (1.46, 1.47)$ с шагом $h_1 = 0.001$; далее переопределяем шаг по формуле $h = h_1$ и переходим к п. 5.2.

5. Значение $t_0 + \tau^1 = 1.4$ удовлетворяет неравенствам $3.563 - \sigma(1.4) = 0.107 > 0$, $3.563 - \sigma(1.5) = -0.060 < 0$, и поскольку $3.563 - \sigma(1.4) = 0.107 > 10^{-3}$, то возвращаемся к п. 4.1.

5.1. Значение $t_0 + \tau^1 = 1.46$ удовлетворяет неравенствам $3.563 - \sigma(1.46) = 0.004 > 0$, $3.563 - \sigma(1.47) = -0.012 < 0$, и так как $3.563 - \sigma(1.46) = 0.004 > 10^{-3}$, то возвращаемся к п. 4.2.

5.2. Значение $t_0 + \tau^1 = 1.462$ удовлетворяет неравенствам $3.563 - \sigma(1.462) = 0.000 > 0$, $3.563 - \sigma(1.463) = -0.000 < 0$, и поскольку $3.563 - \sigma(1.462) = 0.000 < 10^{-3}$, то переходим к п. 6.

6. Находим $\rho_1 = \tau_1(0) - \tau^1 = 1.462 - 1.462 = 0.000$.

6.1. Имеем $\rho_1 < 10^{-3}$, а значит, $t_0 + \tau_1(0) = 1.462$ является моментом первого переключения с точностью до 10^{-3} ; переходим к п. 7.

7. Рассчитываем значения функции $\sigma(t)$ по формуле (6) и разность $0.750 - \sigma(t)$ для $t \in [1.462, 2\pi + h]$ с шагом h ; переходим к п. 8.

7.1. Задаём новый шаг $h_1 = 0.01$, рассчитываем значения функции $\sigma(t)$ по формуле (6) и разность $0.750 - \sigma(t)$ для $t \in (6.262, 6.362)$ с шагом h_1 ; далее переопределяем шаг по формуле $h = h_1$ и переходим к п. 8.1.

7.2. Задаём новый шаг $h_1 = 0.001$, рассчитываем значения функции $\sigma(t)$ по формуле (6) и разность $0.750 - \sigma(t)$ для $t \in (6.282, 6.292)$ с шагом h_1 ; далее переопределяем шаг по формуле $h = h_1$ и переходим к п. 8.2.

8. Значение $t_0 + \tau_1(0) + \tau^2 = 6.262$ удовлетворяет неравенствам $0.750 - \sigma(6.262) = -0.008 < 0$, $0.750 - \sigma(6.362) = 0.020 > 0$, а поскольку $-0.008 < -10^{-3} = -\varepsilon$, то переходим к п. 7.1.

8.1. Значение $t_0 + \tau_1(0) + \tau^2 = 6.282$ удовлетворяет неравенствам $0.750 - \sigma(6.282) = -0.000 < 0$, $0.750 - \sigma(6.292) = 0.000 > 0$, и так как $-0.000 > -10^{-3} = -\varepsilon$, то переходим к п. 9.

8.2. Значение $t_0 + \tau_1(0) + \tau^2 = 6.283$ удовлетворяет неравенствам $0.750 - \sigma(6.283) = -0.000 < 0$, $0.750 - \sigma(6.284) = 0.000 > 0$, и поскольку $-0.000 > -10^{-3} = -\varepsilon$, то переходим к п. 9.1.

9. Имеем разность $\rho_2 = 2\pi - 6.282 = 0.001$, поскольку $\varepsilon \leq \rho_2 < h$, то возвращаемся к п. 7.2.

9.1. Имеем $\rho_2 = 2\pi - 6.283 = 0.000 < 10^{-3}$, а значит, $t_0 + 2\pi = 6.283$ является моментом второго переключения с точностью до 10^{-3} и переходим к п. 10.

10. Вывод: условия переключения выполняются; $t_0 + \tau_1 = t_0 + \tau^1 = 1.462$ и $t_0 + 2\pi = 6.283$ являются моментами переключения с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$ для $\varphi_1^0 = 0$ и $\ell_2 = 3.563$.

Рассмотрим теперь **пример 2** с нарушением условия переключения (23).

1. Задаём $r = 1$, т.е. $\varphi_1^r = \varphi_1^1 = \pi/3$.

2. Значения $\tau_1(\pi/3) = 1.601$ и $\ell_2(\pi/3) = 3.998$ находим по формулам (19) и (20) соответственно.

3. Задаём $\varepsilon = 10^{-3}$ и $h = 0.001$.

4. Рассчитываем значения функции $\sigma(t)$ по формуле (6) и разность $3.998 - \sigma(t)$ для $t \in [0, 1.602]$ с шагом h и переходим к п. 5.

5. Значение $t_0 + \tau^1 = 1.601$ удовлетворяет неравенствам $3.998 - \sigma(1.601) = 0.000 > 0$, $3.998 - \sigma(1.602) = -0.000 < 0$, и поскольку $0.000 < 10^{-3}$, то переходим к п. 6.

6. Находим разность $\rho_1 = \tau_1(\pi/3) - \tau^1 = 1.601 - 1.601 = 0.000$.

6.1. Имеем $\rho_1 < 10^{-3}$, а значит $t_0 + \tau_1(\pi/3) = 1.601$ является моментом первого переключения с точностью до 10^{-3} и переходим к п. 7.

7. Рассчитываем значения функции $\sigma(t)$ по формуле (6) и разность $0.750 - \sigma(t)$ для $t \in [1.601, 2\pi + h]$ с шагом h и переходим к п. 8.

8. Значение $t_0 + \tau_1(\pi/3) + \tau^2 = 6.219$ удовлетворяет неравенствам $0.750 - \sigma(6.219) = -0.000 < 0$, $0.750 - \sigma(6.220) = 0.000 > 0$, и так как $-0.000 > -10^{-3} = -\varepsilon$, то переходим к п. 9.

9. Разность $\rho_2 = 2\pi - 6.219 = 0.064 > 10^{-3}$ удовлетворяет неравенству $\rho_2 \geq h$, а значит условие переключения (23) не выполняется; значение $t_0 + 2\pi = 6.283$ не является моментом второго переключения с точностью до 10^{-3} ; задаём следующее значение индекса $r_1 = r + 1 = 2$ и переопределяем его по формуле $r = r_1$. Поскольку $r = 2 \leq 6$, то вычисляем φ_1^r по формуле (24) и возвращаемся к п. 2.

Результаты вычисления параметров системы и решения представлены в таблице. Координаты точек переключения рассчитаны по формулам (14) в случае, когда выполнены оба условия переключения. Таким образом, среди значений параметра φ_1 из отрезка $[0, 2\pi]$ с шагом, равным $\pi/3$, для $m = 6$ найдены два значения $\varphi_1^0 = \varphi_1^6 = 0$ и $\varphi_1^5 = 5\pi/3$, при которых выполняются все условия теоремы, а значит установлены значения параметров системы, при которых существуют 2π -периодические решения системы (25).

Таблица. Значения параметров системы и решения для $m = 6$, $\varepsilon = 10^{-3}$

Параметр	φ_1					
	0	$\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$4\pi/3$	$5\pi/3$
τ_1	1.462	1.601	1.945	2.153	2.006	1.660
ℓ_2	3.563	3.998	3.339	2.203	2.268	2.974
x_1^1	-5.357	—	—	—	—	-5.357
x_1^2	-25.451	—	—	—	—	-21.247
x_2^1	3.260	—	—	—	—	2.882
x_2^2	4.419	—	—	—	—	2.646
x_3^1	2.074	—	—	—	—	1.828
x_3^2	0.987	—	—	—	—	0.381

На рис. 3 представлена траектория 2π -периодического двухточечно-колебательного решения системы (25) для значения $\varphi_1 = 0$ с точками переключения $X^1 = (-5.357, 3.260, 2.074)^T$, $X^2 = (-25.451, 4.419, 0.987)^T$. Гиперплоскости переключения L_1 и L_2 задаются уравнениями $-0.14x_1 = 0.750$ и $-0.14x_1 = 3.563$ соответственно (ориентированы ортогонально оси x_1). Изображающая точка решения начинает своё движение в $X^1 \in L_1$ при $t_0 = 0$, за время $\tau_1 = 1.462$ попадает в $X^2 \in L_2$, затем за $\tau_2 = 4.821$ возвращается в начальную точку X^1 . Далее движение от L_1 до L_2 и обратно повторяется по этой траектории.

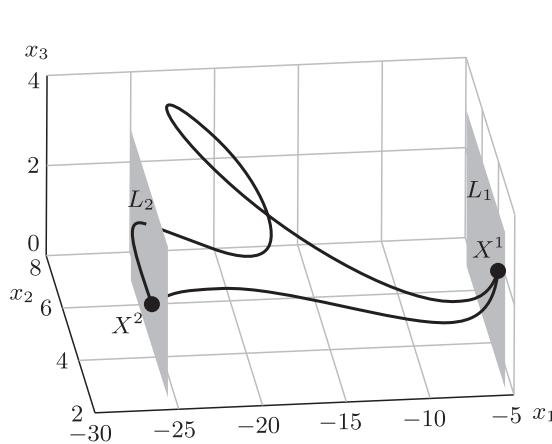


Рис. 3. Траектория 2π -периодического решения системы (25)

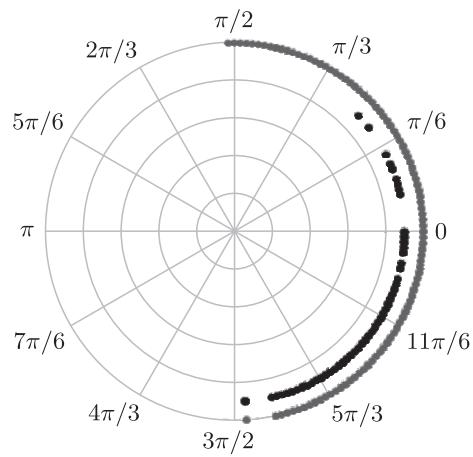


Рис. 4. Значения параметра φ_1

На рис. 4 приведены значения параметра φ_1 из отрезка $[0, 2\pi]$ с шагом, равным 0.01π , для $m = 200$ на окружности большего радиуса, когда выполняется условие переключения (22), на окружности меньшего радиуса, когда выполняется условие переключения (23).

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00069).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Неустойчивые колебательные системы с гистерезисом: задачи стабилизации и управления / А.Л. Медведский, П.А. Мелешенко, В.А. Нестеров [и др.] // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2020. — № 4. — С. 58–82.
2. Kamachkin, A.M. Existence of periodic modes in automatic control system with a three-position relay / A.M. Kamachkin, D.K. Potapov, V.V. Yevstafyeva // Int. J. Control. — 2020. — V. 93, № 4. — P. 763–770.
3. da Silva, C.E.L. Periodic solutions of a class of non-autonomous discontinuous second-order differential equations / C.E.L. da Silva, A. Jacquemard, M.A. Teixeira // J. Dyn. Control Syst. — 2020. — V. 26, № 1. — P. 17–44.
4. О существовании периодического режима в одной нелинейной системе / А.С. Фурсов, Р.П. Митрев, П.А. Крылов, Т.С. Тодоров // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 8. — С. 1104–1115.
5. Vasquez-Beltran, M.A. Recursive algorithm for the control of output remnant of Preisach hysteresis operator / M.A. Vasquez-Beltran, B. Jayawardhana, R. Peletier // IEEE Control Syst. Lett. — 2021. — V. 5, № 3. — P. 1061–1066.
6. Fen, M.O. Quasilinear systems with unpredictable relay perturbations / M.O. Fen, F. Fen // Turk. J. Math. — 2022. — V. 46, № 4. — P. 1369–1383.
7. Цыпкин, Я.З. Релейные автоматические системы / Я.З. Цыпкин. — М. : Наука, 1974. — 575 с.
8. Красносельский, М.А. Системы с гистерезисом / М.А. Красносельский, А.В. Покровский. — М. : Наука, 1983. — 272 с.

9. Евстафьева, В.В. О существовании двухточечно-колебательных решений возмущённой релейной системы с гистерезисом / В.В. Евстафьева // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 2. — С. 169–178.
10. Євстаф'єва, В.В. Існування двоточково-коливних розв'язків релейної неавтономної системи з кратним власним числом дійсної симетричної матриці / В.В. Євстаф'єва // Укр. мат. журн. — 2021. — Т. 73, № 5. — С. 640–650.
11. Евстафьева, В.В. Синтез управления возмущённой системой с неоднозначной нелинейностью / В.В. Евстафьева // Автоматика и телемеханика. — 2023. — № 3. — С. 44–64.
12. Евстафьева, В.В. Критерий существования двухточечно-колебательного решения возмущённой системы с реле / В.В. Евстафьева // Мат. заметки. — 2023. — Т. 114, № 2. — С. 260–273.
13. Differential equations with hysteresis operators. Existence of solutions, stability, and oscillations / G.A. Leonov, M.M. Shumafov, V.A. Teshev, K.D. Aleksandrov // Differ. Equat. — 2017. — V. 53, № 13. — P. 1764–1816.
14. Точные методы исследования нелинейных систем автоматического управления / В.М. Кунцевич, А.М. Лётов, Б.Н. Наумов [и др.]. — М. : Машиностроение, 1971. — 322 с.

STUDY OF PARAMETER SPACE OF MULTIDIMENSIONAL SYSTEM WITH RELAY HYSTERESIS AND PERTURBATION

© 2024 / V. V. Yevstafyeva¹, M. Yu. Guseva²

Saint Petersburg State University, Russia

e-mail: ¹*v.evstafieva@spbu.ru*, ²*st089778@student.spbu.ru*

The object of research is an n -dimensional system of ordinary differential equations that contains a constant diagonal matrix with real eigenvalues, two-position relay nonlinearity of hysteresis type with a parameter and a continuous periodic perturbation function with a parameter. In the case of a special type of feedback vector (one non-zero element), we obtain conditions for system parameters that ensure the existence of a unique two-point oscillatory periodic solution with a period multiple of the perturbation function period. We establish a functional dependence of the nonlinearity parameter on the perturbation function parameter. Influence of perturbation function parameter values on the existence of the solution is investigated. We offer an algorithm for seeking system parameters and the instant of the first relay switching in the case when the solution period is given. Theoretical results, including the proposed algorithm, are illustrated by the example of a three-dimensional system.

Keywords: system of ordinary differential equations, relay nonlinearity with hysteresis, periodic perturbation function, two-point oscillatory periodic solution, switching points and instants, system parameter space

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00069).

REFERENCES

1. Medvedskii, A.L., Meleshenko, P.A., Nesterov, V.A. [et al.], Unstable oscillating systems with hysteresis: problems of stabilization and control, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2020, vol. 59, no. 4, pp. 533–556.
2. Kamachkin, A.M., Potapov, D.K., and Yevstafyeva, V.V., Existence of periodic modes in automatic control system with a three-position relay, *Int. J. Control.*, 2020, vol. 93, no. 4, pp. 763–770.
3. da Silva, C.E.L., Jacquemard, A., and Teixeira, M.A., Periodic solutions of a class of non-autonomous discontinuous second-order differential equations, *J. Dyn. Control Syst.*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 17–44.
4. Fursov, A.S., Mitrev, R.P., Krylov, P.A., and Todorov, T.S., On the existence of a periodic mode in a nonlinear system, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 8, pp. 1076–1087.

5. Vasquez-Beltran, M.A., Jayawardhana, B., and Peletier, R., Recursive algorithm for the control of output remnant of Preisach hysteresis operator, *IEEE Control Syst. Lett.*, 2021, vol. 5, no. 3, pp. 1061–1066.
6. Fen, M.O. and Fen, F., Quasilinear systems with unpredictable relay perturbations, *Turk. J. Math.*, 2022, vol. 46, no. 4, pp. 1369–1383.
7. Tsyplkin, Ya.Z., *Releinyye avtomaticheskie sistemy* (Relay Automatic Systems), Moscow: Nauka, 1974.
8. Krasnosel'skii, M.A. and Pokrovskii, A.V., *Sistemy s gisterezisom* (Systems with Hysteresis), Moscow: Nauka, 1983.
9. Yevstafyeva, V.V., On the existence of two-point oscillatory solutions of a perturbed relay system with hysteresis, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 155–164.
10. Yevstafyeva, V.V., Existence of two-point oscillatory solutions of a relay nonautonomous system with multiple eigenvalue of a real symmetric matrix, *Ukr. Math. J.*, 2021, vol. 73, no. 5, pp. 746–757.
11. Yevstafyeva, V.V., Control design for a perturbed system with an ambiguous nonlinearity, *Autom. Remote Control*, 2023, vol. 84, no. 3, pp. 226–239.
12. Yevstafyeva, V.V., Criterion for the existence of two-point oscillatory solution of a perturbed system with a relay, *Math. Notes*, 2023, vol. 114, no. 2, pp. 212–222.
13. Leonov, G.A., Shumakov, M.M., Teshev, V.A., and Aleksandrov, K.D., Differential equations with hysteresis operators. Existence of solutions, stability, and oscillations, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 13, pp. 1764–1816.
14. Kuntsevich, V.M., Letov, A.M., Naumov, B.N. [et al.], *Tochnye metody issledovaniya nelineinykh sistem avtomaticheskogo upravleniya* (Exact Analysis Methods for Nonlinear Automatic Control Systems), Moscow: Mashinostroenie, 1971.

— ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ —

УДК 517.926.4

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ
ПОКАЗАТЕЛЯМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ
В ДВУМЕРНОМ АНТИПЕРРОНОВСКОМ ЭФФЕКТЕ
ПРИ ВОЗМУЩЕНИЯХ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

© 2024 г. Н. А. Изобов¹, А. В. Ильин²

¹Институт математики Национальной академии наук Беларусь, г. Минск

²Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: ¹izobov@im.bas-net.by, ²iline@cs.msu.su

Поступила в редакцию 10.09.2024 г., после доработки 10.09.2024 г.; принята к публикации 31.10.2024 г.

Реализован двумерный антиперроновский эффект смены всех положительных характеристических показателей линейного приближения на четыре различных отрицательных показателя для четырёх нетривиальных решений дифференциальной системы с возмущением высшего порядка малости.

Ключевые слова: характеристический показатель Ляпунова, возмущение высшего порядка, смена показателей, эффект Перрона, антиперроновский эффект

DOI: 10.31857/S0374064124120031, EDN: IPQRNQ

Антиперроновский эффект [1–3] смены показателей (противоположный перроновскому [4–7]) предполагает существование линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и положительными характеристическими показателями $\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$, а также возмущённой системы

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq t_0, \quad (2)$$

с бесконечно дифференцируемой вектор-функцией $f(t, y): [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ из класса малых возмущений, имеющей нетривиальные решения с отрицательными показателями Ляпунова.

Для линейных возмущений $f(t, y) \equiv Q(t)y$:

1) экспоненциально убывающих ($\lambda[Q] \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \|Q(t)\| < 0$), эти решения составляют [1] $(n-1)$ -мерное подпространство во всём множестве решений системы (2) (теперь уже линейной);

2) исчезающих на бесконечности ($Q(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$), все решения системы (2) имеют [2] отрицательные показатели.

Более сложным является случай возмущений $f(t, y)$ высшего порядка малости $m > 1$ в окрестности начала координат $y = 0$ — так называемых m -воздушений, определяемых условием

$$\|f(t, y)\| \leq C_f \|y\|^m, \quad m > 1, \quad C_f = \text{const}, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq t_0, \quad (3)$$

когда двумерный антиперроновский эффект реализован [3] на единственном построенном решении $Y(t)$ системы (2) с показателем $\lambda[Y] < 0$.

Возникает вопрос о реализации рассматриваемого эффекта на большем числе экспоненциально убывающих решений системы (2) с t -возмущением. Положительный ответ содержит доказательство приведённой ниже теоремы, устанавливающей реализацию двумерного антиперроновского эффекта на четырёх нетривиальных решениях с различными отрицательными показателями системы (2) с возмущением (3) высшего порядка малости в окрестности начала координат $y = 0$.

Для векторов $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ и временной полуоси $T_0 = [t_0, +\infty)$, $t_0 \geq 0$, определим двумерные $S_1^2 = \{y \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$, $S_2^2 = \{y \in \mathbb{R}^2 : y_2 \geq 0 \geq y_1\}$, $S_3^2 = \{y \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\}$, $S_4^2 = \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1 \geq 0 \geq y_2\}$ и так называемые пространственно-временные $\mathbb{R}_i^2 = S_i^2 \times T_0$, $i = \overline{1, 4}$, октанты.

Справедлива следующая (анонсированная в [8])

Теорема. Для любых параметров $\lambda > 0$, $m_4 \geq m_3 \geq m_2 \geq m_1 > 1$, $\theta > 1$ существуют:

1) двумерная линейная система (1) с характеристическими показателями $\lambda_1(A) = \lambda_2(A) = \lambda > 0$;

2) бесконечно дифференцируемое t_1 -возмущение $f(t, y) : [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, удовлетворяющее условию (3), одновременно являющееся t_i -возмущением в пространственно-временном октанте \mathbb{R}_i^2 при всяком $i = \overline{1, 4}$,

такие, что возмущённая система (2) имеет решения $Y_i \subset \mathbb{R}_i^2$, $i = \overline{1, 4}$, с показателями

$$\lambda[Y_i] = -\lambda \frac{\theta+1}{\theta m_i - 1} < 0. \quad (4)$$

Доказательство. 1. Построение системы линейного приближения. Введём следующие обозначения:

$$t_k = \theta^k, \quad k \geq 1; \quad \varepsilon(t) \equiv \exp\{-t^2\}, \quad t \geq t_0 \geq 1; \quad \alpha = \lambda(\theta+1)(\theta-1)^{-1},$$

$$e_{\beta\gamma}(\tau, \tau_1, \tau_2) \equiv \beta + (\gamma - \beta) \exp\{-(\tau - \tau_1)^{-2} \exp\{-(\tau - \tau_2)^{-2}\}\}, \quad \tau \in (\tau_1, \tau_2),$$

— функция Гелбаума–Олмстеда [9, с. 54], принимающая на концах интервала (τ_1, τ_2) значения β и γ и нулевые значения своих односторонних производных любого порядка.

Коэффициенты необходимой системы

$$\dot{x} = \text{diag}[a_1(t), a_2(t)]x \equiv A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq t_0, \quad (5)$$

линейного приближения определим равенствами [3]

$$a_2(t) = \begin{cases} -\alpha, & t \in [t_{2k}, t'_{2k+1}], \quad t'_k \equiv t_k - \varepsilon(t_k), \\ e_{-\alpha, \alpha}(t, t'_{2k+1}, t_{2k+1}), & k \geq 0, \end{cases}$$

$$a_2(t) = \begin{cases} \alpha, & t \in [t_{2k+1}, t'_{2k+2}], \quad k \geq 0, \\ e_{\alpha, -\alpha}(t, t'_{2k+2}, t_{2k+2}), & t \in [t'_{2k+2}, t_{2k+2}], \end{cases}$$

$$a_1(t) = -a_2(t), \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+2}], \quad k \geq 0. \quad (6)$$

Построенная таким образом на полуоси $[t_0, +\infty)$ система (5) линейного приближения имеет характеристические показатели [3] $\lambda_1(A) = \lambda_2(A) = \lambda$.

2. Построение возмущения высшего порядка. На отрезке $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ определим необходимое возмущение с начальным значением $f(t_{2k}, y) = 0$ и первой компонентой

$$f_1(t, y) \equiv 0, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+1}].$$

Вторую компоненту f_2 будем строить с помощью вспомогательных бесконечно дифференцируемых функций

$$E \equiv E(\tau, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) = \begin{cases} e_{01}(\tau, \tau_1, \tau_2), & \tau \in [\tau_1, \tau_2], \\ 1, & \tau \in [\tau_2, \tau_3], \\ e_{10}(\tau, \tau_3, \tau_4), & \tau \in (\tau_3, \tau_4] \end{cases} \quad (7)$$

и зависящих от одной пространственной переменной $y_1 \in \mathbb{R}$ функций

$$F_i(y_1, k) = (-1)^i y_1^{m_i} \times \begin{cases} E(y_1, 0, \varepsilon, 1 - \varepsilon, 1), & y_1 \in [0, 1], \varepsilon = \varepsilon(t_k), \\ 0, & y_1 > 1, y \in S_i, i = 1, 4, \end{cases} \quad (8)$$

$$F_i(y_1, k) = (-1)^{i-1} (-y_1)^{m_i} \times \begin{cases} 0, & y_1 < -1, y \in S_i, i = 2, 3, \\ E(y_1, -1, \varepsilon - 1, -\varepsilon, 0), & y_1 \in [-1, 0]. \end{cases} \quad (9)$$

На рассматриваемом отрезке $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ компоненту $f_2(t, y_1)$ определим равенствами

$$f_2(t, y_1) = \begin{cases} 0, & t \in [t_{2k}, t''_{2k+1}], t''_{2k+1} \equiv t_{2k+1} - 1, \varepsilon = \varepsilon(t_{2k+1}), \\ d_i(2k+1) E(t, t''_{2k+1}, t''_{2k+1} + \varepsilon, t_{2k+1} - \varepsilon, t_{2k+1}) F_i(y_1, 2k+1), & t \in [t''_{2k+1}, t_{2k+1}], y_1 \in \mathbb{R}, i = \overline{1, 4}, \end{cases}$$

в которых постоянные $d_i(2k+1) > 0$ подлежат последующему определению при построении решений возмущённой системы.

Бесконечная дифференцируемость функции $f_2(t, y_1)$ обеспечивается аналогичным свойством функций Гелбаума–Олмстеда и нулевыми значениями их односторонних производных любого порядка в концевых точках промежутков определения, а также значениями этих функций в указанных точках.

Необходимо также отметить, что в соответствии с определением (8), (9) функций $F_i(y_1, k)$ вторая компонента $f_2(t, y_1)$ принимает отрицательные значения для $t \in (t''_{2k+1}, t_{2k+1})$, $y_1 \neq 0$, $i = 1, 2$, и положительные для тех же t и y_1 , но для $i = 3, 4$, что позволяет уменьшить абсолютные значения компонент решений и, следовательно, их показатели.

3. Построение решений возмущённой системы на отрезке $[t_{2k}, t_{2k+1}]$. Введём величины

$$\beta_1(m_i) = \theta \beta_2(m_i) - (\theta - 1)\alpha, \quad \beta_2(m_i) = -\alpha \frac{\theta - 1}{\theta m_i - 1}, \quad i = \overline{1, 4}, \quad (10)$$

и с их помощью определим начальные значения

$$Y_i(t_{2k}) = ((-1)^{i-1} e^{\beta_1(m_i)t_{2k}}, c_{2k} e^{\beta_2(m_i)t_{2k}})^T, \quad i = 1, 2,$$

$$Y_i(t_{2k}) = ((-1)^i e^{\beta_1(m_i)t_{2k}}, -c_{2k} e^{\beta_2(m_i)t_{2k}})^T, \quad i = 3, 4,$$

четырёх необходимых решений на отрезке $[t_{2k}, t_{2k+1}]$. Здесь множитель c_{2k} обусловлен определением сглаживания коэффициента $a_2(t)$ и имеет значение [3]

$$c_{2k} = c_{2k}(t_{2k}), \quad c_{2k}(t) = \exp \left\{ \int_{t'_{2k}}^t \exp \{-\alpha + e_{\alpha, -\alpha}(\tau, t'_{2k}, t_{2k})\} d\tau \right\},$$

удовлетворяющее оценкам

$$\exp \{-2\alpha \varepsilon(t_{2k})\} \leq c_{2k}(t) \leq 1, \quad t \in [t'_{2k}, t_{2k}].$$

В соответствии с нулевым значением первой компоненты $f_1(t, y)$ возмущения $f(t, y)$ на всём отрезке $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ и начальными значениями

$$|y_{1i}(t_{2k})| = \exp \{\beta_1(m_i)t_{2k}\}, \quad i = \overline{1, 4},$$

для первой компоненты решений $Y_i(t)$ имеем представление

$$\begin{aligned} |y_{1i}(t)| &= |y_{1i}(t_{2k})| \exp \left\{ \int_{t_{2k}}^t a_1(\tau) d\tau \right\} = \\ &= e^{\beta_1(m_i)t_{2k} + \alpha(t-t_{2k})} \times \begin{cases} 1, & t \in [t_{2k}, t'_{2k+1}], \quad t'_{2k+1} \equiv t_{2k+1} - \varepsilon(t_{2k+1}), \\ c_{2k+1}(t), & t \in [t'_{2k+1}, t_{2k+1}], \end{cases} \quad i = \overline{1, 4}, \end{aligned} \quad (11)$$

в котором функция $c_{2k+1}(t)$ и её значение $c_{2k+1} = c_{2k+1}(t_{2k+1})$ удовлетворяют оценкам

$$\exp\{-2\alpha\varepsilon(t_{2k+1})\} \leq c_{2k+1}(t) \leq 1, \quad t \in [t'_{2k+1}, t_{2k+1}]. \quad (12)$$

При этом на всём отрезке $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ компоненты $y_{11}(t)$ и $y_{14}(t)$ принимают только положительные значения, а компоненты $y_{12}(t)$ и $y_{13}(t)$ — только отрицательные.

По определению (10) величин $\beta_1(m_i)$ и $\beta_2(m_i)$ выполнено соотношение

$$\beta_1(m_i)t_{2k} + \alpha(t_{2k+1} - t_{2k}) = \beta_2(m_i)t_{2k+1}, \quad (13)$$

поэтому первая компонента $y_{1i}(t)$ принимает значения

$$y_{1i}(t_{2k+1}) = c_{2k+1}e^{\beta_2(m_i)t_{2k+1}} \times \begin{cases} 1, & i = 1, 4, \\ -1, & i = 2, 3. \end{cases} \quad (14)$$

Промежуточная оценка

$$|y_{1i}(t)| \leq e^{\beta_2(m_i)t}, \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+1}],$$

также следует из определения (10) и неравенства

$$\chi_i(t) \equiv t^{-1}[\beta_1(m_i)t_{2k} + \alpha(t-t_{2k})] \leq \chi_i(t_{2k+1}) = \beta_2(m_i), \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+1}], \quad i = \overline{1, 4}.$$

Из представления (11), соотношения (13) и левого неравенства в (12) имеем оценки

$$\begin{aligned} |y_{1i}(t)| &\geq \exp\{-\alpha[1+2\varepsilon(t_{2k+1})]+\beta_2(m_i)t_{2k+1}\} > \\ &> \exp\{-\alpha(2+t_{2k+1})\} \equiv \psi(k), \quad t \in [t_{2k+1}-1, t_{2k+1}], \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Последнее неравенство справедливо в силу очевидных неравенств

$$\beta_2(m_i) > -\alpha, \quad i = \overline{1, 4}; \quad \varepsilon(t_{2k+1}) < 1/e, \quad t_{2k+1} \geq 1.$$

В свою очередь, для величины $\psi(k)$ более сильное неравенство $\ln \psi(k) \geq -t_{2k}^2$, $k \geq k_0$, следует из выбора номера $k_0 \geq 1$, удовлетворяющего условию $t_{k_0} \geq 2(1+\alpha)$. Доказанное неравенство

$$|y_{1i}(t)| \geq \varepsilon(t_{2k}), \quad t \in [t_{2k+1}-1, t_{2k+1}], \quad k \geq k_0,$$

позволяет для второй компоненты $f_2(t, y_1)$ по её определению и с учётом равенств (8), (9) получить представление

$$\begin{aligned} f_2[t, y_{1i}(t)] &= (-1)^{\varphi(i)} d_i(2_{k+1}) |y_{1i}(t)|^{m_i} E(t, t''_{2k+1}, t''_{2k+1} + \varepsilon, t_{2k+1} - \varepsilon, t_{2k+1}), \\ \varepsilon &= \varepsilon(t_{2k+1}), \quad t \in [t_{2k+1}-1, t_{2k+1}], \quad i = \overline{1, 4}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $\varphi(i)=1$ при $i=1,2$ и $\varphi(i)=2$ при $i=3,4$. Это позволяет на отрезке $[t_{2k+1}-1, t_{2k+1}]$ уменьшить к моменту $t=t_{2k+1}$ абсолютные значения второй компоненты $y_{2i}(t)$ решений $Y_i(t)$ до необходимой величины $\exp\{\beta_1(m_i)t_{2k+1}\}$, $i=1,4$.

Как и в работе [3], из соотношений (11)–(14) легко следует существование такой постоянной $r>0$, для которой выполнены оценки

$$|y_{1i}(t)|^{m_i}e^{-\alpha}>r\exp\{m_i\beta_2(m_i)t_{2k+1}\}, \quad t\in[t_{2k+1}-1, t_{2k+1}]. \quad (16)$$

Вторые компоненты $y_{2i}(t)$ решений $Y_i(t)$ являются решениями неоднородного уравнения

$$\dot{y}_2=a_2(t)y_2+f_2[t, y_{1i}(t)], \quad t\in[t_{2k}, t_{2k+1}], \quad i=\overline{1,4}, \quad (17)$$

в котором возмущение $f_2[t, y_{1i}(t)]$ принимает нулевые значения при $t\in[t_{2k}, t_{2k+1}-1]$, $i=\overline{1,4}$, и ненулевые, определяемые равенствами (15), на промежутке $(t_{2k+1}-1, t_{2k+1})$. Коэффициент $a_2(t)$ линейного приближения (5) определён равенствами (6).

Из уравнения (17) для вторых компонент $y_{2i}(t)$ имеем представления

$$y_{2i}(t)=\begin{cases} y_{2i}(t_{2k})\exp\{-\alpha(t-t_{2k})\}\equiv z_i(t), & t\in[t_{2k}, t_{2k+1}-1], \\ \tilde{z}_i(t)+(-1)^{\varphi(i)}d_i(2k+1)J_i(t_{2k+1}-1, t), & t\in[t_{2k+1}-1, t_{2k+1}], \end{cases} \quad (18)$$

где

$$J_i(t_{2k+1}-1, t)\equiv \int_{t_{2k+1}-1}^t E\exp\left\{\int_\tau^t a_2(\xi)d\xi\right\}|y_{1i}(\tau)|^{m_i}d\tau, \quad t\in[t_{2k+1}-1, t_{2k+1}],$$

$$\tilde{z}_i(t)=\begin{cases} z_i(t), & t\in[t_{2k+1}-1, t'_{2k+1}], \\ z_i(t)\tilde{c}_{2k+1}(t)\equiv z_i(t)\exp\left\{\int_{t'_{2k+1}}^t [\alpha+e_{-\alpha\alpha}(\tau, \dots)]d\tau\right\}, & t\in(t'_{2k+1}, t_{2k+1}]. \end{cases} \quad (19)$$

При этом для положительной функции $\tilde{c}_{2k+1}(t)$ и значения $\tilde{c}_{2k+1}=\tilde{c}_{2k+1}(t_{2k+1})$ выполнены аналогичные (12) оценки

$$1\leqslant\tilde{c}_{2k+1}(t)\leqslant e^{2\alpha\varepsilon(t_{2k+1})}, \quad t\in[t'_{2k+1}, t_{2k+1}].$$

Для функции $z_i(t)$ в силу неравенства $\beta_2(m_i)>-\alpha$ справедлива оценка

$$|z_i(t)|\leqslant\exp\{\beta_2(m_i)t\}, \quad t\in[t_{2k}, t_{2k+1}],$$

а для $\tilde{z}_i(t_{2k+1})$ — соотношения

$$|\tilde{z}_i(t_{2k+1})|=c_{2k}\tilde{c}_{2k+1}\exp\{\beta_2(m_i)t_{2k}-\alpha(t_{2k+1}-t_{2k})\}\stackrel{(10)}{=}c_{2k}\tilde{c}_{2k+1}\exp\{m_i\beta_2(m_i)t_{2k+1}\}, \quad (20)$$

причём знаки слагаемых в равенстве (18) противоположны. Это позволяет выбором постоянной $d_i(2k+1)>0$ получить необходимую оценку всей суммы. Указанный выбор осуществим из равенства

$$y_{2i}(t_{2k+1})\equiv\tilde{z}_i(t_{2k+1})+(-1)^{\varphi(i)}J_i(t_{2k+1}-1, t_{2k+1})d_i(2k+1)=\operatorname{sgn}(y_{2i}(t_{2k}))\exp\{\beta_1(m_i)t_{2k+1}\}. \quad (21)$$

По определению (7) функции E для интеграла в (19) на основании оценки (16) справедливы неравенства

$$J_i(t_{2k+1}-1, t_{2k+1})>J_i(t_{2k+1}-1+\varepsilon, t_{2k+1}-\varepsilon)>\exp\{m_i\beta_2(m_i)t_{2k+1}\}, \quad i=\overline{1,4},$$

с учётом которых и равенства (20) получим из уравнения (21) необходимые представление для определения постоянной $d_i(2k+1)$ и оценку сверху

$$0 < d_i(2k+1) = \frac{|\tilde{z}_i(t_{2k+1})| - \exp\{\beta_1(m_i)t_{2k+1}\}}{J_i(t_{2k+1}-1, t_{2k+1})} < \frac{c_{2k}\tilde{c}_{2k+1}}{r[1-2\varepsilon(t_{2k+1})]} \leq r_0$$

с независящей от k постоянной r_0 .

Таким образом, на отрезке $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ построены система (2) с необходимым m_1 -возмущением $f(t, y)$, $f(t_{2k+1}, y) \equiv 0$, $y \in \mathbb{R}^2$, являющимся m_i -возмущением в октанте $\mathbb{R}_i^2(k) \equiv S_i \times [t_{2k}, t_{2k+1}]$, $i = \overline{1, 4}$, и её решения $Y_i(t) \subset \mathbb{R}_i^2$ с компонентами $y_{1i}(t)$, $y_{2i}(t)$, удовлетворяющими неравенствам

$$|y_{1i}(t)|, |y_{2i}(t)| \leq \exp\{\beta_2(m_i)t\}, \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+1}], \quad i = \overline{1, 4}.$$

Эти решения в момент времени $t = t_{2k+1}$ принимают значения

$$\begin{aligned} Y_i(t_{2k+1}) &= ((-1)^{i-1} c_{2k+1} e^{\beta_2(m_i)t_{2k+1}}, e^{\beta_1(m_i)t_{2k+1}})^T, \quad i = 1, 2, \\ Y_i(t_{2k+1}) &= ((-1)^i c_{2k+1} e^{\beta_2(m_i)t_{2k+1}}, -e^{\beta_1(m_i)t_{2k+1}})^T, \quad i = 3, 4, \end{aligned}$$

являющиеся начальными значениями для построения возмущённой системы и её решений $Y_i(t)$, $i = \overline{1, 4}$, на отрезке $[t_{2k+1}, t_{2k+2}]$.

Начальные значения $Y_i(t_{2k+1})$ идентичны (с заменой y_1 и y_2 и наоборот) прежним значениям $Y_i(t_{2k})$, поэтому необходимые построения на отрезке $[t_{2k+1}, t_{2k+2}]$ совершенно аналогичны выполненным на предыдущем отрезке и фактически их повторяют (с заменой y_1 на y_2 и наоборот).

С помощью метода математической индукции распространим построения необходимой системы (2) и её решений $Y_i \subset \mathbb{R}_i^2$ на отрезке $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ на всю полуось $t \geq t_0 = \theta^{2k_0}$.

Построенная таким образом система (2) с необходимым возмущением $f(t, y)$ будет иметь решения $Y_i(t)$ с показателями $\lambda[Y_i] = \beta_2(m_i)$, $i = \overline{1, 4}$. Теорема доказана.

Замечание. Очевидным выбором параметров $m_i > 1$, $i = \overline{1, 4}$, можно реализовать отрицательные и все различные показатели (4).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Изобов, Н.А. О существовании линейных дифференциальных систем со всеми положительными характеристическими показателями первого приближения и экспоненциально убывающими возмущениями и решениями / Н.А. Изобов, А.В. Ильин // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 11. — С. 1450–1457.
- Изобов, Н.А. Линейный вариант антиперроновского эффекта смены положительных характеристических показателей на отрицательные / Н.А. Изобов, А.В. Ильин // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 11. — С. 1443–1452.
- Изобов, Н.А. Существование антиперроновского эффекта смены положительных показателей системы линейного приближения на отрицательные при возмущениях высшего порядка малости / Н.А. Изобов, А.В. Ильин // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 12. — С. 1599–1605.
- Perron, O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen / O. Perron // Math. Zeitschr. — 1930. — Bd. 32, H. 5. — S. 702–728.
- Леонов, Г.А. Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения / Г.А. Леонов. — М. : Ин-т комп'ют. исследований ; Ижевск : R&C Dynamics, 2006. — 168 с.

6. Изобов, Н.А. Построение произвольного суслинского множества положительных характеристических показателей в эффекте Perrона / Н.А. Изобов, А.В. Ильин // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 4. — С. 464–472.
7. Изобов, Н.А. Построение счётного числа различных суслинских множеств характеристических показателей в эффекте Perrона смены их значений / Н.А. Изобов, А.В. Ильин // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 12. — С. 1585–1589.
8. Изобов, Н.А. О числе экспоненциально убывающих решений возмущённой дифференциальной системы в двумерном антиперроновском эффекте / Н.А. Изобов, А.В. Ильин // Дифференц. уравнения. — 2024. — Т. 60, № 11. — С. 1583–1584.
9. Гельбаум, Б. Контрпримеры в анализе / Б. Гельбаум, Дж. Олмстед ; пер. с англ. Б.И. Голубева ; под ред. П.Л. Ульянова. — М. : Мир, 1967. — 252 с.

**CONSTRUCTION OF SOLUTIONS WITH NEGATIVE EXPONENTS
OF A DIFFERENTIAL SYSTEM IN THE TWO-DIMENSIONAL ANTI-PERRON EFFECT
UNDER HIGHER-ORDER PERTURBATIONS**

© 2024 / N. A. Izobov¹, A. V. Il'in²

¹*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,*

²*Lomonosov Moscow State University, Russia*

e-mail: ¹*izobov@im.bas-net.by*, ²*iline@cs.msu.su*

The two-dimensional anti-Perron effect of changing all positive characteristic exponents of the linear approximation to four different negative exponents, respectively, of four non-trivial solutions of a differential system with a perturbation of higher order of smallness, has been realized.

Keywords: Lyapunov characteristic exponent, higher-order perturbation, change of exponents, Perron effect, anti-Perron effect

REFERENCES

1. Izobov, N.A. and Il'in, A.V., On the existence of linear differential systems with all positive characteristic exponents of the first approximation and with exponentially decaying perturbations and solutions, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 11, pp. 1426–1433.
2. Izobov, N.A. and Il'in, A.V., Linear version of the anti-Perron effect of change of positive characteristic exponents to negative ones, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 11, pp. 1439–1449.
3. Izobov, N.A. and Il'in, A.V., Existence of an anti-Perron effect of change of positive exponents of the linear approximation system to negative ones under perturbations of a higher order of smallness, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 12, pp. 1591–1597.
4. Perron, O., Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen, *Math. Zeitschr.*, 1930, Bd. 32, H. 5, S. 703–728.
5. Leonov, G.A., *Khaoticheskaya dinamika i klassicheskaya teoriya ustoichivosti dvizheniya* (Chaotic Dynamics and the Classical Theory of Motion Stability), Moscow; Izhevsk: Inst. Komp'yut. Issled., 2006.
6. Izobov, N.A. and Il'in, A.V., Construction of an arbitrary Suslin set of positive characteristic exponents in the Perron effect, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 4, pp. 449–457.
7. Izobov, N.A. and Il'in, A.V., Constructing countably many distinct Suslin sets of characteristic exponents in the Perron effect of change of their values, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 12, pp. 1539–1544.
8. Izobov, N.A. and Il'in, A.V., On the number of exponentially decreasing solutions of a perturbed differential system in the two-dimensional anti-Perron effect, *Differ. Uravn.*, 2024, vol. 60, no. 11, pp. 1583–1584.
9. Gelbaum, B.R. and Olmsted, J.M.H., *Counterexamples in Analysis*, San Francisco: Holden-Day, 1964.

— ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ —

УДК 517.923

О ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ
РИККАТИ ПРИ МАЛЫХ ИЗМЕНЕНИЯХ
КОЭФФИЦИЕНТОВ И АНАЛИЗЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ
В ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ
УПРАВЛЕНИЯ

© 2024 г. Е. С. Паламарчук

Центральный экономико-математический институт РАН, г. Москва

Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, г. Москва

e-mail: e.palamarchuck@gmail.com

Поступила в редакцию 03.07.2024 г., после доработки 01.10.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

Проведён анализ чувствительности решений уравнений Риккати к асимптотически малым изменениям матриц коэффициентов. Получена верхняя оценка для разности между решением алгебраического уравнения Риккати и решением соответствующего дифференциального уравнения Риккати. Результат применён для исследования оптимальности в задаче стохастического линейно-квадратического регулятора на бесконечном интервале времени для асимптотически автономной системы. Также изучен вопрос о качестве инвариантной стратегии управления.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение Риккати, чувствительность решений, стохастический линейный регулятор, оптимальность

DOI: 10.31857/S0374064124120047, EDN: IPHTNI

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Статья посвящена исследованию чувствительности решений уравнений Риккати к малым изменениям матриц коэффициентов. Отметим, что анализ чувствительности характеристик уравнений относительно колебаний параметров относится к числу важных вопросов, возникающих при изучении динамических систем и систем управления. Рассмотрим алгебраическое уравнение Риккати

$$A'\bar{\Pi} + \bar{\Pi}A - \bar{\Pi}BR^{-1}B'\bar{\Pi} + Q = O, \quad (1)$$

где (и далее) $A, B, Q \geq O$, $R > O$ — постоянные матрицы, Q и R — симметричные матрицы, O — нулевая матрица; $'$ — знак транспонирования; запись $M \geq M_1$ ($M > M_1$) для симметричных матриц M и M_1 означает, что разность $M - M_1$ неотрицательно (положительно) определена; при этом матрицы A, Q и O имеют размерность $n \times n$, $B - n \times k$, $R - k \times k$; $\bar{\Pi}$ — неизвестная $n \times n$ -матрица. Необходимо также подчеркнуть, что уравнение вида (1) возникает при анализе задач оптимального управления на бесконечном интервале времени для линейных систем с квадратичным целевым функционалом, когда закон управления включает $\bar{\Pi}$: $U^* = -R^{-1}B'\bar{\Pi}X^*$, здесь U^* — оптимальный инвариантный закон управления, X^* — текущее состояние системы. Точнее, требуется нахождение решений (1), обладающих свойством $\bar{\Pi} \geq O$ (см., например, [1, п. 3.4.2]). Хорошо известно [1, гл. 3; 2, гл. 4], что достаточные условия существования $\bar{\Pi} \geq O$ могут быть выражены в терминах стабилизируемости и выявляемости пар матриц, входящих в (1). Сформулируем соответствующее утверждение.

Предположение 1. Пара матриц (A, B) экспоненциально стабилизируема, пара матриц (A, C) экспоненциально выявляема, где C — некоторая матрица, для которой $CC' = Q$.

В общем случае для непрерывных и ограниченных при $t \geq 0$ матриц с зависящими от времени t элементами экспоненциальная стабилизируемость пары (A_t, B_t) означает существование ограниченной матрицы K_t с непрерывными элементами, при которой матрица $A_t + B_t K_t$ является экспоненциально устойчивой, пара (A_t, C_t) — экспоненциально выявляемой, если (A'_t, C'_t) экспоненциально стабилизируема (см. [2, п. 3.1]).

Определение 1 [1, гл. 1]. Матрица \mathcal{A}_t экспоненциально устойчива, если соответствующая ей фундаментальная матрица $\Phi(t, s)$ допускает при некоторых константах $\kappa_0, \kappa > 0$ оценку вида $\|\Phi(t, s)\| \leq \kappa_0 e^{-\kappa(t-s)}$, $s \leq t$. При этом константа κ называется *темпом устойчивости матрицы \mathcal{A}_t* .

Напомним, что фундаментальная матрица $\Phi(t, s)$ определяется как решение задачи

$$\frac{\partial \Phi(t, s)}{\partial t} = \mathcal{A}_t \Phi(t, s), \quad \frac{\partial \Phi(t, s)}{\partial s} = -\Phi(t, s) \mathcal{A}_s, \quad \Phi(t, t) = \Phi(s, s) = I,$$

где I — единичная матрица.

Далее введём в рассмотрение дифференциальное уравнение Риккати, соответствующее случаю возмущения коэффициентов (1) при помощи непрерывных и ограниченных матриц ΔA_t , ΔB_t , ΔQ_t и ΔR_t :

$$\dot{\Pi}_t + (A + \Delta A_t)' \Pi_t + \Pi_t (A + \Delta A_t) - \Pi_t (B + \Delta B_t) (R + \Delta R_t)^{-1} (B + \Delta B_t)' \Pi_t + (Q + \Delta Q_t) = O, \quad (2)$$

где точка обозначает производную функции по времени.

В книге [3, гл. 13] вопросы чувствительности решений алгебраических уравнений Риккати обсуждались для случая постоянных возмущающих матриц, в [4] при зависимых от времени коэффициентах анализ проводился на конечных временных интервалах и соответствующие верхние оценки разности решений выражались в терминах констант, ограничивающих матрицы. В работе [5] рассматривался скалярный частный случай уравнения (2) при возмущении коэффициента A переменной функцией для анализа систем управления, включающих дисконтирование. Получена оценка разности решений дифференциального и алгебраического уравнений Риккати при стремлении параметра времени к бесконечности, имеющая вид функционала от темпа изменения дисконтирующей функции, называемого *ставкой дисконтирования*.

В данной статье рассмотрена ситуация асимптотически малого (при $t \rightarrow \infty$) возмущения коэффициентов. Здесь отметим связь уравнений Риккати и линейных систем управления и наблюдения. В частности, указанная выше специфика матриц возмущений может возникать в результате процедуры линеаризации для систем [6, 7], а также быть следствием различных модельных предположений (см. [8, 9]).

Предположение 2. Матрицы ΔA_t , ΔB_t , ΔR_t , ΔQ_t являются ограниченными и непрерывными ($t \geq 0$), матрицы ΔR_t , ΔQ_t симметричные и $R + \Delta R_t > \rho I$, $Q + \Delta Q_t \geq O$, $t \geq 0$ ($\rho > 0$ — некоторая константа, I — единичная матрица). При этом выполняются условия

$$\|\Delta A_t\| + \|\Delta B_t\| + \|\Delta R_t\| + \|\Delta Q_t\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

где $\|\cdot\|$ — матричная евклидова норма, и существует конечный момент времени $t_0 \geq 0$ такой, что для любого $t \geq t_0$

$$\int_t^\infty (\|\Delta A_s\| + \|\Delta B_s\| + \|\Delta R_s\| + \|\Delta Q_s\|) ds > 0. \quad (3)$$

Стоит отметить, что согласно условию (3) из дальнейшего рассмотрения исключается тривиальная ситуация $\|\Delta A_t\| \equiv \|\Delta B_t\| \equiv \|\Delta R_t\| \equiv \|\Delta Q_t\| \equiv 0$, $t \geq t_0$. В связи с последующими приложениями к теории оптимального управления рассматриваются только решения уравнений (1) и (2), обладающие стабилизирующими свойствами и являющиеся при этом ограниченными неотрицательно определёнными матрицами. Точнее, сформулируем следующее определение интересующих классов $\bar{\mathcal{P}}$ и \mathcal{P} решений (1), (2).

Определение 2. Матрица $\bar{\Pi} \in \bar{\mathcal{P}}$, если $\bar{\Pi}$ является решением (1), $\bar{\Pi} \geq O$ и при этом матрица $A - BR^{-1}B'\bar{\Pi}$ является экспоненциально устойчивой. Матрица $\Pi_t \in \mathcal{P}$, если Π_t является непрерывным ограниченным решением (2), $\Pi_t \geq O$, $t \geq 0$, и при этом матрица $A_t = A + \Delta A_t - (B + \Delta B_t)(R + \Delta R_t)^{-1}(B + \Delta B_t)'\Pi_t$ экспоненциально устойчива.

Существование решения $\Pi_t \geq O$ уравнения (2) устанавливается в п. 2 с учётом условий предположений 1 и 2, а также известной теоремы о существовании и единственности [2, теорема 17]. Целью работы является получение верхней оценки для разности $\|\Pi_t - \bar{\Pi}\|$ при $t \rightarrow \infty$ как функции от $\|\Delta A_t\|$, $\|\Delta B_t\|$, $\|\Delta R_t\|$, $\|\Delta Q_t\|$ и её последующем использовании для оценки качества инвариантной стратегии управления U^* для стохастического линейно-квадратического регулятора.

Статья организована следующим образом. В п. 2 формулируется основной результат о виде оценки $\|\Pi_t - \bar{\Pi}\|$, $t \rightarrow \infty$; в п. 3 анализируется задача стохастического линейно-квадратического регулятора на бесконечном интервале времени, при этом в п. 3.1 содержится ряд вспомогательных утверждений о поведении функционалов от решений линейных стохастических дифференциальных уравнений (СДУ), а в п. 3.2 приводится доказательство результата об оптимальном управлении и оценке качества инвариантной стратегии.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При сделанных в п. 1 предположениях относительно коэффициентов существует матрица $\Pi_t \in \mathcal{P}$, удовлетворяющая уравнению (2).

Теорема 1 [2, теорема 17]. *Если пара непрерывных ограниченных матриц (A_t, B_t) стабилизируема, пара (A_t, C_t) выявляема, матрица $R_t \geq \rho I$ при некотором $\rho > 0$, $t \geq 0$, то дифференциальное уравнение Риккати*

$$\dot{\Pi}_t + A'_t\Pi_t + \Pi_t A_t - \Pi_t B_t R_t^{-1} B'_t \Pi_t + C_t C'_t = O$$

имеет единственное решение Π_t со свойствами: $\Pi_t \geq O$; Π_t непрерывно и ограничено, $t \geq 0$; матрица $A_t - B_t R_t^{-1} B'_t \Pi_t$ экспоненциально устойчива.

Аналогичная теорема о существовании и единственности $\bar{\Pi} \in \bar{\mathcal{P}}$ для алгебраического уравнения Риккати приведена в [1, теорема 3.7]. Таким образом, согласно теореме 1, достаточно установить стабилизируемость пары $(A + \Delta A_t, B + \Delta B_t)$ и выявляемость пары $(A + \Delta A_t, C_t)$, где C_t — некоторая матрица, для которой $C_t C'_t = Q_t + \Delta Q_t$.

Утверждение следующей леммы касается сохранения базовых свойств матриц систем при асимптотически малых возмущениях параметров.

Лемма 1. *Пусть выполнены предположения 1 и 2. Тогда пара матриц $(A + \Delta A_t, B + \Delta B_t)$ экспоненциально стабилизируема, пара матриц $(A + \Delta A_t, C_t)$ экспоненциально выявляема, где C_t — некоторая матрица, для которой $C_t C'_t = Q + \Delta Q_t$.*

Доказательство. По определению стабилизируемости для пары (A, B) существует ограниченная матрица K_t , при которой матрица $A + BK_t$ является экспоненциально устойчивой. Используем матрицу K_t для проверки свойства стабилизируемости пары $(A + \Delta A_t, B + \Delta B_t)$. Рассмотрим матрицу $A_t = A + \Delta A_t + (B + \Delta B_t)K_t = A + BK_t + D_t$, где $D_t = \Delta A_t + \Delta B_t K_t$ и по условию $\|D_t\| \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. Тогда (см., например, [10, теорема 4.4.6]) матрица A_t также обладает свойством экспоненциальной устойчивости с темпом $\kappa - \epsilon$ при сколь угодно малом $\epsilon > 0$,

а для случая $\int_0^\infty (\|A_t\| + \|B_t\|) dt < \infty$ можно положить $\epsilon = 0$ (см. [11, гл. 5]). Следовательно, пара матриц $(A + \Delta A_t, B + \Delta B_t)$ будет являться экспоненциально стабилизируемой.

Перейдём к анализу свойства выявляемости, т.е. экспоненциальной стабилизируемости пары (A'_t, C'_t) при $C_t C'_t = Q + \Delta Q_t$, где $A_t = A + \Delta A_t$. По предположению (A', C') стабилизируема, откуда следует, что алгебраическое уравнение Риккати $A \hat{\Pi} + \hat{\Pi} A' - \bar{\Pi} C' C \hat{\Pi} + I = O$ имеет решение $\hat{\Pi} > O$, при этом матрица $A' - C' C \hat{\Pi}$ экспоненциально устойчива, $CC' = Q$ (см. [1, теорема 3.7]). Положим $K_t = -C_t \hat{\Pi}$, $A'_t = A' + \Delta A'_t + C'_t K_t$ и запишем $\mathcal{A}'_t = A' + \Delta A'_t - C'_t C_t \hat{\Pi} = A' - C' C \hat{\Pi} + \Delta A'_t - \Delta Q_t \bar{\Pi} = A' - C' C \hat{\Pi} + \hat{D}'_t$, где $\hat{D}_t = \Delta A_t - \bar{\Pi} \Delta Q_t$ и $\|\hat{D}_t\| \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. Тогда \mathcal{A}'_t будет экспоненциально устойчивой матрицей и пара (A'_t, C'_t) — экспоненциально стабилизируемой, а значит, $(A + \Delta A_t, C_t)$ — выявляемой. Лемма доказана.

Основной результат о чувствительности решений уравнений Риккати к асимптотически малым возмущениям параметров сформулирован в следующей теореме.

Теорема 2. Пусть выполнены предположения 1, 2 и матрицы $\bar{\Pi} \in \bar{\mathcal{P}}$, $\Pi_t \in \mathcal{P}$ удовлетворяют уравнениям (1) и (2). Тогда справедливо соотношение

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \{\|\Pi_t - \bar{\Pi}\|/p_t\} < \infty, \quad p_t \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

и функция p_t имеет вид

$$p_t = \int_t^\infty e^{-2\kappa(1-\mu)(s-t)} (\|\Delta A_s\| + \|\Delta B_s\| + \|\Delta R_s\| + \|\Delta Q_s\|) ds, \quad (4)$$

где $\kappa > 0$ — темп устойчивости матрицы $A - BR^{-1}B'\bar{\Pi}$, $\mu > 0$ — сколь угодно малое число; в случае $\int_0^\infty (\|\Delta A_t\| + \|\Delta B_t\| + \|\Delta R_t\| + \|\Delta Q_t\|) dt < \infty$ можно положить $\mu = 0$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $D_t = \Pi_t - \bar{\Pi}$ и найдём из (1), (2) уравнение динамики

$$\dot{D}_t + \mathcal{A}'_t D_t + D_t \tilde{\mathcal{A}}_t + \mathcal{B}_t + \mathcal{Q}_t + \mathcal{R}_t = O, \quad (5)$$

где $\mathcal{A}_t = A_t - BR_t^{-1}B'\bar{\Pi}$, $\tilde{\mathcal{A}}_t = A_t - BR_t^{-1}B'\Pi_t$, $\mathcal{Q}_t = \Delta Q_t + \Delta A'_t \bar{\Pi} + \bar{\Pi} \Delta A_t$, $R_t = R + \Delta R_t$, $\mathcal{B}_t = \Pi_t B R_t^{-1} \Delta B'_t \Pi_t + \Pi_t \Delta B_t R_t^{-1} B' \Pi_t + \Pi_t \Delta B_t R_t^{-1} \Delta B'_t \Pi_t$, $\mathcal{R}_t = \bar{\Pi} B (R^{-1} - (R + \Delta R_t)^{-1}) B' \bar{\Pi}$. Замечаем, что $\|\mathcal{Q}_t\| \leq c(\|\Delta A_t\| + \|\Delta Q_t\|)$, $\|\mathcal{R}_t\| \leq \tilde{c}((R + \Delta R_t)^{-1}) \|\Delta R_t\|$. Здесь и далее через c , \tilde{c} обозначены некоторые положительные константы, конкретное значение которых несущественно и может меняться от формулы к формуле. Из предположений $R > O$, $R + \Delta R_t > \rho I$ и $\Delta R_t \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, также следует ограниченность $\|(R + \Delta R_t)^{-1}\|$, $t \geq 0$. Тогда

$$\|\mathcal{B}_t\| + \|\mathcal{Q}_t\| + \|\mathcal{R}_t\| \leq c(\|\Delta A_t\| + \|\Delta B_t\| + \|\Delta Q_t\| + \|\Delta R_t\|). \quad (6)$$

Уравнение (5) — линейное матричное дифференциальное уравнение Сильвестра. Для существования его решения на бесконечном интервале времени требуется проверить устойчивость матриц \mathcal{A}_t , $\tilde{\mathcal{A}}_t$. Для них можно выписать представления $\mathcal{A}_t = A - BR^{-1}B'\bar{\Pi} + \Delta \mathcal{A}_t$, $\tilde{\mathcal{A}}_t = A_t - B_t R_t^{-1} B'_t \Pi_t + \Delta \tilde{\mathcal{A}}_t$, где $\Delta \mathcal{A}_t = \Delta A_t + B(R^{-1} - (R + \Delta R_t)^{-1})B'\bar{\Pi}$, $\Delta \tilde{\mathcal{A}}_t = B R_t^{-1} \Delta B'_t \Pi_t + \Delta B_t R_t^{-1} B' \Pi_t + \Delta B_t R_t^{-1} \Delta B'_t \Pi_t$. При этом $A - BR^{-1}B'\bar{\Pi}$ и $A_t - B_t R_t^{-1} B'_t \Pi_t$ являются экспоненциально устойчивыми матрицами с темпами κ , $\tilde{\kappa}$. Наряду с этим $\Delta \mathcal{A}_t \rightarrow 0$, $\Delta \tilde{\mathcal{A}}_t \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, вследствие выписанного выше представления и предположения 2. Тогда и \mathcal{A}_t , и $\tilde{\mathcal{A}}_t$ будут обладать свойством экспоненциальной устойчивости с темпами $\kappa - \epsilon$, $\tilde{\kappa} - \epsilon$, где $\epsilon > 0$ — сколь угодно малое число. Поэтому решение уравнения (5) записывается в виде

$$D_t = D_t^{(0)} = \int_t^\infty \Phi'(s, t) [\mathcal{B}_s + \mathcal{Q}_s + \mathcal{R}_s] \tilde{\Phi}(s, t) ds, \quad (7)$$

где $\Phi(t, s)$ и $\tilde{\Phi}(t, s)$ — фундаментальные матрицы для \mathcal{A}_t и $\tilde{\mathcal{A}}_t$ соответственно. Покажем, что $D_t = D_t^{(0)}$ вида (7) действительно удовлетворяет уравнению (5). Во-первых, отметим, что несобственные интегралы в (7) существуют в силу экспоненциальной устойчивости \mathcal{A}_t , $\tilde{\mathcal{A}}_t$, оценки (6) и предположения 2. Таким образом, (7) задаёт ограниченную матрицу. Перепишем (7) как $D_t^{(0)} = \Phi'(0, t)\eta_\infty\tilde{\Phi}(0, t) - \Phi'(0, t)\eta_t\tilde{\Phi}(0, t)$, где $\eta_t = \int_0^t \Phi'(s, 0)[\mathcal{B}_s + \mathcal{Q}_s + \mathcal{R}_s]\tilde{\Phi}(s, 0) ds$. Дифференцируя и используя определение фундаментальной матрицы, получаем, что $\dot{D}_t^{(0)} = -\mathcal{A}'_t\Phi'(0, t)\eta_\infty\tilde{\Phi}(0, t) - \Phi'(0, t)\eta_\infty\tilde{\Phi}(0, t)\tilde{\mathcal{A}}_t - \mathcal{A}'_t\Phi'(0, t)\eta_t\tilde{\Phi}(0, t) - [\mathcal{B}_t + \mathcal{Q}_t + \mathcal{R}_t] - \Phi'(0, t)\eta_t\tilde{\Phi}(0, t)\tilde{\mathcal{A}}_t = -\mathcal{A}'_t D_t^{(0)} - D_t^{(0)}\tilde{\mathcal{A}}_t - [\mathcal{B}_t + \mathcal{Q}_t + \mathcal{R}_t]$, т.е. приходим к (5).

Осталось установить, что матрица $D_t = \Pi_t - \bar{\Pi}$, удовлетворяющая (5), и решение $D_t = D_t^{(0)}$ вида (7) совпадают. Исходя из (5), дифференциальное уравнение для разности $\Delta D_t = (\Pi_t - \bar{\Pi}) - D_t^{(0)}$ является при $t \geq 0$ матричным дифференциальным линейным однородным уравнением

$$\Delta \dot{D}_t + \mathcal{A}'_t \Delta D_t + \Delta D_t \tilde{\mathcal{A}}_t = O,$$

имеющим единственное ограниченное решение при краевом условии $\Delta D_T = (\Pi_T - \bar{\Pi}) - D_T^{(0)}$. Точнее, $\Delta D_t = \Phi'(T, t)[(\Pi_T - \bar{\Pi}) - D_T^{(0)}]\tilde{\Phi}(T, t)$, где $\Phi(t, s)$, $\tilde{\Phi}(t, s)$ — фундаментальные матрицы, соответствующие экспоненциально устойчивым матрицам \mathcal{A}_t , $\tilde{\mathcal{A}}_t$, $0 \leq s \leq t$. Тогда с учётом этих свойств, а также ограниченности матриц $\Pi_t - \bar{\Pi}$, $D_t^{(0)}$, $t \geq 0$, будем иметь оценку $\|\Delta D_t\| \leq \hat{c}e^{-\alpha(T-t)}$, где $\hat{c}, \alpha > 0$ — некоторые константы, не зависящие от T . Переходя к пределу при $T \rightarrow \infty$, приходим к соотношению $\|\Delta D_t\| = 0$, $t \geq 0$. Следовательно, $\Pi_t - \bar{\Pi} = D_t^{(0)}$ является единственным ограниченным решением D_t уравнения (5). Далее (7) оценивается как

$$\|D_t\| \leq \tilde{c} \int_t^\infty e^{-(\kappa+\tilde{\kappa})(1-\epsilon)(s-t)} (\|\Delta A_s\| + \|\Delta B_s\| + \|\Delta Q_s\| + \|\Delta R_s\|) ds. \quad (8)$$

Правая часть неравенства (8) в силу предположения 2 и оценки (6) асимптотически стремится к нулю. Следовательно, $\|D_t\| \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. Воспользуемся этим свойством для уточнения темпа устойчивости матрицы $\tilde{\mathcal{A}}_t$. Представление для $\tilde{\mathcal{A}}_t$ принимает вид $\tilde{\mathcal{A}}_t = A - BR^{-1}B'\bar{\Pi} + \Delta_1\tilde{\mathcal{A}}_t$, где $\Delta_1\tilde{\mathcal{A}}_t = \Delta A_t + BR_t^{-1}B'D_t + B(R^{-1} - (R + \Delta R_t)^{-1})B'\Pi_t$, и также $\Delta_1\tilde{\mathcal{A}}_t \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. Тогда темп устойчивости матрицы $\tilde{\mathcal{A}}_t$ будет равен $\kappa - \epsilon$. С учётом этого, возвращаясь к оценке для (7), приходим к (4). Как отмечалось ранее, полагаем $\epsilon = 0$, если $\int_0^\infty (\|\Delta A_t\| + \|\Delta_1\tilde{\mathcal{A}}_t\|) dt < \infty$, что имеет место при выполнении условия $\int_0^\infty (\|\Delta A_t\| + \|\Delta B_t\| + \|\Delta R_t\| + \|\Delta Q_t\|) dt < \infty$. Кроме того, замечаем, что условие (3) также позволяет сделать вывод, что $p_t > 0$, $t \geq t_0$, и тогда получаем утверждение теоремы.

3. АНАЛИЗ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Как отмечалось в п. 1, уравнения Риккати (1) и (2) возникают при рассмотрении задач стохастического линейно-квадратического регулятора на бесконечном интервале времени.

Пусть все вводимые далее случайные процессы заданы на полном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$. Сначала описывается система управления с постоянными матрицами — так называемая *автономная система*. Состояние системы определяет n -мерный управляемый случайный процесс X_t , $t \geq 0$, динамика которого удовлетворяет уравнению

$$dX_t = AX_t dt + BU_t dt + GdW_t, \quad X_0 = x, \quad (9)$$

где x — неслучайное начальное состояние (n -мерный вектор); W_t , $t \geq 0$, — d -мерный стандартный винеровский процесс; U_t , $t \geq 0$, — допустимое управление или k -мерный случайный процесс, согласованный с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s, s \leq t\}$, $E \int_0^t \|U_s\|^2 ds < \infty$, $t \geq 0$ ($\sigma(\cdot)$ — знак σ -алгебры, $E(\cdot)$ означает математическое ожидание); $G \neq O$ — матрица диффузии. Множество допустимых управлений обозначим через \mathcal{U} . Интегральный квадратичный целевой функционал имеет вид

$$J_T(U) = \int_0^T (X'_t Q X_t + U'_t R U_t) dt, \quad (10)$$

где $U \in \mathcal{U}$ — допустимое управление на $[0, T]$. Тогда, если выполнено предположение 1 (см. [1, гл. 3]), существует закон управления

$$U_t^* = -R^{-1}B'\bar{\Pi}X_t^*, \quad (11)$$

где $\bar{\Pi} \in \bar{\mathcal{P}}$ является решением алгебраического уравнения Риккати (1), процесс X_t^* , $t \geq 0$, удовлетворяет линейному СДУ вида

$$dX_t^* = (A - BR^{-1}B'\bar{\Pi})X_t^* dt + G dW_t, \quad X_0^* = x. \quad (12)$$

Управление U_t^* является инвариантным законом (так как в явном виде не зависит от параметра времени t) и обладает свойством оптимальности на бесконечном интервале времени (см., например, [12]). Точнее, U^* является решением двух задач:

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{EJ_T(U)}{T} \rightarrow \inf_{U \in \mathcal{U}} \quad \text{и} \quad \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{J_T(U)}{T} \rightarrow \inf_{U \in \mathcal{U}} \quad \text{с вероятностью 1.} \quad (13)$$

Критерии оптимальности в (13) называются *долговременными средними*. Также стоит отметить (см., например, [12]), что

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{EJ_T(U^*)}{T} = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{J_T(U^*)}{T} = \text{tr}(G'\bar{\Pi}G) \quad \text{с вероятностью 1,}$$

где $\text{tr}(\cdot)$ — обозначение следа матрицы. Возникновение матричного дифференциального уравнения (2) связано с анализом системы управления, получаемой из (9), (10) путём возмущения матриц коэффициентов:

$$d\tilde{X}_t = (A + \Delta A_t)\tilde{X}_t dt + (B + \Delta B_t)\tilde{U}_t dt + \tilde{G}_t dW_t, \quad \tilde{X}_0 = \tilde{x}, \quad (14)$$

где \tilde{x} — неслучайный вектор; матрица диффузии $\tilde{G}_t = G + \Delta G_t$, ΔG_t — ограниченная матрица с кусочно-непрерывными элементами; допустимое управление \tilde{U}_t определяется по аналогии с проделанным для (9). При этом целевой функционал имеет вид

$$\tilde{J}_T(\tilde{U}) = \int_0^T [\tilde{X}'_t (Q + \Delta Q_t) \tilde{X}_t + \tilde{U}'_t (R + \Delta R_t) \tilde{U}_t] dt. \quad (15)$$

Тогда из результатов леммы 1 и [12] следует, что существует закон управления

$$\tilde{U}_t^* = -(R + \Delta R_t)^{-1} (B + \Delta B_t)' \Pi_t \tilde{X}_t^*, \quad (16)$$

где $\Pi_t \in \mathcal{P}$ удовлетворяет уравнению Риккати (2), процесс \tilde{X}_t^* , $t \geq 0$, задаётся линейным СДУ

$$d\tilde{X}_t^* = (A + \Delta A_t - (B + \Delta B_t)(R + \Delta R_t)^{-1}(B + \Delta B_t)'\Pi_t)\tilde{X}_t^* dt + \tilde{G}_t dW_t, \quad \tilde{X}_0^* = \tilde{x}. \quad (17)$$

При этом, как показано в [12], управление \tilde{U}_t^* оптимально в смысле решения задач

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{E\tilde{J}_T(\tilde{U}^*)}{\int_0^T \|\tilde{G}_t\|^2 dt} \rightarrow \inf_{\tilde{U} \in \mathcal{U}} \quad \text{и} \quad \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\tilde{J}_T(\tilde{U}^*)}{\int_0^T \|\tilde{G}_t\|^2 dt} \rightarrow \inf_{\tilde{U} \in \mathcal{U}} \quad \text{с вероятностью 1}, \quad (18)$$

и значения соответствующих критериев при этом равны

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{E\tilde{J}_T(\tilde{U})}{\int_0^T \|\tilde{G}_t\|^2 dt} = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\tilde{J}_T(\tilde{U})}{\int_0^T \|\tilde{G}_t\|^2 dt} = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_0^T \text{tr}(\tilde{G}'_t \Pi_t \tilde{G}_t) dt}{\int_0^T \|\tilde{G}_t\|^2 dt} \quad \text{с вероятностью 1}. \quad (19)$$

Введём в рассмотрение инвариантный закон управления вида (11), соответствующий системе управления (14), (15):

$$\bar{U}_t^* = -R^{-1}B'\bar{\Pi}\bar{X}_t^*, \quad (20)$$

$$d\bar{X}_t^* = (A + \Delta A_t - (B + \Delta B_t)R^{-1}B'\bar{\Pi})\bar{X}_t^* dt + \tilde{G}_t dW_t, \quad \bar{X}_0^* = \tilde{x}. \quad (21)$$

Очевидно, что реализация (20) проще, чем (16), так как включает нахождение решения алгебраического уравнения Риккати вместо дифференциального. Ниже будет показано, что при условии $\Delta G_t \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, и ранее введённых предположениях 1 и 2, управление \bar{U}^* даёт такой же результат, как и \tilde{U}^* при $T \rightarrow \infty$. Для конечного T будет найдена оценка качества управления \bar{U}^* по сравнению с применением \tilde{U}^* с точки зрения ожидаемых значений функционалов, а также в потраекторном смысле (с вероятностью 1). Следует отметить, что при этом потребуется привлечение результатов п. 1 и доказательств ряда вспомогательных утверждений, касающихся поведения разности интегральных квадратичных функционалов от решений линейных СДУ. Ранее в [13] был рассмотрен случай (14), (15) в предположении $\int_0^\infty (\|\Delta A_t\| + \|\Delta B_t\| + \|\Delta Q_t\| + \|\Delta R_t\|) dt < \infty$, $\Delta G_t \equiv O$, и была показана оптимальность управления вида (20) по критерию из (13), связанному с минимизацией ожидаемых значений. Очевидно, что указанное выше условие абсолютной интегрируемости на бесконечности матриц возмущений является весьма ограничительным, хотя и распространённым для прикладных моделей (см. [7, 8]). Вместе с тем может иметь место гораздо более медленное убывание отклонения ΔA_t матрицы при состоянии с ростом времени, например, для классов систем с “почти постоянными матрицами” из [14] или при изучении систем, получаемых при алгоритмической оптимизации [15]. Также важно учесть и возможные “погрешности” в поведении матрицы диффузии (см. [16]) для непостоянной матрицы \tilde{G}_t , но имеющей предел G при $t \rightarrow \infty$.

3.1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим n -мерные процессы Z_t и \tilde{Z}_t , $t \geq 0$, удовлетворяющие линейным СДУ с переменными коэффициентами

$$dZ_t = \mathcal{A}_t Z_t dt + \mathcal{G}_t dW_t, \quad Z_0 = z, \quad (22)$$

$$d\tilde{Z}_t = \tilde{\mathcal{A}}_t \tilde{Z}_t dt + \tilde{\mathcal{G}}_t dW_t, \quad \tilde{Z}_0 = \tilde{z}, \quad (23)$$

где z, \tilde{z} — n -мерные неслучайные векторы; $\mathcal{A}_t, \tilde{\mathcal{A}}_t$ — ограниченные экспоненциально устойчивые $n \times n$ -матрицы; матрицы $\mathcal{G}_t, \tilde{\mathcal{G}}_t$ имеют размерность $n \times d$ и ограничены, $t \geq 0$, как и ранее W_t — стандартный d -мерный винеровский процесс. Интегральные функционалы имеют вид

$$\mathcal{J}_T = \int_0^T Z'_t \mathcal{M}_t Z_t dt, \quad \tilde{\mathcal{J}}_T = \int_0^T \tilde{Z}'_t \tilde{\mathcal{M}}_t \tilde{Z}_t dt, \quad (24)$$

где $\mathcal{M}_t, \tilde{\mathcal{M}}_t \geq O$ — ограниченные симметричные матрицы порядка $n \times n$, $t \geq 0$. Тогда (см. [17]) для (24) справедливы представления

$$\mathcal{J}_T = z' P_0 z - Z'_T P_T Z_T + \int_0^T \text{tr}(\mathcal{G}'_t P_t \mathcal{G}_t) dt + 2 \int_0^T Z'_T P_t \mathcal{G}_t dW_t, \quad (25)$$

$$\tilde{\mathcal{J}}_T = \tilde{z}' \tilde{P}_0 \tilde{z} - \tilde{Z}'_T \tilde{P}_T \tilde{Z}_T + \int_0^T \text{tr}(\tilde{\mathcal{G}}'_t \tilde{P}_t \tilde{\mathcal{G}}_t) dt + 2 \int_0^T \tilde{Z}'_T \tilde{P}_t \tilde{\mathcal{G}}_t dW_t, \quad (26)$$

где $P_t, \tilde{P}_t \geq O$ — ограниченные симметричные $n \times n$ -матрицы, являющиеся решениями уравнений Ляпунова

$$\dot{P}_t + \mathcal{A}'_t P_t + P_t \mathcal{A}_t + \mathcal{M}_t = O, \quad (27)$$

$$\dot{\tilde{P}}_t + \tilde{\mathcal{A}}'_t \tilde{P}_t + \tilde{P}_t \tilde{\mathcal{A}}_t + \tilde{\mathcal{M}}_t = O. \quad (28)$$

Далее нас интересует оценка разности между \mathcal{J}_T и $\tilde{\mathcal{J}}_T$ в терминах функционала от матриц коэффициентов (22)–(24). Здесь также рассматривается нетривиальный случай разности коэффициентов (27) и (28), т.е. предполагается, что

$$\int_t^\infty (\|\mathcal{A}_s - \tilde{\mathcal{A}}_s\| + \|\mathcal{M}_s - \tilde{\mathcal{M}}_s\|) ds > 0 \quad \text{для любого } t > t_0. \quad (29)$$

Лемма 2. Для матриц $P_t, \tilde{P}_t \geq O$, удовлетворяющих (27) и (28) при условии (29), справедливо соотношение

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \{\|P_t - \tilde{P}_t\|/\bar{p}_t\} < \infty, \quad (30)$$

а функция \bar{p}_t имеет вид

$$\bar{p}_t = \int_t^\infty e^{-(\kappa + \tilde{\kappa})(s-t)} (\|\mathcal{A}_s - \tilde{\mathcal{A}}_s\| + \|\mathcal{M}_s - \tilde{\mathcal{M}}_s\|) ds, \quad (31)$$

где $\kappa > 0$ и $\tilde{\kappa} > 0$ — темпы устойчивости матриц \mathcal{A}_t и $\tilde{\mathcal{A}}_t$ соответственно.

Доказательство. В силу наложенных условий на матрицы коэффициентов уравнения (27) и (28) имеют ограниченные решения вида

$$P_t = \int_t^\infty \Phi'(s, t) \mathcal{M}_s \Phi(s, t) ds \quad \text{и} \quad \tilde{P}_t = \int_t^\infty \tilde{\Phi}'(s, t) \tilde{\mathcal{M}}_s \tilde{\Phi}(s, t) ds$$

с фундаментальными матрицами $\Phi(t, s)$ и $\tilde{\Phi}(t, s)$, определёнными для матриц \mathcal{A}_t и $\tilde{\mathcal{A}}_t$ соответственно.

Найдём уравнение динамики для $D_t = P_t - \tilde{P}_t$, которое является уравнением Сильвестра

$$\dot{D}_t + \mathcal{A}'_t D_t + D_t \tilde{\mathcal{A}}_t + (\mathcal{M}_t - \tilde{\mathcal{M}}_t) + P_t (\mathcal{A}_t - \tilde{\mathcal{A}}_t) + (\mathcal{A}'_t - \tilde{\mathcal{A}}'_t) \tilde{P}_t = O. \quad (32)$$

Уравнение (32) имеет единственное ограниченное решение (см. пояснения для (7)), представимое в виде

$$D_t = \int_t^\infty \Phi'(s, t) [(\mathcal{M}_s - \tilde{\mathcal{M}}_s) + P_s (\mathcal{A}_s - \tilde{\mathcal{A}}_s) + (\mathcal{A}'_s - \tilde{\mathcal{A}}'_s) \tilde{P}_s] \tilde{\Phi}(s, t) ds$$

и оцениваемое как

$$\|D_t\| \leq \bar{c} \int_t^\infty e^{-(\kappa+\tilde{\kappa})(s-t)} (\|\mathcal{A}_s - \tilde{\mathcal{A}}_s\| + \|\mathcal{M}_s - \tilde{\mathcal{M}}_s\|) ds,$$

при некоторой константе $\bar{c} > 0$, т.е. получаем, что справедливо соотношение (30) для функции \bar{p}_t из (31). Лемма доказана.

Теорема 3. Для функционалов (24) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\|\mathcal{J}_T - \tilde{\mathcal{J}}_T\|}{\int_0^T (\|\Delta \mathcal{A}_t\| + \|\Delta \mathcal{M}_t\| + \|\Delta \mathcal{G}_t\|) dt} &< \hat{c} < \infty; \\ n.h. \quad \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\|E \mathcal{J}_T - E \tilde{\mathcal{J}}_T\|}{\int_0^T (\|\Delta \mathcal{A}_t\| + \|\Delta \mathcal{M}_t\| + \|\Delta \mathcal{G}_t\|) dt} &< \infty, \end{aligned} \quad (33)$$

где $\Delta \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_t - \tilde{\mathcal{A}}_t$, $\Delta \mathcal{M}_t = \mathcal{M}_t - \tilde{\mathcal{M}}_t$, $\Delta \mathcal{G}_t = \mathcal{G}_t - \tilde{\mathcal{G}}_t$. При этом $\hat{c} > 0$ — некоторая константа при $\int_0^T (\|\Delta \mathcal{A}_t\| + \|\Delta \mathcal{M}_t\| + \|\Delta \mathcal{G}_t\|) dt \rightarrow \infty$, $T \rightarrow \infty$, и $\hat{c} > 0$ — п.н. конечная случайная величина, если $0 < \int_0^\infty (\|\Delta \mathcal{A}_t\| + \|\Delta \mathcal{M}_t\| + \|\Delta \mathcal{G}_t\|) dt < \infty$.

Здесь и далее п.н. — почти наверное, т.е. с вероятностью 1.

Доказательство. Воспользовавшись (25) и (26), можно записать представление для процесса разности $\Delta \mathcal{J}_T = \mathcal{J}_T - \tilde{\mathcal{J}}_T$ в виде

$$\Delta \mathcal{J}_T = S^{(0)} + S_T^{(1)} + S_T^{(2)} + S_T^{(3)}, \quad (34)$$

где

$$S^{(0)} = -z' \Delta P_0 z - 2z' \tilde{P}_0 \Delta z - \Delta z \tilde{P}_0 \Delta z,$$

$$S_T^{(1)} = - \int_0^T [\text{tr}(\mathcal{G}'_t \Delta P_t \mathcal{G}_t) + 2 \text{tr}(\mathcal{G}'_t \tilde{P}_t \Delta \mathcal{G}_t) + \text{tr}(\Delta \mathcal{G}'_t \tilde{P}_t \Delta \mathcal{G}_t)] dt,$$

$$S_T^{(2)} = 2 \int_0^T \Delta Z'_t P_t \mathcal{G}_t dW_t - 2 \int_0^T \tilde{Z}'_t P_t \Delta \mathcal{G}_t dW_t - 2 \int_0^T \tilde{Z}'_t \Delta P_t \mathcal{G}_t dW_t,$$

$$S_T^{(3)} = Z'_T \Delta P_T Z_T + 2Z'_T \tilde{P}_T \Delta Z_T + \Delta Z_T \tilde{P}_T \Delta Z_T$$

при $\Delta P_t = P_t - \tilde{P}_t$, $\Delta z = z - \tilde{z}$, $\Delta Z_t = Z_t - \tilde{Z}_t$.

Учитывая ограниченность матриц P_t , \tilde{P}_t , \mathcal{G}_t и $\tilde{\mathcal{G}}_t$, а также свойство $\int_0^T \|\Delta P_t\| dt \leq c \int_0^T (\|\Delta \mathcal{A}_t\| + \|\Delta \mathcal{M}_t\|) dt$ вследствие оценки (31), слагаемые $S^{(0)}$ и $S_T^{(1)}$ мажорируются

следующим образом: $\|S^{(0)}\| + \|S_T^{(1)}\| \leq \tilde{c} \int_0^T (\|\Delta \mathcal{A}_t\| + \|\Delta \mathcal{M}_t\| + \|\Delta \mathcal{G}_t\|) dt + \tilde{c} \|z\|^2 + \tilde{c} \|\Delta z\|^2$. Далее будет показано, что функция

$$\hat{\Gamma}_T = \int_0^T (\|\Delta \mathcal{A}_t\| + \|\Delta \mathcal{M}_t\| + \|\Delta \mathcal{G}_t\|) dt \quad (35)$$

также задаёт верхнюю оценку для стохастических слагаемых $S_T^{(2)}$ и $S_T^{(3)}$ в (34).

Слагаемое $S_T^{(2)}$ представляет собой стохастический интеграл Ито и известно [12], что п.н. $S_T^{(2)}/\Gamma_T \rightarrow \xi$, $T \rightarrow \infty$, если $E(S_T^{(2)})^2 \leq c\Gamma_T$, при этом случайная величина (с.в.) $\xi = 0$ при $\Gamma_T \rightarrow \infty$, $T \rightarrow \infty$, ξ — некоторая п.н. конечная с.в. для $\Gamma_\infty < \infty$. Здесь $\Gamma_T > 0$ — некоторая неубывающая детерминированная нормирующая функция.

Найдем $E(S_T^{(2)})^2 \leq c \int_0^T (E\|\Delta Z_t\|^2 dt + \|\Delta P_t\|^2 + \|\Delta \mathcal{G}_t\|^2) dt$. Из оценки (31) следует, что $\int_0^T \|\Delta P_t\|^2 dt \leq c \int_0^T (\|\Delta \mathcal{A}_t\|^2 + \|\Delta \mathcal{M}_t\|^2) dt$. Для определения $E\|\Delta Z_t\|^2$ сначала выписывается уравнение динамики ΔZ_t , $t \geq 0$, вида

$$d\Delta Z_t = \mathcal{A}_t \Delta Z_t dt + (\Delta \mathcal{A}_t) \tilde{Z}_t dt + \Delta \mathcal{G}_t dW_t, \quad \Delta Z_0 = \Delta z, \quad (36)$$

где \tilde{Z}_t , $t \geq 0$, задаётся в (23). Уравнение (36) — линейное неоднородное СДУ и его решение представимо в виде $\Delta Z_t = \hat{Z}_t + \bar{Z}_t$, где процессы \hat{Z}_t и \bar{Z}_t , $t \geq 0$, удовлетворяют уравнениям

$$d\hat{Z}_t = \mathcal{A}_t \hat{Z}_t dt + \Delta \mathcal{G}_t dW_t, \quad \hat{Z}_0 = 0, \quad (37)$$

$$d\bar{Z}_t = \mathcal{A}_t \bar{Z}_t dt + (\Delta \mathcal{A}_t) \tilde{Z}_t dt, \quad \bar{Z}_0 = \Delta z, \quad (38)$$

т.е. отдельно выделены процесс \hat{Z}_t , уравнение которого содержит только аддитивный шум (см. (37)), и процесс \bar{Z}_t с неоднородным слагаемым в динамике (см. (38)). Тогда для (37) (см., например, утверждение леммы в [18]) справедлива оценка $E\|\hat{Z}_t\|^2 \leq c \int_0^T e^{-2\kappa(t-s)} \|\Delta \mathcal{G}_s\|^2 ds$, где $\kappa > 0$ — темп устойчивости матрицы \mathcal{A}_t . Анализируя (38), запишем решение этого уравнения в виде $\bar{Z}_t = \Phi(t, 0)\Delta z + \int_0^t \Phi(t, s)(\Delta \mathcal{A}_s) \tilde{Z}_s ds$, где $\Phi(t, s)$ — фундаментальная матрица, соответствующая \mathcal{A}_t . Оценку для квадрата нормы решения получим с помощью неравенства Коши–Буняковского: $\|\bar{Z}_t\|^2 \leq c\eta_t$, где

$$\eta_t = e^{-2\kappa(1-\epsilon)t} \|\Delta z\|^2 + \int_0^t e^{-2\kappa(1-\epsilon)(t-s)} \|\Delta \mathcal{A}_s\|^2 \|\tilde{Z}_s\|^2 ds, \quad (39)$$

при этом $\epsilon > 0$ — сколь угодно малое число. Учитывая ограниченность $E\|\tilde{Z}_t\|^2$, $t \geq 0$, при взятии математического ожидания от обеих частей (39) (также см. [18]), приходим к оценке

$$E\|\bar{Z}_t\|^2 \leq \tilde{c} e^{-2(1-\epsilon)\kappa t} \|\Delta z\|^2 + \tilde{c} \int_0^t e^{-2\kappa(1-\epsilon)(t-s)} \|\Delta \mathcal{A}_s\|^2 ds.$$

Тогда $E(S_T^{(2)})^2 \leq c\Gamma_T$ при $\Gamma_T = \int_0^T (\|\Delta \mathcal{A}_t\|^2 + \|\Delta \mathcal{M}_t\|^2 + \|\Delta \mathcal{G}_t\|^2) dt$ и $\Gamma_T \leq \tilde{c}\hat{\Gamma}_T$, $T > 0$, для $\hat{\Gamma}_T$ из (35). При применении нормировки $\hat{\Gamma}_T$ из (35) получается, что п.н. $\|S_T^{(2)}\|/\hat{\Gamma}_T \rightarrow \hat{\xi}$. Также при этом $\hat{\xi} = 0$, если $\hat{\Gamma}_T \rightarrow \infty$, $T \rightarrow \infty$, $\hat{\xi}$ — некоторая п.н. конечная с.в., когда $\hat{\Gamma}_\infty < \infty$.

При анализе поведения $S_T^{(3)}$ из (34), $T \rightarrow \infty$, каждое из слагаемых, входящих в $S_T^{(3)}$, рассматривается отдельно и используется (36). Запишем $\|S_T^{(3)}\| \leq c\bar{p}_T \|Z_T\|^2 + c\|\Delta Z_T\|^2 + c\sqrt{\|Z'_T \Delta Z_T\|^2}$ и оценим

$$\|S_T^{(3)}\| \leq \tilde{c} p_T^{(0)} \|Z_T\|^2 + \tilde{c} \|\bar{Z}_T\|^2 + \tilde{c} \|\hat{Z}_T\|^2 + \tilde{c} \sqrt{\|Z_T\|^2 \eta_T} + \tilde{c} \sqrt{\|Z'_T \hat{Z}_T\|^2}, \quad (40)$$

где $p_t^{(0)}$ — функция, определяемая (31) с заменой $\kappa + \tilde{\kappa}$ на константу $2\bar{\kappa}$ такую, что выполняется неравенство $2\bar{\kappa} < \min\{2\kappa, \kappa + \tilde{\kappa}\}$, где κ и $\tilde{\kappa}$ — темпы устойчивости матриц \mathcal{A}_t и $\tilde{\mathcal{A}}_t$ в уравнениях (22) и (23). При этом процессы \bar{Z}_t , \hat{Z}_t и η_t , $t \geq 0$, задаются при помощи (37), (38) и (39) соответственно.

Сначала проанализируем $D_T^{(1)} = p_T^{(0)} \|Z_T\|^2$ из (40). С учётом (22), уравнения динамики $dp_t^{(0)} = 2\bar{\kappa}p_t^{(0)}dt - (\|\mathcal{A}_t\| + \|\mathcal{M}_t\|)dt$ и формулы Ито, интегральное представление для процесса разности $D_T^{(1)} - ED_T^{(1)}$ примет вид

$$D_T^{(1)} - ED_T^{(1)} = \|z\|^2 p_0^{(0)} + I_T^{(1)} + I_T^{(2)} + M_T^{(3)}, \quad (41)$$

где

$$\begin{aligned} I_T^{(1)} &= \int_0^T p_t^{(0)} [Z'_t(\mathcal{A}_t + \mathcal{A}'_t + 2\bar{\kappa}I)Z_t - E[Z'_t(\mathcal{A}_t + \mathcal{A}'_t + 2\bar{\kappa}I)Z_t]] dt, \\ I_T^{(2)} &= \int_0^T p_t^{(0)} (\|\mathcal{A}_t\| + \|\mathcal{M}_t\|) [\|Z_t\|^2 - E\|Z_t\|^2] dt \end{aligned}$$

— интегралы типа Римана, а

$$M_T^{(3)} = 2 \int_0^T p_t^{(0)} Z'_t \mathcal{G}_t dW_t$$

— стохастический интеграл Ито.

Оценив $E(I_T^{(1)})^2$, $E(I_T^{(2)})^2$ и $E(M_T^{(3)})^2$ при помощи монотонной функции $\Gamma_T > 0$, далее можно применить утверждения лемм 1–3 из [12] для получения сходимостей отношений $I_T^{(1)}/\Gamma_T$, $I_T^{(2)}/\Gamma_T$ и $M_T^{(1)}/\Gamma_T$ к случайным величинам п.н. при $T \rightarrow \infty$. В силу гауссовой распределенности процесса Z_t , $t \geq 0$, и определения функции $p_t^{(0)}$ можно записать $E(I_T^{(1)})^2 \leq \leq c \int_0^T p_t^{(0)} dt \leq \tilde{c} \int_0^T (\|\mathcal{A}_t\| + \|\mathcal{M}_t\|) dt = \Gamma_T$, $E(I_T^{(2)})^2 \leq c \Gamma_T$, а для интеграла $M_T^{(3)}$ имеет место оценка $E(M_T^{(3)})^2 \leq c \int_0^T (p_t^{(0)})^2 dt \leq c \int_0^T (\|\mathcal{A}_t\|^2 + \|\mathcal{M}_t\|^2) dt \leq \tilde{c} \Gamma_T$ при определённой выше функции Γ_T . Тогда $I_T^{(1)}/\Gamma_T \rightarrow \xi^{(1)}$, $I_T^{(2)}/\Gamma_T \rightarrow \xi^{(2)}$, $M_T^{(3)}/\Gamma_T \rightarrow \xi^{(3)}$, где $\xi^{(i)} = 0$, если $\Gamma_T \rightarrow \infty$, $T \rightarrow \infty$, или же $\xi^{(i)}$ — п.н. конечная с.в. при $\Gamma_\infty < \infty$, $i = \overline{1, 3}$. Таким образом, $\{D_T^{(1)} - ED_T^{(1)}\}/\Gamma_T \rightarrow \xi^{(0)}$, где $\xi^{(0)} = 0$ или $\xi^{(0)}$ — п.н. конечная с.в. Кроме того, функция $ED_T^{(1)}$ ограничена, $T \geq 0$. Точнее, по построению $ED_T^{(1)} \leq ce^{-2(\kappa-\bar{\kappa})T} p_0^{(0)} \|z\|^2 + c \int_0^T e^{-2(\kappa-\bar{\kappa})(T-s)} (p_s^{(0)} \|\mathcal{G}_s\|^2 + \|\Delta \mathcal{A}_s\| + \|\Delta \mathcal{M}_s\|) ds \leq \tilde{c} e^{-2(\kappa-\bar{\kappa})T} \|z\|^2 + \tilde{c} \int_0^T e^{-2(\kappa-\bar{\kappa})(T-s)} (\|\Delta \mathcal{A}_s\| + \|\Delta \mathcal{M}_s\|) ds$ и при этом $\kappa - \bar{\kappa} > 0$. Также при условии $\int_0^T (\|\Delta \mathcal{A}_s\| + \|\Delta \mathcal{M}_s\|) ds < \infty$ (см. утверждение леммы в [18]) справедливо $ED_T^{(1)} \rightarrow 0$, $T \rightarrow \infty$. Следовательно, $D_T^{(1)}/\Gamma_T \rightarrow 0$ п.н. для $\Gamma_T \rightarrow \infty$, $T \rightarrow \infty$. В случае $\Gamma_\infty < \infty$ будет наблюдаться сходимость $D_T^{(1)}/\Gamma_T \rightarrow \xi^{(0)}$ с вероятностью 1 к случайной величине $\xi^{(0)}$, а также сходимость $D_T^{(1)}/\Gamma_T \rightarrow 0$ в среднем порядка 1, и тогда (см. [19, гл. 3.5]) случайные величины совпадают с вероятностью 1, т.е. п.н. $\xi^{(0)} = 0$. Объединяя оба результата и используя нормировку $\hat{\Gamma}_T$, $\Gamma_T \leq c\hat{\Gamma}_T$ (см. (35)), заключаем, что $p_T^{(0)} \|Z_T\|^2 / \hat{\Gamma}_T \rightarrow 0$ п.н. и $E\{p_T^{(0)} \|Z_T\|^2 / \hat{\Gamma}_T\} \rightarrow 0$, $T \rightarrow \infty$.

Слагаемое $D_T^{(2)} = \|\bar{Z}_T\|^2$ из (40), согласно (39), можно оценить в виде $D_T^{(2)} \leq c \int_0^T (\|\Delta \mathcal{A}_t\|^2 + \|\Delta \mathcal{M}_t\|^2) \|\tilde{Z}_t\|^2 dt$ и, как и ранее (см. случай анализа $I_T^{(2)}$), показать, что $\int_0^T (\|\Delta \mathcal{A}_t\|^2 + \|\Delta \mathcal{M}_t\|^2) [\|\tilde{Z}_t\|^2 - E\|\tilde{Z}_t\|^2] dt / \hat{\Gamma}_T \rightarrow \xi^{(4)}$, где $\xi^{(4)} = 0$ или $\xi^{(4)}$ — п.н. конечная с.в. Поэтому с учётом ограниченности $E\|\tilde{Z}_t\|^2$, $t \geq 0$, будем иметь соотношение $\lim_{T \rightarrow \infty} \sup\{D_T^{(2)} / \hat{\Gamma}_T\} \leq c_1$, где $c_1 = 0$ при условии $\hat{\Gamma}_T \rightarrow \infty$, $T \rightarrow \infty$, или же $c_1 > 0$ — п.н. конечная с.в., если $\hat{\Gamma}_T < \infty$. В данном

случае также стоит уточнить, что в силу ранее полученной оценки для $ED_T^{(2)} = E\|\bar{Z}_T\|^2$ величина $ED_T^{(2)}$ ограничена, $T > 0$. Если $\hat{\Gamma}_\infty < \infty$, то $ED_T^{(2)} \rightarrow 0$, поэтому по аналогии с рассмотренным выше процессом $D_T^{(1)}$ оказывается, что $D_T^{(2)} \rightarrow 0$ п.н. при $\hat{\Gamma}_\infty < \infty$.

Для $D_T^{(3)} = \|\hat{Z}_T\|^2$ из (40), удовлетворяющего линейному СДУ (37), известно (см. утверждение теоремы 1 в [17]), что $D_T^{(3)} / \int_0^T \|\Delta \mathcal{G}_t\|^2 dt \rightarrow 0$ с вероятностью 1 и в среднем порядка 1, $T \rightarrow \infty$. Следовательно, $D_T^{(3)} / \hat{\Gamma}_T \rightarrow 0$ п.н. и также при этом $ED_T^{(3)} / \hat{\Gamma}_T \rightarrow 0$, $T \rightarrow \infty$, для случая нормировки $\hat{\Gamma}_T$ из (35).

Далее, для четвёртого слагаемого в (40) запишем $\sqrt{D_T^{(4)}} = \sqrt{\|\bar{Z}_T\|^2 \eta_T}$ и с учётом (22), (39) интегральное уравнение для $D_T^{(4)}$, $T \geq 0$, будет иметь вид

$$D_T^{(4)} = \|\Delta z\|^2 \|z\|^2 + I_T^{(4)} + I_T^{(5)} + I_T^{(6)} + M_T^{(7)},$$

где, как и ранее (см. (41)), рассматриваются интегралы двух типов:

$$\begin{aligned} I_T^{(4)} &= \int_0^T \eta_t [Z'_t(\mathcal{A}_t + \mathcal{A}'_t) Z_t - 2\kappa(1-\epsilon) \|Z_t\|^2] dt, \quad I_T^{(5)} = \int_0^T \|\Delta \mathcal{A}_t\| \|\tilde{Z}_t\|^2 \|Z_t\|^2 dt, \\ I_T^{(6)} &= \int_0^T \eta_t \operatorname{tr}(\mathcal{G}'_t \mathcal{G}_t) dt, \quad M_T^{(7)} = 2 \int_0^T \eta_t Z'_t \mathcal{G}_t dW_t. \end{aligned}$$

Как и при анализе (41), вид нормировки $\tilde{\Gamma}_T$, достаточный для асимптотической сходимости нормированных процессов, определяется на основе оценки вторых моментов интегралов. Точнее,

$$E(I_T^{(4)})^2 \leq c \left(\int_0^T \sqrt{E(\eta_t^2 \|Z_t\|^4)} dt \right)^2 \leq \tilde{c} \left(\int_0^T e^{-2\kappa(1-\epsilon)t} \int_0^t e^{2\kappa(1-\epsilon)s} \|\Delta A_s\|^2 ds dt \right)^2 \leq \bar{c} \left(\int_0^T \|\Delta \mathcal{A}_t\|^2 dt \right)^2,$$

при этом были использованы свойства ограниченности $E\|Z_t\|^4$ и $E\|\tilde{Z}_t\|^4$, а также (39), $t \geq 0$. Поэтому полагаем $\tilde{\Gamma}_T = (\int_0^T \|\Delta \mathcal{A}_t\| dt)^2$.

Аналогично определяем границы $E(I_T^{(5)})^2 \leq (\int_0^T \|\Delta \mathcal{A}_t\| \sqrt{E\|\tilde{Z}_t\|^4} \sqrt{E\|Z_t\|^4} dt)^2 \leq \tilde{c} \tilde{\Gamma}_T$ и $E(I_T^{(6)})^2 \leq c (\int_0^T \sqrt{E\eta_t^2} dt)^2 \leq \tilde{c} \tilde{\Gamma}_T$. Наконец, $E(M_T^{(7)})^2 \leq \int_0^T \sqrt{E(\eta_t^2 \|Z_t\|^4)} dt \leq \tilde{c} \tilde{\Gamma}_T$. Соответственно имеем, что п.н. $D_T^{(4)} / \tilde{\Gamma}_T \rightarrow \hat{\xi}^{(4)}$, $T \rightarrow \infty$, где $\hat{\xi}^{(4)} \geq 0$ — п.н. конечная с.в. Кроме того, $\hat{\xi}^{(4)} = 0$, если $\tilde{\Gamma}_T \rightarrow \infty$, $T \rightarrow \infty$. Тогда с учётом неравенства $\sqrt{\tilde{\Gamma}_T} \leq \hat{\Gamma}_T$ при $\hat{\Gamma}_T$ из (35) приходим к соотношению $\sqrt{D_T^{(4)}} / \hat{\Gamma}_T \rightarrow \sqrt{\hat{\xi}^{(4)}}$ п.н., вид $\hat{\xi}^{(4)} \geq 0$ зависит от поведения $\hat{\Gamma}_T$ при $T \rightarrow \infty$. Так как $E\sqrt{D_T^{(4)}} \leq \sqrt{ED_T^{(4)}} \leq \sqrt{E\eta_T^2} \sqrt{E\|Z_T\|^4}$ и при этом из (39) следует, что $E\eta_T^2 \leq ce^{-4\kappa(1-\epsilon)T} \|\Delta z\|^2 + c \int_0^T e^{-4\kappa(1-\epsilon)(T-s)} \|\Delta \mathcal{A}_s\|^4 ds$, то получаем ограниченность $E\sqrt{D_T^{(4)}}$, $T \geq 0$. Кроме того, имеет место свойство сходимости $E\sqrt{D_T^{(4)}} \rightarrow 0$, $T \rightarrow \infty$, для случая $\int_0^\infty \|\Delta \mathcal{A}_s\|^4 ds \leq \tilde{c} \int_0^\infty \|\Delta \mathcal{A}_s\| ds < \infty$ и, как следствие, $\sqrt{D_T^{(4)}} \rightarrow 0$ п.н. Таким образом, для ожидаемых значений $E\sqrt{D_T^{(4)}} / \hat{\Gamma}_T \rightarrow 0$, $T \rightarrow \infty$, при функции $\hat{\Gamma}_T$ из (35).

В оценке (40) осталось рассмотреть поведение слагаемого $\sqrt{D_T^{(5)}} = \sqrt{\|Z_T\|^2 \|\hat{Z}_T\|^2}$, $T \rightarrow \infty$. Для этого также выписывается интегральное представление на основе (22) и (37) вида

$$D_T^{(5)} = I_T^{(8)} + I_T^{(9)} + I_T^{(10)} + M_T^{(11)},$$

где

$$\begin{aligned} I_T^{(8)} &= \int_0^T [Z'_t(\mathcal{A}_t + \mathcal{A}'_t)Z_t \|\hat{Z}_t\|^2 + \hat{Z}'_t(\mathcal{A}_t + \mathcal{A}'_t)\hat{Z}_t \|Z_t\|^2] dt \leq c \int_0^T \|Z_t\|^2 \|\hat{Z}_t\|^2 dt, \\ I_T^{(9)} &= \int_0^T [\|\hat{Z}_t\|^2 \operatorname{tr}(\mathcal{G}'_t \mathcal{G}_t) + \|Z_t\|^2 \operatorname{tr}(\Delta \mathcal{G}'_t \Delta \mathcal{G}_t)] dt \leq c \int_0^T (\|Z_t\|^2 \|\Delta \mathcal{G}_t\|^2 + \|\hat{Z}_t\|^2 \|\mathcal{G}_t\|^2) dt, \\ I_T^{(10)} &= 4 \int_0^T Z'_t \mathcal{G}'_t \Delta \mathcal{G}_t \hat{Z}_t dt \leq c \int_0^T (\|Z_t\|^2 \|\Delta \mathcal{G}_t\|^2 + \|\hat{Z}_t\|^2 \|\mathcal{G}_t\|^2) dt, \\ M_T^{(11)} &= 2 \int_0^T (\|Z_t\|^2 \hat{Z}'_t \Delta \mathcal{G}_t + \|\hat{Z}_t\|^2 Z'_t \mathcal{G}_t) dW_t. \end{aligned}$$

Находим оценки для вторых моментов интегралов:

$$\begin{aligned} E(I_T^{(8)})^2 &\leq \left(\int_0^T \sqrt{E(\|Z_t\|^4 \|\hat{Z}_t\|^4)} dt \right)^2 \leq c \left(\int_0^T E \|\hat{Z}_t\|^2 dt \right)^2 \leq \tilde{c} \left(\int_0^T \|\Delta \mathcal{G}_t\|^2 dt \right)^2 = \tilde{c} \bar{\Gamma}_T, \\ E(I_T^{(9)})^2 &\leq \left(\int_0^T (\|\Delta \mathcal{G}_t\|^2 \sqrt{E\|Z_t\|^4} + \sqrt{E\|\hat{Z}_t\|^4}) dt \right)^2 \leq \tilde{c} \bar{\Gamma}_T. \end{aligned}$$

Здесь также были использованы соотношения $E(\|Z_t\|^k \|\hat{Z}_t\|^k) \leq \sqrt{E(\|Z_t\|^{2k})} \sqrt{E(\|Z_t\|^{2k})}$, свойство моментов гауссовой с.в. χ : $E(\chi)^{2k} \leq c(E\chi^2)^k$ (см. [20, теорема 5.3.2]), а также ограниченность $E\|Z_t\|^2$ и приведённая ранее оценка для $E\|\hat{Z}_t\|^2$, $t \geq 0$. По аналогии $E(I_T^{(10)})^2 \leq c \bar{\Gamma}_T$.

Для мартингала $M_T^{(11)}$ справедлива оценка

$$E(M_T^{(11)})^2 \leq c \int_0^T \left(\|\Delta \mathcal{G}_t\|^2 \sqrt{E\|Z_t\|^4} \sqrt{E\|\hat{Z}_t\|^4} + \sqrt{E\|Z_t\|^4} \sqrt{E\|\hat{Z}_t\|^8} \right) dt \leq \tilde{c} \int_0^T \|\Delta \mathcal{G}_t\|^2 dt \leq \bar{c} \bar{\Gamma}_T, \quad \bar{c} > 0.$$

Тогда $D_T^{(5)}/\bar{\Gamma}_T \rightarrow \xi^{(5)} \geq 0$ п.н. при $T \rightarrow \infty$. Учитывая, что $\bar{\Gamma}_T \leq c(\hat{\Gamma}_T)^2$, получаем сходимость $\sqrt{D_T^{(5)}}/\hat{\Gamma}_T \rightarrow \sqrt{\xi^{(5)}}$ п.н., где $\xi^{(5)} = 0$ при $\hat{\Gamma}_T \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$, в противном случае $\xi^{(5)} \geq 0$ — некоторая п.н. конечная с.в. Относительно динамики ожидаемых значений величина $E\sqrt{D_T^{(5)}} = \sqrt[4]{E\|Z_t\|^4} \sqrt[4]{E\|\hat{Z}_t\|^4}$, $T \geq 0$, будет ограничена и $E\sqrt{D_T^{(5)}} \rightarrow 0$, если $\hat{\Gamma}_\infty < \infty$, в силу имеющейся оценки $E\|\hat{Z}_T\|^4 \leq c \int_0^T e^{-4(1-\epsilon)(T-t)} \|\Delta \mathcal{G}_t\|^4 dt$. Объединяя все полученные ранее результаты, касающиеся поведения слагаемых в $S_T^{(3)}$, $T \rightarrow \infty$ (см. (40)), получаем, что $ES_T^{(3)}/\hat{\Gamma}_T \rightarrow 0$, $\lim_{T \rightarrow \infty} \sup\{S_T^{(3)}/\hat{\Gamma}_T\} \leq s^{(3)}$ п.н., $T \rightarrow \infty$, где $s^{(3)} = 0$ при $\hat{\Gamma}_T \rightarrow \infty$, и $s^{(3)} \geq 0$ — п.н. конечная с.в. для случая $\hat{\Gamma}_\infty < \infty$, что также можно уточнить до $s^{(3)} = 0$ (см. выше).

Таким образом, показано, что для всех составляющих разложения (34) функция $\hat{\Gamma}_T$ вида (35) будет являться верхней функцией в потраекторном смысле (т.е. мажорировать с вероятностью 1), а также оценивать сверху и ожидаемые значения. Тем самым соотношения (33) установлены и теорема доказана.

3.2. ОПТИМАЛЬНОСТЬ И ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ИНВАРИАНТНОЙ СТРАТЕГИИ

В следующем утверждении устанавливается свойство оптимальности стратегий управления (16) и (20) на бесконечном интервале времени по критериям долговременных средних. Кроме того, приводится оценка качества инвариантной стратегии (20) по сравнению с применением управления (16).

Теорема 4. *Пусть выполнены предположения 1, 2 и $\Delta G_t \rightarrow O$, $t \rightarrow \infty$. Тогда управление \tilde{U}_t^* вида (16), (17) и \bar{U}_t^* вида (20), (21) являются решениями задач*

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{E\tilde{J}_T(\tilde{U})}{T} \rightarrow \inf_{\tilde{U} \in \mathcal{U}} u \quad \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\tilde{J}_T(\tilde{U})}{T} \rightarrow \inf_{\tilde{U} \in \mathcal{U}} \text{с вероятностью } 1. \quad (42)$$

При этом

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{E\tilde{J}_T(\tilde{U}^*)}{T} = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{E\tilde{J}_T(\bar{U}^*)}{T} = \text{tr}(G' \bar{\Pi} G),$$

$$\text{n.н.} \quad \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\tilde{J}_T(\tilde{U}^*)}{T} = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\tilde{J}_T(\bar{U}^*)}{T} = \text{tr}(G' \bar{\Pi} G),$$

где $\bar{\Pi} \in \bar{\mathcal{P}}$ — решение алгебраического уравнения Риккати (1).

Также при $h_T = \int_0^T (\|\Delta A_t\| + \|\Delta B_t\| + \|\Delta Q_t\| + \|\Delta R_t\|) dt$ выполняются соотношения

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\|\tilde{J}_T(\bar{U}^*) - \tilde{J}_T(\tilde{U}^*)\|}{h_T} < c_J < \infty \quad \text{с вероятностью } 1, \quad (43)$$

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\|E\tilde{J}_T(\bar{U}^*) - E\tilde{J}_T(\tilde{U}^*)\|}{h_T} < \infty, \quad (44)$$

где $c_J > 0$ — неслучайная константа, если $h_T \rightarrow \infty$, $T \rightarrow \infty$, и $c_J > 0$ — конечная с.в., если $h_\infty < \infty$.

Доказательство. Оптимальность \tilde{U}^* по критериям долговременных средних (42) следует из (18), (19), условия $\Delta G_t \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, и предположения 2, влекущего за собой наличие свойства $\|\Delta \Pi_t\| = \|\Pi_t - \bar{\Pi}\| \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ (см. теорему 2). Действительно, для нормировки в (18) выполняется $\int_0^T \|\tilde{G}_t\|^2 dt / T \rightarrow 1$, $T \rightarrow \infty$, а величина предела в (19) будет равной $\lim_{T \rightarrow \infty} \sup(\int_0^T [\text{tr}(\tilde{G}'_t \bar{\Pi} \tilde{G}_t) + \text{tr}(\tilde{G}'_t \Delta \Pi_t \tilde{G}_t)] dt / T) = \text{tr}(G' \bar{\Pi} G)$.

Для доказательства оптимальности стратегии \bar{U}^* достаточно показать, что при использовании этого управления значения критериев долговременных средних в (42) также окажутся равны $\text{tr}(G' \bar{\Pi} G)$. Во-первых, заметим, что уравнение (21) для процесса \bar{X}_t имеет вид (22) при матрицах $\mathcal{A}_t = A + \Delta A_t - (B + \Delta B_t)R^{-1}B'\bar{\Pi}$, $\mathcal{G}_t = \tilde{G}_t$, а функционал $\tilde{J}_T(\bar{U}^*)$ совпадает с \mathcal{J}_T из (24), если положить $\mathcal{M}_t = Q + \Delta Q_t + \bar{\Pi}BR^{-1}(R + \Delta R_t)R^{-1}B'\bar{\Pi}$. Также нетрудно заметить, что при этом матрица \mathcal{A}_t является экспоненциально устойчивой. Оптимальный процесс \tilde{X}_t^* из (17) задаётся (23) при $\mathcal{A}_t = A + \Delta A_t - (B + \Delta B_t)(R + \Delta R_t)^{-1}(B + \Delta B_t)'\Pi_t$, $\tilde{G}_t = \tilde{G}_t$. Функционал \tilde{J}_T имеет вид $\tilde{\mathcal{J}}_T$ при матрице $\tilde{\mathcal{M}}_t = Q + \Delta Q_t + \Pi_t(B + \Delta B_t)(R + \Delta R_t)^{-1}(B + \Delta B_t)'\Pi_t$. Тогда [17]

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{E\tilde{J}_T(\bar{U}^*)}{T} = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\tilde{J}_T(\bar{U})}{T} = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_0^T \text{tr}(G' P_t G) dt}{T} \quad (45)$$

с вероятностью 1, где P_t удовлетворяет уравнению (27), а для матрицы $\Pi_t \in \mathcal{P}$ из (19) имеет место равенство $\Pi_t = \tilde{P}_t$, $\tilde{P}_t \geq O$ является решением (28). При этом, согласно лемме 2, $\|P_t - \Pi_t\| \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, ввиду оценок $\|\Delta \mathcal{A}_t\| + \|\Delta \mathcal{M}_t\| \leq c(\|\Delta A_t\| + \|\Delta B_t\| + \|\Delta R_t\| + \|\Delta \Pi_t\|)$,

$\|\Delta\Pi_t\| \leq \tilde{c}p_t$ и утверждения теоремы 2. Получаем предельное значение (45) равным $\text{tr}(G'\bar{\Pi}G)$. Здесь же отметим, что $\int_0^T (\|\Delta\mathcal{A}_t\| + \|\Delta\mathcal{M}_t\|) dt \leq c \int_0^T (\|\Delta A_t\| + \|\Delta B_t\| + \|\Delta R_t\| + p_t) dt \leq \tilde{c} \int_0^T (\|\Delta A_t\| + \|\Delta B_t\| + \|\Delta R_t\| + \|\Delta Q_t\|) dt = \tilde{c}h_T$. Тогда для оценки разности целевых функционалов применяется теорема 3 и соотношение (33) в случае $\Delta\mathcal{G}_t \equiv O$. При этом мажорантой знаменателя (33) выступает функция h_T . Таким образом, приходим к (43) и (44). Теорема доказана.

Замечание. В оценках (43) и (44) отсутствует ΔG_t , т.е. характеристика возмущений матрицы диффузии G , в силу того что оптимальный инвариантный закон управления \bar{U}^* подставляется в уравнение динамики (14). Если же стоит задача сравнить качества оптимальных законов управления U^* и \bar{U}^* из невозмущённой, т.е. номинальной (см. (11), (12)), и возмущённой, асимптотически автономной (см. (16), (17)), систем соответственно, то при помощи теоремы 3 также показывается, что

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \{ \|EJ_T(U^*) - E\tilde{J}_T(\tilde{U}^*)\| / h_T^* \} < \infty, \quad \limsup_{T \rightarrow \infty} \{ \|J_T(U^*) - \tilde{J}_T(\tilde{U}^*)\| / h_T^* \} < c_J^* < \infty$$

для $h_T^* = h_T + \int_0^T \|\Delta G_t\| dt$, где c_J^* обладает свойствами, аналогичными c_J из формулировки теоремы 3, при использовании условия на h_T^* вместо h_T , $T \rightarrow \infty$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведён анализ чувствительности решений уравнений Риккати к асимптотически малым изменениям матриц коэффициентов и найдены верхние оценки для разности решений (теорема 2). Далее результат теоремы 2 был использован при оценке качества инвариантной стратегии управления в задаче стохастического линейного квадратического регулятора на бесконечном интервале времени для системы с возмущением параметров. Получен вид верхней границы для разности квадратичных целевых функционалов, задаваемых на решениях линейных СДУ (теорема 3). Установлена оптимальность инвариантной стратегии, а также определена чувствительность регулятора в терминах интегральной меры отклонения возмущающих матриц от нулевых (теорема 4).

Исследование выполнено в рамках научно-исследовательской работы Центрального экономико-математического института Российской академии наук.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Квакернаак, Х. Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернаак, Р. Сиван ; пер. с англ. под ред. В.А. Васильева, Ю.А. Николаева — М. : Наука, 1977. — 650 с.
2. Dragan, V. Mathematical Methods in Robust Control of Linear Stochastic Systems / V. Dragan, T. Morozan, A.M. Stoica. — New York : Springer, 2006. — 324 p.
3. Perturbation Theory for Matrix Equations / M. Konstantinov, D.W. Gu, V. Mehrmann, P. Petkov. — Amsterdam : Elsevier, 2003. — 524 p.
4. Konstantinov, M.M. Sensitivity of the solutions to differential matrix Riccati equations / M.M. Konstantinov, G.B. Pelova // IEEE Trans. on Automatic Control. — 1991. — V. 36, № 2. — P. 213–215.
5. Паламарчук, Е.С. Теорема сравнения для одного класса дифференциальных уравнений Риккати и её приложение / Е.С. Паламарчук // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 8. — С. 1020–1025.
6. Wang, B. Consensus of discrete-time multi-agent systems with decaying multiplicative uncertainties / B. Wang, Y.P. Tian // 2018 Chinese Automation Congress (CAC). — New York : IEEE, 2018. — P. 2247–2252.

7. Design of autonomous cruise controller with linear time varying model / H.J. Chang, T.K. Yoon, H.C. Lee [et al.] // J. Electrical Engineering and Technology. — 2015. — V. 10, № 5. — P. 2162–2169.
8. Models of continuous-time linear time-varying systems with fully adaptable system modes / M.A.G. De Anda, A.S. Reyes, R. Kaszynski, J. Piskorowski // New Approaches in Automation and Robotics / Ed. H. Aschemann. — Rijeka : IntechOpen, 2008. — P. 345–346.
9. Zhang, H.Y. Explicit symplectic-precise iteration algorithms for linear quadratic regulator and matrix differential Riccati equation / H.Y. Zhang, J.Z. Luo, Y. Zhou // IEEE Access. — 2021. — V. 9. — P. 105424–105438.
10. Адрианова, Л.В. Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений / Л.В. Адрианова. — СПб. : Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1992. — 239 с.
11. Harris, C.J. Some Aspects of Kinematic Similarity and the Stability of Linear Systems / C.J. Harris, J.F. Miles. — London : Academic Press, 1980. — 236 р.
12. Паламарчук, Е.С. Асимптотическое поведение решения линейного стохастического дифференциального уравнения и оптимальность почти наверное для управляемого случайного процесса / Е.С. Паламарчук // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2014. — Т. 54, № 1. — С. 89–103.
13. Czornik, A. On time-varying LQG / A. Czornik // IFAC Proceedings Volumes. — 1998. — V. 31, № 18. — P. 411–415.
14. On stability of linear time-varying second-order differential equations / L. Duc, A. Ilchmann, S. Siegmund, P. Taraba // Quarterly of Appl. Math. — 2006. — V. 64, № 1. — P. 137–151.
15. Distributed gradient descent: nonconvergence to saddle points and the stable-manifold theorem / B. Swenson, R. Murray, H.V. Poor, S. Kar // 2019 57th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing (Allerton). — New York : IEEE, 2019. — P. 595–601.
16. Ekman, T. Adaptive prediction of mobile radio channels utilizing a filtered random walk model for the coefficients / T. Ekman // Knowledge-Based Intelligent Information and Engineering Systems: 7th Int. Conf., KES 2003. Oxford, September 2003, Proceedings, Part I / Ed. V. Palade. — Berlin : Springer, 2011. — P. 1326–1333.
17. Паламарчук, Е.С. О верхних функциях для интегральных квадратичных функционалов от процесса Орнштейна–Уленбека с переменными коэффициентами / Е.С. Паламарчук // Теория вероятностей и ее применения. — 2020. — Т. 65, № 1. — С. 23–41.
18. Белкина, Т.А. О стохастической оптимальности для линейного регулятора с затухающими возмущениями / Т.А. Белкина, Е.С. Паламарчук // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 4. — С. 110–128.
19. Крамер, Г. Стационарные случайные процессы: свойства выборочных функций и их приложения / Г. Крамер, М. Лидбеттер ; пер. с англ. под. ред. Ю.А. Беляева — М. : Мир, 1969. — 398 с.
20. Song, I. Probability and Random Variables: Theory and Applications / I. Song, S.R. Park, S. Yoon. — Cham : Springer, 2022. — 505 р.

ON SENSITIVITY OF SOLUTIONS OF RICCATI EQUATIONS UNDER SMALL PARAMETER PERTURBATIONS AND OPTIMALITY IN LINEAR STOCHASTIC CONTROL SYSTEMS

© 2024 / E. S. Palamarchuk

*Central Economic Mathematical Institute of RAS, Moscow, Russia
 National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia
 e-mail: e.palamarchuk@gmail.com*

We investigate sensitivity of solutions of Riccati equations under asymptotically small perturbations of their coefficients. Upper bound on the difference between solutions of algebraic and differential Riccati equations is derived. The result is applied to study optimality in the stochastic linear-quadratic control problem over an infinite time-horizon for an asymptotically autonomous system. We also treat an issue related to performance of invariant control strategy.

Keywords: Riccati differential equation, sensitivity of solutions, stochastic linear-quadratic controller, optimality

REFERENCES

1. Kwakernaak, H. and Sivan, R., *Linear Optimal Control Systems*, New York: Wiley-interscience, 1972.
2. Dragan, V., Morozan, T., and Stoica, A.M., *Mathematical Methods in Robust Control of Linear Stochastic Systems*, New York: Springer, 2006.
3. Konstantinov, M., Gu, D.W., Mehrmann, V., and Petkov, P., *Perturbation Theory for Matrix Equations*, Amsterdam: Elsevier, 2003.
4. Konstantinov, M.M. and Pelova, G.B., Sensitivity of the solutions to differential matrix Riccati equations, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1991, vol. 36, no. 2, pp. 213–215.
5. Palamarchuk, E.S., Comparison theorem for a class of Riccati differential equations and its application, *Differ. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 8, pp. 981–986.
6. Wang, B. and Tian, Y.P., Consensus of discrete-time multi-agent systems with decaying multiplicative uncertainties, in: *2018 Chinese Automation Congress (CAC)*, New York: IEEE, 2018, pp. 2247–2252.
7. Chang, H.J., Yoon, T.K., Lee, H.C. [et al.], Design of autonomous cruise controller with linear time varying model, *J. Electrical Engineering and Technology*, 2015, vol. 10, no. 5, pp. 2162–2169.
8. De Anda, M.A.G., Reyes, A.S., Kaszynski, R. and Piskorowski, J., Models of continuous-time linear time-varying systems with fully adaptable system modes, in: *New Approaches in Automation and Robotics*, ed. H. Aschemann, Rijeka: IntechOpen, 2008, pp. 345–346.
9. Zhang, H.Y., Luo, J.Z., and Zhou, Y., Explicit symplectic-precise iteration algorithms for linear quadratic regulator and matrix differential Riccati equation, *IEEE Access*, 2021, vol. 9, pp. 105424–105438.
10. Adrianova L., *Introduction to Linear Systems of Differential Equations*, Providence: American Mathematical Society, 1995.
11. Harris, C.J. and Miles, J.F., *Some Aspects of Kinematic Similarity and the Stability of Linear Systems*, London: Academic Press, 1980.
12. Palamarchuk, E.S., Asymptotic behavior of the solution to a linear stochastic differential equation and almost sure optimality for a controlled stochastic process, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2014, vol. 54, pp. 83–96.
13. Czornik, A., On time-varying LQG, *IFAC Proceedings Volumes*, 1998, vol. 31, no. 18, pp. 411–415.
14. Duc, L., Ilchmann, A., Siegmund, S., and Taraba, P., On stability of linear time-varying second-order differential equations, *Quarterly of Appl. Math.*, 2006, vol. 64, no. 1, pp. 137–151.
15. Swenson B., Murray, R., Poor, H.V., and Kar, S., Distributed gradient descent: nonconvergence to saddle points and the stable-manifold theorem, in: *2019 57th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing (Allerton)*, New York: IEEE, 2019, pp. 595–601.
16. Ekman, T., Adaptive prediction of mobile radio channels utilizing a filtered random walk model for the coefficients, in: *Knowledge-Based Intelligent Information and Engineering Systems: 7th International Conference, KES 2003*, Oxford, September 3–5, 2003, Proceedings, Part I, ed. V. Palade, Berlin: Springer, 2011, pp. 1326–1333.
17. Palamarchuk, E.S., On upper functions for integral quadratic functionals based on time-varying Ornstein–Uhlenbeck process, *Theory of Probability & its Applications*, 2020, vol. 65, no. 1, pp. 17–31.
18. Belkina, T.A. and Palamarchuk, E.S., On stochastic optimality for a linear controller with attenuating disturbances, *Automat. Remote Contr.*, 2013, vol. 74, no. 4, pp. 628–641.
19. Cramer, H. and Leadbetter, M.R., *Stationary and Related Stochastic Processes: Sample Function Properties and their Applications*, New York: Wiley, 1967.
20. Song, I., Park, S.R., and Yoon, S., *Probability and Random Variables: Theory and Applications*, Cham: Springer, 2022.

— ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ —

УДК 517.925.51

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО НЕЛИНЕЙНОМУ
НЕСТАЦИОНАРНОМУ ГИБРИДНОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

© 2024 г. А. В. Платонов

Санкт-Петербургский государственный университет

e-mail: a.platonov@spbu.ru

Поступила в редакцию 21.06.2024 г., после доработки 09.10.2024 г.; принята к публикации 31.10.2024 г.

Исследовано влияние нестационарных возмущений на устойчивость нелинейных неавтоматических систем с переключениями и импульсными эффектами. Получены достаточные условия, гарантирующие асимптотическую устойчивость заданного положения равновесия исходной системы, а также установлены ограничения, при выполнении которых асимптотическая устойчивость сохраняется при действующих на систему возмущениях. Отметим, что нестационарности, присутствующие как в самой системе, так и в возмущениях, могут описываться неограниченными по времени функциями, а также функциями, сколь угодно близко приближающимися к нулю. Предполагаем, что базовая система является однородной по вектору состояния. Для нахождения требуемых результатов использован второй метод Ляпунова в сочетании с теорией дифференциальных неравенств.

Ключевые слова: нестационарная импульсная система с переключениями, возмущение, устойчивость

DOI: 10.31857/S0374064124120056, EDN: IPHQCC

ВВЕДЕНИЕ

Любая математическая модель лишь приближённо описывает реальные процессы в окружающем мире. Поэтому актуальна проблема рабочности модели, т.е. сохранения определённых её свойств при каких-либо изменениях. В частности, многие работы в области теории управления посвящены вопросу сохранения устойчивости заданного режима функционирования динамической системы при действующих возмущениях. Первые теоремы об устойчивости по линейному приближению были сформулированы А.М. Ляпуновым. Системы нелинейного приближения применялись в работах И.Г. Малкина, Н.Н. Красовского, В.И. Зубова и других авторов (см., например, [1, гл. 6]). Исследование устойчивости значительно усложняется, если как сама система, так и влияющие на неё возмущения нестационарны. Особенно интересен случай, когда для описания нестационарностей, присутствующих в системе и в возмущениях, используются неограниченные по времени или, наоборот, не отделимые от нуля функции. Для анализа устойчивости нелинейных нестационарных возмущённых систем обычно используют второй метод Ляпунова. С помощью подобранных функций Ляпунова, как правило, получают результат, заключающийся в том, что устойчивость будет сохраняться, если вклад возмущений в динамику системы в каком-то смысле меньше вклада слагаемых, входящих в невозмущённую (номинальную) систему.

В последние десятилетия наблюдается большой интерес к гибридным системам, сочетающим в себе свойства как непрерывных, так и дискретных моделей. Например, во многих

работах исследовалось влияние на устойчивость переключений и импульсных воздействий [2, 3]. Переключения заключаются в том, что в определённые моменты времени система резко меняет свою структуру, решения системы при этом остаются непрерывными. Импульсы приводят к скачкообразному разрыву решений. Переключения и импульсы могут вызываться резкими внешними воздействиями на систему. Они также могут быть частью стратегии управления системой. Указанные эффекты часто существенно меняют динамические характеристики решений системы, такие как устойчивость, область притяжения, скорость переходных процессов и т.д. Соответственно условия, наложенные на закон переключений/импульсов, будут оказывать влияние и на искомые ограничения, которым должны удовлетворять возмущения для обеспечения асимптотической устойчивости. Нестационарным гибридным системам посвящены работы [4–8].

В настоящей статье в качестве номинальной системы выбрана нестационарная однородная система, подверженная переключениям и импульсным воздействиям. Такой выбор обусловлен лишь тем, что для однородных систем хорошо развиты методы построения подходящих функций Ляпунова, хорошо изучены свойства таких функций. Поэтому однородные системы (дифференциальные, разностные, дифференциально-разностные) широко применяются в современной теории управления [9–13]. Свойство однородности позволяет получать различные глобальные результаты в фазовом пространстве системы. В то же время отметим, что для многих неоднородных систем построенные функции Ляпунова удовлетворяют оценкам того же вида, что и для однородных систем, только в локальной области фазового пространства. Таким образом, результаты, установленные в данной работе, допускают распространение на более широкие классы систем.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задана система с переключениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_\sigma(t, \mathbf{x}), \quad (1)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ — вектор состояния; $\sigma = \sigma(t) : [0, +\infty) \rightarrow Q = \{1, \dots, N\}$ — кусочно-постоянная функция, задающая закон переключения в системе; элементы векторов $\mathbf{F}_s(t, \mathbf{x})$ непрерывны относительно $t \geq 0$ и непрерывно дифференцируемы относительно $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{F}_s(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, $s = \overline{1, N}$.

Система (1) описывает переключения между подсистемами

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_s(t, \mathbf{x}), \quad s = \overline{1, N}. \quad (2)$$

Кроме того, предположим, что решения системы (1) подвержены импульсным воздействиям

$$\mathbf{x}(\tau_i^+) = \mathbf{g}_{\tau_i}(\mathbf{x}(\tau_i^-)), \quad i \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Здесь $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$ — моменты импульсов; $\mathbf{x}(\tau_i^+)$ и $\mathbf{x}(\tau_i^-)$ — правостороннее и левостороннее значения рассматриваемого решения системы (1) в точке τ_i ; непрерывная при $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ функция $\mathbf{g}_{\tau_i}(\mathbf{x})$ определяет величину скачка решения в момент времени τ_i , $\mathbf{g}_{\tau_i}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $i \in \mathbb{N}$. Далее под решением гибридной системы (1), (3) будем понимать правосторонне непрерывную функцию ($\mathbf{x}(\tau_i) = \mathbf{x}(\tau_i^+)$, $i \in \mathbb{N}$).

Не умаляя общности, будем считать, что моменты переключений в системе (1) совпадают с моментами импульсов, т.е. они также задаются последовательностью $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. В самом деле, если в какой-то момент времени τ_i происходит только лишь переключение режима в

системе (1), то можно считать, что в этот момент произошло и импульсное воздействие с нулевой величиной скачка решения ($\mathbf{x}(\tau_i^+) = \mathbf{x}(\tau_i^-)$). И наоборот, если в момент τ_i происходит только лишь импульсное воздействие, то можно считать, что произошло и переключение некоторого режима в системе (1) на самого себя ($\sigma(\tau_i^-) = \sigma(\tau_i^+)$).

Следуя стандартным предположениям [2, гл. 1–3], полагаем, что общее количество элементов последовательности $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ на луче $[0, +\infty)$ бесконечно, в то время как на любом конечном промежутке времени их число конечно; функцию $\sigma(t)$ рассматриваем как право-сторонне непрерывную при $t \geq 0$.

Пусть нулевое решение системы (1), (3) асимптотически устойчиво, однако система (1) подвергается некоторым возмущающим воздействиям

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_\sigma(t, \mathbf{x}) + \mathbf{G}(t, \mathbf{x}). \quad (4)$$

Здесь векторная функция $\mathbf{G}(t, \mathbf{x})$ определена в области

$$t \geq 0, \quad \|\mathbf{x}\| < H \quad (H = \text{const} > 0), \quad (5)$$

и $\mathbf{G}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$. Полагаем, что на временных интервалах $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots$, выполнены условия, гарантирующие существование и единственность решений задачи Коши для системы (4), а также их непрерывную зависимость от начальных данных. Под нормой $\|\cdot\|$ будем понимать евклидову норму вектора.

Замечание 1. На каждом временному промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$ между последовательными моментами переключений/импульсов работа рассматриваемой гибридной системы описывается обычновенными дифференциальными уравнениями, $i = 0, 1, \dots$. Поэтому для обеспечения существования, единственности решений и их непрерывной зависимости от начальных данных на этих промежутках можно использовать стандартные теоремы из теории обычновенных дифференциальных уравнений с гладкими правыми частями. В моменты переключений/импульсов построенные куски решений (если они продолжимы до соответствующих моментов) “склеиваются” непрерывным образом (при переключениях) или с некоторым сдвигом, задаваемым условием (3) (при импульсах). Согласно предположениям, сделанным относительно функций $\mathbf{g}_{\tau_i}(\mathbf{x})$, $i \in \mathbb{N}$, нулевое решение системы (4), (3) будет обладать свойством интегральной непрерывности на любом конечном промежутке времени. Заметим, что возмущения в системе также могут иметь переменную структуру (переключаться с одного режима на другой).

Возникает задача — определить ограничения на возмущения, при выполнении которых нулевое решение системы (4), (3) сохраняет асимптотическую устойчивость. Эти ограничения будут, вообще говоря, зависеть от условий, наложенных на закон переключений и импульсных воздействий.

В настоящей статье будем предполагать, что имеется полная информация о законе переключений/импульсов. В то же время отметим, что применяемые в работе подходы можно использовать и в случае отсутствия такой полной информации для установления ограничений на длины промежутков между последовательными переключениями/импульсами и на величины импульсов, гарантирующих асимптотическую устойчивость.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РАССУЖДЕНИЯ

Предположим, что функции $\mathbf{F}_1(t, \mathbf{x}), \dots, \mathbf{F}_N(t, \mathbf{x})$ в системе (1) являются однородными относительно переменной \mathbf{x} порядка $\mu > 1$, где μ — рациональное число с нечётным знаменателем.

Функцию Ляпунова $V_s(\mathbf{x})$ для s -й подсистемы из семейства (2) будем искать в виде положительно определённой непрерывно дифференцируемой при $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ однородной функции порядка $\gamma > 1$, $s = \overline{1, N}$. Тогда [1, с. 224–226] при $t \geq 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ получим оценки

$$a_{1s}\|\mathbf{x}\|^\gamma \leq V_s(\mathbf{x}) \leq a_{2s}\|\mathbf{x}\|^\gamma, \quad (6)$$

$$\left\| \frac{\partial V_s(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\| \leq a_{3s}\|\mathbf{x}\|^{\gamma-1}, \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial V_s(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{F}_s(t, \mathbf{x}) \leq a_{4s}(t)\|\mathbf{x}\|^{\gamma-1+\mu}. \quad (8)$$

Здесь a_{1s} , a_{2s} , a_{3s} — некоторые положительные постоянные, $a_{4s}(t)$ — непрерывные при $t \geq 0$ функции, $s = \overline{1, N}$.

Используя оценки (6)–(8), приходим к дифференциальным неравенствам

$$\left(\frac{\partial V_s(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{F}_s(t, \mathbf{x}) \leq \alpha_s(t)V_s^{1+\rho}(\mathbf{x}), \quad (9)$$

где $\rho = (\mu - 1)/\gamma$, $\alpha_s(t) = a_{2s}^{-(1+\rho)}a_{4s}(t)$, если $a_{4s}(t) < 0$, и $\alpha_s(t) = a_{1s}^{-(1+\rho)}a_{4s}(t)$, если $a_{4s}(t) \geq 0$, $s = \overline{1, N}$.

Замечание 2. Проблема построения подходящих функций Ляпунова, удовлетворяющих требованиям той или иной теоремы об устойчивости или неустойчивости, для однородных систем, как стационарных, так и нестационарных, исследовалась во многих работах (см., например, [1, 14]). В то же время отметим, что дифференциальные неравенства вида (9) могут быть получены в окрестности начала координат для широкого класса нелинейных систем, не являющихся, вообще говоря, однородными. Поэтому сделанное предположение об однородности подсистем (2) облегчает анализ системы, но не является принципиальным. Далее для установления нужных результатов будут использоваться только оценки на функции Ляпунова и их производные, а не их явный вид.

Найдём такое $\omega \geq 1$, что при всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ будут иметь место неравенства

$$V_s(\mathbf{x}) \leq \omega V_j(\mathbf{x}), \quad s, j = \overline{1, N}.$$

Предположим, что существуют такие постоянные $c_i > 0$, что при $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ справедливы оценки

$$\|\mathbf{g}_{\tau_i}(\mathbf{x})\| \leq c_i\|\mathbf{x}\|, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что если $c_i < 1$, то импульсное воздействие в момент времени τ_i благотворно влияет на свойство устойчивости нулевого решения системы (1), (3), т.е. этот импульс может рассматриваться как элемент стабилизирующего управления. И, напротив, если $c_i > 1$, то соответствующий импульс будет оказывать негативное влияние на устойчивость.

При $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ получим

$$V_{\sigma(\tau_i^+)}(\mathbf{g}_{\tau_i}(\mathbf{x})) \leq \varkappa_i V_{\sigma(\tau_i^-)}(\mathbf{x}), \quad i \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

Здесь $\varkappa_i = a_2 c_i^\gamma \omega / a_1$, $a_2 = \max_{s \in Q} a_{2s}$, $a_1 = \min_{s \in Q} a_{1s}$.

Обозначим для краткости записи $J(a, b) = - \int_a^b \alpha_{\sigma(\tau)}(\tau) d\tau$, где $b \geq a \geq 0$.

Для произвольных моментов времени $t \geq t_0 \geq 0$ можно найти такое целое неотрицательное число k и натуральное число m , что $t_0 \in [\tau_{m-1}, \tau_m]$ и $t \in [\tau_{m+k-1}, \tau_{m+k}]$. Таким образом, величина $m = m(t_0)$ определяется выбором начального значения t_0 , а величина $k = k(t_0, t)$ равна числу моментов переключений/импульсов $\{\tau_i\}$ на промежутке $[t_0, t]$.

Построим вспомогательные функции $\varphi(t_0, t)$ и $\psi(t_0, t)$ по следующему правилу:

$$\begin{aligned} \varphi(t_0, t) &= J(t_0, t) \quad \text{и} \quad \psi(t_0, t) = 1 \quad \text{при} \quad k = 0, \\ \varphi(t_0, t) &= \varkappa_m^{-\rho} J(t_0, \tau_m) + J(\tau_m, t) \quad \text{и} \quad \psi(t_0, t) = \varkappa_m^{-\rho} \quad \text{при} \quad k = 1, \\ \varphi(t_0, t) &= (\varkappa_m \dots \varkappa_{m+k-1})^{-\rho} J(t_0, \tau_m) + \sum_{j=1}^{k-1} (\varkappa_{m+j} \dots \varkappa_{m+k-1})^{-\rho} J(\tau_{m+j-1}, \tau_{m+j}) + J(\tau_{m+k-1}, t) \\ \text{и} \quad \psi(t_0, t) &= (\varkappa_m \dots \varkappa_{m+k-1})^{-\rho} \quad \text{при} \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Рассмотрим решение $\mathbf{x}(t)$ системы (1), (3), выходящее в момент времени t_0 из точки \mathbf{x}_0 . Интегрируя дифференциальные неравенства (9) с учётом (10), нетрудно показать (см., например, [8]), что если решение $\mathbf{x}(t)$ существует на промежутке $[t_0, t]$ (не уходит на бесконечность), то на этом промежутке будет справедлива оценка

$$V_{\sigma(t)}^{-\rho}(\mathbf{x}(t)) \geq \psi(t_0, t) V_{\sigma(t_0)}^{-\rho}(\mathbf{x}_0) + \rho \varphi(t_0, t). \quad (11)$$

С учётом оценок (6), (11) имеет место следующая

Лемма. *Пусть для гибридной системы (1), (3) построены функции Ляпунова, удовлетворяющие оценкам (6), (9), (10). Тогда если для любого $t_0 \geq 0$ можно найти такую константу $A > 0$, что*

$$A\psi(t_0, t) + \varphi(t_0, t) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty, \quad (12)$$

то нулевое решение системы (1), (3) будет асимптотически устойчивым.

Для установления более простых условий асимптотической устойчивости сформулируем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть для гибридной системы (1), (3) построены функции Ляпунова, удовлетворяющие оценкам (6), (9), (10). Тогда для асимптотической устойчивости нулевого решения данной системы достаточно выполнения одного из условий:*

- 1) $\varphi(0, t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$;
- 2) $\psi(0, t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$ и функция $\psi^{-1}(0, t)\varphi(0, t)$ ограничена снизу на промежутке $[0, +\infty)$.

Для доказательства теоремы 1 достаточно заметить, что при всех $t \geq t_0 \geq 0$

$$\varphi(0, t) = \varphi(t_0, t) + \psi(t_0, t)\varphi(0, t_0), \quad \psi(0, t) = \psi(0, t_0)\psi(t_0, t), \quad (13)$$

тогда

$$A\psi(t_0, t) + \varphi(t_0, t) = \varphi(0, t) + \frac{A - \varphi(0, t_0)}{\psi(0, t_0)}\psi(0, t).$$

Следовательно, при выполнении какого-то из условий 1) или 2) теоремы 1 для любого $t_0 \geq 0$ величину $A > 0$ можно выбрать так, чтобы выполнялось соотношение (12).

Таким образом, для нахождения ограничений на закон переключений/импульсов, гарантирующих асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1), (3), требуется исследовать поведение функций $\varphi(t_0, t)$ и $\psi(t_0, t)$. Причём, согласно теореме 1, это достаточно сделать только при $t_0 = 0$, полагая $m = m(0) = 1$, $k = k(0, t)$ — количество переключений/импульсов на промежутке $[0, t]$. Функция $\psi(0, t)$ — кусочно-постоянная положительная на $[0, +\infty)$. Оценивая сверху коэффициенты $\alpha_{\sigma(t)}(t)$ в неравенствах (9) константами на интервалах $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i \in \mathbb{N}$, функцию $\varphi(0, t)$ можно огрубить более простой для анализа

кусочно-линейной функцией. Моменты $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ являются точками разрыва функций $\varphi(0, t)$ и $\psi(0, t)$ (за исключением случаев, когда $\varkappa_i = 1$).

Выполнения условия 1) теоремы 1 можно добиться за счёт выбора закона переключений, если чаще и дольше активировать те подсистемы из семейства (2), для которых нулевое решение асимптотически устойчиво и функция Ляпунова подобрана удачно, так что соответствующие коэффициенты $\alpha_s(t)$ в оценках (9) сохраняют отрицательное значение достаточно длительное время. Если условие 1) не выполнено (например, если все подсистемы (2) неустойчивые или если не получилось построить “хорошие” функции Ляпунова), то условие 2) теоремы 1 позволяет добиться асимптотической устойчивости за счёт выбора импульсных воздействий.

Рассмотрим теперь возмущённую систему (4), (3). Предположим, что в области (5) справедливы неравенства

$$\|\mathbf{G}(t, \mathbf{x})\| \leq M(t)\|\mathbf{x}\|^\nu, \quad (14)$$

где $\nu = \text{const} > 0$, $M(t)$ — неотрицательная кусочно-непрерывная при $t \geq 0$ функция.

При $\nu > \mu$, учитывая (7), получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\tilde{H} \in (0, H)$, что при $t \geq 0$, $\|\mathbf{x}\| < \tilde{H}$ будут справедливы оценки

$$\left(\frac{\partial V_s(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T (\mathbf{F}_s(t, \mathbf{x}) + \mathbf{G}(t, \mathbf{x})) \leq \tilde{\alpha}_s(t) V_s^{1+\rho}(\mathbf{x}),$$

где $\tilde{\alpha}_s(t) = \alpha_s(t) + \varepsilon M(t)$, $s = \overline{1, N}$. Далее для системы (4), (3) можно применить теорему 1. Однако проблема такого подхода заключается в том, что если какое-то из условий теоремы 1 выполнено для невозмущённой системы (при прежних коэффициентах $\alpha_s(t)$), то оно совершенно не обязательно будет выполнено для возмущённой системы (при новых коэффициентах $\tilde{\alpha}_s(t)$) при том же самом законе переключений/импульсов, даже если подсистемы (2) и действующие возмущения стационарны, а величина ε выбрана сколь угодно малой. Таким образом, указанный подход может привести к нахождению очень грубых условий асимптотической устойчивости, а в каких-то случаях оказаться и вовсе непригодным. В п. 3 для исследования системы (4), (3) применим другой подход, предложенный в работе [15]. В [15, 16] рассматривались гладкие непрерывные однородные дифференциальные системы с нестационарными возмущениями. Покажем, что соответствующий подход можно распространить и на гибридные системы с переключениями и импульсными скачками.

3. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ВОЗМУЩЁННОЙ СИСТЕМЫ

Будем считать, что выполнены условия теоремы 1, обеспечивающие асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1), (3). Установим ограничения на возмущения, гарантирующие сохранение асимптотической устойчивости для нулевого решения системы (4), (3). Полагаем, что $\nu \geq \mu$.

3.1. СЛУЧАЙ ВЫПОЛНЕНИЯ УСЛОВИЯ 1) ТЕОРЕМЫ 1

В этом случае найдётся такое $\hat{T} \geq 0$, что $\varphi(0, t) > 0$ при $t \geq \hat{T}$. Для заданного закона переключений/импульсов вновь определим значения $m = m(t_0)$ и $k = k(t_0, t)$, как и в п. 2 статьи. При $t \geq t_0 \geq \hat{T}$ построим функцию $\Phi(t_0, t)$ по следующему правилу:

$$\Phi(t_0, t) = \int_{t_0}^t M(\tau) \varphi^{-\frac{\nu-\mu}{\mu-1}}(0, \tau) d\tau \quad \text{при } k=0,$$

$$\begin{aligned}
\Phi(t_0, t) &= \varkappa_m^{-\rho} \int_{t_0}^{\tau_m} M(\tau) \varphi^{-\frac{\nu-\mu}{\mu-1}}(0, \tau) d\tau + \int_{\tau_m}^t M(\tau) \varphi^{-\frac{\nu-\mu}{\mu-1}}(0, \tau) d\tau \quad \text{при } k=1, \\
\Phi(t_0, t) &= (\varkappa_m \dots \varkappa_{m+k-1})^{-\rho} \int_{t_0}^{\tau_m} M(\tau) \varphi^{-\frac{\nu-\mu}{\mu-1}}(0, \tau) d\tau + \\
&+ \sum_{j=1}^{k-1} (\varkappa_{m+j} \dots \varkappa_{m+k-1})^{-\rho} \int_{\tau_{m+j-1}}^{\tau_{m+j}} M(\tau) \varphi^{-\frac{\nu-\mu}{\mu-1}}(0, \tau) d\tau + \\
&+ \int_{\tau_{m+k-1}}^t M(\tau) \varphi^{-\frac{\nu-\mu}{\mu-1}}(0, \tau) d\tau \quad \text{при } k=2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{15}$$

Теорема 2. Пусть для гибридной системы (1), (3) построены функции Ляпунова, удовлетворяющие оценкам (6), (9), (10), и выполнено условие 1) теоремы 1. Тогда если возмущения удовлетворяют неравенствам (14), причём $\nu \geq \mu$, то для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (4), (3) достаточно, чтобы имело место условие

$$\varphi^{-1}(0, t)\Phi(\hat{T}, t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \tag{16}$$

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon \in (0, H)$. Выберем положительные постоянные ξ, Δ, l и T согласно условиям

$$\begin{aligned}
\xi &\leq \Delta, \quad -\frac{a_1^{-\rho}}{\Delta} + \rho - \rho l a_4 \Delta^{\frac{\nu-\mu}{\mu-1}} > 0, \quad -\frac{a_2^{-\rho}}{\xi} + \rho < 0, \\
\varphi(0, t) &> \frac{\Delta}{\varepsilon^{\mu-1}} \quad \text{при } t \geq T, \\
\varphi^{-1}(0, t)\Phi(\hat{T}, t) &\leq l \quad \text{при } t \geq T \geq \hat{T}.
\end{aligned}$$

Здесь $a_1 = \min_{s \in Q} a_{1s}$, $a_2 = \max_{s \in Q} a_{2s}$, $a_4 = \max_{s \in Q} a_{3s} a_{1s}^{-(1+\rho)}$.

Покажем, что если

$$t_0 \geq T, \quad \|\mathbf{x}_0\|^{\mu-1} < \frac{\xi}{\varphi(0, t_0)}, \tag{17}$$

то

$$\|\mathbf{x}(t)\|^{\mu-1} < \frac{\Delta}{\varphi(0, t)} \quad \text{при } t \geq t_0. \tag{18}$$

Здесь $\mathbf{x}(t)$ — решение системы (4), (3), выходящее из точки \mathbf{x}_0 в момент времени t_0 .

В самом деле, пусть начальные данные решения системы (4), (3) удовлетворяют неравенствам (17). Предположим, что найдётся такое $t_1 > t_0$, что $\|\mathbf{x}(t_1)\|^{\mu-1} = \Delta/\varphi(0, t_1)$. На промежутке $[t_0, t_1]$ имеем

$$\left(\frac{\partial V_s(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T (\mathbf{F}_s(t, \mathbf{x}) + \mathbf{G}(t, \mathbf{x})) \leq (\alpha_s(t) + a_4 \Delta^{\frac{\nu-\mu}{\mu-1}} M(t) \varphi^{-\frac{\nu-\mu}{\mu-1}}(0, t)) V_s^{1+\rho}(\mathbf{x}).$$

Интегрируя эти неравенства на промежутке $[t_0, t_1]$, находим, что

$$V_{\sigma(t_1)}^{-\rho}(\mathbf{x}(t_1)) \geq \psi(t_0, t_1) V_{\sigma(t_0)}^{-\rho}(\mathbf{x}_0) + \rho \varphi(t_0, t_1) - \rho a_4 \Delta^{\frac{\nu-\mu}{\mu-1}} \Phi(t_0, t_1).$$

Учитывая соотношения (6), (13), отсюда получаем

$$\varphi(0, t_1) \left(-\frac{a_1^{-\rho}}{\Delta} + \rho - \rho l a_4 \Delta^{\frac{\nu-\mu}{\mu-1}} \right) \leq \psi(t_0, t_1) \varphi(0, t_0) \left(-\frac{a_2^{-\rho}}{\xi} + \rho \right). \quad (19)$$

Левая часть неравенства (19) положительна, в то время как правая — отрицательна. Из данного противоречия вытекает, что неравенство (18) должно выполняться при всех $t \geq t_0$. Следовательно, для заданных значений $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq T$ нашлось $\delta = (\xi \varphi^{-1}(0, t_0))^{1/(\mu-1)} > 0$ такое, что если $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$, то $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$, и, кроме того, $\|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Учитывая свойство интегральной непрерывности применительно к нулевому решению системы (4), (3) на промежутке $[0, T]$ (см. замечание 1), получаем требуемое. Теорема доказана.

Замечание 3. Предположим, что $\varkappa_i \geq 1$, $i \in \mathbb{N}$. Такая ситуация будет иметь место, например, в отсутствие стабилизирующих импульсов. Тогда соотношение (16) в теореме 2 можно заменить более грубым, но более простым условием:

$$\varphi^{-1}(0, t) \int_{\hat{T}}^t M(\tau) \varphi^{-\frac{\nu-\mu}{\mu-1}}(0, \tau) d\tau \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

Если же $\varkappa_i \leq 1$, $i \in \mathbb{N}$, то соотношение (16) можно огрубить условием

$$\psi(0, t) \varphi^{-1}(0, t) \int_{\hat{T}}^t M(\tau) \varphi^{-\frac{\nu-\mu}{\mu-1}}(0, \tau) d\tau \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

Из полученных результатов видно, что использование стабилизирующих импульсов ($\varkappa_i < 1$, $i \in \mathbb{N}$) позволяет получить более лучшие условия асимптотической устойчивости для базовой системы (1), (3) (см. теорему 1). Однако теорема 2 будет задавать в этом случае достаточно жёсткие ограничения на возмущения. Поэтому для анализа устойчивости возмущённой системы в данной ситуации лучше воспользоваться подходом, ориентированным на условие 2) теоремы 1 (см. далее теорему 3).

Пример 1. Пусть закон переключений/импульсов выбран так, что $\varphi(0, t) \geq p t^r$ при $t \geq \bar{t}$, где $p > 0$, $r > 0$, $\bar{t} \geq 0$. Тогда нулевое решение системы (1), (3) асимптотически устойчиво, поскольку выполнено условие 1) теоремы 1. Предположим, что $M(t) \leq M_0(t+1)^\zeta$ при $t \geq 0$, где $M_0 = \text{const} > 0$, $\zeta \geq 0$. Не умаляя общности считаем, что $\hat{T} \geq \bar{t}$. Пусть $\varkappa_i \geq 1$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда при выполнении неравенства

$$\nu > \mu + \max\{(\mu-1)(\zeta+1-r)/r, 0\} \quad (20)$$

имеем

$$0 \leq \varphi^{-1}(0, t) \int_{\hat{T}}^t M(\tau) \varphi^{-\frac{\nu-\mu}{\mu-1}}(0, \tau) d\tau \leq (pt^r)^{-1} \int_{\hat{T}}^t M_0(t+1)^\zeta (pt^r)^{-\frac{\nu-\mu}{\mu-1}} d\tau \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty,$$

и, следовательно (см. теорему 2 и замечание 3), в этом случае нулевое решение системы (4), (3) будет асимптотически устойчивым.

В качестве численного примера рассмотрим семейство (2), состоящее из двух ($Q = \{1, 2\}$) стационарных подсистем

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 - x_1 x_2^2, \quad \dot{x}_2 = -x_1^2 x_2 - x_2^3; \quad (21)$$

$$\dot{x}_1 = x_1^3 + x_1 x_2^2, \quad \dot{x}_2 = x_1^2 x_2 + x_2^3. \quad (22)$$

Здесь $n = 2$, $\mu = 3$. Подсистема (21) асимптотически устойчива, а подсистема (22) — неустойчива.

Как и ранее, через $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$ обозначим моменты переключений. Пусть $T_i = \tau_i - \tau_{i-1}$, $i \in \mathbb{N}$. Полагаем, что на интервалах $[\tau_{2j-2}, \tau_{2j-1})$ активна подсистема (21), а на интервалах $[\tau_{2j-1}, \tau_{2j})$ — подсистема (22), $j \in \mathbb{N}$. Для упрощения предположим, что импульсные воздействия отсутствуют.

Построим для подсистем (21) и (22) единую функцию Ляпунова в виде

$$V_1(\mathbf{x}) = V_2(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2.$$

Получим

$$\dot{V}|_{(21)} = -2V^2(\mathbf{x}), \quad \dot{V}|_{(22)} = 2V^2(\mathbf{x}).$$

Таким образом, имеем $\gamma = 2$, $\rho = 1$; $\alpha_{\sigma(t)}(t) = -2$ при $t \in [\tau_{2j-2}, \tau_{2j-1})$, $\alpha_{\sigma(t)}(t) = 2$ при $t \in [\tau_{2j-1}, \tau_{2j})$, $j \in \mathbb{N}$; $\varkappa_i = 1$, $i \in \mathbb{N}$; $\varphi(0, t) = -\int_0^t \alpha_{\sigma(\tau)}(\tau) d\tau$.

Предположим, что $T_{2j-1} \geq 1$ и $\varphi(0, \tau_{2j}) = \sqrt{\tau_{2j}}$, $j \in \mathbb{N}$. Длины интервалов активности подсистемы (21) задаём произвольно, а подсистему (22) оставляем активной, пока ломаная $\varphi(0, t)$ не “упадет” на кривую \sqrt{t} . Тогда $\varphi(0, t) \geq \sqrt{t}$ при $t \geq 1/4$ (т.е. имеем $r = 1/2$) и нулевое решение соответствующей невозмущённой переключаемой системы асимптотически устойчиво.

Рассмотрим теперь возмущённую систему, состоящую из подсистем

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 - x_1 x_2^2 + x_1^\nu, \quad \dot{x}_2 = -x_1^2 x_2 - x_2^3 + x_2^\nu; \quad (23)$$

$$\dot{x}_1 = x_1^3 + x_1 x_2^2 + x_1^\nu, \quad \dot{x}_2 = x_1^2 x_2 + x_2^3 + x_2^\nu, \quad (24)$$

где $\nu = \text{const} > 0$. Возмущения здесь представлены стационарными функциями ($\zeta = 0$). Известно [1, с. 230–231], что ограниченные относительно времени возмущения не нарушают асимптотическую устойчивость нулевого решения однородной стационарной системы без переключений, если порядок этих возмущений больше порядка однородности системы. Однако для однородных систем с переключениями это, вообще говоря, не так. Переключения могут приводить к существенному изменению динамики однородной системы, поэтому условия $\nu > 3$ будет недостаточно для асимптотической устойчивости нулевого решения гибридной системы, образованной из подсистем (23), (24), что подтверждается численными расчётами. Согласно неравенству (20) для сохранения асимптотической устойчивости требуется более жёсткое условие: $\nu > 5$.

3.2. СЛУЧАЙ ВЫПОЛНЕНИЯ УСЛОВИЯ 2) ТЕОРЕМЫ 1

Исследуем теперь ситуацию, когда асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (1), (3) гарантируется условием 2) теоремы 1. Снова определяем значения $m = m(t_0)$ и $k = k(t_0, t)$, как и ранее, при $t \geq t_0 \geq 0$ и строим функцию $\Psi(t_0, t)$ по правилу (15), используя только в подынтегральных выражениях функцию $\psi(0, t)$ вместо функции $\varphi(0, t)$.

Теорема 3. Пусть для гибридной системы (1), (3) построены функции Ляпунова, удовлетворяющие оценкам (6), (9), (10), и выполнено условие 2) теоремы 1. Тогда если возмущения удовлетворяют неравенствам (14), причём $\nu \geq \mu$, то для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (4), (3) достаточно, чтобы для любого $l > 0$ нашлось такое $\hat{T} \geq 0$, что при всех $t \geq \hat{T}$ справедливо неравенство

$$\psi^{-1}(0, t)\Psi(\hat{T}, t) \leq l. \quad (25)$$

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon \in (0, H)$. Выберем любую константу $d > 0$. Найдём некоторые постоянные $\Delta > 0$ и $l > 0$, удовлетворяющие неравенствам

$$\frac{a_2^{-\rho}}{d} \leq \Delta, \quad \frac{a_1^{-\rho}}{\Delta} < d - \rho l a_4 \Delta^{\frac{\nu-\mu}{\mu-1}}. \quad (26)$$

Здесь снова $a_1 = \min_{s \in Q} a_{1s}$, $a_2 = \max_{s \in Q} a_{2s}$, $a_4 = \max_{s \in Q} a_{3s} a_{1s}^{-(1+\rho)}$.

По найденному l определим значение $\hat{T} \geq 0$ из условия (25). Возьмём $T \geq \hat{T}$ такое, что

$$\psi(0, t) > \frac{\Delta}{\varepsilon^{\mu-1}} \quad \text{при } t \geq T.$$

В соответствии с условием 2) теоремы 1 найдём константу L такую, что $\psi^{-1}(0, t)\varphi(0, t) \geq L$ при всех $t \geq 0$. Для произвольного $t_0 \geq T$ будем определять положительную величину $\xi(t_0)$ согласно условиям

$$\xi(t_0) \leq \frac{a_2^{-\rho}}{d}, \quad \frac{a_2^{-\rho}}{\xi(t_0)} + \rho \left(L - \frac{\varphi(0, t_0)}{\psi(0, t_0)} \right) \geq d. \quad (27)$$

Покажем, что если

$$t_0 \geq T, \quad \|\mathbf{x}_0\|^{\mu-1} < \frac{\xi(t_0)}{\psi(0, t_0)}, \quad (28)$$

то

$$\|\mathbf{x}(t)\|^{\mu-1} < \frac{\Delta}{\psi(0, t)} \quad \text{при } t \geq t_0. \quad (29)$$

Здесь $\mathbf{x}(t)$ — решение системы (4), (3), выходящее из точки \mathbf{x}_0 в момент времени t_0 .

Действительно, пусть начальные данные решения системы (4), (3) удовлетворяют неравенствам (28). Предположим, что найдётся такое $t_1 > t_0$, что $\|\mathbf{x}(t_1)\|^{\mu-1} = \Delta/\psi(0, t_1)$. На отрезке $[t_0, t_1]$ имеем

$$\left(\frac{\partial V_s(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T (\mathbf{F}_s(t, \mathbf{x}) + \mathbf{G}(t, \mathbf{x})) \leq (\alpha_s(t) + a_4 \Delta^{\frac{\nu-\mu}{\mu-1}} M(t) \psi^{-\frac{\nu-\mu}{\mu-1}}(0, t)) V_s^{1+\rho}(\mathbf{x}).$$

Интегрируя эти неравенства на промежутке $[t_0, t_1]$, находим, что

$$V_{\sigma(t_1)}^{-\rho}(\mathbf{x}(t_1)) \geq \psi(t_0, t_1) V_{\sigma(t_0)}^{-\rho}(\mathbf{x}_0) + \rho \varphi(t_0, t_1) - \rho a_4 \Delta^{\frac{\nu-\mu}{\mu-1}} \Psi(t_0, t_1).$$

Учитывая соотношения (6), (13), отсюда получаем

$$\frac{a_1^{-\rho}}{\Delta} \geq \frac{a_2^{-\rho}}{\xi(t_0)} + \rho \left(L - \frac{\varphi(0, t_0)}{\psi(0, t_0)} \right) - \rho l a_4 \Delta^{\frac{\nu-\mu}{\mu-1}},$$

что противоречит неравенствам (26), (27). Таким образом, неравенство (29) должно выполняться при всех $t \geq t_0$ и тогда, как и при доказательстве теоремы 2, приходим к требуемому. Теорема доказана.

Замечание 4. Перепишем условие асимптотической устойчивости, сформулированное в теореме 3, в более простой форме. Не умаляя общности будем искать требуемое значение \hat{T} среди моментов переключений/импульсов: $\hat{T} = \tau_{m-1}$, где m — некоторое натуральное число. Для каждого $t \geq \hat{T}$ определим целое неотрицательное k так, чтобы $t \in [\tau_{m+k-1}, \tau_{m+k})$. Учитывая, что функция $\Psi(\hat{T}, t)$ монотонно возрастает на интервалах $[\tau_{m+k-1}, \tau_{m+k})$, $k = 0, 1, \dots$, а функция $\psi(0, t)$ сохраняет постоянное значение на каждом из этих интервалов, условие (25)

достаточно проверить только для левосторонних моментов $t = \tau_{m+k}^-$, $k = 0, 1, \dots$. Нетрудно убедиться, что

$$\psi^{-1}(0, \tau_{m+k}^-) \Psi(\tau_{m-1}, \tau_{m+k}^-) = \sum_{i=m-1}^{m+k-1} (\varkappa_1 \dots \varkappa_i)^{\frac{\rho(\nu-1)}{\mu-1}} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} M(\tau) d\tau, \quad k = 0, 1, \dots$$

(здесь при $m = 1$ считаем $\varkappa_1 \dots \varkappa_0 = 1$). Тогда для достижения требуемого условия (25) необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{i=0}^{+\infty} (\varkappa_1 \dots \varkappa_i)^{\frac{\rho(\nu-1)}{\mu-1}} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} M(\tau) d\tau. \quad (30)$$

Действительно, в этом случае, согласно критерию сходимости, для любого $l > 0$ найдётся такое натуральное m , что $\psi^{-1}(0, \tau_{m+k}^-) \Psi(\tau_{m-1}, \tau_{m+k}^-) \leq l$ при всех $k = 0, 1, \dots$

Пример 2. Пусть $\varkappa_i = \varkappa \in (0, 1)$, $M(t) \leq M_i$ при $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$, $T_i = \tau_i - \tau_{i-1}$, $i \in \mathbb{N}$. Найдём $P = \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{M_{i+1} T_{i+1}}$. Тогда для сходимости ряда (30) достаточно выполнения неравенства $\varkappa^{\rho(\nu-1)/(\mu-1)} < 1/P$, откуда нетрудно получить ограничение на допустимый порядок возмущений ν .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проблема изучения влияния возмущений на устойчивость динамических систем актуальна для обеспечения работоспособности практических процессов, моделируемых этими системами. За последние десятилетия было установлено множество критериев устойчивости по линейному и нелинейному приближению, предложенных разными авторами. Наличие в системе нестационарностей, а также воздействие импульсных эффектов и переключений между возможными режимами функционирования системы значительно усложняют задачу. Динамика решений системы в этом случае может принципиально меняться, что, в свою очередь, может привести к изменению допустимых ограничений на возмущения. В настоящей статье исследовалось влияние возмущений на гибридную систему с переключениями и импульсами, состоящую из семейства однородных нестационарных подсистем. Отметим, что рассматриваемые подходы могут быть применены для широкого класса других существенно нелинейных систем. В частности, не представляет сложности распространить полученные результаты на случай переключений между подсистемами с разными порядками однородностей.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зубов, В.И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования / В.И. Зубов. — Л. : Машиностроение, 1974. — 335 с.
2. Liberzon, D. Switching in Systems and Control / D. Liberzon. — Boston : Birkhäuser, 2003. — 233 p.
3. Lakshmikantham, V. Theory of Impulsive Differential Equations / V. Lakshmikantham, D.D. Bainov, P.S. Simeonov. — Singapore : World Scientific, 1989. — 288 p.
4. Lu, J. Average dwell time based stability analysis for nonautonomous continuous-time switched systems / J. Lu, Z. She // Int. J. Robust Nonl. Control. — 2019. — V. 29, № 8. — P. 2333–2350.
5. Stabilisability of time-varying switched systems based on piecewise continuous scalar functions / J. Lu, Z. She, W. Feng, S.S. Ge // IEEE Trans. on Automatic Control. — 2019. — V. 64, № 6. — P. 2637–2644.

6. Finite-time stability and asynchronously switching control for a class of time-varying switched nonlinear systems / R. Wang, J. Xing, Z. Xiang, Q. Yang // Trans. of the Institute of Measurement and Control. — 2019. — V. 42, № 6. — P. 1215–1224.
7. Unified stability criteria for slowly time-varying and switched linear systems / X. Gao, D. Liberzon, J. Liu, T. Basar // Automatica. — 2018. — V. 96. — P. 110–120.
8. Platonov, A.V. Stability conditions for some classes of time-varying switched systems / A.V. Platonov // Int. J. Syst. Science. — 2022. — V. 35, № 10. — P. 2235–2246.
9. Aleksandrov, A.Yu. On the asymptotic stability of switched homogeneous systems / A.Yu. Aleksandrov, A.A. Kosov, A.V. Platonov // Syst. Control Lett. — 2012. — V. 61, № 1. — P. 127–133.
10. Zhang, J. Global asymptotic stabilisation for switched planar systems / J. Zhang, Z. Han, J. Huang // Int. J. Syst. Science. — 2015. — V. 46, № 5. — P. 908–918.
11. Aleksandrov, A. Stability analysis of switched homogeneous time-delay systems under synchronous and asynchronous commutation / A. Aleksandrov, D. Efimov // Nonlin. Anal. Hybrid Syst. — 2021. — V. 42. — Art. 101090.
12. Liu, X. Links between different stabilities of switched homogeneous systems with delays and uncertainties / X. Liu, D. Liu // Int. J. Robust Nonl. Control. — 2016. — V. 26, № 1. — P. 174–184.
13. On robust stability of switched homogeneous systems / H. Yang, D. Zhao, B. Jiang, S. Ding // IET Control Theory & Applications. — 2021. — V. 15, № 5. — P. 758–770.
14. Rosier, L. Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field / L. Rosier // Syst. Control Lett. — 1992. — V. 19, № 6. — P. 467–473.
15. Александров, А.Ю. Об устойчивости решений нелинейных систем с неограниченными возмущениями / А.Ю. Александров // Мат. заметки. — 1998. — Т. 63, № 1. — С. 3–8.
16. Платонов, А.В. Исследование устойчивости решений нелинейных систем с неограниченными возмущениями / А.В. Платонов // Дифференц. уравнения. — 1999. — Т. 35, № 12. — С. 1707–1708.

ON THE STABILITY BY THE NONLINEAR NON-STATIONARY HYBRID APPROXIMATION

© 2024 / A. V. Platonov

*Saint Petersburg State University, Russia
e-mail: a.platonov@spbu.ru*

The paper investigates the effect of non-stationary perturbations on the stability of nonlinear non-autonomous systems with switching and impulsive effects. Sufficient conditions have been obtained to guarantee the asymptotic stability of a given equilibrium position of the initial system, and restrictions have been established under which the asymptotic stability is preserved under perturbations acting on the system. Note that the non-stationarities present both in the system itself and in perturbations can be described by unbounded functions with respect to time, as well as functions arbitrarily close to zero. It is assumed that the basic system is homogeneous in terms of the state vector. To find the required results, the second Lyapunov method is used in combination with the theory of differential inequalities.

Keywords: non-stationary impulsive switched system, perturbation, stability

REFERENCES

1. Zubov, V.I., *Mathematical Methods for the Study of Automatic Control Systems*, Oxford; New York: Pergamon Press, 1962.
2. Liberzon, D., *Switching in Systems and Control*, Boston: Birkhäuser, 2003.
3. Lakshmikantham, V., Bainov, D.D., and Simeonov, P.S., *Theory of Impulsive Differential Equations*, Singapore: World Scientific, 1989.

4. Lu, J. and She, Z., Average dwell time based stability analysis for nonautonomous continuous-time switched systems, *Int. J. Robust Nonl. Control*, 2019, vol. 29, no. 8, pp. 2333–2350.
5. Lu, J., She, Z., Feng, W., and Ge, S.S., Stabilisability of time-varying switched systems based on piecewise continuous scalar functions, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2019, vol. 64, no. 6, pp. 2637–2644.
6. Wang, R., Xing, J., Xiang, Z., and Yang, Q., Finite-time stability and asynchronously switching control for a class of time-varying switched nonlinear systems, *Trans. of the Institute of Measurement and Control*, 2019, vol. 42, no. 6, pp. 1215–1224.
7. Gao, X., Liberzon, D., Liu, J., and Basar, T., Unified stability criteria for slowly time-varying and switched linear systems, *Automatica*, 2018, vol. 96, pp. 110–120.
8. Platonov, A.V., Stability conditions for some classes of time-varying switched systems, *Int. J. Syst. Science*, 2022, vol. 35, no. 10, pp. 2235–2246.
9. Aleksandrov, A.Yu., Kosov, A.A., and Platonov, A.V., On the asymptotic stability of switched homogeneous systems, *Syst. Control Lett.*, 2012, vol. 61, no. 1, pp. 127–133.
10. Zhang, J., Han, Z., and Huang, J., Global asymptotic stabilisation for switched planar systems, *Int. J. Syst. Science*, 2015, vol. 46, no. 5, pp. 908–918.
11. Aleksandrov, A. and Efimov, D., Stability analysis of switched homogeneous time-delay systems under synchronous and asynchronous commutation, *Nonlin. Anal. Hybrid Syst.*, 2021, vol. 42, art. 101090.
12. Liu, X. and Liu, D., Links between different stabilities of switched homogeneous systems with delays and uncertainties, *Int. J. Robust Nonl. Control*, 2016, vol. 26, no. 1, pp. 174–184.
13. Yang, H., Zhao, D., Jiang, B., and Ding, S., On robust stability of switched homogeneous systems, *IET Control Theory & Applications*, 2021, vol. 15, no. 5, pp. 758–770.
14. Rosier, L., Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field, *Syst. Control Lett.*, 1992, vol. 19, no. 6, pp. 467–473.
15. Aleksandrov, A.Yu., Stability of solutions of nonlinear systems with unbounded perturbations, *Math. Notes*, 1996, vol. 63, no. 1, pp. 3–8.
16. Platonov, A.V., Issledovanie ustoychivosti reshenii nelineinykh sistem s neogranichennymi vozmushcheniyami, *Differ. Uravn.*, 1999, vol. 35, no. 12, pp. 1707–1708.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ЭНТРОПИЙНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МЕРОЗНАЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2024 г. В. Ф. Вильданова

Институт математики с вычислительным центром

Уфимского научного центра РАН, г. Уфа

e-mail: gilvenera@mail.ru

Поступила в редакцию 11.05.2024 г., после доработки 04.10.2024 г.; принята к публикации 31.10.2024 г.

Доказана единственность энтропийного решения в гиперболическом пространстве задачи Дирихле для нелинейного уравнения второго порядка с мерозначным потенциалом. Ограничения на структуру уравнения сформулированы в терминах обобщённой N -функции.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, энтропийное решение, гиперболическое пространство

DOI: 10.31857/S0374064124120062, EDN: IPFFXJ

ВВЕДЕНИЕ

Пусть \mathbb{H}^n — гиперболическое пространство размерности $n \geq 2$. В настоящей работе доказывается единственность энтропийного решения задачи Дирихле для уравнения

$$-\operatorname{div}(a(x, du)) + b_0(x, u) + b_1(x, u)\mu = f, \quad f \in L_1(\mathbb{H}^n),$$

где μ — неотрицательная мера Радона, du — дифференциал функции u . Существование энтропийных решений для этого уравнения было установлено в статье [1] (рассматривалась функция $a(x, u, du)$).

Понятие энтропийного решения задачи Дирихле было предложено в работе [2], в которой в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (необязательно ограниченной), $n \geq 2$, рассматривалось эллиптическое уравнение с L_1 -данными

$$-\operatorname{div}(a(x, \nabla u)) = f(x, u), \quad \sup_{|u| < c} |f(x, u)| \in L_{1, \text{loc}}(\Omega), \quad c > 0.$$

На функцию a накладывались некоторые условия ограниченности, монотонности и коэрцитивности. Доказано существование и единственность энтропийного решения задачи Дирихле. После этой работы энтропийные решения стали объектом исследования многих математиков. В работе [3] установлена эквивалентность энтропийных и ренормализованных решений нелинейной эллиптической задачи в пространствах Музилака–Орлича.

В статье [4] в ограниченной области Ω была рассмотрена задача

$$-\Delta u + \mu g(u) = \sigma, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

для которой установлены существование и единственность очень слабого решения при некоторых ограничениях на функцию g , меру Радона σ и неотрицательную меру μ из класса Морри.

В [5] для уравнения с мерой Радона σ

$$-\operatorname{div}(a(x, \nabla u)) + a_0(x, u) = \sigma$$

доказаны существование и единственность ренормализованного решения задачи Дирихле для произвольной области Ω .

В статье [6] в неограниченной области исследована задача Дирихле

$$-\operatorname{div} a(x, u, \nabla u) + M'(x, u) + b(x, u, \nabla u) = \sigma, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

где функции a, b имеют рост, определяемый обобщённой N -функцией $M(x, u)$, а ограниченная мера Радона σ имеет специальный вид. Требовалось, чтобы сопряжённая функция $\bar{M}(x, u)$ удовлетворяла Δ_2 -условию и $b(x, u, \nabla u)u \geq 0$. Доказано существование энтропийного решения задачи Дирихле и обосновано, что оно является ренормализованным решением.

В настоящей работе предполагается, что функции $M(x, u)$ и $\bar{M}(x, u)$ удовлетворяют Δ_2 -условию. Известно, что пространство $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ можно пополнять как по норме $(\int |\nabla u|^p dx)^{1/p}$, так и по норме $(\int (|u|^p + |\nabla u|^p) dx)^{1/p}$, причём во втором случае получается более узкое пространство $W_p^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{H}_p^1(\mathbb{R}^n)$. Как правило (см., например, [5, 6]), выбирается второй случай, что приводит к некоторым дополнительным ограничениям на функции, входящие в уравнение. Ниже, как и в [1], используется пространство $\mathcal{H}_M^1(\mathbb{R}^n)$ первого типа. Кроме того, в отличие от [2] и других исследований, монотонность функций b_i , $i=0, 1$, по u не предполагается.

Отметим ещё работу [7], в которой доказана корректность нелинейной задачи Дирихле

$$\mathcal{L}u = -\operatorname{div}(a(x, u, \nabla u) + G(u)) + \mu u = f, \quad x \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

где $G(u)$ обозначает векторное поле $G(u)^i = F^i(x)u_{x_i}$, $F^i \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$. Рассмотрен также случай $\Omega = \mathbb{R}^n$. Класс операторов \mathcal{L} содержит оператор Шрёдингера $-\Delta + \mu$ с сингулярными потенциалами μ .

В [8] для уравнения вида

$$-\operatorname{div} a(x, \nabla u) = \mu, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

при некоторых условиях регулярности на функцию Музилака–Орлича $M(x, z)$ показано, что каждая ограниченная мера Радона μ в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ может быть представлена в виде $\mu = \mu_M + \mu_s$, причём μ_M называется диффузной по M -ёмкости Cap_M и $\mu_M(E) = 0$ для любого $E \subseteq \Omega$ такого, что $\text{Cap}_M(E, \Omega) = 0$, а μ_s сосредоточена на множестве нулевой M -ёмкости и называется сингулярной. Доказано существование (а при $\mu = \mu_M$ и единственность) ренормализованного решения задачи Дирихле.

В работе [9] для анизотропной N -функции $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ установлено аналогичное разложение меры по анизотропной Φ -ёмкости и в случае диффузной меры μ_Φ доказана единственность аппроксимационного решения задачи Дирихле в ограниченной области для уравнения (1).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Рассмотрим гиперболическое пространство \mathbb{H}^n , $n \geq 2$, в виде модели Пуанкаре в единичном шаре B_1 с римановой метрикой

$$g_{ij}(x) = \frac{4}{(1 - |x|^2)^2} \delta_{ij}, \quad x \in B_1, \quad i, j = \overline{1, n},$$

кроме того, пусть g^{ij} — элементы обратной матрицы к (g_{ij}) , $\partial B_1 \equiv \partial_\infty \mathbb{H}^n = \{\infty\}$. Геодезическое расстояние между произвольным $x \in \mathbb{H}^n$ и точкой 0 находится как

$$\rho(x) = \int_0^{|x|} \frac{2}{1-s^2} ds = \ln \frac{1+|x|}{1-|x|}, \quad x \in B_1 \equiv \mathbb{H}^n; \quad (2)$$

поэтому $|x| = \operatorname{th}(\rho(x)/2)$.

В пространстве \mathbb{H}^n элемент объёма равен

$$d\nu = \sqrt{g} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \frac{2^n}{(1-|x|^2)^n} dx,$$

где dx — мера Лебега в \mathbb{R}^n .

Для каждого $x \in \mathbb{H}^n$ через $T_x \mathbb{H}^n$ обозначим касательное пространство в этой точке. Очевидно, что $(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \dots, \partial/\partial x_n)$ — базис в $T_x \mathbb{H}^n$. Скалярное произведение векторов и длину вектора будем обозначать соответственно как $(\beta, \xi)_g \equiv (\beta, \xi)_{g,x} = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) \beta^i \xi^j$ и $|\beta|_g = \sqrt{(\beta, \beta)_g}$ для любых $\beta, \xi \in T_x \mathbb{H}^n$, $x \in \mathbb{H}^n$, где $\beta = \sum_{i=1}^n \beta^i \partial/\partial x_i$, $\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i \partial/\partial x_i$ для некоторых $(\beta^1, \dots, \beta^n) \in \mathbb{R}^n$ и $(\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n$. Градиент определяется формулой

$$\nabla_g u = ((\nabla_g u)^1, \dots, (\nabla_g u)^n), \quad (\nabla_g u)^i = \sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Через $\chi^k(\mathbb{H}^n)$ обозначим множество векторных полей класса C^k , $k \geq 0$, на многообразии \mathbb{H}^n .

Дифференциал df функции f имеет локальные координаты $\partial f / \partial x^i$ и при этом $|df|_g = |\nabla_g f|_g$. Производная Ли функции $f \in C^1(\mathbb{H}^n)$ вдоль векторного поля $X \in \chi^0(\mathbb{H}^n)$ в локальной системе координат определяется формулой

$$(df, X) = (X, df) = (\nabla f, X)_g = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i},$$

а дивергенция векторного поля X как

$$\operatorname{div}_g X = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (X^i \sqrt{g}).$$

Известно, что

$$\operatorname{div}_g(fX) = f \operatorname{div}_g X + (X, df).$$

Далее через $\mathcal{L}(V; W)$ обозначим множество линейных ограниченных операторов, определённых в банаевом пространстве V и принимающих значения в банаевом пространстве W .

Через $\langle l, v \rangle$ будем обозначать действие функционала $l \in V^*$ на вектор $v \in V$.

Приведём необходимые сведения из теории пространств Музилака–Орлича (см. [10]).

Определение 1. Пусть функция $M(x, z) : \mathbb{H}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $M(x, \cdot)$ — N -функция по $z \in \mathbb{R}$, т.е. она является выпуклой вниз, неубывающей, чётной, непрерывной, $M(x, 0) = 0$ для п.в. $x \in \mathbb{H}^n$ и $\inf_{x \in \mathbb{H}^n} M(x, z) > 0$ для всех $z \neq 0$,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{H}^n} \frac{M(x, z)}{z} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \inf_{x \in \mathbb{H}^n} \frac{M(x, z)}{z} = \infty$$

(очевидно, что функция $M(x, z)/z$ не убывает);

2) $M(\cdot, z)$ — измеримая функция по $x \in \mathbb{H}^n$ для любых $z \in \mathbb{R}$.

Такая функция $M(x, z)$ называется *функцией Музилака–Орлича*.

Сопряжённая функция $\bar{M}(x, \cdot)$ к функции Музилака–Орлича $M(x, \cdot)$ для п.в. $x \in \mathbb{H}^n$ и любых $z \geq 0$ определяется равенством

$$\bar{M}(x, z) = \sup_{y \geq 0} (yz - M(x, y)).$$

Отсюда следует неравенство Юнга $|zy| \leq M(x, z) + \bar{M}(x, y)$, $z, y \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{H}^n$.

Будем предполагать, что

$$M(\cdot, z), \bar{M}(\cdot, z) \in L_{1, \text{loc}}(\mathbb{H}^n), \quad z > 0. \quad (3)$$

Говорят, что функция $M(x, z)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, если существуют постоянная C и функция $G \in L_1(\mathbb{H}^n)$ такие, что

$$M(x, 2z) \leq CM(x, z) + G(x) \quad \text{для любых } z \in \mathbb{R} \quad \text{и } x \in \mathbb{H}^n.$$

Будем предполагать, что M и \bar{M} удовлетворяют Δ_2 -условию и подчиняются условию (3).

Определим пространство Лебега $L_M(\mathbb{H}^n)$ как множество таких измеримых на \mathbb{H}^n функций u , для которых конечна норма Люксембурга

$$\|u\|_M = \inf\{k > 0 : \varrho(k^{-1}u) \leq 1\}, \quad \varrho(u) = \int_{\mathbb{H}^n} M(x, u) d\nu.$$

Пространство $L_M(\mathbb{H}^n)$ сепарабельное и рефлексивное, $(L_M(\mathbb{H}^n))^* = L_{\bar{M}}(\mathbb{H}^n)$ [11, следствие 3.6.7]. Сходимость $\|u_j - u\|_M \rightarrow 0$ равносильна модулярной сходимости $\varrho(u_j - u) \rightarrow 0$.

Для двух сопряжённых функций Музилака–Орлича M и \bar{M} , если $u \in L_M(\mathbb{H}^n)$ и $v \in L_{\bar{M}}(\mathbb{H}^n)$, выполняется неравенство Гёльдера $|\int_{\mathbb{H}^n} u(x)v(x) d\nu| \leq 2\|u\|_M\|v\|_{\bar{M}}$.

Для любого $\sigma > 0$ определим шар в гиперболическом пространстве $\mathfrak{B}_\sigma = \{x \in \mathbb{H}^n : \rho(x) < \sigma\}$. Следовательно, для любого $r \in (0, 1)$

$$B_r = \mathfrak{B}_{\ln \frac{1+r}{1-r}},$$

точнее, евклидов шар B_r является картой для гиперболического шара. Всюду далее числа r, σ связаны равенством $\sigma = \ln((1+r)/(1-r))$. Очевидно, в силу гладкости метрики (g_{ij}) в шаре B_r , что геодезические расстояния ρ' между парами точек шара \mathfrak{B}_σ оцениваются через евклидовы расстояния соответствующих точек в шаре B_r : $C^{-1}r' \leq \rho' \leq Cr'$. Пространства $W_p^1(\mathfrak{B}_\sigma)$ и $W_p^1(B_r)$ естественным образом отождествляются и соответствующие нормы эквивалентны.

Пространство $\mathcal{H}_M^1(\mathbb{H}^n)$ определим как пополнение пространства функций $\mathcal{D}(\mathbb{H}^n)$ по норме

$$\|u\|_{M,1} = \| |du|_g \|_M = \|u\|_V.$$

Для краткости это пространство будем обозначать через V . Сопряжённое к V пространство с индуцированной нормой обозначим через V^* . Для гиперболического пространства при $1 \leq p < n$ известна оценка [12, теорема 2.28]

$$\|u\|_{p^*, \mathbb{H}^n} \leq C\|\nabla_g u\|_{p, \mathbb{H}^n}, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n), \quad p^* = np/(n-p).$$

Отсюда следует, что

$$\|u\|_{W_p^1(\mathfrak{B}_r)} \leq h(r)\|u\|_V, \quad r > 0, \quad (4)$$

где $h(r)$ — неотрицательная возрастающая функция.

Поскольку функция u с конечной нормой $\|\nabla_g u\|_{p, \mathbb{H}^n}$ имеет также конечную норму $\|u\|_{p^*, \mathbb{H}^n}$, т.е. в определённом смысле стремится к нулю на бесконечности, этот факт интерпретируем как краевое условие Дирихле в рассматриваемой нами задаче. Из Δ_2 -условия на функцию \bar{M} следует (см. [13, предложение 2.1]), что существуют числа $p \in (1, n)$, $\beta \in (0, 1)$, r_0 такие, что при всех $\lambda > r_0$ и при почти всех $x \in \mathbb{H}^n$ выполнено неравенство

$$\beta \lambda^p < M(x, \lambda). \quad (5)$$

Напомним, что из ограниченной последовательности элементов $\{v^j\} \in L_M(\mathbb{H}^n)$, $j \in \mathbb{N}$, рассматриваемых как линейные функционалы на пространстве $L_{\bar{M}}(\mathbb{H}^n)$, можно выделить $*$ -слабо сходящуюся подпоследовательность v^{j_k} [14, гл. 4, § 3, теорема 3].

Для $v \in L_M(\mathbb{H}^n)$ справедливы неравенства $\|v\|_M \leq \varrho_M(v) + 1$; $\varrho_M(v) \leq \|v\|_M$, если $\|v\|_M \leq 1$; $\|v\|_M \leq \varrho_M(v)$, если $\|v\|_M > 1$.

Последовательность функций $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}} \in L_M(\mathbb{H}^n)$ называется *модулярно сходящейся* к $v \in L_M(\mathbb{H}^n)$, если существует число $\lambda > 0$ такое, что $\lim_{j \rightarrow \infty} \varrho_M((v^j - v)/\lambda) = 0$. Если M удовлетворяет Δ_2 -условию, то модулярная сходимость и сходимость по норме совпадают.

Будем рассматривать оператор вида

$$\mathcal{B}u = b_0(x, u) + b_1(x, u)\mu,$$

где μ — неотрицательная мера Радона. Предполагается, что оператор $\mathcal{B}: \mathcal{D}(\mathbb{H}) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{H})$ при $u, v \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^n)$ действует по правилу

$$\langle \mathcal{B}u, v \rangle = \int_{\mathbb{H}^n} b_0(x, u)v \, d\nu + \int_{\mathbb{H}^n} b_1(x, u)v \, d\mu.$$

Левая часть последней формулы будет использоваться также для обозначения суммы двух интегралов в правой части для более широкого класса функций, и тогда символ \mathcal{B} не следует понимать как оператор. Меру Радона μ на \mathbb{H}^n можно рассматривать как меру на шаре B_1 .

Пусть μ — мера Радона с конечной полной вариацией и носителем, лежащим в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{H}^n$. Будем считать, что мера продолжена нулем вне Ω . Напомним, что μ принадлежит классу Морри $\mathbb{M}_s(\Omega)$, $s \geq 1$, если для любого шара с центром в x выполнено неравенство

$$|B_r(x)|_\mu := \int_{B_r(x)} d|\mu| \leq cr^{n(1-1/s)}, \quad r > 0, \quad x \in \Omega.$$

Докажем единственность энтропийного решения уравнения

$$-\operatorname{div}_g(a(x, du)) + \mathcal{B}u = f, \quad f \in L_1(\mathbb{H}^n). \quad (6)$$

Будем предполагать, что существует число $s > np/(np+p-n)$ (p из (5)) такое, что

$$\mu \in \mathbb{M}_s(B_r) \quad \text{для любого } r \in (0, 1). \quad (7)$$

Известно [4, предложение 2.5] компактное вложение при $q < \theta p/(n-p)$ для неотрицательной меры $\mu \in \mathbb{M}_{n/(n-\theta)}(\Omega)$:

$$W_p^1(\Omega) \hookrightarrow L_{q,\mu}(\Omega). \quad (8)$$

В случае меры Лебега компактным является вложение $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow L_{q_0}(\Omega)$ при $q_0 < np/(n-p)$.

Очевидно, что класс Морри $\mathbb{M}_s(\mathfrak{B}_\sigma)$ мер на шаре \mathfrak{B}_σ многообразия \mathbb{H}^n можно рассматривать и как класс Морри $\mathbb{M}_s(B_r)$ мер на шаре B_r евклидова пространства.

Каратеодориевое отображение $a(x, y): T_x^*\mathbb{H}^n \rightarrow T_x\mathbb{H}^n$ в (6) удовлетворяет при $x \in \mathbb{H}^n$ условиям:

- ограниченности с функцией $G \in L_1(\mathbb{H}^n)$ и константой $C > 0$:

$$\bar{M}(x, |a(x, y)|_g) \leq G(x) + CM(x, |y|_g), \quad y \in T_x^*\mathbb{H}^n; \quad (9)$$

- коэрцитивности

$$(a(x, y), y) \geq c_0 M(x, |y|_g) - G(x), \quad c_0 > 0; \quad (10)$$

- монотонности

$$(a(x, y) - a(x, z), y - z) > 0, \quad y \neq z, \quad y, z \in T_x^*\mathbb{H}^n, \quad x \in \mathbb{H}^n. \quad (11)$$

Кроме того, пусть каратеодориевая функция b_0 и μ -каратеодориевая функция b_1 удовлетворяют неравенствам

$$|b_0(x, s)| \leq \hat{G}_0(x), \quad |s| \leq 1, \quad x \in \mathbb{H}^n, \quad \hat{G}_0 \in L_1(\mathbb{H}^n), \quad (12)$$

$$|b_1(x, s)| \leq \hat{G}_1(x), \quad |s| \leq 1, \quad x \in \mathbb{H}^n, \quad \hat{G}_1 \in L_{1,\mu}(\mathbb{H}^n), \quad (13)$$

$$b_i(x, r)r \geq 0, \quad i = 0, 1, \quad r \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

Пусть существует возрастающая функция $\tilde{g}(r)$, $r > 0$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{g}(r) = \infty$, такая, что

$$|b_1(x, s)| > \tilde{g}(r), \quad s \geq r, \quad x \in \mathbb{H}^n. \quad (15)$$

Определим функцию

$$T_k(r) = \begin{cases} k & \text{при } r > k, \\ r & \text{при } |r| \leq k, \\ -k & \text{при } r < -k. \end{cases}$$

Через $\hat{\mathcal{T}}_M^1(\mathbb{H}^n)$ обозначим множество измеримых функций $u: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что $T_k(u) \in V$ при любом $k > 0$.

Определение 2. Энтропийным решением задачи Дирихле для уравнения (6) называется функция $u \in \hat{\mathcal{T}}_M^1(\mathbb{H}^n)$ такая, что при всех $k > 0$, $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^n)$ конечны интегралы $\int_{\mathbb{H}^n} b_0(x, u) \times T_k(u - \xi) d\nu$, $\int_{\mathbb{H}^n} b_1(x, u) T_k(u - \xi) d\mu$ и верно неравенство

$$\int_{\mathbb{H}^n} ((a(x, du), dT_k(u - \xi)) - f T_k(u - \xi)) d\nu + \langle \mathcal{B}u, T_k(u - \xi) \rangle \leq 0. \quad (16)$$

Обычно при определении энтропийного решения требуется, чтобы $b_0(x, u) \in L_1(\mathbb{H}^n)$. В настоящей работе этот факт устанавливается в лемме 1 как следствие условий (12)–(14). Отметим, что здесь речь не идёт о расширении области определения оператора \mathcal{B} .

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1. Пусть u – энтропийное решение задачи Дирихле для уравнения (6) и выполнены условия (7)–(11). Пусть функции $b_i(x, s)$, $i = 0, 1$, возрастают по s и выполнены неравенства (12)–(14). Тогда $b_0(x, u) \in L_1(\mathbb{H}^n)$, $b_1(x, u) \in L_{1,\mu}(\mathbb{H}^n)$ и при всех $k > k_0$ справедливы неравенства

$$\int_{\mathbb{H}^n} M(x, dT_k(u)) d\nu \leq Ck. \quad (17)$$

Доказательство. Запишем неравенство (16) при $\xi = 0$:

$$\int_{\mathbb{H}^n} (a(x, du), dT_k(u)) d\nu + \int_{\mathbb{H}^n} (b_0(x, u) - f) T_k(u) d\nu + \int_{\mathbb{H}^n} b_1(x, u) T_k(u) d\mu \leq 0.$$

Из условия (10) следует неравенство

$$\int_{\mathbb{H}^n} (a(x, du), dT_k(u)) d\nu \geq \int_{\mathbb{H}^n} (c_0 M(x, |dT_k(u)|_g) - G(x)) d\nu.$$

Таким образом,

$$\int_{\mathbb{H}^n} (c_0 M(x, |dT_k(u)|_g) + b_0(x, u) T_k(u)) d\nu + \int_{\mathbb{H}^n} b_1(x, u) T_k(u) d\mu \leq \int_{\mathbb{H}^n} (G + f T_k(u)) d\nu < \infty.$$

Следствием этого, ввиду (14), являются неравенства (17) и

$$\int_{\mathbb{H}^n} |b_0(x, u)| \chi_{\{|u|>1\}} d\nu + \int_{\mathbb{H}^n} |b_1(x, u)| \chi_{\{|u|>1\}} d\mu < \infty. \quad (18)$$

Из условий (12), (13) вытекает соотношение

$$\int_{\mathbb{H}^n} |b_0(x, u)| \chi_{\{|u|\leq 1\}} d\nu + \int_{\mathbb{H}^n} |b_1(x, u)| \chi_{\{|u|\leq 1\}} d\mu \leq \int_{\mathbb{H}^n} (\widehat{G}_0(x) + \widehat{G}_1(x)) d\nu < \infty,$$

откуда с учётом (18) получаем $b_0(x, u) \in L_1(\mathbb{H}^n)$, $b_1(x, u) \in L_{1,\mu}(\mathbb{H}^n)$. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть u — энтропийное решение задачи Дирихле для уравнения (6) и выполнены условия (7)–(11). Пусть функции $b_i(x, s)$, $i = 0, 1$, возрастают по s и выполнены неравенства (12)–(14). Тогда условие (16) справедливо при $\xi \in V \cap L_\infty(\mathbb{H}^n)$.

Доказательство. Пусть $\xi \in V$, $\|\xi\|_\infty \leq C_0$. Тогда найдётся последовательность $v_i \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^n)$, $i \in \mathbb{N}$, такая, что $\|v_i\|_\infty \leq C_0$, $dv_i \rightarrow d\xi$ в $L_M(\mathbb{H}^n)$. При этом из (4) следует сходимость $v_i \rightarrow \xi$ в $W_{p,\text{loc}}(\mathbb{H}^n)$ и ν -п.в. в \mathbb{H}^n . В силу (8) имеем также сходимости $v_i \rightarrow \xi$ в $L_{q,\mu,\text{loc}}(\mathbb{H}^n)$ и μ -п.в. в \mathbb{H}^n . Тогда

$$T_k(u - v_i) \rightarrow T_k(u - \xi) \quad \nu\text{-п.в. и } \mu\text{-п.в.}$$

Далее, $|dT_k(u - v_i)| \leq |dT_K(u)| + |dv_i(x)|$, где $K = k + C_0$. Нетрудно установить, что $dT_k(u - v_i) \rightharpoonup dT_k(u - \xi)$ *-слабо в $L_M(\mathbb{H}^n)$. Пользуясь определением 2, запишем неравенство

$$\int_{\mathbb{H}^n} (a(x, du), dT_k(u - v_i)) d\nu + \int_{\mathbb{H}^n} b_0(x, u) T_k(u - v_i) d\nu + \int_{\mathbb{H}^n} b_1(x, u) T_k(u - v_i) d\mu \leq \int_{\mathbb{H}^n} f T_k(u - v_i) d\nu.$$

Первый интеграл имеет вид $\int_{\mathbb{H}^n} (a(x, dT_K(u)), dT_k(u - v_i)) d\nu$, причём $a(x, dT_K(u)) \in L_{\overline{M}}(\mathbb{H}^n)$ (ввиду (9)). Поэтому возможен предельный переход при $i \rightarrow \infty$ в этом интеграле. Предельный переход в оставшихся интегралах совершается по теореме Лебега с использованием леммы 1. Лемма доказана.

Основным результатом работы является

Теорема. Пусть функции $b_i(x, s)$, $i = 0, 1$, возрастают по s и выполнены неравенства (12)–(14). Пусть u_1, u_2 — энтропийные решения задачи Дирихле для уравнения (6). Если выполнены условия (7)–(11), то $u_1 = u_2$.

Доказательство. Пользуясь определением 2 и леммой 2, запишем для u_1 неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{H}^n} (a(x, du_1), dT_k(u_1 - T_h(u_2))) d\nu + \int_{\mathbb{H}^n} b_0(x, u_1) T_k(u_1 - T_h(u_2)) d\nu + \\ & + \int_{\mathbb{H}^n} b_1(x, u_1) T_k(u_1 - T_h(u_2)) d\mu \leq \int_{\mathbb{H}^n} f T_k(u_1 - T_h(u_2)) d\nu. \end{aligned} \quad (19)$$

Очевидно, что в (19) можно в качестве u_2 подставить u_1 . Опуская индексы, будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{H}^n} (a(x, du), dT_k(u - T_h(u))) d\nu + \int_{\mathbb{H}^n} b_0(x, u) T_k(u - T_h(u)) d\nu + \\ & + \int_{\mathbb{H}^n} b_1(x, u) T_k(u - T_h(u)) d\mu \leq \int_{\mathbb{H}^n} f T_k(u - T_h(u)) d\nu. \end{aligned}$$

Используя (10) и (14), нетрудно получить неравенство

$$\int_{\{\mathbb{H}^n : h \leq |u| < h+k\}} c_0 M(x, u) d\nu \leq \int_{\{\mathbb{H}^n : |u| \geq h\}} (G + |f|k) d\nu = \varepsilon(h), \quad (20)$$

где $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow \infty$. Действительно, из соотношения

$$I(h) = \int_{\{\mathbb{H}^n : |u| \geq h\}} |G| d\nu \leq \int_{\{\mathbb{H}^n : |u| \geq h, |x| < R\}} |G| d\nu + \int_{\{\mathbb{H}^n : |u| \geq R\}} |G| d\nu$$

следует неравенство

$$\limsup_{h \rightarrow \infty} I(h) \leq \int_{\{\mathbb{H}^n : |u| \geq R\}} |G| d\nu,$$

поскольку $G \in L_1(\mathbb{H}^n)$ и $\text{meas}\{|u| \geq h, |x| < R\} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow \infty$. В силу произвольности $R > 0$ имеем $\limsup_{h \rightarrow \infty} I(h) = 0$.

Складывая неравенство (19) для u_1 с аналогичным для u_2 , получаем

$$\begin{aligned} I'_1 + I''_1 + I_2 + I_3 &:= \int_{\{\mathbb{H}^n : |u_1 - T_h(u_2)| < k\}} (a(x, du_1), dT_k(u_1 - T_h(u_2))) d\nu + \\ &+ \int_{\{\mathbb{H}^n : |u_2 - T_h(u_1)| < k\}} (a(x, du_2), dT_k(u_2 - T_h(u_1))) d\nu + \\ &+ \int_{\mathbb{H}^n} (b_0(x, u_1) T_k(u_1 - T_h(u_2)) + b_0(x, u_2) T_k(u_2 - T_h(u_1))) d\nu + \\ &+ \int_{\mathbb{H}^n} (b_1(x, u_1) T_k(u_1 - T_h(u_2)) + b_1(x, u_2) T_k(u_2 - T_h(u_1))) d\mu \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{H}^n} f(T_k(u_1 - T_h(u_2)) + T_k(u_2 - T_h(u_1))) d\nu =: I_4. \end{aligned} \quad (21)$$

Чтобы совершить предельный переход $h \rightarrow \infty$, будем разбивать каждый из интегралов на несколько частей. Положим $A_0 = \{x \in \mathbb{H}^n : |u_1 - u_2| < k, |u_1| < h, |u_2| < h\}$. Интегралы $I'_1 + I''_1$ по этому множеству можно записать в виде

$$I_0 = \int_{A_0} ((a(x, du_1) - a(x, du_2)), d(u_1 - u_2)) d\nu,$$

по множеству $A_1 = \{x \in \mathbb{H}^n : |u_1 - u_2| < k, |u_2| \geq h\}$ как

$$\int_{A_1} (a(x, du_1), d(u_1 - T_h(u_2))) d\nu = \int_{A_1} (a(x, du_1), du_1) d\nu \geq - \int_{\{|u_2| \geq h\}} G(x) d\nu = -\varepsilon(h).$$

Для оставшегося множества $A_2 = \{x \in \mathbb{H}^n : |u_1 - u_2| < k, |u_1| \geq h, |u_2| < h\}$ имеем неравенство

$$\int_{A_2} (a(x, du_1), d(u_1 - T_h(u_2))) d\nu \geq - \int_{A_2} (G(x) + (a(x, du_1), du_2)) d\nu.$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \left| \int_{A_2} (a(x, du_1), du_2) d\nu \right| &\leq \int_{\mathbb{H}^n : h \leq |u_1| < h+k} \overline{M}(x, |a(x, du_1)|_g) d\nu + \int_{\mathbb{H}^n : h-k \leq |u_2| < h} M(x, |du_2|_g) d\nu \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{H}^n : h \leq |u_1| < h+k} (G(x) + CM(x, \widehat{d}|du_1|_g)) d\nu + \int_{\mathbb{H}^n : h-k \leq |u_2| < h} M(x, |du_2|_g) d\nu = \varepsilon_1(h). \end{aligned}$$

Последнее равенство вытекает из (9), (20) и Δ_2 -условия. Аналогичные неравенства справедливы и для второго интеграла в (21). Суммируя эти соотношения, получаем $I'_1 + I''_1 \geq I_0 - \varepsilon_2(h)$.

Интеграл I_3 по множеству $B_0 = \{x \in \mathbb{H}^n : |u_1| < h, |u_2| < h\}$ даёт величину

$$J_0 = \int_{B_0} (b_1(x, u_1) - b_1(x, u_2)) T_k(u_1 - u_2) d\mu \geq 0,$$

а по множеству $B_1 = \{x \in \mathbb{H}^n : |u_1| \geq h\}$ с исчезающей мерой при $h \rightarrow \infty$ — величину, которая оценивается как

$$|J_1| \leq 2k \int_{B_1} (|b_1(x, u_1)| + |b_1(x, u_2)|) d\mu \leq \varepsilon_3(h).$$

По оставшемуся множеству интеграл J_2 имеет оценку $|J_2| \leq \varepsilon_4(h)$. В итоге $I_3 \geq -\varepsilon_5(h)$. Аналогично $I_2 \geq -\varepsilon_6(h)$, $I_4 \leq \varepsilon_7(h)$.

Суммируя эти неравенства, находим, что $I_0 \leq \varepsilon_8(h)$. Учитывая, что под интегралом стоит неотрицательная функция, по теореме Беппо–Леви при $h \rightarrow \infty$ получаем

$$\int_{\{\mathbb{H}^n : |u_1 - u_2| < k\}} ((a(x, du_1) - a(x, du_2)), d(u_1 - u_2)) d\nu \leq 0.$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, имеем

$$\int_{\mathbb{H}^n} ((a(x, du_1) - a(x, du_2)), d(u_1 - u_2)) d\nu \leq 0.$$

Отсюда, используя (11), заключаем, что $u_1 = u_2$. Теорема доказана.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания (тема FMRS-2022-0124).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вильданова, В.Ф. Энтропийное решение для уравнения с мерозначным потенциалом в гиперболическом пространстве / В.Ф. Вильданова, Ф.Х. Мукминов // Мат. сб. — 2023. — Т. 214, № 11. — С. 37–62.
2. An L^1 -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equation / Ph. Benilan, L. Boccardo, Th. Gallouët [et al.] // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. — 1995. — V. 22, № 2. — P. 241–273.
3. Кожевникова, Л.М. Эквивалентность энтропийных и ренормализованных решений нелинейной эллиптической задачи в пространствах Музилака–Орлича / Л.М. Кожевникова, А.П. Кашикова // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 1. — С. 35–51.
4. Saintier, N. Nonlinear elliptic equations with measure valued absorption potential / N. Saintier, L. Véron // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. — 2021. — V. 22, № 1. — P. 351–397.
5. Malusa, A. Renormalized solutions to elliptic equations with measure data in unbounded domains / A. Malusa, M.M. Porzio // Nonlin. Anal. — 2007. — V. 67, № 8. — P. 2370–2389.
6. Кашикова, А.П. Существование решений нелинейных эллиптических уравнений с данными в виде меры в пространствах Музилака–Орлича / А.П. Кашикова, Л.М. Кожевникова // Мат. сб. — 2022. — Т. 213, № 4. — С. 38–73.
7. Vildanova, V.F. Perturbations of nonlinear elliptic operators by potentials in the space of multipliers / V.F. Vildanova, F.Kh. Mukminov // J. Math. Sci. — 2021. — V. 257, № 5. — P. 569–578.
8. Chlebicka, I. Measure data elliptic problems with generalized Orlicz growth / I. Chlebicka // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 2023. — V. 153, № 2. — P. 588–618.
9. Chlebicka, I. Essentially fully anisotropic Orlicz functions and uniqueness to measure data problem / I. Chlebicka, P. Nayar // Math. Methods Appl. Sci. — 2022. — V. 45, № 14. — P. 8503–8527.
10. Musielak, J. Orlicz Spaces and Modular Spaces / J. Musielak. — Berlin : Springer-Verlag, 1983. — 222 p.
11. Harjulehto, P. Orlicz Spaces and Generalized Orlicz Spaces / P. Harjulehto, P. Hästö. — Cham : Springer, 2019. — 167 p.
12. Aubin, T. Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge–Ampère Equations / T. Aubin. — New York : Springer-Verlag, 1982. — 204 p.
13. Renormalized solutions of nonlinear elliptic problems in generalized Orlicz spaces / P. Gwiazda, P. Wittbold, A. Wroblewska, A. Zimmermann // J. Differ. Equat. — 2012. — V. 253, № 2. — P. 635–666.
14. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — М. : Наука, 1976. — 543 с.

**UNIQUENESS OF THE ENTROPY SOLUTION TO THE DIRICHLET PROBLEM
FOR AN ELLIPTIC EQUATION WITH A MEASURE-VALUED POTENTIAL
IN A HYPERBOLIC SPACE**

© 2024 / V. F. Vildanova

*Institute of Mathematics with Computing Centre of Ufa Scientific Center of RAS, Russia
e-mail: gilvenera@mail.ru*

We consider the Dirichlet problem in the hyperbolic space for a nonlinear equation of the second order with measure-valued potential. The assumptions on the structure of the equation are stated in terms of a generalized N -function. The uniqueness of the entropy solution of the problem is proved.

Keywords: nonlinear equation, entropy solution, hyperbolic space

FUNDING

This work was carried out with the support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the state assignment (code of research topic FMRS-2022-0124).

REFERENCES

1. Vil'danova, V.F. and Mukminov, F.Kh., Entropy solution for an equation with measure-valued potential in a hyperbolic space, *Sb. Math.*, 2023, vol. 214, no. 11, pp. 1534–1559.
2. Benilan, Ph., Boccardo, L., Gallouët, Th., Gariepy, R., Pierre, M., and Vazquez, J.L., An L^1 -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equation, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 1995, vol. 22, no. 2, pp. 241–273.
3. Kozhevnikova, L.M. and Kashnikova, A.P., Equivalence of entropy and renormalized solutions of a nonlinear elliptic problem in Musielak–Orlicz spaces, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 1, pp. 34–50.
4. Saintier, N. and Véron L., Nonlinear elliptic equations with measure valued absorption potential, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 2021, vol. 22, no. 1, pp. 351–397.
5. Malusa, A. and Porzio M.M., Renormalized solutions to elliptic equations with measure data in unbounded domains, *Nonlin. Anal.*, 2007, vol. 67, no. 8, pp. 2370–2389.
6. Kashnikova, A.P. and Kozhevnikova L.M., Existence of solutions of nonlinear elliptic equations with measure data in Musielak–Orlicz spaces, *Sb. Math.*, 2022, vol. 213, no. 4, pp. 476–511.
7. Vildanova, V.F. and Mukminov, F.Kh., Perturbations of nonlinear elliptic operators by potentials in the space of multiplicators, *J. Math. Sci.*, 2021, vol. 257, no. 5, pp. 569–578.
8. Chlebicka, I. Measure data elliptic problems with generalized Orlicz growth, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 2023, vol. 153, no. 2, pp. 588–618.
9. Chlebicka, I. and Nayar P., Essentially fully anisotropic Orlicz functions and uniqueness to measure data problem, *Math. Methods Appl. Sci.*, 2022, vol. 45, no. 14, pp. 8503–8527.
10. Musielak, J. *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, Berlin: Springer-Verlag, 1983.
11. Harjulehto, P. and Hästö, P. *Orlicz Spaces and Generalized Orlicz Spaces*, Cham: Springer, 2019.
12. Aubin, T., *Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère Equations*, New York: Springer-Verlag, 1982.
13. Gwiazda, P., Wittbold, P., Wroblewska, A., and Zimmermann, A., Renormalized solutions of nonlinear elliptic problems in generalized Orlicz spaces, *J. Differ. Equat.*, 2012, vol. 253, no. 2, pp. 635–666.
14. Kolmogorov, A.N. and Fomin, S.V., *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, Metric and Normed Spaces*, Graylock Press, 1957.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.225+517.956.227

ЛОКАЛИЗАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ОКОЛО КОНТУРА НА ГРАНИЦЕ ТОНКОЙ ОБЛАСТИ

© 2024 г. С. А. Назаров

Институт проблем машиноведения РАН, г. Санкт-Петербург

e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступила в редакцию 07.01.2024 г., после доработки 20.09.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

Исследована спектральная задача Дирихле для оператора Лапласа в трёхмерной тонкой области переменной толщины, принимающей максимальное значение всюду на гладком замкнутом контуре внутри продольного сечения или на границе последнего. Найдены асимптотические представления собственных значений, включающие в качестве членов собственные значения уравнения гармонического осциллятора на оси или полуоси, а также некоторого обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на указанном контуре. Установлено, что собственные функции сугубо локализованы около контура.

Ключевые слова: задача Дирихле, тонкая область, асимптотика собственных значений

DOI: 10.31857/S0374064124120073, EDN: IPEUNZ

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть ω — область на плоскости $\mathbb{R}^2 \ni y = (y_1, y_2)$ с липшицевой границей $\partial\omega$ и компактным замыканием $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$; γ — простой замкнутый гладкий класса C^∞ (ср. с 1° в п. 7) контур внутри ω и \mathcal{V}_d — его d -окрестность, где определена естественная система криволинейных координат (n, s) , причём $d > 0$ и $\bar{\mathcal{V}}_d \subset \omega$, n — ориентированное расстояние до γ , $n > 0$ вне области, ограниченной контуром, а s — длина дуги на нём, измеренная против часовой стрелки. Сведём масштабированием характерный размер фигуры ω к единице, т.е. сделаем декартовы координаты $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ и все геометрические параметры безразмерными, в частности, малый положительный параметр ε .

В тонкой области (рис. 1, a)

$$\Omega^\varepsilon = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \in \omega, z = x_3 \in (0, \varepsilon h(y))\} \quad (1)$$

рассмотрим задачу Дирихле

$$-\Delta_x u^\varepsilon(x) = \lambda^\varepsilon u^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega^\varepsilon, \quad (2)$$

$$u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega^\varepsilon, \quad (3)$$

и её вариационную постановку

$$(\nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} = \lambda^\varepsilon (u^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} \quad \text{при всех } \psi \in H_0^1(\Omega^\varepsilon). \quad (4)$$

Здесь $\nabla = \text{grad}$, Δ_x — оператор Лапласа, λ^ε — спектральный параметр, $(\cdot, \cdot)_{\Omega^\varepsilon}$ — натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Pi)$ и $H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ — пространство Соболева

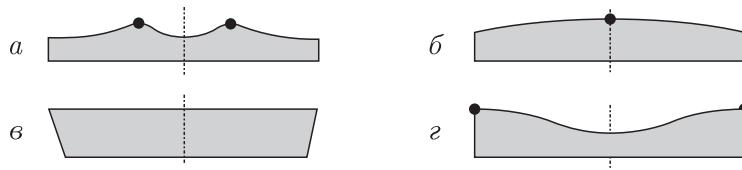


Рис. 1. Частные примеры сечения областей вращения. Максимумы профильной функции отмечены точками

функций, удовлетворяющих условию (3). Кроме того, h — положительная профильная функция, непрерывная в $\bar{\omega}$ и гладкая в \mathcal{V}_d , на которую наложим следующие ограничения:

$$\begin{aligned} h(y) &= h_0 \quad \text{на } \gamma, \quad h(y) < h_0 \quad \text{при } y \in \bar{\omega} \setminus \gamma, \\ h(y) &= h_0 - a(s)n^2 + O(|n|^3), \quad y \in \mathcal{V}_d, \quad a \in C^\infty(\gamma), \quad a > 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Спектр задачи (4) (или (2), (3) в дифференциальной форме) является дискретным и образует положительную монотонную последовательность нормальных собственных значений

$$0 < \lambda_1^\varepsilon < \lambda_2^\varepsilon \leq \lambda_3^\varepsilon \leq \dots \leq \lambda_q^\varepsilon \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad (6)$$

а соответствующие собственные функции $u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, u_3^\varepsilon, \dots, u_q^\varepsilon, \dots \in H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(u_p^\varepsilon, u_q^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} = \delta_{p,q}, \quad p, q \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

где $\delta_{p,q}$ — символ Кронекера. Первое собственное значение λ_1^ε простое, а собственную функцию u_1^ε фиксируем положительной в области Ω^ε .

Аналогичным (2), (3) задачам Дирихле в различных постановках посвящено большое количество публикаций (см. [1–6] и др.), которые, впрочем, относятся к случаю строгого глобального максимума профильной функции h в единственной точке $y_\bullet \in \omega$ (рис. 1, б), т.е.

$$\begin{aligned} h(y) &< h_\bullet \quad \text{при } y \in \omega \setminus \{y_\bullet\}, \quad h(y) = h_\bullet - a_\bullet(y) + \tilde{a}_\bullet(y), \quad \tilde{a}_\bullet(y - y_\bullet) = O(|y - y_\bullet|^3), \\ a_\bullet(y_\bullet + t(y - y_\bullet)) &= t^2 a_\bullet(y), \quad t > 0, \quad a_\bullet(y) \geq c_\bullet |y - y_\bullet|^2, \quad c_\bullet > 0. \end{aligned} \quad (8)$$

В этом случае асимптотика членов последовательности (6) принимает вид

$$\lambda_k^\varepsilon = \pi^2 h_\bullet^{-2} \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-1} \mu_k + O(\varepsilon^{-1/2}),$$

где $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ — положительная неограниченная последовательность собственных значений дифференциального уравнения в частных производных на плоскости

$$-\Delta_\xi \mathbf{w}(\xi) + 2\pi^2 h_\bullet^{-3} a_\bullet(\xi) \mathbf{w}(\xi) = \mu \mathbf{w}(\xi), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Соответствующие собственные функции \mathbf{w}_k затухают при $|\xi| = \varepsilon^{-1/2} |y - y_\bullet| \rightarrow +\infty$ с экспоненциальной скоростью, и аналог этого свойства передаётся собственным функциям u_k^ε исходной задачи в тонкой области (1), которые тем самым приобретают качества внутреннего пограничного слоя.

В противоположность указанным результатам далее изучается ситуация

$$a(s) = a_0, \quad (9)$$

обеспечивающая локализацию собственных функций задачи (2), (3) около всей линии

$$\gamma^\varepsilon = \{x: y \in \gamma, z = \varepsilon h(y)\} \subset \partial\Omega^\varepsilon. \quad (10)$$

При переменном коэффициенте a в формуле (5) опять наблюдается концентрация собственных функций u_k^ε около точки максимума $s_\#$ функции $\gamma \ni s \mapsto a(s)$ (процедура построения асимптотики собственных значений приведена в п. 7, 2°).

Концентрация собственных функций около контура на границе наблюдалась (см. [7]) и в смешанной краевой задаче в тонкой области при постановке условий Неймана на скошенной боковой поверхности (рис. 1, в), однако только для окружности $\partial\omega$ — в противном случае локализация происходит около точки максимальной кривизны срединного сечения. Происхождение эффекта иное, чем в данной работе: его порождает захваченная волна в задаче на полуполосе с искривлённом торцом (см. [7, 8]), которая (задача) описывает явление пограничного слоя. При этом эффект, разумеется, полностью исчезает, если область Ω^ε — прямой цилиндр $\omega \times (0, \varepsilon)$. Подчеркнём, что в рассматриваемой задаче (2), (3) при ограничениях (5) и (9) локализация происходит вне зависимости от кривизны контура γ и младших членов формулы Тейлора для профильной функции h , которые влияют лишь на коэффициенты предельного уравнения. Кроме того, распределение собственных функций вдоль всего контура оказывается не только на асимптотических конструкциях, но и на самой процедуре обоснования асимптотики, особенно на вычислении в теореме З пределов

$$\beta_{1m} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\lambda_m^\varepsilon - \pi^2 h_0^{-2} \varepsilon^{-2} - \mu_1 \varepsilon^{-1}), \quad m \in \mathbb{N}, \quad (11)$$

— наиболее сложном результате, проверка которого потребовала разработки новых технических приёмов.

Формальный асимптотический анализ представлен в п. 2, где найдено несколько серий собственных значений с явной асимптотикой, а обоснование асимптотик — в пп. 3, 5, 6, где выведены оценки асимптотических остатков в представлениях собственных значений и функций, а также вычислен предел (11). В п. 4 установлено экспоненциальное затухание собственных функций при удалении от линии (10). Наконец, в п. 7 сформулированы открытые вопросы и обсуждены доступные обобщения, в частности, перечислены изменения в асимптотической процедуре для ситуации $\gamma = \partial\omega$, в которой контур γ — гладкое ребро, например, плоско-вогнутой линзы Ω^ε (рис. 1, г).

2. ФОРМАЛЬНАЯ АСИМПТОТИКА

Собственные пары {значение; функция} задачи (2), (3) ищем в виде (см. комментарии в п. 1 замечания 1)

$$\lambda^\varepsilon = \varepsilon^{-2} \pi^2 h_0^{-2} + \varepsilon^{-1} \mu + \beta + \dots, \quad (12)$$

$$u^\varepsilon(x) = \sin(\pi \zeta h(y)^{-1}) (v(s)w(\eta) + \varepsilon^{1/2} w'(\eta, s) + \varepsilon w''(\eta, s)) + \dots \quad (13)$$

Здесь многоточие заменяет младшие асимптотические члены, несущественные в предпринимаемом формальном анализе, а числа μ , β и функции v на контуре γ и w , w' , w'' на оси \mathbb{R} подлежат определению. Кроме того, введены растянутые координаты

$$\zeta = \varepsilon^{-1} z, \quad \eta = \varepsilon^{-1/2} n, \quad (14)$$

причём составляющие w , w' , w'' экспоненциально затухают при $\eta \rightarrow \pm\infty$, т.е. истолковываются как внутренние пограничные слои. Сначала выведем дифференциальные уравнения, из которых найдём собственные пары $\{\mu; w\}$ и $\{\beta; v\}$ в anzатах (12) и (13).

Оператор Лапласа в криволинейных координатах (n, s, z) принимает вид

$$\Delta = J(n, s)^{-1} \partial_n J(n, s) \partial_n + J(n, s)^{-1} \partial_s J(n, s)^{-1} \partial_s + \partial_z^2,$$

где $J(n, s) = 1 + \kappa(s)n$ — якобиан и $\kappa(s)$ — кривизна в точке $s \in \gamma$, вообще говоря, знакоперемен-ная, т.е. отрицательная на вогнутых участках. При переходе к растянутым координатам (14) получаем расщепление

$$\Delta = \varepsilon^{-2} \partial_\zeta^2 + \varepsilon^{-1} \partial_\eta^2 + \varepsilon^{-1/2} \kappa(s) \partial_\eta + \varepsilon^0 (\partial_s^2 - \kappa(s)^2 \eta \partial_\eta) + \dots \quad (15)$$

Формула Тейлора

$$h(n, s) = h_0 - a_0 n^2 - a'(s) n^3 - a''(s) n^4 + O(|n|^5) \quad (16)$$

с коэффициентами (9) и $a', a'' \in C^\infty(\gamma)$ приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\pi^2}{h_0^2} \right) \sin \left(\frac{\pi z}{\varepsilon h(y)} \right) &= \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} \sin \left(\frac{\pi \zeta}{h(y)} \right) \frac{h(y)^2 - h_0^2}{h(y)^2 h_0^2} = \\ &= -\frac{\pi^2}{\varepsilon^2} \sin \left(\frac{\pi \zeta}{h(y)} \right) \frac{2}{h_0^3} n^2 \left(a_0 + a'(s) n + \left(a''(s) + \frac{3a_0}{2h_0} \right) n^2 + O(|n|^3) \right) = \\ &= -\frac{\pi^2}{\varepsilon} \sin \left(\frac{\pi \zeta}{h(y)} \right) \frac{2}{h_0^3} \eta^2 \left(a_0 + \varepsilon^{1/2} a'(s) \eta + \varepsilon \left(a''(s) + \frac{3a_0}{2h_0} \right) \eta^2 + O(\varepsilon^{3/2} |\eta|^3) \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Подставим разложения (12), (13) и (15), (17) в уравнение (2) и соберём коэффициенты при ε^{-1} и $\varepsilon^{-1/2}$. В первую очередь получим уравнение гармонического осциллятора

$$-\partial_\eta^2 w(\eta) + B^2 \eta^2 w(\eta) = \mu w(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}, \quad (18)$$

с параметром $B = \pi \sqrt{2a_0 h_0^{-3}}$. Собственные значения

$$\mu_k = B(2k - 1), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (19)$$

известны (см., например, монографию [9]), а соответствующие собственные функции $w_k \in C^\infty(\mathbb{R})$, исчезающие на бесконечности со скоростью $O(|\eta|^{k-1} e^{-B\eta^2/2})$, нормируем в пространстве Лебега $L^2(\mathbb{R})$, причём первую зафиксируем положительной. Они оказываются чётными при $k = 2\ell - 1$ и нечётными при $k = 2\ell$; здесь $\ell \in \mathbb{N}$. Сложноустроенные явные формулы для функции w_k (см. [9]) востребованы не будут.

Зафиксируем индекс k и припишем его членам анзацев (12) и (13). Очередное уравнение

$$\begin{aligned} -\partial_\eta^2 w'_k(\eta, s) - B^2 \eta^2 w'_k(\eta, s) - \mu_k w'_k(\eta, s) &= f'_k(\eta, s) := \\ &:= v(s) (\kappa(s) \partial_\eta w_k(\eta) - 2\pi^2 h_0^{-3} a'(s) \eta^3 w_k(\eta)), \quad \eta \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (20)$$

имеет экспоненциально затухающее на бесконечности решение

$$w'_k(\eta, s) = v(s) \mathbf{w}'_k(\eta, s), \quad (21)$$

так как в силу упомянутого свойства чётности/нечётности собственной функции выполнено условие его разрешимости

$$\int_{\mathbb{R}} w_k(\eta) f'_k(\eta, s) d\eta = 0. \quad (22)$$

Замечание 1. 1. Именно по причине безусловной разрешимости уравнения (20) в представление (12) не включено слагаемое порядка $\varepsilon^{-1/2}$.

2. При составлении уравнений (18) и (20) удалось пренебречь слагаемыми, возникающими при дифференцировании по переменным n и s множителя $\sin(\cdot)$ в представлении (13):

$$\begin{aligned} \kappa(s)v(s)w_k(\eta)\frac{\partial}{\partial n}\left(\sin\left(\frac{\pi\zeta}{h(y)}\right)\right), \quad w_k(\eta)\left(v(s)\frac{\partial}{\partial s}+2\frac{\partial v}{\partial s}(s)\right)\frac{\partial}{\partial s}\left(\sin\left(\frac{\pi\zeta}{h(y)}\right)\right), \\ v(s)\left(w_k(\eta)\frac{\partial}{\partial n}+2\frac{\partial w_k}{\partial n}(\eta)\right)\frac{\partial}{\partial n}\left(\sin\left(\frac{\pi\zeta}{h(y)}\right)\right). \end{aligned} \quad (23)$$

Первое выражение $-v(s)w_k(\eta)(\partial_n h(y)/h(y))\mathcal{Z}(y,\zeta)$ с множителем $\mathcal{Z}(y,\zeta)=(\pi\zeta/h(y))\cos(\pi\zeta/h(y))$ мало, так как $\partial_n h(y)=2\varepsilon^{1/2}a\eta+O(\varepsilon|\eta|^2)$ в силу формул (14) и (16). С учётом соотношения $\partial_s h(y)=O(|n|^3)=O(\varepsilon^{3/2}|\eta|^3)$ второе выражение в (23) приобретает даже меньший порядок, т.е. его и предыдущее можно не принимать во внимание и на следующем шаге итерационного процесса: полиномиальный рост при $|\eta|\rightarrow\infty$ гасится за счёт экспоненциального затухания сомножителя $w_k(\eta)$. Вместе с тем третье выражение в (23) представимо в виде

$$\begin{aligned} -v(s)(w_k(\eta)\partial_n^2 h(y)+2\partial_n w_k(\eta)\partial_n h(y))h(y)^{-1}\mathcal{Z}(y,\zeta)+\dots= \\ =-2a_0 h_0^{-1}v(s)(w_k(\eta)+2\eta\partial_\eta w_k(\eta))\mathcal{Z}(y,\zeta)+\dots \end{aligned} \quad (24)$$

и его приходится учитывать при составлении уравнения для w''_k . При этом для компенсации главного члена невязки (24) введём в разложение (13) дополнительный член

$$\mathcal{W}_k(\eta,\zeta,s)=\frac{a_0}{h_0}v(s)(w_k(\eta)+2\eta\partial_\eta w_k(\eta))\frac{\zeta^2}{2}\sin\left(\frac{\pi\zeta}{h(y)}\right), \quad (25)$$

который после умножения на ε^2 порождает в главном невязку $v(s)\mathcal{F}_k(\eta,s)\sin(\pi\zeta/h(y))$ нужного вида, причём

$$\mathcal{F}_k(\eta,s)=-a_0 h_0^{-1}(w_k(\eta)+2\eta\partial_\eta w_k(\eta)). \quad (26)$$

Условие разрешимости ещё одного уравнения

$$\begin{aligned} -\partial_\eta^2 w''_k(\eta,s)-B^2\eta^2 w''_k(\eta,s)-\mu_k w''_k(\eta,s)=f''_k(\eta,s):= \\ :=(\partial_s^2 v(s)+\beta v(s))w_k(\eta)+v(s)\mathbf{f}''_k(\eta,s)+v(s)\mathcal{F}_k(\eta,s), \quad \eta\in\mathbb{R}, \end{aligned} \quad (27)$$

возникшего на третьем шаге процедуры и составленного при учёте формул (13), (15) и (26), принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения на контуре

$$-\partial_s^2 v(s)+b_k(s)v(s)=\beta v(s), \quad s\in\gamma, \quad (28)$$

при этом коэффициент b_k находится по формуле

$$b_k(s)=\int_{\mathbb{R}} w_k(\eta)(\mathbf{f}''_k(\eta,s)+\mathcal{F}_k(\eta,s))d\eta, \quad (29)$$

где подынтегральное выражение включает функции (26) и

$$\mathbf{f}''(\eta,s)=\kappa(s)^2\eta\partial_\eta w_k(\eta)+\frac{2\pi^2}{h_0^3}\left(a''(s)+\frac{3a}{2h_0}\right)\eta^2 w_k(\eta)-\kappa(s)\partial_\eta \mathbf{w}'_k(\eta,s)+\frac{2\pi^2}{h_0^3}a'(s)\eta^3 \mathbf{w}'_k(\eta,s).$$

Отметим, что множитель $\mathbf{w}'_k(\eta, s)$ в решении (21) уравнения (20) определён с точностью до слагаемого $\mathbf{c}'(s)w_k(\eta)$, выбор которого не влияет на величину (29) по причине (22).

При выполнении соотношения (28) уравнение (27) становится разрешимым, вторая производная $\partial_s^2 v$ исчезает из него, а само решение принимает аналогичный (21) вид

$$w''_k(\eta, s) = v(s)\mathbf{w}''_k(\eta, s). \quad (30)$$

Итак, определена ещё одна предельная задача (28). Следующее утверждение легко выводится на основе стандартных сведений по обыкновенным дифференциальным уравнениям (см., например, [10, 11]).

Лемма 1. *Спектр предельного уравнения (28) является дискретным и образует монотонную неограниченную последовательность собственных значений*

$$\beta_{k1} \leq \beta_{k2} \leq \beta_{k3} \leq \dots \leq \beta_{km} \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad (31)$$

причём их кратности не превосходят двух. Соответствующие собственные функции можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(v_{kp}, v_{kq})_\gamma = \delta_{p,q}, \quad p, q \in \mathbb{N}. \quad (32)$$

3. АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^\varepsilon := H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ введём скалярное произведение

$$\langle u^\varepsilon, \psi^\varepsilon \rangle_\varepsilon = (\nabla u^\varepsilon, \nabla \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} \quad (33)$$

и положительный, симметричный и непрерывный, а значит, самосопряжённый оператор \mathcal{T}^ε :

$$\langle \mathcal{T}^\varepsilon u^\varepsilon, \psi^\varepsilon \rangle_\varepsilon = (u^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} \quad \text{при всех } u^\varepsilon, \psi^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon. \quad (34)$$

Нужные свойства билинейной формы (33) обеспечены неравенством Фридрихса, происходящим от условий Дирихле (3). Оператор \mathcal{T}^ε компактный, т.е. согласно теоремам 10.1.5 и 10.2.2 из [12] его существенный спектр — одна точка $\tau = 0$, а дискретный спектр образует монотонную положительную бесконечно малую последовательность нормальных собственных значений

$$\tau_1^\varepsilon \geq \tau_2^\varepsilon \geq \tau_3^\varepsilon \geq \dots \geq \tau_m^\varepsilon \geq \dots \rightarrow +0.$$

Сравнив формулы (33), (34) и (4), видим, что вариационная постановка задачи (2)–(4) эквивалентна абстрактному уравнению

$$\mathcal{T}^\varepsilon u^\varepsilon = \tau^\varepsilon u^\varepsilon \quad \text{в пространстве } \mathcal{H}^\varepsilon$$

со спектральным параметром

$$\tau^\varepsilon = (\lambda^\varepsilon)^{-1}. \quad (35)$$

Следующее утверждение, известное как лемма о “почти собственных” значениях и векторах (см. [13]), обеспечено спектральным разложением резольвенты (см., например, монографию [12, гл. 6]).

Лемма 2. Пусть $U^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon$ и $t^\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ таковы, что

$$\|U^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| = 1, \quad \|\mathcal{T}^\varepsilon U^\varepsilon - t^\varepsilon U^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| =: \delta^\varepsilon \in [0, t^\varepsilon]. \quad (36)$$

Тогда у оператора \mathcal{T}^ε есть собственное значение $\tau_{n(\varepsilon)}^\varepsilon$, подчинённое неравенству

$$|t^\varepsilon - \tau_{n(\varepsilon)}^\varepsilon| \leq \delta^\varepsilon,$$

а для любого $\delta_*^\varepsilon \in (\delta^\varepsilon, t^\varepsilon)$ найдётся столбец коэффициентов $\mathcal{C}^\varepsilon = (\mathcal{C}_{\mathcal{N}^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, \mathcal{C}_{\mathcal{N}^\varepsilon + \mathcal{X}^\varepsilon - 1}^\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}^\varepsilon}$, при котором выполнены соотношения

$$\left\| U^\varepsilon - \sum_{\ell=\mathcal{N}^\varepsilon}^{\mathcal{N}^\varepsilon + \mathcal{X}^\varepsilon - 1} \mathcal{C}_\ell^\varepsilon \mathcal{U}_\ell^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon \right\| \leq 2 \frac{\delta^\varepsilon}{\delta_*^\varepsilon}, \quad \sum_{\ell=\mathcal{N}^\varepsilon}^{\mathcal{N}^\varepsilon + \mathcal{X}^\varepsilon - 1} |\mathcal{C}_\ell^\varepsilon|^2 = 1, \quad (37)$$

где $\tau_{\mathcal{N}^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, \tau_{\mathcal{N}^\varepsilon + \mathcal{X}^\varepsilon - 1}^\varepsilon$ — набор всех собственных значений оператора \mathcal{T}^ε из замкнутого сегмента $[t^\varepsilon - \delta_*^\varepsilon, t^\varepsilon + \delta_*^\varepsilon]$, а соответствующие собственные векторы $\mathcal{U}_{\mathcal{N}^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, \mathcal{U}_{\mathcal{N}^\varepsilon + \mathcal{X}^\varepsilon - 1}^\varepsilon$ подчинены условиям ортогональности и нормировки

$$\langle \mathcal{U}_p^\varepsilon, \mathcal{U}_q^\varepsilon \rangle_\varepsilon = \delta_{p,q}. \quad (38)$$

Согласно равенствам (12) и (35) в качестве компонент “почти собственной” спектральной пары возьмём выражения

$$t_{km}^\varepsilon = \varepsilon^2 (\pi^2 h_0^{-2} + \varepsilon \mu_k + \varepsilon^2 \beta_{km})^{-1}, \quad (39)$$

$$U_{km}^\varepsilon(x) = \|\chi V_{km}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1} \chi(y) V_{km}^\varepsilon(x), \quad (40)$$

где $k, m \in \mathbb{N}$, а μ_k и β_m — собственные значения из последовательностей (19) и (31); при этом можно считать, что срезающая функция $\chi \in C_c^\infty(\mathcal{V}_d)$, удовлетворяющая условиям

$$\chi(x) = 1 \quad \text{при } x \in \mathcal{V}_{d/2}, \quad 0 \leq \chi \leq 1, \quad (41)$$

зависит только от переменной n . Кроме того,

$$V_{km}^\varepsilon(x) = \sin\left(\frac{\pi\zeta}{h(y)}\right) v_m(s) (w_k(\eta) + \varepsilon^{1/2} \mathbf{w}'_k(\eta, s) + \varepsilon \mathbf{w}''_k(\eta, s)) + \varepsilon^2 \mathcal{W}_k(\eta, \zeta, s). \quad (42)$$

Составляющие формулы (42) найдены в п. 2 и заданы равенствами (21), (30) и (25), причём в них фигурируют собственные функции w_k и v_m из уравнений (18) и (28) соответственно. Наличие в (42), (25) и (40) $\sin(\pi\zeta/h(y))$ и срезки $\chi(y)$ обеспечивает выполнение условий Дирихле (3), а значит, $U_{km}^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon$.

Оценим величину δ_{km}^ε из формулы (36), найденную по паре (39), (40):

$$\begin{aligned} \delta^\varepsilon &= \sup |\langle \mathcal{T}^\varepsilon U_{km}^\varepsilon - t_{km}^\varepsilon U_{km}^\varepsilon, \Psi^\varepsilon \rangle_\varepsilon| = \\ &= t_{km}^\varepsilon \|V_{km}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1} \sup |(\nabla_x (\chi V_{km}^\varepsilon), \nabla_x \Psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} - (\pi^2 h_0^{-2} \varepsilon^{-2} + \mu_k \varepsilon^{-1} + \beta_{km}) (\chi V_{km}^\varepsilon, \Psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon}| = \\ &= t^\varepsilon \|V_{km}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1} \sup |(\Delta_x V_{km}^\varepsilon + (\pi^2 h_0^{-2} \varepsilon^{-2} + \mu_k \varepsilon^{-1} + \beta_{km}) V_{km}^\varepsilon, \chi \Psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} + ([\Delta_x, \chi] V_{km}^\varepsilon, \Psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon}|. \end{aligned} \quad (43)$$

Здесь супремум вычисляется по единичному шару в пространстве \mathcal{H}^ε , т.е. $\|\Psi^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| \leq 1$ и согласно одномерному неравенству Фридрихса

$$\|\Psi^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \leq c_h \varepsilon^2 \|\partial_z \Psi^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \leq c_h \varepsilon^2. \quad (44)$$

Рассмотрим сумму $I_{km}^\varepsilon(\Psi^\varepsilon)$ скалярных произведений между последними знаками модуля в формуле (43). Сразу же заметим, что коэффициенты коммутатора $[\Delta_x, \chi]$ отличны от нуля только на множестве $\{x \in \Omega^\varepsilon : \text{dist}(y, \gamma) \in [d/2, d]\}$, где сумма (42) приобретает порядок $e^{-\vartheta/\sqrt{\varepsilon}}$ при некотором $\vartheta > 0$ ввиду экспоненциального затухания функций w_k , \mathbf{w}'_k , \mathbf{w}''_k и \mathcal{W}_k при $\eta \rightarrow \pm\infty$. Включённые в определение (40), (42) функции были построены в п. 2 так, чтобы выполнялась оценка

$$|\Delta_x V_{km}^\varepsilon(x) + (\pi^2 h_0^{-2} \varepsilon^{-2} + \mu_k \varepsilon^{-1} + \beta_m) V_{km}^\varepsilon(x)| \leq c_{k,m} (|n| + \sqrt{\varepsilon}) (1 + |\eta|)^N e^{-B\eta^2/2}, \quad y \in \mathcal{V}_d. \quad (45)$$

При учёте неравенства (44) находим, что

$$|I_{km}^\varepsilon(\Psi^\varepsilon)| \leq c_{km} \|\Psi^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\| \left(\sqrt{\varepsilon} \varepsilon^{-\theta/\varepsilon} + \left(\int_0^d (|n| + \sqrt{\varepsilon})^2 \left(1 + \frac{|n|}{\sqrt{\varepsilon}} \right)^{2N} e^{-B|n|^2/\varepsilon} d|n| dz \right)^{1/2} \right) \leq C_{km} \varepsilon^{9/4}.$$

Кроме того, в лемме 3 будет проверено соотношение

$$\|\chi V_{km}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| \geq c_{km} \varepsilon^{-1/4}. \quad (46)$$

В результате приходим к неравенству $\delta_{km}^\varepsilon \leq c_{km} \varepsilon^{9/2}$. Согласно лемме 2 существует собственное значение $\tau_{N^\varepsilon(km)}^\varepsilon$ с каким-то номером $N^\varepsilon(km) \in \mathbb{N}$, для которого верна оценка

$$|\tau_{N^\varepsilon(km)}^\varepsilon - t_{km}^\varepsilon| \leq c_{km} \varepsilon^{9/2}. \quad (47)$$

Теперь в силу соотношений (39) и (35) имеем

$$|\lambda_{N^\varepsilon(km)}^\varepsilon - \pi^2 h_0^{-2} \varepsilon^{-2} - \mu_k \varepsilon^{-1} - \beta_{km}| \leq c_{km} \varepsilon^{5/2} \lambda_{N^\varepsilon(km)}^\varepsilon (\pi^2 h_0^{-2} + \varepsilon \mu_k + \varepsilon^2 \beta_{km}). \quad (48)$$

Отсюда в силу импликации ($|a - b| \leq c \Rightarrow a - c \leq b \Rightarrow a \leq 2b$ при $2c \leq a$ для неотрицательных a , b и c) и простых алгебраических преобразований вытекает, что

$$\lambda_{N^\varepsilon(km)}^\varepsilon \leq 2(\pi^2 h_0^{-2} \varepsilon^{-2} + \mu_k \varepsilon^{-1} + \beta_{km}) \quad \text{при} \quad 2c_{km} \varepsilon^{5/2} (\pi^2 h_0^{-2} + \varepsilon \mu_k + \varepsilon^2 \beta_{km}) \leq 1,$$

$$|\lambda_{N^\varepsilon(km)}^\varepsilon - \pi^2 h_0^{-2} \varepsilon^{-2} - \mu_k \varepsilon^{-1} - \beta_{km}| \leq 2c_{km} \varepsilon^{1/2} (\pi^2 h_0^{-2} + \varepsilon \mu_k + \varepsilon^2 \beta_{km})^2 \quad \text{при} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_{km}].$$

Величина $\varepsilon_{km} > 0$ подобрана исходя из условия, возникшего в верхней строке последнего списка.

Нужная оценка получена. Убедимся теперь в том, что для кратного собственного значения $\beta_{km} = \beta_{km+1}$ имеются два разных члена последовательности (6), удовлетворяющих упомянутой оценке. Напомним, что собственное значение μ_k простое, собственная функция w_k нормирована в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, а собственные функции v_m и v_{m+1} подчинены условиям ортогональности и нормировки (32).

Лемма 3. Для функций V_{km}^ε и V_{km+1}^ε , отвечающих кратному собственному значению $\beta_{km} = \beta_{km+1}$ уравнения (28), справедливо соотношение

$$\left| \langle \chi V_{kp}^\varepsilon, \chi V_{kq}^\varepsilon \rangle_\varepsilon - \frac{\pi^2 \delta_{p,q}}{2h_0^2 \sqrt{\varepsilon}} \right| \leq c_{km}, \quad p, q = m, m+1. \quad (49)$$

Доказательство. Более простые выкладки, чем в замечании 1, показывают, что

$$\left\| \chi \partial_z V_{kp}^\varepsilon - w_k v_p \frac{\partial}{\partial z} \sin \left(\frac{\pi \zeta}{h(y)} \right); L^2(\Omega^\varepsilon) \right\|^2 + \|\nabla_y (\chi V_{kp}^\varepsilon); L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \leq c_{km}.$$

Осталось продифференцировать синус и проинтегрировать результат по $(0, \varepsilon h(y)) \ni z$, учитывая экспоненциальное затухание функции w_k и формулы (5), (32), а также

$$dx = J(n, s) dn ds dz, \quad \nabla_x = (\partial_n, J(n, s)^{-1} \partial_s, \partial_z). \quad (50)$$

Лемма доказана.

Применим вторую часть леммы 2 и возьмём

$$\delta^\varepsilon = \delta_{km}^\varepsilon \leq c_{km} \varepsilon^{9/2} \quad \text{и} \quad \delta_*^\varepsilon = \delta^\varepsilon / \varrho,$$

но число $\varrho \in (0, 1)$ выберем далее. При $p = m, m+1$ обозначим через $C_p^\varepsilon \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}^\varepsilon}$ и $S_p^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon$ столбцы коэффициентов и линейные комбинации собственных векторов $\mathcal{U}_{N^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, \mathcal{U}_{N^\varepsilon + \mathcal{X}^\varepsilon - 1}^\varepsilon$ из формулы (37) в лемме 2. При учёте соотношений (38) получим, что

$$\begin{aligned} |C_q^\varepsilon \cdot C_q^\varepsilon - \delta_{p,q}| &= |\langle S_p^\varepsilon, S_q^\varepsilon \rangle_\varepsilon - \delta_{p,q}| \leq \\ &\leq |\langle S_p^\varepsilon, S_q^\varepsilon - U_q^\varepsilon \rangle_\varepsilon| + |\langle S_p^\varepsilon - U_p^\varepsilon, U_q^\varepsilon \rangle_\varepsilon| + |\langle U_p^\varepsilon, U_q^\varepsilon \rangle_\varepsilon - \delta_{p,q}| \leq 2\varrho + 2\varrho + C_{km} \varepsilon^{1/4}. \end{aligned} \quad (51)$$

Мажоранта для последнего слагаемого в средней части формулы (51) находится при помощи оценки (49) в лемме 3, которую (оценку) применяем дважды: сначала при $p = q$ для вычисления нормы $\|V_p^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|$, а затем и при разных p и q . Отметим, что неравенство (49) также обеспечивает использованное ранее соотношение (46).

Итак, при достаточно малых $\varrho > 0$ и $\varepsilon > 0$ столбцы C_m^ε и C_{m+1}^ε “почти ортонормированы” в пространстве $\mathbb{R}^{\mathcal{X}^\varepsilon}$, что возможно лишь в случае $\mathcal{X}^\varepsilon \geq 2$, т.е. по крайней мере два разных собственных значения $\tau_{N^\varepsilon(k,m)}^\varepsilon$ и $\tau_{N^\varepsilon(k,m+1)}^\varepsilon$ удовлетворяют неравенству (47) с новой мажорантой $c_{km} \varrho^{-1} \varepsilon^{9/2}$. Задфиксировав подходящую величину $\varrho > 0$ и повторив выкладку (48) в слегка изменённых условиях, приходим к исходному утверждению.

Теорема 1. Для любых $k, m \in \mathbb{N}$ найдутся такие положительные величины ε_{km} , C_{km} и собственное значение $\lambda_{N^\varepsilon(k,m)}^\varepsilon$ задачи (2), (3), что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{km}]$ выполнено неравенство

$$|\lambda_{N^\varepsilon(k,m)}^\varepsilon - \pi^2 h_0^{-2} \varepsilon^{-2} - \mu_k \varepsilon^{-1} - \beta_{km}| \leq C_{km} \varepsilon^{1/2}. \quad (52)$$

Здесь μ_k и β_{km} — собственные значения (19) и (31) обыкновенных дифференциальных уравнений (18) и (28) соответственно.

Неравенство (52) показывает, что найденная в п. 2 конструкция (12) в самом деле представляет собой асимптотику некоторого собственного значения $\lambda_{N^\varepsilon(k,m)}^\varepsilon$ задачи (2), (3), однако теорема 1 не указывает его номер $N^\varepsilon(k, m)$ в последовательности (6). Разумеется, в случае $k > 1$ такой номер не может оказаться общим для всех малых значений параметра ε , так как зависит от параметра ε и стремится к бесконечности: по той же теореме количество собственных значений на интервале $(0, \pi^2 h_0^{-2} \varepsilon^{-2} + \mu_k \varepsilon^{-1})$ неограниченно возрастает при $\varepsilon \rightarrow +0$. Ниже будет проверено, что $N^\varepsilon(1, m) = m$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{1m}]$, т.е. члены последовательности (31) с $k = 1$ дают пределы (11). Кроме того, будут получены асимптотические формулы для функций u_m^ε .

4. ЛОКАЛИЗАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть λ_m^ε — собственное значение задачи (2), (3), удовлетворяющее неравенству

$$\lambda_m^\varepsilon \leq \pi^2 \varepsilon^{-2} h_0^{-2} + \Lambda_m \varepsilon^{-1} \quad \text{при} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_m] \quad (53)$$

с некоторыми положительными постоянными ε_m и Λ_m . Для подбираемых далее величин $\theta > 0$ и $r > 0$ введём непрерывную кусочно-гладкую весовую функцию

$$\mathcal{R}_\varepsilon^\theta(y) = e^{\theta n^2/\varepsilon}, \quad x \in \Omega_d^\varepsilon \setminus \Omega_{r\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon, \quad \mathcal{R}_\varepsilon^\theta(y) = \begin{cases} e^{\theta r^2}, & x \in \Omega_{r\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon, \\ e^{\theta d^2/\varepsilon}, & x \in \Omega^\varepsilon \setminus \Omega_d^\varepsilon. \end{cases} \quad (54)$$

Здесь и далее $\Omega_t^\varepsilon = \{x \in \Omega^\varepsilon \cap \mathcal{V}_d : |n| < t\}$ при $t \in (0, d]$. Подставим в интегральное тождество (4) пробную функцию $\psi^\varepsilon = \mathcal{R}_\varepsilon^\theta \mathcal{Y}_k^\varepsilon \in H_0^1(\Omega^\varepsilon)$, где $\mathcal{Y}_m^\varepsilon = \mathcal{R}_\varepsilon^\theta u_m^\varepsilon$. После несложных преобразований, включающих коммутирование оператора-градиента и весовой функции, выводим равенство

$$\|\nabla_x \mathcal{Y}_m^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 - \|\mathcal{Y}_m^\varepsilon(\mathcal{R}_\varepsilon^\theta)^{-1} \nabla_y \mathcal{R}_\varepsilon^\theta; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 = \lambda_m^\varepsilon \|\mathcal{Y}_m^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2. \quad (55)$$

Заметим, что $\nabla_x \mathcal{R}_\varepsilon^\theta(x) = 0$ при $x \in \Omega_{r\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon \cup (\Omega^\varepsilon \setminus \Omega_d^\varepsilon)$ и

$$\mathcal{R}_\varepsilon^\theta(y)^{-1} |\nabla_y \mathcal{R}_\varepsilon^\theta(y)| \leq 2\theta \rho(y) \varepsilon^{-1} \quad \text{при } x \in \Omega_d^\varepsilon \setminus \Omega_{r\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon, \quad (56)$$

где $\rho(y) = \text{dist}(y, \gamma)$. Продолжим преобразования при учёте формул (7) и (53):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \Lambda_m e^{2\theta r^2} &\geq \frac{1}{\varepsilon} \Lambda_m e^{2\theta r^2} \|u_m^\varepsilon; L^2(\Omega_{r\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon)\|^2 \geq \left(\lambda_m^\varepsilon - \frac{\pi^2}{\varepsilon^2 h_0^2} \right) \|\mathcal{Y}_m^\varepsilon; L^2(\Omega_{r\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon)\|^2 = \\ &= \|\nabla_x \mathcal{Y}_m^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 - \|\mathcal{Y}_m^\varepsilon(\mathcal{R}_\varepsilon^\theta)^{-1} \nabla_y \mathcal{R}_\varepsilon^\theta; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 - \lambda_m^\varepsilon \|\mathcal{Y}_m^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon \setminus \Omega_{r\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon)\|^2 - \frac{\pi^2}{\varepsilon^2 h_0^2} \|\mathcal{Y}_m^\varepsilon; L^2(\Omega_{r\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon)\|^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{\varepsilon^2} \|\mathcal{W}_\varepsilon^\theta \mathcal{Y}_m^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon \setminus \Omega_{r\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon)\|^2. \end{aligned}$$

Согласно формулам (53), (56) и неравенству Фридрихса на отрезке $(0, \varepsilon h(y))$ находим, что весовой множитель в последней норме удовлетворяет оценкам

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\varepsilon^\theta(y) &= \frac{\pi^2}{h(y)^2} - \frac{\pi^2}{h_0^2} \geq c_\omega^h \rho(y)^2 \quad \text{при } x \in \Omega_{r\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon, \\ \mathcal{W}_\varepsilon^\theta(y) &= \frac{\pi^2}{h(y)^2} - 4\theta^2 \rho(y)^2 - \frac{\pi^2}{h_0^2} - \Lambda_m \varepsilon \geq \frac{c_\omega^h}{2} \rho(y)^2 \quad \text{при } x \in \Omega^\varepsilon \setminus \Omega_{r\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon \end{aligned}$$

с малым $\theta > 0$ и большим $r > 0$. При этом использованы соотношения $\rho(y) > r\sqrt{\varepsilon}$ на множестве $\Omega^\varepsilon \setminus \Omega_{r\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon$ и

$$\frac{1}{h(y)^2} - \frac{1}{h_0^2} \geq C_\omega^h \rho(y)^2 \quad \text{при } y \in \omega, \quad C_\omega^h > 0,$$

которые обеспечены определением множества $\Omega_{r\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon$ и условиями (5). Зафиксировав подходящие положительные θ и r , получаем, что

$$\|\rho \mathcal{R}_\varepsilon^\theta u_m^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \leq 2(c_\omega^h)^{-1} \Lambda_m e^{2\theta r^2} \varepsilon = C_m \varepsilon \quad \text{при } \varepsilon \in (0, \varepsilon_m], \quad \theta \in (0, \theta_m].$$

Благодаря нормировке собственных функций в $L^2(\Omega^\varepsilon)$ множитель ρ в этой оценке можно заменить множителем ρ_ε :

$$\rho_\varepsilon(y) = \rho(y), \quad x \in \Omega_d^\varepsilon \setminus \Omega_{r\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon, \quad \rho_\varepsilon(y) = \begin{cases} r\sqrt{\varepsilon}, & x \in \Omega_{r\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon, \\ d, & x \in \Omega^\varepsilon \setminus \Omega_d^\varepsilon. \end{cases} \quad (57)$$

Теперь подставим в интегральное тождество (4) произведение $\psi^\varepsilon = \rho_\varepsilon^2 \mathcal{R}_\varepsilon^{2\theta} u_k^\varepsilon$. Аналогично формуле (55) выводим, что

$$\|\nabla_x(\rho_\varepsilon \mathcal{R}_\varepsilon^\theta u_m^\varepsilon); L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 = \lambda_m^\varepsilon \|\rho_\varepsilon \mathcal{R}_\varepsilon^\theta u_k^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 + \|u_m^\varepsilon \nabla_y(\rho_\varepsilon \mathcal{R}_\varepsilon^\theta); L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2. \quad (58)$$

Левая часть (58) оценивается снизу разностью

$$\frac{1}{2} \|\rho_\varepsilon \mathcal{R}_\varepsilon^\theta \nabla_x u_m^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 - \|u_m^\varepsilon \nabla_y(\rho_\varepsilon \mathcal{R}_\varepsilon^\theta); L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2. \quad (59)$$

По доказанному и в силу предположения (53) первое слагаемое в правой части (58) не превосходит $c_m^1 \varepsilon^{-1}$. Поскольку $|\nabla_y \rho_\varepsilon(x)| \leq 1$, второе слагаемое в (58) и вычитаемое в разности (59) меньше суммы

$$\begin{aligned} & 2 \|\mathcal{R}_\varepsilon^\theta u_m^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon \setminus \Omega_{\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon)\|^2 + 2 \|\rho_\varepsilon u_m^\varepsilon \nabla_y \mathcal{R}_\varepsilon^\theta; L^2(\Omega_d^\varepsilon \setminus \Omega_{\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon)\|^2 \leq \\ & \leq \frac{2}{r^2 \varepsilon} \|\rho_\varepsilon \mathcal{R}_\varepsilon^\theta u_m^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 + \frac{2\theta^2}{\varepsilon^2} \|\rho_\varepsilon^2 \mathcal{R}_\varepsilon^\theta u_m^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 \leq 2C_m \left(\frac{1}{r^2} + d^2 \theta^2 \right) \frac{1}{\varepsilon} \leq \frac{c_m^2}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Заметив, что приведённые выкладки остаются верными при $\theta = 0$, сформулируем полученный результат.

Теорема 2. Для собственной функции u_m^ε задачи (2), (3), отвечающей собственному значению (53), найдутся такие положительные величины θ_m , C_m и ε_m , что справедливо неравенство

$$\varepsilon^2 \|\rho_\varepsilon \mathcal{R}_\varepsilon^\theta \nabla_x u_m^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 + \|\rho \mathcal{R}_\varepsilon^\theta u_m^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \leq C_m \varepsilon \quad \text{при } \varepsilon \in (0, \varepsilon_m], \quad \theta \in [0, \theta_m], \quad (60)$$

причём $\mathcal{R}_\varepsilon^\theta$ и ρ_ε — весовые функции (54) и (57).

5. СХОДИМОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ПАР

Зафиксируем номер $p \in \mathbb{N}$ собственного значения в последовательности (6). Поскольку теорема 1 ставит в соответствие каждому собственному значению β_{1m} при $m = \overline{1, p}$ своё собственное значение задачи (2), (3), то существуют такие положительные ε_p и c_p , что

$$\lambda_p^\varepsilon - \varepsilon^{-2} \pi^2 h_0^{-2} - \varepsilon^{-1} \mu_1 \leq \lambda_{N^\varepsilon(1,p)}^\varepsilon - \varepsilon^{-2} \pi^2 h_0^{-2} - \varepsilon^{-1} \mu_1 \leq c_p. \quad (61)$$

Здесь μ_1 — первый элемент последовательности (19), а собственное значение $\lambda_{N^\varepsilon(1,p)}^\varepsilon$ из теоремы 1. Следовательно, вдоль некоторой положительной монотонной бесконечно малой последовательности $\{\varepsilon_{(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ (индекс j в дальнейших формулах для краткости опускаем) имеет место сходимость

$$\lambda_p^\varepsilon - \varepsilon^{-2} \pi^2 h_0^{-2} - \varepsilon^{-1} \mu_1 \rightarrow \hat{\beta}_p. \quad (62)$$

Положим $\mathbf{u}_p^\varepsilon = \chi u_p^\varepsilon$ и подставим в интегральное тождество (4) пробную функцию $\psi^\varepsilon = \chi \phi^\varepsilon$, где $\phi^\varepsilon \in H_0^1(\Omega_d^\varepsilon)$, $\chi \in C_c^\infty(\mathcal{V}_d)$ — срезающая функция (41), а $\Omega_d^\varepsilon = \{x \in \Omega^\varepsilon : y \in \mathcal{V}_d\}$. После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} & (\nabla_x \mathbf{u}_p^\varepsilon, \nabla_x \phi^\varepsilon)_{\Omega_d^\varepsilon} - \lambda_p^\varepsilon (\mathbf{u}_p^\varepsilon, \phi^\varepsilon)_{\Omega_d^\varepsilon} = \\ & = -(\mathbf{u}_p^\varepsilon \Delta_x \chi, \phi^\varepsilon)_{\Omega_d^\varepsilon} - 2(\nabla_x \mathbf{u}_p^\varepsilon, \phi^\varepsilon \nabla_x \chi)_{\Omega_d^\varepsilon} = O(e^{-\vartheta/\sqrt{\varepsilon}} \|\phi^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|), \quad \vartheta > 0. \end{aligned} \quad (63)$$

Соотношение $\alpha = O(\delta)$, как обычно, означает, что найдутся такие положительные величины c_α и δ_α , что $|\alpha| \leq c_\alpha \delta$ при $\delta \in (0, \delta_\alpha]$.

Далее по возможности индекс p не указываем, а для функций, переведённых в локальные координаты n и s , сохраняем обозначения. Положим

$$\mathbf{w}^\varepsilon(y) = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon h(y)}} \int_0^{\varepsilon h(y)} \sin\left(\frac{\pi z}{\varepsilon h(y)}\right) \mathbf{u}^\varepsilon(x) dz =: \int_0^{\varepsilon h(y)} \mathbf{S}^\varepsilon(y, z) \mathbf{u}^\varepsilon(x) dz, \quad (64)$$

$$\mathbf{w}_\perp^\varepsilon(x) = \mathbf{u}^\varepsilon(x) - \mathbf{S}^\varepsilon(y, z) \mathbf{w}^\varepsilon(y). \quad (65)$$

Отметим, что $\|\mathbf{S}^\varepsilon(y, \cdot); L^2(0, \varepsilon h(y))\| = 1$ при $y \in \mathcal{V}_d$ для определённого формулой (64) “нормированного синуса”. Кроме того, введём функции

$$\mathbf{v}^\varepsilon(s) = \frac{1}{\varepsilon^{1/4}} \int_{\mathbb{R}} w_1\left(\frac{n}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \mathbf{w}^\varepsilon(n, s) ds, \quad (66)$$

$$\mathbf{v}_\perp^\varepsilon(n, s) = \mathbf{w}^\varepsilon(n, s) - \varepsilon^{-1/4} w_1(\varepsilon^{-1/2} n) \mathbf{v}^\varepsilon(s). \quad (67)$$

Поскольку $u^\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega_d^\varepsilon})$, то все возникшие функции гладкие, но для них, при необходимости продолженных нулям, выполнены включения $\mathbf{w}^\varepsilon \in H_0^1(\mathcal{V}_d)$, $\mathbf{w}_\perp^\varepsilon \in H_0^1(\Omega_d^\varepsilon)$ и $\mathbf{v}^\varepsilon \in H^1(\Gamma)$, $\mathbf{v}_\perp^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R} \times \Gamma)$. Наконец, вытекающие из определений (64)–(67) условия ортогональности

$$\int_0^{\varepsilon h(y)} \mathbf{S}^\varepsilon(y, z) \mathbf{w}_\perp^\varepsilon(y, z) dz = 0 \quad \text{при всех } y \in \mathcal{V}_d, \quad (68)$$

$$\int_{\mathbb{R}} w_1\left(\frac{n}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \mathbf{v}_\perp^\varepsilon(n, s) dn = 0 \quad \text{при всех } s \in \Gamma \quad (69)$$

обеспечивают неравенства Пуанкаре

$$\int_0^{\varepsilon h(y)} |\partial_z \mathbf{w}_\perp^\varepsilon(y, z)|^2 dz \geq \frac{4\pi^2}{\varepsilon^2 h(y)^2} \int_0^{\varepsilon h(y)} |\mathbf{w}_\perp^\varepsilon(y, z)|^2 dz \quad \text{при всех } y \in \mathcal{V}_d, \quad (70)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial \mathbf{v}_\perp^\varepsilon}{\partial n}(n, s) \right|^2 dn + \frac{B^2}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}} |\mathbf{v}_\perp^\varepsilon(n, s)|^2 n^2 dn \geq \frac{\mu_2}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} |\mathbf{v}_\perp^\varepsilon(n, s)|^2 dn \quad \text{при всех } s \in \Gamma. \quad (71)$$

Формулы (7), (60), (65), (67) и условие ортогональности (68) показывают, что

$$\begin{aligned} 1 + O(e^{-\vartheta/\sqrt{\varepsilon}}) &= \|\mathbf{u}^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 = \|\mathbf{v}_\perp^\varepsilon + \mathbf{S}^\varepsilon(\varepsilon^{-1/4} \mathbf{v}^\varepsilon w_1 + \mathbf{w}_\perp^\varepsilon); L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 = \\ &= \int_{\Omega_d^\varepsilon} |\mathbf{w}_\perp^\varepsilon(x)|^2 dx + \int_{\Gamma} \int_{-d}^d \int_0^{\varepsilon h(y)} |\mathbf{S}^\varepsilon(y, z)|^2 dz (1 + n\kappa(s)) \left(\varepsilon^{-1/4} w_1\left(\frac{n}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \mathbf{v}^\varepsilon(s) + \mathbf{v}_\perp^\varepsilon(n, s) \right)^2 dn ds. \end{aligned}$$

Преобразуем последний интеграл \mathbf{I}^ε :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^\varepsilon &= \int_{\Gamma} |\mathbf{v}^\varepsilon(s)|^2 \int_{\mathbb{R}} (1 + \sqrt{\varepsilon}\eta) |w_1(\eta)|^2 d\eta + 2\varepsilon^{-1/4} \int_{\Gamma} \int_{-d}^d (1 + n\kappa(s)) \mathbf{v}^\varepsilon(s) w_1\left(\frac{n}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \mathbf{v}_\perp^\varepsilon(n, s) dn ds + \\ &\quad + \|\mathbf{v}_\perp^\varepsilon; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 + O(e^{-\vartheta/\sqrt{\varepsilon}}) = \|\mathbf{v}^\varepsilon; L^2(\Gamma)\|^2 + 2\mathbf{I}_\mathbf{v}^\varepsilon + \|\mathbf{v}_\perp^\varepsilon; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 + O(e^{-\vartheta/\sqrt{\varepsilon}}), \end{aligned}$$

$$\mathbf{I}_\mathbf{v}^\varepsilon = \varepsilon^{-1/4} \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}} n\kappa(s) \mathbf{v}^\varepsilon(s) w_1\left(\frac{n}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \mathbf{v}_\perp^\varepsilon(n, s) dn ds, \quad \max_{n \in \mathbb{R}} \left(|n| w_1\left(\frac{n}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^{1/2} \right) \leq c_w \varepsilon^{1/2},$$

$$|\mathbf{I}_\mathbf{v}^\varepsilon| \leq c_\kappa \varepsilon^{1/4} (c_w \|\mathbf{v}^\varepsilon; L^2(\Gamma)\|^2 + \|\mathbf{v}_\perp^\varepsilon; L^2(\mathbb{R} \times \Gamma)\|^2).$$

Здесь учтены чётность и экспоненциальное затухание первой (положительной) собственной функции w_1 уравнения (18), а также условие ортогональности (69).

Перечисленные формулы поочерёдно приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}^\varepsilon; L^2(\Gamma)\|^2 + \|\mathbf{v}_\perp^\varepsilon; L^2(\mathbb{R} \times \Gamma)\|^2 + \|\mathbf{w}_\perp^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 &\leq c_1, \\ |1 - \|\mathbf{v}^\varepsilon; L^2(\Gamma)\|^2 - \|\mathbf{v}_\perp^\varepsilon; L^2(\mathbb{R} \times \Gamma)\|^2 - \|\mathbf{w}_\perp^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2| &\leq c_2 \varepsilon^{1/4}. \end{aligned} \quad (72)$$

Для оценки второго и третьего вычитаемых, в частности, понадобятся следующие весовые оценки.

Лемма 4. *Существуют такие положительные θ_m , ε_m и \mathbf{c}_m , что справедливо неравенство*

$$\|\rho \mathcal{R}_\varepsilon^{\theta_m} \mathbf{w}_m^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 + \|\rho \mathcal{R}_\varepsilon^{\theta_m} \mathbf{v}_{m\perp}^\varepsilon; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 \leq \mathbf{c}_m \varepsilon \quad \text{при } \varepsilon \in (0, \varepsilon_m]. \quad (73)$$

Доказательство. В силу определения (64) имеем

$$\|\rho \mathcal{R}_\varepsilon^\theta \mathbf{w}^\varepsilon; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 \leq \int_{\mathcal{V}_d} \int_0^{\varepsilon h(y)} \mathbf{S}_\varepsilon(y, z)^2 dz \int_0^{\varepsilon h(y)} \rho(y)^2 \mathcal{R}_\varepsilon^\theta(y)^2 \chi(n)^2 |u^\varepsilon(x)|^2 dz \leq \|\rho \mathcal{R}_\varepsilon^\theta u^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \leq C\varepsilon.$$

Осталось воспользоваться соотношениями (65) и (67), а также упоминавшимся свойством затухания собственной функции w_1 уравнения (18). Лемма доказана.

Теперь рассмотрим равенство (63) при $\phi^\varepsilon = \mathbf{u}^\varepsilon$ и перепишем его в виде

$$O(e^{-\vartheta/\sqrt{\varepsilon}}) = \|\partial_z \mathbf{u}^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 + \|\partial_n \mathbf{u}^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 + \|J^{-1} \partial_s \mathbf{u}^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 - \lambda^\varepsilon \|\mathbf{u}^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2, \quad (74)$$

где $\vartheta > 0$. Положив $C^\varepsilon(y, z) = \cos(\pi h(y)^{-1} \zeta)$, получим

$$\begin{aligned} \|\partial_z \mathbf{u}^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 &= \|\partial_z \mathbf{w}_\perp^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 + \\ &+ \int_{\mathcal{V}_d} \int_0^{\varepsilon h(y)} \frac{2\pi^2}{\varepsilon^3 h(y)^3} C^\varepsilon(y, z)^2 dz |\mathbf{w}^\varepsilon(y)|^2 dy + 2 \int_{\mathcal{V}_d} \int_0^{\varepsilon h(y)} \sqrt{\frac{2\pi^2}{\varepsilon^3 h(y)^3}} C^\varepsilon(y, z) \mathbf{w}^\varepsilon(y) \partial_z \mathbf{w}_\perp^\varepsilon(y, z) dz dy \geq \\ &\geq \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} (\|\partial_z \mathbf{w}_\perp^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 + \|h^{-1} \mathbf{w}^\varepsilon; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2). \end{aligned} \quad (75)$$

При этом были выполнены дифференцирование и интегрирование по переменной z , а последний интеграл обращён в нуль при помощи формулы интегрирования по частям (“перекинули” производную ∂_z) и первого условия ортогональности (68). Важно то, что в силу ограничений (61) и (5) при малом $\varepsilon > 0$ справедливо вытекающее из (70) неравенство

$$\frac{\pi^2}{\varepsilon^2} \|\partial_z \mathbf{w}_\perp^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 \geq \frac{4\pi^2}{\varepsilon^2} \|h^{-1} \mathbf{w}_\perp^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 \geq \left(\lambda^\varepsilon + \frac{2\pi^2}{\varepsilon^2 h_0^2} \right) \|\mathbf{w}_\perp^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2. \quad (76)$$

Ввиду условий (5) и (9) выполнены соотношения

$$|\partial_s \mathbf{S}^\varepsilon(y, z)| \leq c\varepsilon^{-1/2} |n|^3 \quad \text{и} \quad |\partial_n \mathbf{S}^\varepsilon(y, z)| \leq c\varepsilon^{-1/2} |n| \quad \text{при } x \in \Omega_d^\varepsilon. \quad (77)$$

Пренебрегая дополнительным множителем n^2 в оценке производной по s , продифференцируем условие ортогональности (68) и получим

$$\left| \int_0^{\varepsilon h(y)} \mathbf{S}^\varepsilon(y, z) \nabla_y \mathbf{w}_\perp^\varepsilon(y, z) dz \right| = \left| \int_0^{\varepsilon h(y)} \mathbf{w}_\perp^\varepsilon(y, z) \nabla_y \mathbf{S}^\varepsilon(y, z) dz \right| \leq c \frac{|n|}{\sqrt{\varepsilon}} |\mathbf{w}_\perp^\varepsilon(y, z)|. \quad (78)$$

Преобразуем пару слагаемых из суммы (74) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \| \mathfrak{d}\mathbf{u}^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon) \|^2 = \| \mathfrak{d}(\mathbf{w}_\perp^\varepsilon + \mathbf{S}^\varepsilon(\varepsilon^{-1/4}\mathbf{v}^\varepsilon w_1 + \mathbf{v}_\perp^\varepsilon)); L^2(\Omega_d^\varepsilon) \|^2 = \\
 & = \| \mathfrak{d}\mathbf{w}_\perp^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon) \|^2 + 2 \int_{\Omega_d^\varepsilon} \mathfrak{d}\mathbf{w}_\perp^\varepsilon \mathfrak{d}\mathbf{S}^\varepsilon(\varepsilon^{-1/4}\mathbf{v}^\varepsilon w_1 + \mathbf{v}_\perp^\varepsilon) dx + \varepsilon^{-1/2} \| \mathfrak{d}(\mathbf{S}^\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon w_1); L^2(\Omega_d^\varepsilon) \|^2 + \\
 & + \| \mathfrak{d}(\mathbf{S}^\varepsilon \mathbf{v}_\perp^\varepsilon); L^2(\Omega_d^\varepsilon) \|^2 + 2\varepsilon^{-1/4} \int_{\Omega_d^\varepsilon} \mathfrak{d}(\mathbf{S}^\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon w_1) \mathfrak{d}(\mathbf{S}^\varepsilon \mathbf{v}_\perp^\varepsilon) dx =: I_{\mathbf{w}}^\varepsilon + 2I_{\mathbf{w}\mathbf{v}}^\varepsilon + I_{\mathbf{v}}^\varepsilon + I_{\perp}^\varepsilon + 2I_{\perp\mathbf{v}}^\varepsilon. \quad (79)
 \end{aligned}$$

Согласно второй формуле в (50) под \mathfrak{d} понимаем $J^{-1}\partial_s$ или ∂_n и соответственно далее будем приписывать к выражениям I_{\dots}^ε верхние индексы s или n . В обоих случаях сохраним величины $I_{\mathbf{w}}^{\varepsilon s}$ и $I_{\mathbf{w}}^{\varepsilon n}$, а величины $I_{\mathbf{w}\mathbf{v}}^{\varepsilon s}$ и $I_{\mathbf{w}\mathbf{v}}^{\varepsilon n}$ преобразуем:

$$\begin{aligned}
 |I_{\mathbf{w}\mathbf{v}}^{\varepsilon s}| &= \left| \int_{\mathcal{V}_d} \int_0^{\varepsilon h(y)} \partial_s \mathbf{w}_\perp^\varepsilon(y, z) \mathbf{S}^\varepsilon(y, z) dz J(n, s)^{-2} \partial_s (\varepsilon^{-1/4} \mathbf{v}^\varepsilon(s) w_1(\eta) + \mathbf{v}_\perp^\varepsilon(n, s)) dy + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\mathcal{V}_d} \int_0^{\varepsilon h(y)} \partial_s \mathbf{w}_\perp^\varepsilon(y, z) \partial_s \mathbf{S}^\varepsilon(y, z) dz J(n, s)^{-2} (\varepsilon^{-1/4} \mathbf{v}^\varepsilon(s) w_1(\eta) + \mathbf{v}_\perp^\varepsilon(n, s)) \partial_s dy \right| \leqslant \\
 &\leqslant c \left(\|\rho \mathbf{w}_\perp^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\| (\|\partial_s \mathbf{v}^\varepsilon; L^2(\Gamma)\| + \|\partial_s \mathbf{v}_\perp^\varepsilon; L^2(\mathcal{V}_d)\|) + \right. \\
 &\quad \left. + \|\partial_s \mathbf{w}_\perp^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\| (\varepsilon^{1/2} \|\mathbf{v}^\varepsilon; L^2(\Gamma)\| + \|\rho \mathbf{v}_\perp^\varepsilon; L^2(\mathcal{V}_d)\|) \right) \leqslant \\
 &\leqslant c\sqrt{\varepsilon} (\|\partial_s \mathbf{w}_\perp^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\| + \|\partial_s \mathbf{v}^\varepsilon; L^2(\Gamma)\| + \|\partial_s \mathbf{v}_\perp^\varepsilon; L^2(\mathcal{V}_d)\|), \\
 |I_{\mathbf{w}\mathbf{v}}^{\varepsilon n}| &= \left| \int_{\mathcal{V}_d} \int_0^{\varepsilon h(y)} \partial_n \mathbf{w}_\perp^\varepsilon(y, z) \mathbf{S}^\varepsilon(y, z) dz (\varepsilon^{-3/4} \mathbf{v}^\varepsilon(s) \partial_\eta w_1(\eta) + \partial_s \mathbf{v}_\perp^\varepsilon(n, s)) dy + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\mathcal{V}_d} \int_0^{\varepsilon h(y)} \partial_n \mathbf{w}_\perp^\varepsilon(y, z) \partial_n \mathbf{S}^\varepsilon(y, z) dz (\varepsilon^{-1/4} \mathbf{v}^\varepsilon(s) w_1(\eta) + \mathbf{v}_\perp^\varepsilon(n, s)) dy \right| \leqslant \\
 &\leqslant c\sqrt{\varepsilon} (\|\partial_n \mathbf{w}_\perp^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\| + \|\partial_n \mathbf{v}^\varepsilon; L^2(\Gamma)\| + \|\partial_n \mathbf{v}_\perp^\varepsilon; L^2(\mathcal{V}_d)\|).
 \end{aligned}$$

Здесь сначала использованы соотношения (77) и (78), а затем весовая оценка (73) с учётом экспоненциального затухания собственной функции w_1 (при вычислении интегралов по η после растяжения координаты n).

Рассмотрим остальные слагаемые в (79). Для $I_{\mathbf{v}}^{\varepsilon s}$ выводим формулу

$$\begin{aligned}
 & |I_{\mathbf{v}}^{\varepsilon s} - \|\partial_s \mathbf{v}^\varepsilon; L^2(\Gamma)\|^2| \leqslant \\
 & \leqslant c\varepsilon^{-1/2} \int_{\Omega_d^\varepsilon} (|J(n, s)|^{-2} - 1) |\mathbf{S}^\varepsilon(y, z)| |\partial_s \mathbf{v}^\varepsilon(s)| + |n|^3 |\mathbf{v}^\varepsilon(s)| \mathbf{S}^\varepsilon(y, z) |\partial_s \mathbf{v}^\varepsilon(s)| w_1(\eta)^2 dy dz \leqslant \\
 & \leqslant c\sqrt{\varepsilon} (\|\partial_s \mathbf{v}^\varepsilon; L^2(\Gamma)\|^2 + \|\mathbf{v}^\varepsilon; L^2(\Gamma)\|^2). \quad (80)
 \end{aligned}$$

Наконец, оставим величину $I_{\perp}^{\varepsilon s}$ без изменений, но для $I_{\perp \mathbf{v}}^{\varepsilon s}$ при помощи условия ортогональности (69), сохраняющегося для производной $\partial_s \mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}$, напишем оценку

$$\begin{aligned} |I_{\perp}^{\varepsilon s}| &\leq c\varepsilon^{-1/4} \left| \int_{\Omega_d^{\varepsilon}} w_1(\eta) \left(|J(n,s)^{-2} - 1| |\mathbf{S}^{\varepsilon}(y,z)^2| |\partial_s \mathbf{v}^{\varepsilon}(s)| |\partial_s \mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}(n,s)| + \right. \right. \\ &+ J(n,s)^{-2} |\partial_s \mathbf{S}^{\varepsilon}(y,z)| w_1(\eta) (|\mathbf{v}^{\varepsilon}(s)| |\partial_s(\mathbf{S}^{\varepsilon}(y,z) \mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}(n,s))| + |\mathbf{S}^{\varepsilon}(y,z) \partial_s \mathbf{v}^{\varepsilon}(s)| |\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}(n,s)|) \left. \right) dx \Big| \leq \\ &\leq c\sqrt{\varepsilon} (\|\partial_s \mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\| + \|\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\|) (\|\partial_s \mathbf{v}^{\varepsilon}; L^2(\Gamma)\| + \|\mathbf{v}^{\varepsilon}; L^2(\Gamma)\|). \end{aligned}$$

В случае производной $\mathfrak{d} = \partial_n$ величины $I_{\mathbf{v}}^{\varepsilon n}$, $I_{\perp}^{\varepsilon n}$ и $I_{\perp \mathbf{v}}^{\varepsilon n}$ из суммы (79) обрабатываются по-другому, а именно с привлечением последних слагаемых из формул (75) и (74). Выписывая выражения, содержащие только функцию \mathbf{v}^{ε} , находим, что

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{v}}^{\varepsilon n} + \pi^2 \varepsilon^{-5/2} \|h^{-1} \mathbf{v}^{\varepsilon} w_1; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 - \lambda^{\varepsilon} \varepsilon^{-1/2} \|\mathbf{v}^{\varepsilon} w_1; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 = \\ = \frac{1}{\varepsilon^{3/2}} \|\mathbf{v}^{\varepsilon} \partial_n w_1; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 + \frac{\pi^2}{\varepsilon^{5/2}} \int_{\mathcal{V}_d} \left(\frac{1}{h(y)^2} - \frac{1}{h_0^2} \right) (\mathbf{v}^{\varepsilon}(s))^2 (w_1(\eta))^2 dy - \frac{\mu_1}{\varepsilon^{3/2}} \|\mathbf{v}^{\varepsilon} w_1; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 + O(1) = \\ = \frac{1}{\varepsilon} \|\mathbf{v}^{\varepsilon}; L^2(\Gamma)\|^2 \int_{\mathbb{R}} \left(\left| \frac{dw_1}{d\eta}(\eta) \right|^2 + (B\eta^2 - \mu_1) |w_1(\eta)|^2 \right) d\eta + O(1) = O(1). \end{aligned}$$

Здесь учтены вытекающие из формул (5) и (50) соотношения

$$\begin{aligned} J(n,s) \left(\frac{1}{h(y)^2} - \frac{1}{h_0^2} \right) &= \frac{2a_0}{h_0^3} n^2 + b(s)n^3 + O(n^4) = Bn^2 + b(s)n^3 + O(n^4), \\ \int_{-d}^d n^3 |w_1(\eta)|^2 dn &= O(e^{-\vartheta/\sqrt{\varepsilon}}), \quad \vartheta > 0, \quad \int_{-d}^d n^4 |w_1(\eta)|^2 dn = O(\varepsilon^{5/2}), \end{aligned} \tag{81}$$

а также интегральное тождество для собственной пары $\{\mu_1; w_1\}$ уравнения гармонического осциллятора. Далее имеем

$$I_{\perp}^{\varepsilon n} + \pi^2 \varepsilon^{-2} \|h^{-1} \mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 - \lambda^{\varepsilon} \|\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 = \mathbf{I}_{\perp}^{\varepsilon n} - \mathbf{I}_{\mu}^{\varepsilon n} + \tilde{\mathbf{I}}_{\perp}^{\varepsilon n} + O(1),$$

$$\mathbf{I}_{\mu}^{\varepsilon n} = \frac{\mu_1}{\varepsilon} \|\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2, \quad \mathbf{I}_{\perp}^{\varepsilon n} = \mathbf{I}_{\perp \infty}^{\varepsilon n} + O(e^{-\vartheta/\sqrt{\varepsilon}}), \quad \vartheta > 0,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{\perp \infty}^{\varepsilon n} &= \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}} J(n,s) \left(\left| \frac{\partial \mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}}{\partial n}(n,s) \right|^2 + Bn^2 |\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}(n,s)|^2 \right) dn ds \geqslant \\ &\geqslant (1 - d\kappa_{\max}) \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}} \left(\left| \frac{\partial \mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}}{\partial n}(n,s) \right|^2 + Bn^2 |\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}(n,s)|^2 \right) dn ds \geqslant \end{aligned}$$

$$\geqslant \frac{\mu_2}{\varepsilon} (1 - d\kappa_{\max}) \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}} |\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}(n,s)|^2 dn ds \geqslant \frac{\mu_2}{\varepsilon} \frac{1 - d\kappa_{\max}}{1 + d|\kappa_{\min}|} \|\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2,$$

$$|\tilde{\mathbf{I}}_{\perp}^{\varepsilon n}| \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathcal{V}_d} \rho(y)^3 |\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}(y)|^2 dy \leq \frac{\delta}{\varepsilon} \|\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 + \frac{C}{\delta} \mathbf{I}_{\rho}^{\varepsilon n},$$

$$\mathbf{I}_{\rho}^{\varepsilon n} = \frac{1}{\varepsilon^3} \|\rho^3 \mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 \leq \frac{1}{\varepsilon^3} \left(\max_{\rho \in [0,d]} \rho^2 e^{-\theta\rho^2/\varepsilon} \right)^2 \|\rho \mathcal{R}_{\varepsilon}^{\theta} \mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 = O(1).$$

В выкладках помимо формул (81) применены неравенство Пуанкаре (71) и весовая оценка (73).

Таким образом, при выборе малых величин $d > 0$ и $\delta > 0$ выполняется неравенство

$$I_{\perp}^{\varepsilon n} + \pi^2 \varepsilon^{-2} \|h^{-1} \mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 - \lambda^{\varepsilon} \|\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 \geq \frac{\mu_2 - \mu_1}{2\varepsilon} \|\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 - C_{\perp}^{\varepsilon}. \quad (82)$$

Последнее слагаемое в сумме (79) допускает представление

$$\begin{aligned} I_{\perp \mathbf{v}}^{\varepsilon n} = & \frac{1}{\varepsilon^{3/4}} \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{v}^{\varepsilon}(s) \partial_{\eta} w_1(\eta) \partial_n \mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}(n, s) dn ds + \\ & + \frac{1}{\varepsilon^{1/4}} \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}} b_{\perp}^{\varepsilon}(n, s) \mathbf{v}^{\varepsilon}(s) w_1(\eta) \partial_n \mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}(n, s) dn ds + \tilde{I}_{\perp \mathbf{v}}^{\varepsilon n} + O(e^{-\vartheta/\sqrt{\varepsilon}}). \end{aligned} \quad (83)$$

При этом были выполнены дифференцирование по n и интегрирование по $z \in (0, \varepsilon h(y))$, а затем интегрирование распространено на всю ось $\mathbb{R} \ni n$ при учёте экспоненциального затухания составляющих w_1 и $\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}$. В итоге для составляющих представления (83) оказываются верными оценки

$$|b_{\perp}^{\varepsilon}(n, s)| \leq c_b |n|, \quad |\partial_n b_{\perp}^{\varepsilon}(n, s)| \leq c_b, \quad |\tilde{I}_{\perp \mathbf{v}}^{\varepsilon n}| \leq c \sqrt{\varepsilon} \|\mathbf{v}^{\varepsilon}; L^2(\Gamma)\| \|\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\|.$$

Преобразуем интегралы $I_{\perp \mathbf{v}1}^{\varepsilon n}$ и $I_{\perp \mathbf{v}2}^{\varepsilon n}$ из правой части формулы (83):

$$I_{\perp \mathbf{v}1}^{\varepsilon n} = -\frac{1}{\varepsilon^{5/4}} \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{v}^{\varepsilon}(s) \partial_{\eta}^2 w_1(\eta) \mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}(n, s) dn ds, \quad (84)$$

$$\begin{aligned} |I_{\perp \mathbf{v}2}^{\varepsilon n}| \leq & \frac{1}{\varepsilon^{1/4}} \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}} |\mathbf{v}^{\varepsilon}(s)| (|\partial_n b_{\perp}^{\varepsilon}(n, s)| w_1(\eta) + |b_{\perp}^{\varepsilon}(n, s)| \varepsilon^{-1/2} |\partial_{\eta} w_1(\eta)|) |\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}(n, s)| dn ds \leq \\ & \leq c \varepsilon^{1/4} \|\mathbf{v}^{\varepsilon}; L^2(\Gamma)\| \|\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\|. \end{aligned}$$

К интегралу (84) присоединим следующие интегралы (из последних слагаемых в формулах (75) и (74)):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^{1/4}} \left(\left(\frac{\pi^2}{\varepsilon^2 h^2} - \lambda^{\varepsilon} \right) \mathbf{v}^{\varepsilon} w_1, \mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon} \right)_{\mathcal{V}_d} = & I_{\perp B \mu}^{\varepsilon n} + O(\varepsilon^{1/4}) (\|\mathbf{v}^{\varepsilon}; (\Gamma)\|^2 + \varepsilon^{-1} \|\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2), \\ I_{\perp B \mu}^{\varepsilon n} = & \frac{1}{\varepsilon^{1/4}} \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{v}^{\varepsilon}(s) \mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}(n, s) \left(B^2 \frac{n^2}{\varepsilon^2} - \frac{\mu_1}{\varepsilon} \right) w_1(\eta) dn ds. \end{aligned} \quad (85)$$

Интегралы (84) и (85) взаимно уничтожаются, так как $\{\mu_1; w_1\}$ — собственная пара обыкновенного дифференциального уравнения (18).

Соберём полученные соотношения для членов формулы (74), зафиксировав малые положительные δ , d и ε_p . На основании ключевых неравенств (76), (80) и (82) выводим окончательную оценку

$$\varepsilon^{-2} \|\mathbf{w}_{p \perp}^{\varepsilon}; L^2(\Omega_d^{\varepsilon})\|^2 + \|\partial_s \mathbf{v}_p^{\varepsilon}; L^2(\Gamma)\|^2 + \varepsilon^{-1} \|\mathbf{v}_{p \perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 \leq C_p \quad \text{при } \varepsilon \in (0, \varepsilon_p] \quad (86)$$

(восстановили индекс $p \in \mathbb{N}$). Таким образом, вдоль подпоследовательности возникшей в (62) бесконечно малой последовательности $\{\varepsilon_{(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ (обозначение не меняем) имеют место сходимости

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{p \perp}^{\varepsilon} \rightarrow 0 & \text{ сильно в } L^2(\Omega_d^{\varepsilon}), \quad \mathbf{v}_{p \perp}^{\varepsilon} \rightarrow 0 \text{ сильно в } L^2(\mathcal{V}_d), \\ \mathbf{v}_p^{\varepsilon} \rightarrow \widehat{\mathbf{v}}_p & \text{ слабо в } H^1(\Gamma) \text{ и сильно в } L^2(\Gamma), \quad \text{причём } \|\widehat{\mathbf{v}}_p; L^2(\Gamma)\| = 1. \end{aligned} \quad (87)$$

Последнее равенство обеспечено формулами (72) и (86).

Теорема 3. Сходимости (62) и (87) дают собственную пару $\{\hat{\beta}_p; \hat{v}_p\} \in \mathbb{R}_+ \times H^1(\Gamma)$ спектрального уравнения (28).

Доказательство. При помощи конструкций из п. 2 для каждой функции $\psi \in C^\infty(\Gamma)$ построим пробную функцию $\Psi^\varepsilon \in H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ в интегральном тождестве (4), которое перепишем следующим образом:

$$0 = (u_p^\varepsilon, \Delta \Psi^\varepsilon + \lambda^\varepsilon \Psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon}. \quad (88)$$

Согласно формулам (21), (30) и (25) положим

$$\Psi^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1/4} \chi(y) (\psi(s) w_1(\eta) + \varepsilon^{1/2} \psi(s) \mathbf{w}'_1(\eta, s) + \varepsilon \psi(s) \mathbf{w}''_1(\eta, s) + \mathcal{W}_1(\eta, \zeta, s)).$$

Поскольку ψ не является собственной функцией уравнения (28), вместо оценки (45) малости невязки “почти собственной” функции (42) (в упрощённом виде) получаем соотношение

$$\left| \Delta \Psi^\varepsilon(x) + \left(\frac{\pi^2}{\varepsilon^2 h_0^2} + \frac{\mu_1}{\varepsilon} \right) \Psi^\varepsilon(x) - \varepsilon^{-1/4} w_1(\eta) (\partial_s^2 \psi(s) - b_1(s) \psi(s)) \right| \leq c_\psi \varepsilon^{1/4}.$$

В результате в силу формул (66) и (62), (87) переход к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$ в равенстве (88) даёт интегральное тождество

$$(\hat{v}_p, \partial_s \psi - b_1 \psi - \hat{\beta}_p \psi)_\Gamma = 0 \quad \text{при всех } \psi \in C^\infty(\Gamma),$$

из которого интегрированием по частям выводим уравнение (28). Теорема доказана.

На основании теоремы 3 получим информацию о спектре (6).

Теорема 4. Номер $N^\varepsilon(1, m)$ собственного значения $\lambda_{N^\varepsilon(1, m)}^\varepsilon$ в оценке (52) совпадает с номером m в упорядоченной последовательности (6) собственных значений задачи (2), (3).

Доказательство. Пусть индекс $m \in \mathbb{N}$ таков, что $\beta_{1m} < \beta_{1m+1}$. При выводе сходимости (62) было установлено, что $N^\varepsilon(1, m) \geq m$. Если $N^\varepsilon(1, m) > m$, то в последовательности (6) найдётся такое собственное значение $\lambda_\#^\varepsilon$, что соответствующая собственная функция $u_\#^\varepsilon$ ортогональна в $L^2(\Omega^\varepsilon)$ другим m собственным функциям, отвечающим собственным значениям

$$\lambda_p^\varepsilon \leq \frac{\pi^2}{\varepsilon^2 h_0^2} + \frac{\mu_1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} (\beta_m + \beta_{m+1}).$$

По формулам (66), (11), (87) введём собственную пару $\{\beta_\#; v_\#\}$ уравнения (28), причём согласно сильной сходимости в пространстве $L^2(\Gamma)$ и упрощённой оценке (49) из леммы 3 функция $v_\# \in H^1(\Gamma)$ остаётся ортогональной в $L^2(\Gamma)$ другим m собственным функциям v_{1p} — они отвечают собственным значениям $\beta_{1p} < \beta_{1m+1}$, что противоречит способу образования последовательности (31) при $k = 1$, а значит, утверждение теоремы доказано.

6. АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Построенная формальная асимптотика (13) собственных функций u_m^ε задачи (2), (3) обосновывается при помощи второй части леммы 2. Покажем как это делается на примере простого собственного значения из последовательности (31) при $k = 1$, однако саму теорему сформулируем в полном объёме, так как обобщения традиционны и просты. Кроме того, далее обсуждаются лишь собственные функции, отвечающие собственным значениям из первой асимптотической серии собственных значений (случай $k = 1$ в теореме 1), так как при $k > 1$ соответствующие формулы становятся абсолютно неявными.

Теорема 5. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $\beta_{1m} = \beta_{1m+\varkappa_m-1}$ — собственное значение обыкновенного дифференциального уравнения (31) с кратностью $\varkappa_m \in \{1, 2\}$. Найдутся такие положительные величины ε_m , c_m и ортогональная $\varkappa_m \times \varkappa_m$ -матрица $b_{(m)}^\varepsilon$ со столбцами $b_{(m)}^{\varepsilon m}$, $b_{(m)}^{\varepsilon m+\varkappa_m-1}$, при которых для собственных функций u_m^ε и $u_{m+\varkappa_m-1}^\varepsilon$ задачи (2), (3), подчинённых условиям ортогональности и нормировки (7), выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon \|\nabla_x u_q^\varepsilon - \nabla_x u_{(as)q}^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\| + \|u_q^\varepsilon - u_{(as)q}^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\| &\leq C_m \sqrt{\varepsilon} \\ \text{при } q = m, m + \varkappa_m - 1 \quad u \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_m], \end{aligned} \quad (89)$$

$$u_{(as)q}^\varepsilon(x) = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon^{3/2} h(y)}} \sin\left(\frac{\pi \zeta}{h(y)}\right) \sum_{p=k}^{k+\varkappa_m-1} b_{(q)p}^{\varepsilon k} \chi(n) v_p(s) w_1(\eta),$$

где χ — срезающая функция (41), ζ и η — растянутые координаты (14); w_1 и v_k , $v_{k+\varkappa_m-1}$ — собственные функции уравнений (18) и (28), при этом w_1 — нормированная в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, а v_k и $v_{k+\varkappa_m-1}$ — удовлетворяющие соотношению (31).

Доказательство. Если $\varkappa_m = 1$ и β_{1m} — простое собственное значение, то согласно теореме 4 найдётся такая постоянная $\varrho_m > 0$, что на замкнутом сегменте

$$[\varepsilon^2(\pi^2 h_0^{-2} + \varepsilon \mu_1 + \beta_m) - \varrho_m \varepsilon^{9/4}, \varepsilon^2(\pi^2 h_0^{-2} + \varepsilon \mu_1 + \beta_m) + \varrho_m \varepsilon^{9/4}]$$

располагается единственное собственное значение τ_m^ε оператора \mathcal{T}^ε . Таким образом, в суммах из формулы (37) появляется только по одному слагаемому, а столбец C_m^ε превращается в скаляр ± 1 . Осталось воспользоваться формулой (13), отбросив “лишние” члены анзаца при учёте разных нормировок (7) и (38), (33) собственных функций и собственных векторов. Теорема доказана.

Замечание 2. В предположении о гладкости профильной функции h изложенную в п. 2 процедуру можно продолжить и построить бесконечные формальные асимптотические ряды для собственных пар. Хотя, как известно (см., например, [14, гл. 7]), такое “уточнение” приводит к несоразмерным росту множителя C_m и уменьшению границы ε_k изменения параметра ε в неравенствах вида (89), подобные конструкции могут быть полезными при выводе поточечных оценок разности $u_k^\varepsilon - u_{(as)k}^\varepsilon$, поскольку легкодоступные априорные гёльдеровские оценки решений задач в тонких областях являются весовыми и содержат степени малого параметра с отрицательными показателями.

7. ВОЗМОЖНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ И ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ

1° *Гладкость.* Из-за применения “длинной” формулы Тейлора (16) для построения и обоснования собственных пар задачи (2), (3) требуется большая гладкость профильной функции h , чем, например, в ситуации (8) (см. рис. 1, б и сп. работу [6]). С другой стороны, производные непрерывной функции h могут претерпевать разрывы на контуре γ (см. сечение “плиты с острым хребтом” на рис. 2, б), т.е.

$$h(y) = h_0 + |n|^\alpha (a + \tilde{h}(y)), \quad y \in \mathcal{V}_d, \quad \alpha \in (0, 1), \quad a > 0, \quad \tilde{h} \in C^\infty(\mathcal{V}_d). \quad (90)$$



Рис. 2. Плоское изображение тонкого многогранника (а) и сечения области с негладким верхним основанием (б). Максимумы профильной функции отмечены точками

Идеи построения асимптотики приведены в статье [5], где при условии одной точки максимума (см. рис. 2, a) показано, в частности, что вместо второго растяжения координат (14) нужно использовать замену $n \mapsto \eta = \varepsilon^{-2/(2+\alpha)}n$ (ср. далее формулы (91) и (94)). Вместе с тем требования к функции \tilde{h} в соотношении (90), обеспечивающие эффект локализации около всей линии γ , и даже сам формальный асимптотический анализ остаются неизвестными.

Полностью открытыми являются вопросы построения асимптотики в случае кусочно-гладкого или разомкнутого контура γ , причём основная неясность связана с постановкой условий сопряжения в угловых точках и краевых условий в концевых точках.

2° *Непостоянный коэффициент a.* Пусть в формулах (5)

$$\begin{aligned} a(s) &= a_0 - A(s-s_0)^{2q} + O(|s-s_0|^{2q+1}), \quad A > 0, \quad q \in \mathbb{N}, \\ a(s) &< a_0 \quad \text{при } s \in \gamma \setminus \{s_0\}, \end{aligned}$$

т.е. функция a имеет строгий глобальный максимум в точке $s_0 \in \gamma$. Тогда в согласии с асимптотическим анализом, проведённым в [5, 6], дополним замены координат (14) следующей:

$$s \mapsto \xi = \varepsilon^{1/(q+1)}(s-s_0). \quad (91)$$

Повторение с некоторыми изменениями асимптотической процедуры из п. 2 применительно к разложениям собственных пар исходной задачи

$$\lambda^\varepsilon = \varepsilon^{-2}\pi^2 h_0^{-2} + \varepsilon^{-1}\mu + \varepsilon^{(1-q)/(1+q)}\beta + \dots, \quad (92)$$

$$u^\varepsilon(x) = \sin\left(\frac{\pi\zeta}{h(y)}\right)(w(\eta)v(\xi) + \dots) + \dots \quad (93)$$

даёт помимо уравнения (18) похожее обыкновенное дифференциальное уравнение на оси

$$-\partial_\xi^2 v(\xi) + 2\pi^2 A h_0^{-3} \xi^{2q} v(\xi) = \beta v(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (94)$$

Спектр этого уравнения является дискретным и образует последовательность собственных значений вида (31), а соответствующие собственные функции $v_m \in C^\infty(\mathbb{R})$ затухают при $\xi \rightarrow \pm\infty$ с экспоненциальной скоростью $o(e^{-\vartheta|\xi|^{2q}})$, $\vartheta > 0$. Представление (93) подсказывает, что для собственных функций задачи (2), (3) характерна концентрация около точки $(s_0, \varepsilon h_0)$ на линии (10), однако это свойство, а также формулы (92)–(94) ещё нуждаются в строгом обосновании.

При $q = 1$ уравнение (94) совпадает с уравнением гармонического осциллятора, а при $q = 1/2$ сходно с уравнением Эйри (см., например, [9] и [15] соответственно).

3° *Локализация около боковой поверхности.* Предположим, что контур γ , на котором профильная функция h принимает максимальное значение (см. формулы (5)), совпадает с (гладкой) границей сечения области (1) (см. рис. 1, г). Предельной задачей для пары $\{\mu_k, w_k\}$ является задача Дирихле на полуоси

$$-\partial_\eta^2 w(\eta) + B^2 \eta^2 w(\eta) = \mu w(\eta), \quad \eta \in (-\infty, 0), \quad w(0) = 0, \quad (95)$$

собственные значения которой имеют вид (19) с чётными натуральными k . У задачи Дирихле на полуоси для уравнения (20) возникает требующее выполнения условия разрешимости, поскольку

$$\int_{-\infty}^0 w_k(\eta) f'_k(\eta, s) d\eta = -v(s) a'(s) \frac{2\pi^2}{h_0^3} \int_{-\infty}^0 \eta^3 |w_k(\eta)|^2 d\eta =: v(s) a'(s) M_k \quad \text{и} \quad M_k > 0. \quad (96)$$

Как и в работе [7], во избежание локализации собственной функции около какой-либо точки следует предположить, что коэффициент в третьем члене $a'n^3$ формулы Тейлора (16) —

постоянная $a' = a'_0$, и ввести в разложение (12) собственного значения новое слагаемое $\varepsilon^{-1/2}\mu'$, где $\mu' = -a'_0 M_k$, в соответствии с формулами (96) и (20).

При замене условия Дирихле на боковой поверхности $\gamma \times (0, \varepsilon h_0)$ условием Неймана вместо $w(0) = 0$ нужно использовать $\partial_\eta w(0) = 0$ в задаче (95), а в формуле (19) для собственных значений брать нечётные индексы k , тогда выражение (96) изменится.

Установленные в статье утверждения можно применить к описанным формам тонкой области — предложенные способы вывода оценок нуждаются в достаточно понятных модификациях.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 124041500009-8).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Friedlander, L. On the spectrum of narrow periodic waveguides / L. Friedlander, M. Solomyak // Russ. J. Math. Phys. — 2008. — V. 15, № 4. — P. 238–242.
2. Friedlander, L. On the spectrum of the Dirichlet Laplacian in a narrow strip / L. Friedlander, M. Solomyak // Israel J. Math. — 2009. — V. 170. — P. 337–354.
3. Borisov, D. Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions on thin planar domains / D. Borisov, P. Freitas // Ann. Inst. Henri Poincaré. Anal. Non Linéaire. — 2009. — V. 26, № 2. — P. 547–560.
4. Borisov, D. Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions on thin planar domains / D. Borisov, P. Freitas // J. Funct. Anal. — 2010. — V. 258, № 3. — P. 893–912.
5. Назаров, С.А. Околовершинная локализация собственных функций задачи Дирихле в тонких многогранниках / С.А. Назаров // Сиб. мат. журн. — 2013. — Т. 54, № 3. — С. 655–672.
6. Nazarov S.A. Localization effect for Dirichlet eigenfunctions in thin non-smooth domains / S.A. Nazarov, E. Perez, J. Taskinen // Trans. Amer. Math. Soc. — 2016. — V. 368, № 7. — P. 4787–4829.
7. Камоцкий, И.В. О собственных функциях, локализованных около кромки тонкой области / И.В. Камоцкий, С.А. Назаров // Проблемы мат. анализа. Вып. 19. — Новосибирск : Научная книга, 1999. — С. 105–148.
8. Cardone, G. The localization effect for eigenfunctions of the mixed boundary value problem in a thin cylinder with distorted ends / G. Cardone, T. Durante, S.A. Nazarov // SIAM J. Math. Anal. — 2010. — V. 42, № 6. — P. 2581–2609.
9. Ландау, Л.Д. Квантовая механика (релятивистская теория) / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — М. : Наука, 1971. — 288 с.
10. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд. — М. : МЦНМО, 2012. — 343 с.
11. Simmons G.F. Differential Equations with Applications and Historical Notes / G.F. Simmons. — New York : McGraw-Hill, 1972. — 764 р.
12. Бирман, М.Ш. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / М.Ш. Бирман, М.З. Соломяк. — Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. — 264 с.
13. Вишник М.И. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / М.И. Вишник, Л.А. Люстерник // Успехи мат. наук. — 1957. — Т. 12, № 5. — С. 3–122.
14. Назаров С.А. Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки / С.А. Назаров. — Новосибирск : Научная книга, 2002. — 408 с.
15. Бабич В.М. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн / В.М. Бабич, В.С. Булдырев. — М. : Наука, 1972. — 456 с.

**LOCALIZATION OF EIGENFUNCTIONS OF THE DIRICHLET PROBLEM
NEAR A CONTOUR AT THE BOUNDARY OF A THIN DOMAIN**

© 2024 / S. A. Nazarov

*Institute for Problems in Mechanical Engineering of RAS, Saint Petersburg, Russia
e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk*

We consider the spectral Dirichlet problem for the Laplace operator in a thin three-dimensional domain of a variable thickness which admits a maximum value at a smooth closed contour either inside the longitudinal cross-section, or at its boundary. We find out asymptotic expansions of the eigenvalues which involve eigenvalues of the harmonic oscillator at the axis or the half-axis as well as of a certain second order ordinary differential equation at the contour. The eigenfunctions are localized in the vicinity of the contour.

Keywords: Dirichlet problem, thin domain, asymptotics of eigenvalues

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. 124041500009-8).

REFERENCES

1. Friedlander, L. and Solomyak, M., On the spectrum of narrow periodic waveguides, *Russ. J. Math. Phys.*, 2008, vol. 15, no. 4, pp. 238–242.
2. Friedlander, L. and Solomyak, M., On the spectrum of the Dirichlet Laplacian in a narrow strip, *Israel J. Math.*, 2009, vol. 170, pp. 337–354.
3. Borisov, D. and Freitas, P., Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions on thin planar domains, *Ann. Inst. Henri Poincaré. Anal. Non Linéaire*, 2009, vol. 26, no. 2, pp. 547–560.
4. Borisov, D. and Freitas, P., Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions on thin planar domains, *J. Funct. Anal.*, 2010, vol. 258, no. 3, pp. 893–912.
5. Nazarov, S.A., The localization for eigenfunctions of the Dirichlet problem in thin polyhedra near the vertices, *Siberian Math. J.*, 2013, vol. 54, no. 3, pp. 517–532.
6. Nazarov S.A., Perez, E., and Taskinen, J., Localization effect for Dirichlet eigenfunctions in thin non-smooth domains, *Transactions of the American Mathematical Society*, 2016, vol. 368, no. 7, pp. 4787–4829.
7. Kamotskii, I.V. and Nazarov, S.A., On eigenfunctions localized in a neighborhood of the lateral surface of a thin domain, *J. Math. Sci.*, 2000, vol. 101, no. 2, pp. 2941–2974.
8. Cardone, G., Durante, T., and Nazarov, S.A., The localization effect for eigenfunctions of the mixed boundary value problem in a thin cylinder with distorted ends, *SIAM J. Math. Anal.*, 2010, vol. 42, no. 6, pp. 2581–2609.
9. Landau, L.D. and Lifshitz, E.M., *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*, Amsterdam: Elsevier, 2013.
10. Arnold, V.I., *Ordinary Differential Equations*, Berlin, Heidelberg: Springer Science & Business Media, 1992.
11. Simmons, G.F., *Differential Equations with Applications and Historical Notes*, New York: McGraw-Hill, 1972.
12. Birman, M.Sh. and Solomyak, M.Z., *Spectral Theory of Selfadjoint Operators in Hilbert Space*, Dordrecht: D. Reidel Publ. Co., 1987.
13. Vishik, M.I. and Lyusternik, L.A., Regular degeneration and a boundary layer for linear differential equations with a small parameter, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1957, vol. 12, no. 5, pp. 3–122.
14. Nazarov S.A., *Asymptoticheskaya teoriya tonkikh plastin i sterzhej. Ponizhenie razmernosti i integral'nye otsenki* (Asymptotic Theory of Thin Plates and Rods. Dimension Reduction and Integral Estimates), Novosibirsk: Nauchnaya Kniga, 2002.
15. Babich, V.M. and Buldyrev, V.S., *Short-Wavelength Diffraction Theory. Asymptotic Methods*, Berlin: Springer-Verlag, 1991.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ НЕПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО НЕНУЛЕВОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ В ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

© 2024 г. С. Н. Тимергалиев

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

e-mail: samat_time@mail.ru

Поступила в редакцию 25.01.2024 г., после доработки 27.09.2024 г.; принята к публикации 31.10.2024 г.

Исследуется разрешимость краевой задачи для системы пяти нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка при заданных нелинейных граничных условиях, описывающей состояние равновесия упругих непологих неоднородных изотропных оболочек с незакреплёнными краями в рамках сдвиговой модели Тимошенко, отнесённых к изометрическим координатам. Краевая задача сводится к нелинейному операторному уравнению относительно обобщённых перемещений в соболевском пространстве, разрешимость которого устанавливается с использованием принципа сжимающих отображений.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с частными производными, обобщённое решение, теорема существования

DOI: 10.31857/S0374064124120088, EDN: IPANHD

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача нахождения решений в плоской односвязной ограниченной области Ω системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (DT^{j\lambda})_{\alpha^\lambda} + DG^j_{\lambda\mu} T^{\lambda\mu} - DB^j_\lambda (T^{\lambda\mu} v_\mu + T^{\lambda 3}) + DR^j = 0, \quad j = 1, 2, \\ (DT^{\lambda\mu} v_\mu)_{\alpha^\lambda} + (DT^{\lambda 3})_{\alpha^\lambda} + DB_{\lambda\mu} T^{\lambda\mu} + DR^3 = 0, \\ (DM^{j\lambda})_{\alpha^\lambda} - DT^{j3} + DG^j_{\lambda\mu} M^{\lambda\mu} + DL^j = 0, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \tag{1}$$

удовлетворяющих на границе Γ области Ω условиям

$$\begin{aligned} D(T^{j1} d\alpha^2/ds - T^{j2} d\alpha^1/ds) = P^j(s), \quad j = 1, 2, \\ D(T^{13} d\alpha^2/ds - T^{23} d\alpha^1/ds) + D(T^{1\lambda} d\alpha^2/ds - T^{2\lambda} d\alpha^1/ds) v_\lambda = P^3(s), \\ D(M^{j1} d\alpha^2/ds - M^{j2} d\alpha^1/ds) = N^j(s), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь и ниже используются следующие обозначения: $T^{ij} \equiv T^{ij}(\gamma) = D_{\lambda-1}^{ijkn} \gamma_{kn}^{\lambda-1}$, $M^{ij} \equiv M^{ij}(\gamma) = D_\lambda^{ijkn} \gamma_{kn}^{\lambda-1}$, $\gamma = (\gamma^0, \gamma^1)$, $\gamma^k = (\gamma_{11}^k, \gamma_{12}^k, \gamma_{13}^k, \gamma_{22}^k, \gamma_{23}^k, \gamma_{33}^k)$, $k = 0, 1$;

$$D_m^{ijkn} = D_m^{ijkn}(\alpha^1, \alpha^2) = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} B^{ijkn}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)(\alpha^3)^m d\alpha^3, \quad m = \overline{0, 2}, \quad i, j, k, n = \overline{1, 3};$$

$B^{1111}=B^{2222}=E/(1-\nu^2)$, $B^{1122}=\nu E/(1-\nu^2)$, $B^{1212}=E/(2(1+\nu))$, $B^{1313}=B^{2323}=E\kappa^2/(2(1+\nu))$; $\gamma_{jj}^0=w_{j\alpha j}-G_{jj}^\lambda w_\lambda-B_{jj}w_3+v_j^2/2$, $j=1,2$; $\gamma_{12}^0=w_{1\alpha^2}+w_{2\alpha^1}-2G_{12}^\lambda w_\lambda-2B_{12}w_3+v_1v_2$, $\gamma_{jj}^1=\psi_{j\alpha j}-G_{jj}^\lambda \psi_\lambda$, $j=1,2$; $\gamma_{12}^1=\psi_{1\alpha^2}+\psi_{2\alpha^1}-2G_{12}^\lambda \psi_\lambda$, $\gamma_{j3}^0=v_j+\psi_j$, $j=1,2$; $\gamma_{33}^0\equiv 0$, $\gamma_{k3}^1\equiv 0$, $k=\overline{1,3}$; $v_j=w_{3\alpha j}+B_j^\lambda w_\lambda$, $B_j^\lambda=A^{\lambda\mu}B_{\mu j}$, $A^{jj}=A_{3-j3-j}/D^2$, $j=1,2$; $A^{12}=A^{21}=-A_{12}/D^2$, $D^2=A_{11}A_{22}-A_{12}^2$; остальные B^{ijkn} равны нулю; $\alpha^j=\alpha^j(s)$ ($j=1,2$) — уравнения кривой Γ , s — длина дуги Γ ; нижний индекс α^λ означает дифференцирование по α^λ , $\lambda=1,2$.

Система (1) относительно функций $w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2$ является системой из пяти дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, линейных относительно ψ_1, ψ_2 и нелинейных относительно w_1, w_2, w_3 . Совместно с граничными условиями (2) она описывает состояние равновесия упругой непологой изотропной неоднородной оболочки с незакреплёнными краями в рамках сдвиговой модели Тимошенко [1, с. 168–170, 269], отнесённой к криволинейной системе координат. При этом T^{ij} — усилия, M^{ij} — моменты; γ_{ij}^k ($i,j=\overline{1,3}, k=0,1$) — компоненты тензора деформаций срединной поверхности S_0 оболочки, гомеоморфной области Ω ; w_j ($j=1,2$) и w_3 — соответственно тангенциальные и нормальное перемещения точек S_0 ; ψ_i ($i=1,2$) — углы поворота нормальных сечений S_0 ; B_{ij} ($i,j=1,2$) — ковариантные компоненты тензора кривизны поверхности S_0 , A_{ij} — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S_0 , G_{ij}^λ — символы Кристоффеля второго рода, которые в изометрической системе координат определяются формулами [2, с. 18]

$$A_{11}=A_{22}=\Lambda=\Lambda(\alpha^1, \alpha^2), \quad A_{12}=0, \quad D=\Lambda; \\ G_{jj}^1=(-1)^{j-1}\Lambda_{\alpha^1}/(2\Lambda), \quad G_{jj}^2=(-1)^j\Lambda_{\alpha^2}/(2\Lambda), \quad G_{12}^j=G_{21}^j=\Lambda_{\alpha^{3-j}}/(2\Lambda), \quad j=1,2; \quad (3)$$

R^j, P^j ($j=\overline{1,3}$), L^k, N^k ($k=1,2$) — компоненты внешних сил, действующих на оболочку; ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, κ^2 — коэффициент сдвига, $D=D(\alpha^1, \alpha^2)$ — якобиан; $h_0=\text{const}$ — толщина оболочки; α^1, α^2 — декартовы координаты точек области Ω .

В (1), (2) и во введённых обозначениях (и в дальнейшем) по повторяющимся латинским индексам ведётся суммирование от 1 до 3, по повторяющимся греческим — от 1 до 2.

Разрешимость нелинейных краевых задач для дифференциальных уравнений теории упругих оболочек достаточно полно изучена в рамках простейшей модели Кирхгофа–Лява (см., например, работы [2–7] и библиографии в них) с использованием метода гильбертовых пространств, вариационных методов, теоремы о неявной функции. Эти же методы применялись к исследованию разрешимости нелинейных задач термоупругости для оболочек в рамках гипотез Григолюка–Чулкова [8, 9]. В то же время актуальными являются краевые задачи более сложных моделей теории оболочек [2, с. 349]. На сегодняшний день имеется ряд работ [10–15], в которых разрешимость нелинейных задач для упругих оболочек исследовалась в рамках сдвиговой модели Тимошенко. Для этого был предложен новый метод, основанный на сведении исходной нелинейной задачи к нелинейному операторному уравнению относительно обобщённых перемещений в соболевском пространстве. В его основе лежат интегральные представления для обобщённых перемещений, содержащие произвольные функции, в том числе произвольные голоморфные функции, которые находятся таким образом, чтобы обобщённые перемещения удовлетворяли линейной системе уравнений и линейным граничным условиям, выделенным специальным образом из исходной нелинейной задачи. В результате исходная нелинейная краевая задача сводится к нелинейному операторному уравнению с оператором, который представляется в виде суммы линейного и нелинейного операторов. При исследовании разрешимости нелинейного операторного уравнения наиболее существенным моментом является доказательство обратимости линейного оператора, которое зависит от физико-геометрических характеристик оболочки. Такой

подход позволил доказать существование обобщённых решений нелинейных задач равновесия пологих оболочек типа Тимошенко, отнесённых к евклидовой [10–13] и изометрической [14] системам координат, а также непологих оболочек типа Тимошенко нулевой гауссовой кривизны, отнесённых к евклидовой системе координат [15].

Настоящая статья посвящена исследованию нелинейных задач для непологих неоднородных изотропных оболочек типа Тимошенко ненулевой гауссовой кривизны. Исследования проведены в изометрических координатах и непосредственно развиваются результаты работы [14]. Переход к непологим оболочкам ненулевой гауссовой кривизны, отнесённым к изометрическим координатам, усложняет систему дифференциальных уравнений равновесия оболочек и вносит существенные сложности в исследование разрешимости нелинейного операторного уравнения, связанные с доказательством обратимости линейного оператора.

Краевую задачу (1), (2) будем изучать в обобщённой постановке. Пусть выполнены следующие условия:

- (а) имеют место включения $B^{ijkn}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) \in (W_p^{(1)}(\Omega) \cap C_\beta(\bar{\Omega})) \times L_1[-h_0/2, h_0/2]$, $i, j, k, n = \overline{1, 3}$; $B_{\lambda\mu}(\alpha^1, \alpha^2) \in W_p^{(2)}(\Omega)$, $\lambda, \mu, k = 1, 2$;
- (б) якобиан $D = \Lambda(\alpha^1, \alpha^2) > 0$ в $\bar{\Omega}$ и $\Lambda(\alpha^1, \alpha^2) \in W_p^{(4)}(\Omega)$;
- (с) гауссова кривизна $\kappa = (B_{11}B_{22} - B_{12}^2)/\Lambda^2$ срединной поверхности оболочки не равна нулю в области $\bar{\Omega}$;
- (д) компоненты внешних сил R^j ($j = \overline{1, 3}$) и L^k ($k = 1, 2$) принадлежат пространству $L_p(\Omega)$, а компоненты P^j ($j = \overline{1, 3}$), N^k ($k = 1, 2$) — пространству $C_\beta(\Gamma)$, и внешние силы самоуравновешены;
- (е) Ω — произвольная односвязная область с границей $\Gamma \in C_\beta^1$.

Здесь и далее $2 < p < 4/(2-\beta)$, $0 < \beta < 1$.

Определение. Назовём вектор обобщённых перемещений $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2)$ обобщённым решением задачи (1), (2), если a принадлежит пространству $W_p^{(2)}(\Omega)$, почти всюду удовлетворяет системе (1) и поточечно граничным условиям (2).

Здесь $W_p^{(j)}(\Omega)$ — пространства Соболева. В силу теорем вложения для соболевских пространств $W_p^{(2)}(\Omega)$ с $p > 2$ обобщённое решение a принадлежит пространству $C_\alpha^1(\bar{\Omega})$; здесь и везде далее $\alpha = (p-2)/p$. Заметим, что при $2 < p < 4/(2-\beta)$ справедливо неравенство $\alpha < \beta/2$.

Соотношения для компонент деформаций для удобства в дальнейших исследованиях запишем в виде

$$\gamma_{ij}^k = e_{sij}^k + e_{cij}^k + \chi_{ij}^k, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad k = 0, 1, \quad (4)$$

где приняты обозначения: $e_{sjj}^0 = w_{j\alpha^j}$, $e_{sj3}^0 = w_{3\alpha^j} + \psi_j$, $e_{sjj}^1 = \psi_{j\alpha^j}$, $j = 1, 2$; $e_{s12}^0 = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1}$, $e_{s12}^1 = \psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1}$, $e_{cjj}^0 = -G_{jj}^\lambda w_\lambda - B_{jj} w_3$, $e_{cjj}^1 = -G_{jj}^\lambda \psi_\lambda$, $j = 1, 2$; $e_{c12}^0 = -2G_{12}^\lambda w_\lambda - 2B_{12} w_3$, $e_{c12}^1 = -2G_{12}^\lambda \psi_\lambda$, $e_{cj3}^0 = B_j^\lambda w_\lambda$, $\chi_{jj}^0 = v_j^2/2$, $j = 1, 2$; $\chi_{12}^0 = v_1 v_2$, $\chi_{ij}^1 = \chi_{j3}^0 = e_{s33}^0 = e_{sj3}^1 = e_{c33}^1 \equiv 0$, $i, j = \overline{1, 3}$, $k = 0, 1$.

2. ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДЛЯ ОБОБЩЁННЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Введём в рассмотрение комплексные функции

$$\begin{aligned} \omega_j = \omega_j(z) = D \{ & D_{j-1}^{1111} (w_{1\alpha^1} + w_{2\alpha^2}) + D_j^{1111} (\psi_{1\alpha^1} + \psi_{2\alpha^2}) + \\ & + i [D_{j-1}^{1212} (w_{2\alpha^1} - w_{1\alpha^2}) + D_j^{1212} (\psi_{2\alpha^1} - \psi_{1\alpha^2})] \}, \quad j = 1, 2, \quad z = \alpha^1 + i\alpha^2. \end{aligned} \quad (5)$$

В системе (1) усилия T^{jk} и моменты M^{jk} запишем с учётом вида компонент деформаций γ_{jk}^n из (4). Прибавляя после этого к первому уравнению в (1) второе, умноженное на

мнимую единицу i , а к четвёртому уравнению пятое, умноженное также на i , представим систему (1) с учётом функций $\omega_j(z)$ из (5) в удобной для дальнейших исследований форме:

$$\omega_{j\bar{z}} + h^j(a) = f_c^j(a) + f_\chi^j(a) - F^j(z), \quad j = 1, 2, \quad (6)$$

$$DD_0^{1313}(w_{3\alpha^1\alpha^1} + w_{3\alpha^2\alpha^2}) + h^3(a) = f_c^3(a) + f_\chi^3(a) - F^3(z), \quad z \in \Omega, \quad (7)$$

где приняты следующие обозначения: $\omega_{j\bar{z}} = (\omega_{j\alpha^1} + i\omega_{j\alpha^2})/2$, $j = 1, 2$; $h^j(a) = (-1)^{\mu-1} \times \times [(DD_{j+\lambda-2}^{1212})_{\alpha^3-\mu} \nu_{\lambda\alpha^\mu} + i(DD_{j+\lambda-2}^{1212})_{\alpha^\mu} \nu_{\lambda 1\alpha^{3-\mu}}] - (j-1)DD_0^{1313}(e_{s13}^0 + ie_{s23}^0)/2$, $\nu_{1j} = w_j$, $\nu_{2j} = \psi_j$, $j = 1, 2$; $h^3(a) = (DD_0^{1313})_{\alpha^\lambda} w_{3\alpha^\lambda} + (DD_0^{1313})_{\psi_\lambda} \psi_\lambda$; $f_c^j(a) = (f_{c3j-2} + if_{c3j-1})/2$, $f_\chi^j(a) = (f_{\chi 3j-2} + if_{\chi 3j-1})/2$, $j = 1, 2$; $f_c^3(a) = f_{c3}(a)$, $f_\chi^3(a) = f_{\chi 3}(a)$, $f_{cj}(a) = -(DT^{j\lambda}(e_c))_{\alpha^\lambda} - DG_{\lambda\mu}^j T^{\lambda\mu}(e) + DB_\lambda^j T^{\lambda^3}(e)$, $f_{c3+j}(a) = -(DM^{j\lambda}(e_c))_{\alpha^\lambda} - DG_{\lambda\mu}^j M^{\lambda\mu}(e) + DT^{j3}(e_c)$, $f_{\chi j}(a) = -(DT^{j\lambda}(\chi))_{\alpha^\lambda} - DG_{\lambda\mu}^j M^{\lambda\mu}(\chi) + DT^{j3}(\chi)$, $j = 1, 2$; $f_{c3}(a) = -(DT^{\lambda^3}(e_c))_{\alpha^\lambda} - DB_{\lambda\mu} T^{\lambda\mu}(e)$, $f_{\chi 3}(a) = -(DT^{\lambda\mu}(\gamma)v_\mu)_{\alpha^\lambda} - (DT^{\lambda^3}(\chi))_{\alpha^\lambda} - DB_{\lambda\mu} T^{\lambda\mu}(\chi)$, $F^1 = D(R^1 + iR^2)/2$, $F^2 = D(L^1 + iL^2)/2$, $F^3 = DR^3$; $e = e_s + e_c$, $e_s = (e_s^0, e_s^1)$, $e_c = (e_c^0, e_c^1)$, $e_s^k = (e_{s11}^k, e_{s12}^k, e_{s13}^k, e_{s22}^k, e_{s23}^k, e_{s33}^k)$, $e_c^k = (e_{c11}^k, e_{c12}^k, e_{c13}^k, e_{c22}^k, e_{c23}^k, e_{c33}^k)$, $k = 0, 1$; $\chi = (\chi_{11}^0, \chi_{12}^0, \chi_{22}^0)$; e_{sij}^k , e_{cij}^k , χ_{ij}^k определены ранее.

Отметим, что через e и χ обозначены соответственно линейные и нелинейные части компонент тензора деформации γ , поэтому справедливо представление $\gamma = e + \chi$.

Аналогично граничные условия (2) запишем в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[(-i)^j t' \omega_k(t)] + 2(-1)^j DD_{k+\delta-2}^{1212} \nu_{\delta 3-j\alpha^\lambda} d\alpha^\lambda / ds = \\ = \varphi_{c3(k-1)+j}(a)(t) + \varphi_{\chi 3(k-1)+j}(a)(t) - F^{3k+j}(s), \quad k, j = 1, 2, \\ DD_0^{1313}[(w_{3\alpha^2} + \psi_2)d\alpha^1/ds - (w_{3\alpha^1} + \psi_1)d\alpha^2/ds] = \varphi_{c3}(a) + \varphi_{\chi 3}(a)(t) - F^6(s), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\varphi_{cj}(a)(t) = D[T^{j2}(e_c)d\alpha^1/ds - T^{j1}(e_c)d\alpha^2/ds]$, $\varphi_{c3+j}(a)(t) = D[M^{j2}(e_c)d\alpha^1/ds - M^{j1}(e_c)d\alpha^2/ds]$, $\varphi_{\chi j}(a)(t) = D[T^{j2}(\chi)d\alpha^1/ds - T^{j1}(\chi)d\alpha^2/ds]$, $\varphi_{\chi 3+j}(a)(t) = D[M^{j2}(\chi)d\alpha^1/ds - M^{j1}(\chi)d\alpha^2/ds]$, $j = 1, 2$; $\varphi_{c3}(a)(t) = D[T^{13}(e_c)d\alpha^2/ds - T^{23}(e_c)d\alpha^1/ds]$, $\varphi_{\chi 3}(a)(t) = D[T^{1\lambda}(\gamma)d\alpha^2/ds - T^{2\lambda}(\gamma)d\alpha^1/ds]v_\lambda - D[T^{23}(\chi)d\alpha^1/ds - T^{13}(\chi)d\alpha^2/ds]$; $F^{3+j} = -P^j$, $j = 1, 2$; $F^6(s) = P^3(s)$, $F^{6+k} = -N^k$, $k = 1, 2$.

В основе исследования системы уравнений (6), (7) с граничными условиями (8) лежат интегральные представления для обобщённых перемещений w_j ($j = \overline{1, 3}$), ψ_k ($k = 1, 2$). Для их вывода рассмотрим уравнения

$$\omega_{j\bar{z}} = \rho^j \quad (j = 1, 2), \quad DD_0^{1313}(w_{3\alpha^1\alpha^1} + w_{3\alpha^2\alpha^2}) = \rho^3, \quad (9)$$

где $\rho^1 = \rho_1 + i\rho_2$, $\rho^2 = \rho_4 + i\rho_5$, $\rho^3 = \rho_3$ — произвольно фиксированные функции, принадлежащие пространству $L_p(\Omega)$.

Первые два уравнения в (9) представляют собой неоднородные уравнения Коши–Римана, общие решения которых даются формулами [16, с. 29]

$$\begin{aligned} \omega_j(z) &= \Phi_j(z) + T\rho^j(z) \equiv \omega_j(\Phi_j; \rho^j)(z), \\ T\rho^j(z) &= -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{\rho^j(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad j = 1, 2, \quad \zeta = \xi + i\eta, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\Phi_j(z)$ — произвольные голоморфные функции, принадлежащие пространству $C_\alpha(\overline{\Omega})$.

Известно [16, с. 39–41, 46], что T — вполне непрерывный оператор в пространствах $L_p(\Omega)$ и $C_\alpha^k(\overline{\Omega})$, отображающий их в пространства $C_\alpha(\overline{\Omega})$ и $C_\alpha^{k+1}(\overline{\Omega})$ соответственно. Кроме того, существуют обобщённые производные

$$\frac{\partial Tf}{\partial \bar{z}} = f, \quad \frac{\partial Tf}{\partial z} \equiv Sf = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta, \quad (11)$$

где S — линейный ограниченный оператор в $L_p(\Omega)$, $p > 1$, и $C_\alpha^k(\overline{\Omega})$.

Представления (10), в свою очередь, при помощи функций $\omega_1^0 = w_2 + iw_1$, $\omega_2^0 = \psi_2 + i\psi_1$ запишем в виде неоднородных уравнений Коши–Римана

$$\omega_{j\bar{z}}^0 = iT_j \omega, \quad j = 1, 2, \quad (12)$$

общие решения которых имеют вид

$$\omega_j^0(z) = \Psi_j(z) + iT T_j \omega(z) \equiv \omega_j^0(\Psi_j; \omega)(z), \quad j = 1, 2. \quad (13)$$

В (12), (13) введены обозначения: $T_j \omega = d_{2j-1}[\omega_1] + d_{2j}[\omega_2]$, $\omega = (\omega_1, \omega_2)$,

$$\begin{aligned} d_{2j+\lambda-2}[\omega_\lambda] &= d_{2j+\lambda-2}^1 \omega_\lambda + (-1)^{j+\lambda} d_{2j+\lambda-2}^2 \overline{\omega_\lambda}, \quad j, \lambda = 1, 2, \\ d_{3k-2}^j &= \frac{1}{4D} \left(\frac{D_{4-2k}^{1111}}{\delta_0} + (-1)^j \frac{D_{4-2k}^{1212}}{\delta_1} \right), \quad d_2^j = d_3^j = \frac{1}{4D} \left(\frac{D_1^{1212}}{\delta_1} + (-1)^j \frac{D_1^{1111}}{\delta_0} \right), \quad k, j = 1, 2, \\ \delta_0 &= D_0^{1111} D_2^{1111} - (D_1^{1111})^2, \quad \delta_1 = D_0^{1212} D_2^{1212} - (D_1^{1212})^2; \end{aligned}$$

$\Psi_j(z) \in C_\alpha^1(\overline{\Omega})$ — произвольные голоморфные функции, ω_j определены в (10).

Третье уравнение в (9) представим в виде

$$w_{3z\bar{z}} = \tilde{\rho}_3/4, \quad \tilde{\rho}_3 = \rho_3/(DD_0^{1313}), \quad w_{3z} = (w_{3\alpha^1} - iw_{3\alpha^2})/2,$$

откуда получим

$$w_3(z) = \operatorname{Re} \Psi_3(z) - \tilde{T} \tilde{\rho}_3 \equiv w_3(\Psi_3; \rho_3)(z), \quad \tilde{T} \tilde{\rho}_3 = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \tilde{\rho}_3(\zeta) \ln \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\xi d\eta, \quad (14)$$

где $\Psi_3(z) \in C_\alpha^1(\overline{\Omega})$ — произвольная голоморфная функция.

Соотношения (13), (14) представляют собой искомые интегральные представления для обобщённых перемещений и лежат в основе предложенного метода исследования.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Представления (13), (14) для обобщённых перемещений $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2)$ содержат произвольные голоморфные функции $\Phi_j(z)$ ($j = 1, 2$), $\Psi_k(z)$ ($k = \overline{1, 3}$) и произвольные функции $\rho^j(z)$ ($j = \overline{1, 3}$). Их найдём так, чтобы обобщённые перемещения удовлетворяли системе (6), (7) и граничным условиям (8), при этом правые части уравнений (6), (7) и граничных условий (8) временно считаем известными. С этой целью соотношения (13), (14) подставим в левые части системы уравнений (6), (7) и граничных условий (8). В результате система (6), (7) примет вид

$$\rho^j(z) + h_1^j(\rho)(z) + h_2^j(\Phi)(z) = f_c^j(a)(z) + f_\chi^j(a)(z) - F^j(z), \quad j = \overline{1, 3}, \quad z \in \Omega, \quad (15)$$

где через $h_1^j(\rho)(z)$ и $h_2^j(\Phi)(z)$ обозначены те части выражения оператора $h^j(a)$, которые содержат функции $\rho = (\rho^1, \rho^2, \rho^3)$ и $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ соответственно.

Границные условия (8) с учётом представлений

$$\begin{aligned} S(T_j\Phi_0)^+(t) &= -(\bar{t}')^2[d_{2j-1}^1(t)\Phi_1(t)+d_{2j}^1(t)\Phi_2(t)]+K_{0j}(\Phi_0)(t), \quad \Phi_0=(\Phi_1, \Phi_2), \\ K_{0j}(\Phi_0)(t) &= -\frac{d_{2j+\mu-2}^1(t)}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\psi(\tau,t)-\psi(t,t)}{\tau-t}\Phi_{\mu}(\tau)d\tau-(-1)^{j+\mu}\frac{d_{2j+\mu-2}^2(t)}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\psi(\tau,t)-\psi(t,t)}{\bar{\tau}-\bar{t}}\overline{\Phi_{\mu}(\tau)}d\bar{\tau}- \\ &- \frac{1}{\pi}\iint_{\Omega}\frac{d_{2j+\mu-2}^1(\zeta)-d_{2j+\mu-2}^1(t)}{(\zeta-t)^2}\Phi_{\mu}(\zeta)d\xi d\eta-\frac{(-1)^{j+\mu}}{\pi}\iint_{\Omega}\frac{d_{2j+\mu-2}^2(\zeta)-d_{2j+\mu-2}^2(t)}{(\zeta-t)^2}\overline{\Phi_{\mu}(\zeta)}d\xi d\eta, \quad j=1,2, \\ \psi(\tau,t) &= (\bar{\tau}-\bar{t})/(\tau-t), \quad \psi(t,t)=(\bar{t}')^2, \end{aligned}$$

получаемых при помощи соотношений (10)–(12), формул (4.7), (4.9) из [16, с. 28] и формул Сохонского [17, с. 66], преобразуются к виду

$$\begin{aligned} (-1)^j d_{k\lambda}(t) \operatorname{Re}[i^j t' \Phi_{\lambda}(t)] - 2 D D_{\lambda+k-2}^{1212}(t) \operatorname{Re}[i^{j-1} t' \Psi'_{\lambda}(t)] - 2 D D_{\lambda+k-2}^{1212}(t) \operatorname{Re}[i^j t' K_{0\lambda}(\Phi_0)(t)] + \\ + H_{3(k-1)+j} \rho(t) = \varphi_{c3(k-1)+j}(a)(t) + \varphi_{\chi3(k-1)+j}(a)(t) - F^{3k+j}(s), \quad k, j = 1, 2, \\ D D_0^{1313}(t) \operatorname{Re}[i t' \Psi'_3(t)] + K_{03}(\Phi)(t) + H_3 \rho(t) = \varphi_{\chi3}(a)(t) - F^6(s), \end{aligned} \quad (16)$$

где приняты следующие обозначения: $H_{3(k-1)+j} \rho(t) = \operatorname{Re}[(-i)^j t' T \rho^k(t)] - 2 D D_{k+\lambda-2}^{1212}(t) \times \times \operatorname{Re}\{i^j t'(I+S)(T_{\lambda} T \rho_0)^+(t)\}$, $k, j = 1, 2$; $H_3 \rho(t) = D D_0^{1313}(t) \operatorname{Re}[i t'(T \tilde{\rho}_3(t)/2 + T T_2 T \rho_0(t))]$, $K_{03}(\Phi)(t) = D D_0^{1313}(t) \operatorname{Re}\{t'[\Psi_2(t) + i T T_2 \Phi_0(t)]\}$; $d_{kj}(t) = (-1)^{j-1}[2(-1)^{\lambda} D D_{\lambda+k-2}^{1212}(t) d_{2\lambda+j-2}^2(t) + + 3 - k - j]$, $k, j = 1, 2$; I — тождественный оператор, операторы T , S , T_{λ} и функции $d_j^k(t)$ определены в (10), (11); $\Phi_{\lambda}(t) \equiv \Phi_{\lambda}^+(t)$, $t \in \Gamma$; символ $\Phi_{\lambda}^+(t)$ здесь и далее означает предел функции $\Phi_{\lambda}(z)$ при $z \rightarrow t \in \Gamma$ изнутри области Ω .

Таким образом, для определения функций $\rho^j \in L_p(\Omega)$ ($j = \overline{1,3}$), $\Phi_k(z) \in C_{\alpha}(\bar{\Omega})$ ($k = 1, 2$), $\Psi_j(z) \in C_{\alpha}^1(\bar{\Omega})$ ($j = \overline{1,3}$) получили систему уравнений (15), (16). Голоморфные функции будем искать в виде интегралов типа Коши с действительными плотностями:

$$\begin{aligned} \Phi_k(z) &= \Theta(\mu_{2k})(z) \equiv \Phi_k(\mu_{2k})(z), \quad k = 1, 2, \\ \Psi'_j(z) &= i^{(j-1)(j-2)/2} \Theta(\mu_{2j-1})(z) \equiv \Psi'_j(\mu_{2j-1})(z), \quad j = \overline{1,3}, \\ \Theta(f)(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau) d\tau}{\tau'(\tau-z)}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\mu_j(t) \in C_{\alpha}(\Gamma)$ ($j = \overline{1,5}$) — произвольные действительные функции, $\tau' = d\tau/d\sigma$, $d\sigma$ — элемент длины дуги кривой Γ .

Для функций $\Psi_j(z)$ ($j = \overline{1,3}$) имеем представления

$$\begin{aligned} \Psi_j(z) &= i^{(j-1)(j-2)/2} \Theta^0(\mu_{2j-1})(z) + c_{2j-1} + i c_{2j} \equiv \Psi_j(\mu_{2j-1})(z) + c_{2j-1} + i c_{2j}, \quad j = \overline{1,3}, \\ \Theta^0(f)(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{\tau'} \ln\left(1 - \frac{z}{\tau}\right) d\tau, \end{aligned} \quad (18)$$

где c_j ($j = \overline{1,6}$) — произвольные действительные постоянные, под $\ln(1 - z/\tau)$ понимается однозначная ветвь, обращающаяся в нуль при $z = 0$.

Используя формулы Сохоцкого [17, с. 66], находим $\Phi_k(t)$ ($k=1, 2$), $\Psi'_j(t)$ ($j=\overline{1, 3}$), $t \in \Gamma$. Подставляя их выражения, а также представления (18) в систему (15), (16), после несложных преобразований приходим к следующей системе уравнений относительно функций $\rho \in L_p(\Omega)$ и $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5) \in C_\alpha(\Gamma)$:

$$\begin{aligned} \rho^j(z) + h_1^j(\rho)(z) + h_2^j(\mu)(z) &= f_c^j(a)(z) + f_\chi^j(a)(z) + g_c^j(z) - F^j(z), \quad z \in \Omega, \quad j = \overline{1, 3}, \\ \sum_{n=1}^5 \left[a_{jn}(t) \mu_n(t) + b_{jn}(t) \int_{\Gamma} \frac{\mu_n(\tau)}{\tau - t} d\tau \right] + K_j \mu(t) + H_j \rho(t) &= \\ = \varphi_{cj}(a)(t) + \varphi_{\chi j}(a)(t) + g_c^{3+j}(t) - F^{3+j}(t), \quad t \in \Gamma, \quad j &= \overline{1, 5}, \end{aligned} \quad (19)$$

где принятые обозначения: $K_{3(n-1)+j}\mu(t) = (-1)^j d_{n\lambda}(t) \{ \operatorname{Re}[i^j t' \Theta(\mu_{2\lambda})(t)] - i \operatorname{Re}(i^{j-1}) \Theta(\tau' \mu_{2\lambda})(t) \} + 2 D D_{\lambda+n-2}^{1212}(t) \{ \operatorname{Re}[i^{j+1} t' \Theta(\mu_{2\lambda-1})(t)] - i \operatorname{Re}(i^j) \Theta(\tau' \mu_{2\lambda-1})(t) - \operatorname{Re}[i^j t' K_{0\lambda}(\mu_0)(t)] \}$, $n, j = 1, 2$; $K_3\mu(t) = K_{03}(\mu)(t) - D D_0^{1313}(t) \operatorname{Re}[t' \Theta(\mu_5)(t)]$; $g_c^2(z) = D D_0^{1313}(c_4 + i c_3)/2$, $g_c^3(z) = -c_4 (D D_0^{1313})_{\alpha^1} - c_3 (D D_0^{1313})_{\alpha^2}$, $g_c^6(t) = D D_0^{1313}(t) (c_4 d\alpha^2/ds - c_3 d\alpha^1/ds)$, $g_c^1(z) = g_c^{3+j}(t) \equiv 0$, $j = 1, 2, 4, 5$; $a_{3(k-1)+j} \varphi_{2\lambda}(t) = (-1)^j d_{k\lambda}(t) \operatorname{Re}(i^j)/2$, $b_{3(k-1)+j} \varphi_{2\lambda}(t) = (-1)^j d_{k\lambda}(t) \operatorname{Re}(i^{j-1})/(2\pi)$, $a_{3(k-1)+j} \varphi_{2\lambda-1}(t) = -D D_{\lambda+k-2}^{1212}(t) \operatorname{Re}(i^{j-1})$, $b_{3(k-1)+j} \varphi_{2\lambda-1}(t) = D D_{\lambda+k-2}^{1212}(t) \operatorname{Re}(i^j)/\pi$, $k, j, \lambda = 1, 2$; $a_{35}(t) = -D D_0^{1313}(t)/2$; остальные a_{jk} , b_{jk} равны нулю; здесь $h_2^j(\mu)(z) \equiv h_2^j(\Phi(\mu))(z)$, $K_{0j}(\mu_0)(t) \equiv K_{0j}(\Phi_0(\mu_0))(t)$, $j=1, 2$; $K_{03}(\mu)(t) \equiv K_{03}(\Phi(\mu))(t)$, $\Phi(\mu) = (\Phi_1(\mu_2), \Phi_2(\mu_4), \Psi_1(\mu_1), \Psi_2(\mu_3), \Psi_3(\mu_5))$, $\mu_0 = (\mu_2, \mu_4)$.

Лемма 1. Пусть выполнены условия (a), (b), (d), (e). Тогда:

- 1) $h_1^j(\rho)$ ($j=\overline{1, 3}$) — линейные вполне непрерывные операторы в $L_p(\Omega)$;
- 2) $h_2^j(\mu)$ ($j=\overline{1, 3}$) — линейные вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$ для любого $\nu \in (0, 1)$ в $L_p(\Omega)$;
- 3) $K_j \mu$ ($j=\overline{1, 5}$) — линейные вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$ для любого $\nu \in (0, 1)$ в $C_\gamma(\Gamma)$ при любом $\gamma < \beta/2$;
- 4) $H_j \rho$ ($j=\overline{1, 5}$) — линейные вполне непрерывные операторы из $L_p(\Omega)$ в $C_{\alpha'}(\Gamma)$ для любого $\alpha' < \alpha$ и ограниченные операторы из $L_p(\Omega)$ в $C_\alpha(\Gamma)$;
- 5) имеют место $f_c^j(a)(z), f_\chi^j(a)(z), F^j(z), g_c^j(z) \in L_p(\Omega)$ ($j=\overline{1, 3}$); $\varphi_{cj}(a)(t), \varphi_{\chi j}(a)(t) \in C_\alpha(\Gamma)$, $F^{3+j}(t), g_c^6(t), a_{jk}(t), b_{jk}(t) \in C_\beta(\Gamma)$ ($j, k = \overline{1, 5}$).

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1 из работы [14].

Исследуем разрешимость системы уравнений (19) в пространстве $L_p(\Omega) \times C_{\alpha'}(\Gamma)$, $\alpha' < \alpha$. Заметим, что любое решение $(\rho, \mu) \in L_p(\Omega) \times C_{\alpha'}(\Gamma)$ системы (19) в силу леммы 1 принадлежит пространству $L_p(\Omega) \times C_\alpha(\Gamma)$. Используя выражения для $a_{jk}(t)$, $b_{jk}(t)$ и d_{jk} , вычисляем определитель

$$\det[A(t) - \pi i B(t)] = D^3 D_0^{1313} \delta_1 / (32 \delta_0) (a_1^2 - a_0 a_2), \quad a_n = D_n^{1111} + D_n^{1122}, \quad n = 0, 1, 2,$$

где $A = (a_{jk})$, $B = (b_{jk})$ — квадратные матрицы пятого порядка. Итак, $\det[A(t) - \pi i B(t)] \neq 0$ на Γ и для индекса системы (19) получаем

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \left[\arg \frac{\det(A - \pi i B)}{\det(A + \pi i B)} \right]_{\Gamma} = 0$$

(здесь $[\arg \varphi]_{\Gamma}$ означает приращение аргумента функции φ при обходе кривой Γ один раз в положительном направлении). Следовательно, к системе (19) применима альтернатива Фред-

гольма. Пусть $(\rho, \mu) \in L_p(\Omega) \times C_{\alpha'}(\Gamma)$ — решение системы (19) при нулевой правой части. Этому решению по формулам (17), (18) с постоянными $c_j = 0$ ($j = \overline{1, 6}$) соответствуют голоморфные функции $\Phi_k(z)$, $\Psi_j(z)$, которые в свою очередь по формулам (13), (14) определяют функции w_j ($j = \overline{1, 3}$), ψ_k ($k = 1, 2$). Эти функции, как нетрудно видеть, удовлетворяют однородной системе линейных уравнений (6), (7) ($f_c^j + f_\chi^j - F^j \equiv 0$, $j = \overline{1, 3}$) и однородным линейным граничным условиям (8) ($\varphi_{cj} + \varphi_{\chi j} - F^{3+j} \equiv 0$, $j = \overline{1, 5}$). Действительную и мнимую части первого уравнения однородной системы (6), (7) умножим соответственно на w_1 и w_2 , второго уравнения — соответственно на ψ_1 и ψ_2 , а третье уравнение — на w_3 . После этого проинтегрируем их по области Ω и сложим получившиеся равенства. С учётом однородных граничных условий (8) получаем, что w_j ($j = \overline{1, 3}$), ψ_k ($k = 1, 2$) удовлетворяют системе $\nu_{j1\alpha^1} = 0$, $\nu_{j2\alpha^2} = 0$, $\nu_{j1\alpha^2} + \nu_{j2\alpha^1} = 0$, $w_{3\alpha^j} + \psi_j = 0$, $j = 1, 2$, решение которой имеет вид

$$w_1 = -c_0\alpha^2 + c_1, \quad w_2 = c_0\alpha^1 + c_2, \quad w_3 = -c_4\alpha^1 - c_5\alpha^2 + c_6, \quad \psi_1 = c_4, \quad \psi_2 = c_5, \quad (20)$$

где c_j — произвольные действительные постоянные.

Так как $\Psi_j(0) = 0$ ($j = \overline{1, 3}$), $w_3(0) = 0$, то из (20) будем иметь $w_1 = -c_0\alpha^2 + c_1$, $w_2 = c_0\alpha^1 + c_2$, $w_3 = \psi_1 = \psi_2 \equiv 0$. Тогда $\omega_j(z) = 2ic_0 DD_{j-1}^{1212}$ ($j = 1, 2$) и из уравнений (9) следуют равенства

$$\rho^j(z) = 2ic_0(DD_{j-1}^{1212})_{\bar{z}}, \quad j = 1, 2, \quad \rho^3(z) \equiv 0, \quad z \in \Omega. \quad (21)$$

Используя формулы (10), (13) и (14), находим $\Phi_k(z)$ ($k = 1, 2$), $\Psi'_j(z)$ ($j = \overline{1, 3}$) и, подставляя их в (17), получаем

$$\begin{aligned} \mu_1(t)/t' - c_0(\bar{t}')^2 &= F_1^-(t), \quad \mu_{2j}(t)/t' - 2ic_0 DD_{j-1}^{1212}(t) &= F_{2j}^-(t), \quad j = 1, 2, \\ \mu_{2j-1}(t)/t' &= F_{2j-1}^-(t), \quad j = 2, 3, \end{aligned}$$

где $F_j^-(t)$ — граничные значения функции $F_j^-(z)$, голоморфной во внешности Ω и исчезающей на бесконечности. Следовательно, для функции $F_j^-(z)$ во внешности области Ω приходим к задаче Римана–Гильберта с краевым условием $\operatorname{Re}[it'F_j^-(t)] = f_j^-(t)$, $j = \overline{1, 5}$, где $f_1^-(t) = c_0 \operatorname{Re}(it')$, $f_{2j}^-(t) = 2c_0 DD_{j-1}^{1212}(t) \operatorname{Re} t'$, $j = 1, 2$, $f_{2j-1}^-(t) = 0$, $j = 2, 3$. Используя решение этой задачи [18, с. 253], получаем для функций $\mu_j(t)$ представления

$$\mu_j(t) = c_0\mu_j^0(t) + \beta_{0j}\mu_j^1(t), \quad j = 1, 2, 4, \quad \mu_j(t) = \beta_{0j}\mu_j^1(t), \quad j = 3, 5, \quad (22)$$

где $\mu_j^k(t)$ — известные действительные функции, принадлежащие пространству $C_\alpha(\Gamma)$; c_0 , β_{0j} — произвольные действительные постоянные.

Равенства (21), (22) показывают, что однородная система уравнений (19) имеет шесть линейно независимых решений. Тогда союзная с ней система уравнений также будет иметь шесть линейно независимых решений. Для вывода союзной системы действительные и мнимые части левых частей уравнений в (15) умножим соответственно на действительные функции $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in L_q(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1$, и проинтегрируем по области Ω , а левые части уравнений в (16) умножим на действительные функции $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5 \in C_\alpha^1(\Gamma)$ и проинтегрируем по кривой Γ , после чего их все складываем и приравниваем к нулю. Заменяя голоморфные функции $\Phi_j(z)$, $\Psi_k(z)$, $\Psi'_k(z)$ их выражениями из (17), (18) с равными нулю постоянными, переставляя порядок интегрирования в полученных повторных интегралах,

после несложных, но достаточно громоздких преобразований приходим к искомой союзной системе уравнений:

$$\begin{aligned} \overline{v^j(z)} - T_{3+j}\tilde{v}(z) + 2\Theta(\tau'\overline{\nu^j})(z) = 0, \quad j=1,2, \quad \operatorname{Re} T_3\tilde{v}(z) = 0, \quad z \in \Omega, \\ \operatorname{Re}\{i[T_{3+j}\tilde{v}(t) - 2\Theta^-(\tau'\overline{\nu^j})(t)]\} = 0, \quad j=1,2, \quad \operatorname{Re}[Tg(v)(t) + \Theta^-(\tau' DD_0^{1313}\nu_3)(t)] = 0, \\ \operatorname{Re}\{T[(DD_{\lambda+j-2}^{1212})_{\bar{\zeta}}v^{\lambda}](t) - 2\Theta^-(\tau' DD_{\lambda+j-2}^{1212}\nu^{\lambda})(t) + \\ + (j-1)[iT^0g(v)(t) - T_{\Gamma}^0(DD_0^{1313}\tau'\nu_3)(t)]\} = 0, \quad t \in \Gamma, \quad j=1,2; \\ v^j = v_{3j-2} + iv_{3j-1}, \quad \nu^j = \nu_{3j-2} + iv_{3j-1}, \quad j=1,2, \quad v^3 = v_3, \quad \nu^3 = \nu_3. \end{aligned} \quad (23)$$

В уравнениях (23) приняты обозначения: $T_{3+j}\tilde{v}(z) = 2Td_{j+2\lambda-2}[S_{\lambda}\tilde{v}](z) + Td_{2+j}[T_3\tilde{v}](z)$, $T_3\tilde{v}(z) = -2Tg(v)(z) + 2DD_0^{1313}(z)v_3(z) - 2\Theta(\tau' DD_0^{1313}\nu_3)(z)$, $S_j\tilde{v}(z) = S[(DD_{j+\lambda-2}^{1212})_{\bar{\zeta}}v^{\lambda}](z) - (DD_{j+\lambda-2}^{1212})_zv^{\lambda}(z) - 2\Theta'(\tau' DD_{j+\lambda-2}^{1212}\nu^{\lambda})(z)$, $j=1,2$; $g(v)(z) = (DD_0^{1313})_{\bar{z}}(z)v_3(z) - DD_0^{1313}(z)v^2(z)/4$, $T^0f(z) = -\frac{1}{\pi i} \iint_{\Omega} f(\zeta) \ln\left(1 - \frac{\zeta}{z}\right) d\xi d\eta$, $T_{\Gamma}^0f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\tau) \ln\left(1 - \frac{\tau}{z}\right) d\sigma$, $\Theta'(f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau)d\tau}{\tau'(\tau-z)^2}$, $v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$, $\tilde{v} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5)$, $\tilde{v} = (v, \tilde{v})$; $\Theta^-(f)(t)$ — граничные значения функции $\Theta(f)(z)$ при $z \rightarrow t \in \Gamma$ извне области Ω ; операторы Tf , Sf , $d_j[f]$, $\Theta(f)$ определены ранее.

Система (23), как отмечено выше, имеет шесть линейно независимых решений. Получим их явные выражения. Далее в (23) под $v \in L_q(\Omega)$, $1/p+1/q=1$, $\tilde{v} \in C_{\alpha}^1(\Gamma)$ будем подразумевать некоторое её решение.

Заметим, что операторы T , T^0 , T_{Γ}^0 определяют функции $Tf(z)$, $T^0f(z)$, $T_{\Gamma}^0f(z)$, которые голоморфны во внешности области Ω и обращаются в нуль на бесконечности. Этими же свойствами обладает и функция $\Theta(f)(z)$. Поэтому последние пять равенств на кривой Γ в (23) представляют собой краевые условия задачи Римана–Гильберта с нулевым индексом для функций, голоморфных вне Ω и исчезающих на бесконечности. Такая задача, как известно, имеет только нулевое решение. Тогда эти пять равенств на кривой Γ преобразуются к виду

$$\begin{aligned} T_{3+j}\tilde{v}(z) - 2\Theta(\tau'\overline{\nu^j})(z) = 0, \quad j=1,2, \quad Tg(v)(z) + \Theta(\tau' DD_0^{1313}\nu_3)(z) = 0, \\ T[(DD_{\lambda+j-2}^{1212})_{\bar{\zeta}}v^{\lambda}](z) - 2\Theta(\tau' DD_{\lambda+j-2}^{1212}\nu^{\lambda})(z) + \\ + (j-1)[iT^0g(v)(z) - T_{\Gamma}^0(DD_0^{1313}\tau'\nu_3)(z)] = 0, \quad j=1,2, \quad z \in \Omega_1 \equiv \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}, \end{aligned} \quad (24)$$

\mathbb{C} — комплексная плоскость.

Из первых трёх равенств в (23) следует, что функции v_j ($j=\overline{1,5}$) принадлежат пространству $C_{\alpha}^1(\overline{\Omega})$. В них перейдём к пределу при $z \rightarrow t \in \Gamma$ изнутри области Ω , а в первых трёх равенствах в (24) — извне области Ω , и последние прибавим к первым трём соответственно. Принимая во внимание непрерывность функций $Tf(z)$ при $f \in L_p(\Omega)$ на \mathbb{C} и используя формулы Сохоцкого, находим

$$v^j(t) = -2\nu^j(t), \quad j=1,2, \quad v_3(t) = \nu_3(t), \quad t \in \Gamma. \quad (25)$$

Продифференцируем первые два равенства в (23) по \bar{z} . С учётом формул (11) получим равенства

$$\overline{v^j}_{\bar{z}} = 2d_{j+2\lambda-2}[S_{\lambda}\tilde{v}](z) + d_{2+j}[T_3\tilde{v}](z), \quad j=1,2, \quad z \in \Omega,$$

откуда, рассматривая их как систему относительно $X_1 = 2S_1\tilde{v}$, $X_2 = 2S_2\tilde{v} + T_3\tilde{v}$ и решая её, будем иметь

$$X_j = D[(D_{j+\lambda-2}^{1111} - D_{j+\lambda-2}^{1212})\overline{v_z^{\lambda}} + (D_{j+\lambda-2}^{1111} + D_{j+\lambda-2}^{1212})v_z^{\lambda}], \quad j=1,2, \quad z \in \Omega. \quad (26)$$

Пусть дополнительно выполнены условия

$$D_j^{1212}, D_0^{1313} \in W_p^{(2)}(\Omega), \quad j = 0, 1, 2. \quad (27)$$

Используя соотношения для функций $T_3\tilde{v}(z)$, $S_j\tilde{v}(z)$ ($j = 1, 2$), находим $X_{j\bar{z}}$ ($j = 1, 2$), которые, как нетрудно видеть, принадлежат пространству $L_{q_1}(\Omega)$, $1 < q_1 < 2/(1-\alpha)$. Теперь эти выражения $X_{j\bar{z}}$ ($j = 1, 2$) подставим в левые части соотношений, полученных дифференцированием по \bar{z} равенств (26). Третье равенство в (23) дифференцируем по z и \bar{z} . При помощи несложных преобразований полученных соотношений убеждаемся в том, что вектор-функция $(v_1, v_2, 2v_3, v_4, v_5)$ является решением системы линейных уравнений (6), (7) при нулевой правой части.

Теперь в равенствах (26) переходим к пределу при $z \rightarrow t \in \Gamma$ изнутри области Ω , при этом левую часть $X_j^+(t)$ заменим выражением, полученным с использованием представлений $(S_j\tilde{v})(z)$, $T_3\tilde{v}(z)$. Затем из них вычтем соответственно равенства, которые получаются дифференцированием по z последних двух соотношений в (24) с последующим переходом в них к пределу при $z \rightarrow t \in \Gamma$ извне Ω . Далее, третий равенства в (23) и (24) продифференцируем по z , в получившихся равенствах перейдём к пределу при $z \rightarrow t \in \Gamma$ соответственно изнутри и извне области Ω и вычтем их друг из друга. При помощи полученных равенств на кривой Γ , используя соотношения (25) и формулы

$$(Sf)^+(t) - (Sf)^-(t) = -f(t)(\bar{t}')^2, \quad \theta'^+(\tau' f)(t) - \theta'^-(\tau' f)(t) = f_t + f_{\bar{t}}(\bar{t}')^2, \quad t \in \Gamma,$$

после несложных преобразований приходим к тому, что функции $v_1, v_2, 2v_3, v_4, v_5$ удовлетворяют также и однородным линейным граничным условиям в (8).

Таким образом, вектор $(v_1, v_2, 2v_3, v_4, v_5)$ является решением однородной системы линейных уравнений (6), (7), удовлетворяющим однородным линейным граничным условиям (8). Следовательно, в соответствии с (20) для функций v_j ($j = \overline{1, 5}$) получим следующие представления:

$$v_1 = -c_0\alpha^2 + c_1, \quad v_2 = c_0\alpha^1 + c_2, \quad v_3 = (-c_4\alpha^1 - c_5\alpha^2 + c_6)/2, \quad v_4 = c_4, \quad v_5 = c_5,$$

где c_j — произвольные действительные постоянные.

Функции $\nu_j(t)$ и v_k связаны формулами (25). Следовательно, решение $(v, \tilde{v})^T$, $v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$, $\tilde{v} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5)$ союзной системы (23) можно представить в виде $(v, \tilde{v})^T = c_0\gamma_1 + c_1\gamma_2 + c_2\gamma_3 + c_4\gamma_4 + c_5\gamma_5 + c_6\gamma_6$, где $\gamma_k = (\gamma_{k1}, \gamma_{k2}, \dots, \gamma_{k10})$ ($k = \overline{1, 6}$) — линейно независимые решения системы (23). Тогда для разрешимости системы (19) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left\{ \operatorname{Re} [(f_c^1 + f_{\chi}^1 + g_c^1 - F^1)(z)(\gamma_{k1} - i\gamma_{k2})(z) + (f_c^2 + f_{\chi}^2 + g_c^2 - F^2)(z)(\gamma_{k4} - i\gamma_{k5})(z)] + \right. \\ & \left. + (f_c^3 + f_{\chi}^3 + g_c^3 - F^3)(z)\gamma_{k3}(z) \right\} d\alpha^1 d\alpha^2 + \sum_{j=1}^5 \int_{\Gamma} (\varphi_{cj} + \varphi_{\chi j} + g_c^{3+j} - F^{3+j})(t)\gamma_{k,5+j}(t) ds = 0, \quad k = \overline{1, 6}, \end{aligned}$$

которые после несложных преобразований принимают вид

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} DR^j d\alpha^1 d\alpha^2 + \int_{\Gamma} P^j ds + \iint_{\Omega} D \{ G_{\lambda\mu}^j T^{\lambda\mu}(\gamma) - B_{\lambda}^j [T^{\lambda\mu}(\gamma)v_{\mu} + T^{\lambda 3}(\gamma)] \} d\alpha^1 d\alpha^2 = 0, \quad j = 1, 2, \\ & \iint_{\Omega} D(R^1\alpha^2 - R^2\alpha^1) d\alpha^1 d\alpha^2 + \int_{\Gamma} (P^1\alpha^2 - P^2\alpha^1) ds + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \iint_{\Omega} D \left\{ (\alpha^2 G_{\lambda\mu}^1 - \alpha^1 G_{\lambda\mu}^2) T^{\lambda\mu}(\gamma) + (\alpha^1 B_{\lambda}^2 - \alpha^2 B_{\lambda}^1) [T^{\lambda\mu}(\gamma) v_{\mu} + T^{\lambda 3}(\gamma)] \right\} \alpha^1 d\alpha^2 = 0, \\
& \quad \iint_{\Omega} D(\alpha^j R^3 - L^j) d\alpha^1 d\alpha^2 + \int_{\Gamma} (\alpha^j P^3 - N^j) ds + \\
& + \iint_{\Omega} D \left[\alpha^j B_{\lambda\mu} T^{\lambda\mu}(\gamma) - G_{\lambda\mu}^j M^{\lambda\mu}(\gamma) - T^{j\mu}(\gamma) v_{\mu} \right] d\alpha^1 d\alpha^2 = 0, \\
& \quad \iint_{\Omega} D R^3 d\alpha^1 d\alpha^2 + \int_{\Gamma} P^3 ds + \iint_{\Omega} D B_{\lambda\mu} T^{\lambda\mu}(\gamma) d\alpha^1 d\alpha^2 = 0,
\end{aligned} \tag{28}$$

где R^j, P^j ($j = \overline{1,3}$), L^k, N^k ($k = 1, 2$) — компоненты внешних сил, γ — произвольно фиксированный тензор деформации, v_j ($j = 1, 2$) — произвольно фиксированные функции.

При выполнении условий (28) общее решение системы (19) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
(\rho, \mu) &= (\rho_c, \mu_c)(a) + (\rho_{\chi}, \mu_{\chi})(a) + (\rho_*, \mu_*) + (\rho_F, \mu_F), \quad (\rho_c, \mu_c)(a) = \Re f_c(a), \\
(\rho_{\chi}, \mu_{\chi})(a) &= \Re f_{\chi}(a), \quad (\rho_*, \mu_*) = \Re g_c + (\tilde{\rho}, \tilde{\mu}), \quad (\rho_F, \mu_F) = -\Re F,
\end{aligned} \tag{29}$$

где $f_c(a) = (f_c^1, f_c^2, f_c^3, \varphi_{c1}, \dots, \varphi_{c5})$, $f_{\chi}(a) = (f_{\chi}^1, f_{\chi}^2, f_{\chi}^3, \varphi_{\chi1}, \dots, \varphi_{\chi5})$, $g_c = (g_c^1, \dots, g_c^8)$, $F = (F^1, \dots, F^8)$; $\Re = (\Re_1, \dots, \Re_8)$; \Re_j ($j = \overline{1,3}$) и \Re_k ($k = 4, 8$) — линейные ограниченные операторы из $L_p(\Omega) \times C_{\alpha}(\Gamma)$ в $L_p(\Omega)$ и в $C_{\alpha}(\Gamma)$ соответственно; функции $\tilde{\rho} = (\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \tilde{\rho}_3)$, $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_5)$ определены формулами (21), (22).

Если выражение для вектор-функции $\mu(t)$ из (29) подставить в соотношения (17), (18), то для голоморфной вектор-функции $\Phi(z) = (\Phi_0, \Psi)$, $\Phi_0 = (\Phi_1, \Phi_2)$, $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ получим представление

$$\Phi(z) = \Phi_c(a)(z) + \Phi_{\chi}(a)(z) + \Phi_*(z) + \Phi_F(z), \quad z \in \Omega, \tag{30}$$

где $\Phi_c(a)(z) = \Phi(\mu_c(a))(z)$, $\Phi_{\chi}(a)(z) = \Phi(\mu_{\chi}(a))(z)$, $\Phi_F(z) = \Phi(\mu_F)(z)$, $\Phi_*(z) = \Phi(\Re g_c)(z) + \widetilde{\Phi}(z)$, $\widetilde{\Phi}(z) = (c_0 \beta_0(z), c_0 \beta_1(z), c_0 \gamma_0(z) + c_1 + i c_2, 0, 0)$, $\beta_j(z) = 2i\Theta(t' D D_j^{1212})(z)$, $j = 0, 1$, $\gamma_0(z) = \Theta(t' \bar{t})(z)$; функция $\Theta(f)(z)$ определена в (17), c_j — произвольные действительные постоянные.

Теперь выражения $\rho(z)$ из (29) и голоморфных функций из (30) подставим в (13), (14). Тогда задача (1), (2) сведётся к системе нелинейных уравнений относительно вектор-функции $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2)$, которую представим в виде

$$\omega_j^0(z) = \omega_{jc}^0(a) + \omega_{j\chi}^0(a) + \omega_{j*}^0(z) + \omega_{jF}^0(z), \quad j = 1, 2, \tag{31}$$

$$w_3(z) = w_{3c}(a) + w_{3\chi}(a) + w_{3*}(z) + w_{3F}(z), \quad z \in \Omega, \tag{32}$$

где $\omega_{jc}^0(a) = \omega_j^0(\Psi_{jc}(a); \omega_{jc}(a))$, $\omega_c(a) = (\omega_{1c}, \omega_{2c})$, $\omega_{jc}(a) = \omega_j(\Phi_{jc}(a); \rho_c^j(a))$, $j = 1, 2$, $w_{3c}(a) = w_3(\Psi_{3c}(a); \rho_c^3(a))$; остальные слагаемые в системе (31), (32) определяются аналогично; операторы $\omega_j(\Phi_j; \rho^j)$, $\omega_j^0(\Psi_j; \omega_j)$ и $w_3(\Psi_3; \rho^3)$ определены в (10), (13) и (14) соответственно.

Отметим, что функции $\omega_{j*}^0(z)$, $w_{3*}(z)$ и $\omega_{jF}^0(z)$, $w_{3F}(z)$ зависят соответственно от произвольных постоянных и внешних сил, действующих на оболочку. При этом, как нетрудно заметить, для функций $\omega_{1*}^0(z) = w_{2*} + iw_{1*}$, $\omega_{2*}^0(z) = \psi_{2*} + i\psi_{1*}$, $w_{3*}(z)$ имеют место представления (20).

Исследуем разрешимость системы (31), (32) в пространстве $W_p^{(2)}(\Omega)$.

Лемма 2. Пусть выполнены условия (a), (b), (d), (e). Тогда:

1) $\omega_{jc}^0(a)$ ($j = 1, 2$), $w_{3c}(a)$ — линейные вполне непрерывные операторы в $W_p^{(2)}(\Omega)$;

2) $\omega_{j\chi}^0(a)$ ($j=1, 2$), $w_{3\chi}(a)$ — нелинейные ограниченные операторы в $W_p^{(2)}(\Omega)$, причём для любых $a^j = (w_1^j, w_2^j, w_3^j, \psi_1^j, \psi_2^j) \in W_p^{(2)}(\Omega)$ ($j=1, 2$) справедливы оценки

$$\|\omega_{j\chi}^0(a^1) - \omega_{j\chi}^0(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)},$$

$$\begin{aligned} \|w_{3\chi}(a^1) - w_{3\chi}(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} &\leq c \left(\|a^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|w^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}^2 + \|w^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}^2 \right) \|a^1 - a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \\ \|w^j\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}^2 &= \|w_1^j\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}^2 + \|w_2^j\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}^2 + \|w_3^j\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}^2, \quad j=1, 2, \end{aligned} \quad (33)$$

где c — известная положительная постоянная, зависящая от физико-геометрических характеристик оболочки;

3) $\omega_{j*}^0(z), \omega_{jF}^0(z) \in W_p^{(2)}(\Omega)$, $j=1, 2$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2 из работы [14].

Систему (31), (32) запишем в виде

$$a - L(a) - G(a) = a_* + \tilde{a}_F, \quad (34)$$

где $L = (L_1, \dots, L_5)$, $G = (G_1, \dots, G_5)$, $a_* = (w_{1*}, w_{2*}, w_{3*}, \psi_{1*}, \psi_{2*})$, $\tilde{a}_F = (\tilde{w}_{1F}, \tilde{w}_{2F}, \tilde{w}_{3F}, \tilde{\psi}_{1F}, \tilde{\psi}_{2F})$, $\omega_{1*}^0 = w_{2*} + iw_{1*}$, $\omega_{2*}^0 = \psi_{2*} + i\psi_{1*}$; $L_{3(n-1)+j}(a) = -\operatorname{Re}[i^j \omega_{nc}^0(a)]$, $G_{3(n-1)+j}(a) = -\operatorname{Re}[i^j \omega_{n\chi}^0(a)]$, $n, j=1, 2$; $L_3(a) = w_{3c}(a)$, $G_3(a) = w_{3\chi}(a)$, $\tilde{w}_{jF} = -\operatorname{Re}[i^j \omega_{1F}^0]$, $\tilde{\psi}_{jF} = -\operatorname{Re}[i^j \omega_{2F}^0]$, $j=1, 2$; $\tilde{w}_{3F} = w_{3F}$.

Отметим, что $L(a)$ — линейный вполне непрерывный оператор, $G(a)$ — нелинейный ограниченный оператор в $W_p^{(2)}(\Omega)$, причём для $G(a)$ имеет место оценка (33); $\tilde{a}_F \in W_p^{(2)}(\Omega)$ — известная функция, зависящая от внешних сил; компоненты вектора a_* определяются по формулам (20).

Уравнение $a - L(a) = 0$ имеет лишь нулевое решение в $W_p^{(2)}(\Omega)$. Действительно, если $a \in W_p^{(2)}(\Omega)$ — его ненулевое решение, то, как нетрудно заметить, a является решением системы линейных уравнений равновесия, удовлетворяющим линейным однородным граничным условиям. Тогда, рассуждая как и в случае системы (19), приходим к тому, что вектор a удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} w_{j\alpha^j} - G_{jj}^\lambda w_\lambda - B_{jj} w_3 &= 0, \quad j=1, 2, \quad w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - 2G_{12}^\lambda w_\lambda - 2B_{12} w_3 = 0, \\ \psi_{j\alpha^j} - G_{jj}^\lambda \psi_\lambda &= 0, \quad j=1, 2, \quad \psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1} - 2G_{12}^\lambda \psi_\lambda = 0, \\ w_{3\alpha^j} + B_j^\lambda w_\lambda + \psi_j &= 0, \quad j=1, 2. \end{aligned} \quad (35)$$

Выведем условия, при выполнении которых система (35) имеет только нулевое решение. С этой целью четвёртое и пятое равенства в (35) сложим и вычтем друг из друга. С учётом соотношений (3) для символов Кристоффеля получим систему

$$(\psi_1/\Lambda)_{\alpha^1} - (\psi_2/\Lambda)_{\alpha^2} = 0, \quad (\psi_1/\Lambda)_{\alpha^2} + (\psi_2/\Lambda)_{\alpha^1} = 0, \quad \psi_{1\alpha^1} + \psi_{2\alpha^2} = 0,$$

которую при помощи комплексной функции $\psi = (\psi_1 + i\psi_2)/\Lambda$ можно представить в виде

$$\psi_{\bar{z}} = 0, \quad \operatorname{Re}(\Lambda\psi)_z = 0. \quad (36)$$

Первое равенство в (36) означает, что $\psi(z)$ — голоморфная в области Ω функция, принадлежащая пространству $W_p^{(2)}(\Omega)$, а второе равенство представим в виде $\operatorname{Re}\psi'(z) = -\operatorname{Re}[(\ln\Lambda)_z\psi]$. Функция $\operatorname{Re}\psi'(z)$, как действительная часть голоморфной функции $\psi'(z)$, в области Ω является гармонической, т.е. $[\operatorname{Re}\psi'(z)]_{z\bar{z}} = 0$. Следовательно, в области Ω имеет место равенство

$\operatorname{Re}(\Lambda_0\psi)_z=0$, где $\Lambda_0=(\ln\Lambda)_{z\bar{z}}$. Заметим, что из формулы Гаусса [19, с. 193] в силу условия (с) следует, что $\Lambda_0\equiv\Lambda_0(\alpha^1, \alpha^2)\neq 0$ в области $\bar{\Omega}$. Итак, голоморфная функция $\psi(z)$ удовлетворяет системе $\operatorname{Re}(\Lambda\psi)_z=0$, $\operatorname{Re}(\Lambda_0\psi)_z=0$, которая эквивалентна системе

$$\begin{aligned} 2\Lambda u_{1\alpha^1} + \Lambda_{\alpha^1} u_1 + \Lambda_{\alpha^2} u_2 &= 0, & 2\Lambda_0 u_{1\alpha^1} + \Lambda_{0\alpha^1} u_1 + \Lambda_{0\alpha^2} u_2 &= 0, \\ u_{1\alpha^1} &= u_{2\alpha^2}, & u_{1\alpha^2} &= -u_{2\alpha^1}, & \Lambda_0 &= (\ln\Lambda)_{z\bar{z}}, \end{aligned} \quad (37)$$

где $u_1\equiv u_1(\alpha^1, \alpha^2)=\operatorname{Re}\psi(z)$, $u_2\equiv u_2(\alpha^1, \alpha^2)=\operatorname{Im}\psi(z)$.

Пусть в области $\bar{\Omega}$ выполнено условие $[(\Lambda_0/\Lambda)_{\alpha^1}]^2+[(\Lambda_0/\Lambda)_{\alpha^2}]^2\neq 0$, которое с учётом соотношения Гаусса [19, с. 193] можно представить как

$$(\kappa_{\alpha^1})^2+(\kappa_{\alpha^2})^2\neq 0, \quad z=\alpha^1+i\alpha^2\in\bar{\Omega}, \quad (38)$$

где κ — гауссова кривизна срединной поверхности оболочки.

Пусть, для определённости, $(\Lambda_0/\Lambda)_{\alpha^2}\neq 0$ в области $\bar{\Omega}$. Исключив из первых двух равенств в (37) производную $u_{1\alpha^1}$, получим

$$u_2=\Lambda_1 u_1, \quad \Lambda_1=-(\Lambda_0/\Lambda)_{\alpha^1}/(\Lambda_0/\Lambda)_{\alpha^2}. \quad (39)$$

В силу условия (б) функция $\Lambda_1\equiv\Lambda_1(\alpha^1, \alpha^2)$ принадлежит пространству $W_p^{(1)}(\Omega)$. Выражение функции u_2 из (39) подставим в первое, третье и четвёртое равенства системы (37). После этого, исключив в них производные $u_{1\alpha^1}$, $u_{1\alpha^2}$, приходим к равенству $\Lambda_2 u_1=0$, откуда при выполнении почти всюду в области Ω условия

$$\Lambda_2\equiv\Lambda_1\Lambda_{1\alpha^1}-\Lambda_{1\alpha^2}-(1+\Lambda_1^2)[(\ln\Lambda)_{\alpha^1}+\Lambda_1(\ln\Lambda)_{\alpha^2}]/2\neq 0 \quad (40)$$

получим, что $u_1=0$ в области $\bar{\Omega}$. Тогда из формулы (39) вытекает $u_2=0$ в $\bar{\Omega}$, т.е. $\psi=0$, следовательно, $\psi_1=\psi_2=0$ в области $\bar{\Omega}$. Если же $(\Lambda_0/\Lambda)_{\alpha^1}\neq 0$ в области $\bar{\Omega}$, то при выполнении почти всюду в Ω условия

$$\Lambda_3\Lambda_{3\alpha^2}-\Lambda_{3\alpha^1}-(1+\Lambda_3^2)[(\ln\Lambda)_{\alpha^2}+\Lambda_3(\ln\Lambda)_{\alpha^1}]/2\neq 0, \quad \Lambda_3=-(\Lambda_0/\Lambda)_{\alpha^2}/(\Lambda_0/\Lambda)_{\alpha^1}, \quad (41)$$

также получаем, что $\psi_1=\psi_2=0$ в области $\bar{\Omega}$.

Вернёмся к системе (35). Из последних двух равенств с учётом $\psi_1=\psi_2=0$ будем иметь $[(B_{11}w_1+B_{12}w_2)/\Lambda]_{\alpha^2}=[(B_{12}w_1+B_{22}w_2)/\Lambda]_{\alpha^1}$. Заменяя здесь производные $w_{j\alpha^j}$ ($j=1, 2$) выражениями из (35) и рассматривая полученное соотношение совместно с третьим равенством из (35) как систему относительно $w_{1\alpha^2}$, $w_{2\alpha^1}$, при выполнении в области $\bar{\Omega}$ условия

$$B_{11}+B_{22}\neq 0 \quad (42)$$

получаем выражения для производных $w_{1\alpha^2}$, $w_{2\alpha^1}$:

$$w_{1\alpha^2}=w_{2\alpha^1}=[(\ln\Lambda)_{\alpha^2}w_1+(\ln\Lambda)_{\alpha^1}w_2]/2+B_{12}w_3. \quad (43)$$

Заметим, что условие (42) в силу соотношений Петерсона–Кодазци [19, с. 193] означает, что средняя кривизна κ_{cp} срединной поверхности оболочки не равна нулю, т.е. срединная поверхность не является минимальной [19, с. 198].

Теперь в системе (35) рассмотрим первые три равенства, которые, как и выше, представим в виде

$$\begin{aligned} (w_1/\Lambda)_{\alpha^1}-(w_2/\Lambda)_{\alpha^2} &= (B_{11}-B_{22})w_3/\Lambda, & (w_1/\Lambda)_{\alpha^2}+(w_2/\Lambda)_{\alpha^1} &= 2B_{12}w_3/\Lambda, \\ w_{1\alpha^1}+w_{2\alpha^2} &= (B_{11}+B_{22})w_3. \end{aligned} \quad (44)$$

С помощью комплексной функции $w = (w_1 + iw_2)/\Lambda$ первые два равенства в (44) можно записать в виде неоднородного уравнения Коши–Римана $w_{\bar{z}} = b_1 w_3$, общее решение которого даётся формулой

$$w = \varphi(z) + T(b_1 w_3)(z), \quad b_1 = (B_{11} - B_{22} + 2iB_{12})/(2\Lambda), \quad (45)$$

где $\varphi(z)$ — голоморфная в области Ω функция, принадлежащая пространству $W_p^{(2)}(\Omega)$, оператор T определён в (10).

Третье равенство в (44) представим в виде

$$(w_1/\Lambda)_{\alpha^1} + (w_2/\Lambda)_{\alpha^2} + (\Lambda_{\alpha^1} w_1 + \Lambda_{\alpha^2} w_2)/\Lambda^2 = 2b_2 w_3$$

и подставим в него выражения функций w_1, w_2 из (45). С учётом формул (11) в результате получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \varphi'(z) &= b_2 w_3 - \Lambda_4 w_1 - \Lambda_5 w_2 - \operatorname{Re} S(b_1 w_3)(z), \\ b_2 &= (B_{11} + B_{22})/(2\Lambda), \quad \Lambda_4 = \Lambda_{\alpha^1}/(2\Lambda^2), \quad \Lambda_5 = \Lambda_{\alpha^2}/(2\Lambda^2). \end{aligned} \quad (46)$$

Левая часть равенства (46) представляет собой гармоническую функцию в области Ω . Следовательно, для правой части должно выполняться условие

$$[b_2 w_3 - \Lambda_4 w_1 - \Lambda_5 w_2 - \operatorname{Re} S(b_1 w_3)(z)]_{z\bar{z}} = 0, \quad z \in \Omega,$$

которое при помощи соотношений $(Sf)_{z\bar{z}} = f_{zz}$, $f_{z\bar{z}} = (f_{\alpha^1\alpha^1} + f_{\alpha^2\alpha^2})/4$, выражений функций b_1, b_2 из (45), (46), производных $w_{j\alpha^k}$ из (35), (43), а также выражений производных $w_{j\alpha^k\alpha^m}$ ($j, k, m = 1, 2$), получаемых дифференцированием по переменным α^1, α^2 первых трёх равенств в (35), формул Петерсона–Кодашчи [19, с. 193] можно представить в виде

$$(B_{11}w_{3\alpha^2\alpha^2} + B_{22}w_{3\alpha^1\alpha^1} - 2B_{12}w_{3\alpha^1\alpha^2})/(4\Lambda) = a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_{3\alpha^1} + a_4 w_{3\alpha^2}, \quad (47)$$

$$\begin{aligned} a_j &= 4\Lambda_0\Lambda_{3+j} + \Delta\Lambda_{3+j} + (-1)^{j-1}(\ln\Lambda)_{\alpha^j}(\Lambda_{4\alpha^1} - \Lambda_{5\alpha^2}) + (\ln\Lambda)_{\alpha^{3-j}}\Lambda_{4\alpha^2}/2, \\ a_{2+j} &= (-1)^{j-1}\Lambda_{3+j}(B_{22} - B_{11})/4 - B_{12}\Lambda_{6-j}/2, \quad j = 1, 2; \end{aligned} \quad (48)$$

Δ — оператор Лапласа, функция Λ_0 определена в (37).

Выражения производных $w_{3\alpha^j\alpha^k}$ ($j, k = 1, 2$), полученных дифференцированием последних двух равенств в (35), в которых $\psi_1 = \psi_2 = 0$, а также выражения $w_{3\alpha^k}, w_{j\alpha^k}$ ($j, k = 1, 2$) из (35), (43) подставим в (47) и получим

$$w_3 = a_5 w_1 + a_6 w_2, \quad a_{4+j} = 2\Lambda d_j / [\Lambda_0(B_{11} + B_{22})], \quad (49)$$

где $d_j = a_j - (B_{11}a_3 + B_{22}a_4)/\Lambda - [B_{12}(B_{1j\alpha^2} + B_{2j\alpha^1}) - B_{11}B_{2j\alpha^2} - B_{22}B_{1j\alpha^1} - 2\Lambda_0\Lambda_{\alpha^j}]$, $j = 1, 2$.

Заметим, что в силу условия (б) функции d_j, a_{4+j} , $j = 1, 2$, принадлежат пространству $W_p^{(1)}(\Omega)$.

Теперь выражение w_3 из (49) внесём в последние два равенства системы (35). Появляющиеся при этом производные $w_{j\alpha^k}$ ($j, k = 1, 2$) заменим их выражениями из (35), (43). В результате относительно w_1, w_2 запишем систему вида

$$c_{j1}w_1 + c_{j2}w_2 = 0, \quad j = 1, 2, \quad (50)$$

где $c_{kj} = B_{kj}/\Lambda + a_{4+j\alpha^k} + [(-1)^{k+j}a_{4+k}(\ln\Lambda)_{\alpha^j} + a_{7-k}(\ln\Lambda)_{\alpha^{3-j}}]/2 + B_{kj}a_{4+j}^2 + B_{k3-j}a_5a_6$ ($k, j = 1, 2$). Отметим, что функции c_{kj} принадлежат пространству $L_p(\Omega)$.

Пусть почти всюду в области Ω выполняется условие

$$c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \neq 0. \quad (51)$$

Тогда из (50), (49) сразу получаем $w_1 = w_2 = w_3 = 0$ в области $\bar{\Omega}$. Итак, уравнение $a - L(a) = 0$ имеет только нулевое решение в $W_p^{(2)}(\Omega)$. Следовательно, существует обратный оператор $(I - L)^{-1}$, ограниченный в $W_p^{(2)}(\Omega)$, с помощью которого уравнение (34) сведётся к эквивалентному уравнению

$$a - G_*(a) = a_F, \quad (52)$$

где $G_*(a) = (I - L)^{-1}G(a)$, $a_F = (I - L)^{-1}\tilde{a}_F$.

Отметим, что вектор $a_c = (I - L)^{-1}a_*$ является решением однородной системы линейных уравнений равновесия, удовлетворяющим однородным линейным граничным условиям. Поэтому в силу доказанного выше $a_c \equiv 0$, что и учтено нами при переходе к уравнению (52).

Также отметим, что вектор a_F в (52) зависит только от внешних сил и $a_F = 0$, если внешние силы отсутствуют.

Лемма 3. Пусть выполнены условия (a)–(e). Тогда

1) $G_*(a)$ — нелинейный ограниченный оператор в $W_p^{(2)}(\Omega)$, причём для любых $a^j = (w_1^j, w_2^j, w_3^j, \psi_1^j, \psi_2^j)$ ($j = 1, 2$) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|G_*(a^1) - G_*(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} &\leq c_* \left(\|a^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|w^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}^2 + \|w^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}^2 \right) \|a^1 - a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \\ \|w^j\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}^2 &= \|w_1^j\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}^2 + \|w_2^j\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}^2 + \|w_3^j\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}^2, \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

где c_* — известная положительная постоянная, зависящая от физико-геометрических характеристик оболочки;

2) $a_F \in W_p^{(2)}(\Omega)$.

Справедливость леммы вытекает из леммы 2 с учётом указанных выше свойств операторов $(I - L)^{-1}$, G .

Исследуем разрешимость уравнения (52) в пространстве $W_p^{(2)}(\Omega)$. Используя лемму 3, для любых $a^j \in W_p^{(2)}(\Omega)$ ($j = 1, 2$), принадлежащих шару $\|a\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < r$, получаем

$$\|G_*(a^1) - G_*(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \leq q_* \|a^1 - a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \quad q_* = 2c_*r(1+r).$$

Предположим, что радиус r шара и внешние силы таковы, что выполняются неравенства

$$q_* < 1, \quad \|a_F\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < (1 - q_*)r. \quad (53)$$

Тогда к уравнению (52) можно применить принцип сжимающих отображений [20, с. 146], согласно которому это уравнение в шаре $\|a\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < r$ имеет единственное решение вида $a = \mathbb{R}(a_F) \in W_p^{(2)}(\Omega)$, где \mathbb{R} — резольвента оператора G_* .

Заметим, что если внешняя нагрузка отсутствует, то задача (1), (2) имеет только нулевое решение.

Вернёмся к условиям разрешимости (28), в которых под $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2) \in W_p^{(2)}(\Omega)$ будем подразумевать решение задачи (1), (2). Используя равенства (1), (2), убеждаемся в том, что условия разрешимости (28) выполняются.

Справедлива следующая

Теорема. Пусть выполнены условия (a)–(e), (27), (38), (40) или (41), (42), (51) и (53). Тогда задача (1), (2) имеет единственное обобщённое решение $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2) \in W_p^{(2)}(\Omega)$, $2 < p < 4/(2 - \beta)$.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00212).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галимов, К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек : учеб. пособие / К.З. Галимов. — Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1975. — 328 с.
2. Ворович, И.И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек / И.И. Ворович. — М. : Наука, 1989. — 376 с.
3. Морозов, Н.Ф. Избранные двумерные задачи теории упругости / Н.Ф. Морозов. — Л. : Изд-во ЛГУ, 1978. — 182 с.
4. Ворович, И.И. К задаче равновесия пластины, подкрепленной ребрами жесткости / И.И. Ворович, Л.П. Лебедев // Прикл. математика и механика. — 1999. — Т. 63, № 1. — С. 87–92.
5. Карчевский, М.М. Исследование разрешимости нелинейной задачи о равновесии пологой незакрепленной оболочки / М.М. Карчевский // Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2013. — Т. 155, № 3. — С. 105–110.
6. Карчевский, М.М. О вариационных задачах теории трёхслойных пологих оболочек / М.М. Карчевский, В.Н. Паймушин // Дифференц. уравнения. — 1994. — Т. 30, № 7. — С. 1217–1221.
7. Тимергалиев, С.Н. Теоремы существования в нелинейной теории тонких упругих оболочек / С.Н. Тимергалиев. — Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2011. — 260 с.
8. Кириченко, В.Ф. О существовании решения одной нелинейной связанный задачи термоупругости / В.Ф. Кириченко, В.А. Крысько // Дифференц. уравнения. — 1984. — Т. 20, № 6. — С. 1583–1588.
9. Кириченко, В.Ф. О существовании решений в связанный задаче термоупругости для трехслойных оболочек / В.Ф. Кириченко // Изв. вузов. Математика. — 2012. — № 9. — С. 66–71.
10. Тимергалиев, С.Н. Метод интегральных уравнений в нелинейных краевых задачах для пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями / С.Н. Тимергалиев // Изв. вузов. Математика. — 2017. — № 4. — С. 59–75.
11. Тимергалиев, С.Н. К проблеме разрешимости нелинейных задач равновесия пологих оболочек типа Тимошенко / С.Н. Тимергалиев // Прикл. математика и механика. — 2018. — Т. 82, № 1. — С. 98–113.
12. Тимергалиев, С.Н. Метод интегральных уравнений исследования разрешимости краевых задач для системы нелинейных дифференциальных уравнений теории пологих неоднородных оболочек типа Тимошенко / С.Н. Тимергалиев // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 2. — С. 239–255.
13. Тимергалиев, С.Н. О разрешимости нелинейных краевых задач для системы дифференциальных уравнений равновесия пологих анизотропных оболочек типа Тимошенко с незакреплёнными краями / С.Н. Тимергалиев // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 4. — С. 507–525.
14. Тимергалиев, С.Н. О существовании решений нелинейных краевых задач для системы дифференциальных уравнений равновесия оболочек типа Тимошенко в изометрических координатах / С.Н. Тимергалиев // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 5. — С. 658–674.
15. Тимергалиев, С.Н. О существовании решений нелинейных краевых задач для непологих оболочек типа Тимошенко с незакрепленными краями / С.Н. Тимергалиев // Сиб. журн. индустр. математики. — 2023. — Т. 26, № 4. — С. 160–179.
16. Векуа, И.Н. Обобщённые аналитические функции / И.Н. Векуа. — М. : Наука, 1988. — 512 с.
17. Мусхелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. — М. : Наука, 1962. — 511 с.

18. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. — 2-е изд. — М. : Физматгиз, 1963. — 640 с.
19. Векуа, И.Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов / И.Н. Векуа. — М. : Наука, 1978. — 296 с.
20. Красносельский, М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений / М.А. Красносельский. — М. : Гостехиздат, 1956. — 392 с.

**SOLVABILITY OF NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS
FOR DIFFERENTIAL EQUILIBRIUM EQUATIONS
OF NON-FLAT TIMOSHENKO TYPE SHELLS
OF NON-ZERO GAUSSIAN CURVATURE IN ISOMETRIC COORDINATES**

© 2024 / S. N. Timerghaliev

Kazan State University of Architecture and Engineering, Russia
e-mail: samat_tim@mail.ru

We study the solvability of a boundary value problem for a system of five nonlinear second-order partial differential equations under given nonlinear boundary conditions, which describes the equilibrium state of elastic non-flat inhomogeneous isotropic shells with loose edges in the framework of the Timoshenko shear model, referred to isometric coordinates. The boundary value problem is reduced to a nonlinear operator equation with respect to generalized displacements in Sobolev space, the solvability of which is established using the principle of compressed mappings.

Keywords: partial differential equation, generalized solution, existence theorem

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00212).

REFERENCES

1. Galimov, K.Z., *Osnovy nelineynoy teorii tonkikh obolochek* (Fundamentals of Nonlinear Theory of Thin Shells), Kazan: Izd-vo Kazan. un-ta, 1975.
2. Vorovich, I.I., *Matematicheskiye problemy nelineynoy teorii pologikh obolochek* (Mathematical Problems of Nonlinear Theory of Shallow Shells), Moscow: Nauka, 1989.
3. Morozov, N.F., *Izbrannyye dvumernyye zadachi teorii uprugosti* (Selected two-dimensional problems of elasticity theory), Leningrad: Izd-vo LGU, 1978.
4. Vorovich, I.I. and Lebedev, L.P., On the problem of equilibrium of a plate reinforced with stiffeners, *J. Appl. Math. Mech.*, 1999, vol. 63, no. 1, pp. 87–92.
5. Karchevskii, M.M., Study of the solvability of the nonlinear problem of the equilibrium of a shallow unsupported shell, *Uchenyye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskiye Nauki*, 2013, vol. 155, no. 3, pp. 105–110.
6. Karchevskii, M.M. and Paimushin, V.N., Variational problems in the theory of three-layer shallow shells, *Differ. Equat.*, 1994, vol. 30, no. 7, pp. 1126–1130.
7. Timerghaliev, S.N., *Teoremy sushchestvovaniya v nelineynoy teorii tonkikh uprugikh obolochek* (Existence Theorems in the Nonlinear Theory of Thin Elastic Shells), Kazan: Izd-vo Kazan. un-ta, 2011.
8. Kirichenko, V.F. and Krysko, V.A., The existence of a solution to a nonlinear connected problem of thermoeelasticity, *Differ. Equat.*, 1984, vol. 20, no. 9, pp. 1583–1588.
9. Kirichenko, V.F., Solvability of a connected thermoelasticity problem for three-layer shells, *Russ. Math.*, 2012, vol. 56, no. 9, pp. 57–61.
10. Timerghaliev, S.N., A method of integral equations in nonlinear boundary-value problems for flat shells of the Timoshenko type with free edges, *Russ. Math.*, 2017, vol. 61, no. 4, pp. 49–64.
11. Timerghaliev, S.N., On the problem of solvability of nonlinear equilibrium problems for shallow shells of Timoshenko type, *J. Appl. Math. Mech.*, 2018, vol. 82, no. 1, pp. 98–113.

12. Timergaliev, S.N., Method of integral equations for studying the solvability of boundary value problems for the system of nonlinear differential equations of the theory of Timoshenko type shallow inhomogeneous shells, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 2, pp. 243–259.
13. Timergaliev, S.N., On the solvability of nonlinear boundary value problems for the system of differential equations of equilibrium of shallow anisotropic Timoshenko-type shells with free edges, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 4, pp. 488–506.
14. Timergaliev, S.N., On the existence of solutions of nonlinear boundary value problems for a system of differential equilibrium equations for Timoshenko-type shells in isometric coordinates, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 5, pp. 670–687.
15. Timergaliev, S.N., On the existence of solutions of nonlinear boundary value problems for nonshallow Timoshenko-type shells with free edges, *J. Appl. Industr. Math.*, 2023, vol. 17, no. 4, pp. 874–891.
16. Vekua, I.N., *Obobshchennyye analiticheskiye funktsii* (Generalized Analytic Functions), Moscow: Nauka, 1988.
17. Muskhelishvili, N.I., *Singulyarnyye integral'nyye uravneniya* (Singular Integral Equations), Moscow: Nauka, 1962.
18. Gakhov, F.D., *Krayevyye zadachi* (Boundary Value Problems), Moscow: Fizmatgiz, 1963.
19. Vekua, I.N., *Osnovy tenzornogo analiza i teorii kovariantov* (Fundamentals of Tensor Analysis and Covariant Theory), Moscow: Nauka, 1978.
20. Krasnoselskii, M.A., *Topologicheskiye metody v teorii nelineynykh integral'nykh uravneniy* (Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations), Moscow: Gostekhizdat, 1956.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

ИНТЕГРИРОВАНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА С НАГРУЖЕННЫМ ЧЛЕНОМ В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© 2024 г. Г. У. Уразбоев¹, М. М. Хасанов², О. Б. Исмоилов³

^{1,2}Ургенчский государственный университет, Узбекистан

^{1,3}Хорезмское отделение Института математики имени В.И. Романовского

Академии наук Республики Узбекистан, г. Ургенч

e-mail: ¹gayrat71@mail.ru, ²hmuzaffar@mail.ru, ³bakhromboevich.oxunjon@gmail.com

Поступила в редакцию 06.12.2023 г., после доработки 10.03.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

Найдены спектральные данные оператора Дирака с периодическим потенциалом, связанного с решением модифицированного уравнения Кортеуге–де Фриза отрицательного порядка с нагруженным членом. Методом обратной спектральной задачи построены решения этого уравнения в классе периодических функций. Доказана разрешимость задачи Коши для бесконечной системы дифференциальных уравнений Дубровина–Трубовица в классе трижды непрерывно дифференцируемых периодических функций.

Ключевые слова: модифицированное уравнение Кортеуге–де Фриза отрицательного порядка, нагруженный член, оператор Дирака, обратная спектральная задача, система уравнений Дубровина–Трубовица, формула следов, периодическая функция

DOI: 10.31857/S0374064124120094, EDN: IOUQYF

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В статье [1] показана применимость метода обратной задачи рассеяния к решению задачи Коши для модифицированного уравнения Кортеуге–де Фриза (МУКдФ)

$$q_t - 6q^2 q_x + q_{xxx} = 0,$$

которое широко используется для описания волн в изотропных средах.

В гемодинамике применяется модель [2], в которой артерия рассматривается как тонкостенная предварительно напряжённая упругая трубка с переменным радиусом (или со стенозом), а кровь — как идеальная жидкость. Эта модель описывается МУКдФ с переменным коэффициентом

$$q_t + \mu_2 q^2 q_x + \mu_3 q_{xxx} + h(t)q_x = 0,$$

где μ_2 , μ_3 — коэффициенты, характеризующие свойства материала трубы, t — отмасштабированная координата вдоль оси сосуда после статической деформации, характеризующая осесимметричный стеноз на поверхности артериальной стенки, x — зависящая от времени и координаты вдоль оси сосуда переменная, $h(t)$ — форма стеноза, функция q характеризует усреднённую осевую скорость жидкости.

При $\mu_2 = -6$, $\mu_3 = 1$ и нагружении $h(t) = \gamma(t)q(0, t)$ гемодинамическая модель в классе периодических функций была исследована в работе [3].

Применению метода (G'/G) -разложения для интегрирования нагруженного уравнения Кортевега–де Фриза (УКдФ) и нагруженного МУКдФ посвящены работы [4, 5]. Интерес к интегрируемым уравнениям отрицательного порядка возрос после работы [6] об операторах рекурсии для симметрии эволюционных уравнений.

В работах [7, 8] методом обратной задачи рассеяния были проинтегрированы УКдФ и МУКдФ отрицательного порядка

$$q_{xt} = -2q\mu_t, \quad \mu_x = -q^2$$

в классе быстроубывающих функций. В [9] изучено МУКдФ отрицательного порядка в классе периодических функций.

В данной работе метод обратной спектральной задачи применяется к интегрированию МУКдФ отрицательного порядка с нагруженным членом в классе периодических функций.

Рассмотрим МУКдФ

$$q_{xt} = -2q\mu_t + \gamma(t)q(0, t)q, \quad \mu_x = -q^2, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

со следующими условиями:

$$q(x, t)|_{t=0} = q_0(x), \quad \mu(x, t)|_{x=0} = \mu_0(t), \quad [q_t(x, t) - \mu_t(x, t)]|_{x=0} = \beta(t), \quad (2)$$

где $q_0(x) \in C^3(\mathbb{R})$, $\beta(t) \in C[0, \infty)$, $\gamma(t) \in C[0, \infty)$ и $\mu_0(t) \in C^1[0, \infty)$ — заданные действительные функции, $q_0(x)$ имеет период π , а функции $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ ограничены.

Требуется найти действительные решения $q(x, t)$ и $\mu(x, t)$ задачи (1), (2), удовлетворяющие условиям гладкости

$$q(x, t) \in C_x^1(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0), \quad \mu(x, t) \in C_x^1(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0) \quad (3)$$

и условиям периодичности по переменной x :

$$q(x + \pi, t) = q(x, t), \quad \mu_t(x + \pi, t) = \mu_t(x, t), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

При изучении разрешимости задачи (1)–(4) будем использовать спектральную задачу для уравнения с оператором Дирака

$$L(t)y \equiv B \frac{dy}{dx} + \Omega(x, t)y = \lambda y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & q(x, t) \\ q(x, t) & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Замечание 1. Условие периодичности $\mu_t(x + \pi, t) - \mu_t(x, t) = 0$ в (4), в силу π -периодичности по переменной x функции $q(x, t)$ и равенства $\mu(x, t) = \mu_0(t) - \int_0^x q^2(s, t) ds$, примет вид

$$\frac{d}{dt} \int_0^\pi q^2(s, t) ds = 0,$$

т.е. рассматриваемая система обладает тем же интегральным инвариантом, что и классическое МУКдФ.

2. ОПЕРАТОР ДИРАКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Приведём некоторые основные сведения, касающиеся обратной спектральной задачи для оператора Дирака с периодическим коэффициентом (см. [10–13]).

Пусть $c(x, \lambda) = (c_1(x, \lambda), c_2(x, \lambda))^T$ и $s(x, \lambda) = (s_1(x, \lambda), s_2(x, \lambda))^T$ — решения уравнения Дирихля

$$Ly \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ q(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$c(0, \lambda) = (1, 0)^T, \quad s(0, \lambda) = (0, 1)^T, \quad (7)$$

где $q(x)$ — действительная непрерывная π -периодическая функция из класса $C^1(\mathbb{R})$, а λ — комплексный параметр.

Через λ_n , $n \in \mathbb{Z}$, обозначим собственные значения, пронумерованные в порядке возрастания, либо периодической ($y_1(0) = y_1(\pi)$, $y_2(0) = y_2(\pi)$), либо антипериодической ($y_1(0) = -y_1(\pi)$, $y_2(0) = -y_2(\pi)$) задачи (6), (7).

Спектр оператора (6) имеет вид

$$\mathbb{E} = \{\lambda \in \mathbb{R}: -2 \leq \Delta(\lambda) \leq 2\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}) \right\},$$

где $\Delta(\lambda) = c_1(\pi, \lambda) + s_2(\pi, \lambda)$ называется *функцией Ляпунова*. Интервалы $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, $n \in \mathbb{Z}$, называются *лакунами*.

Нули ξ_n , $n \in \mathbb{Z}$, уравнения $s_1(\pi, \lambda) = 0$ совпадают с собственными значениями задачи Дирихле с условиями $y_1(0) = 0$, $y_1(\pi) = 0$ для уравнения (6) и, более того, $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Наборы чисел $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in \mathbb{Z}$, и знаков $\sigma_n = \text{sign}\{s_2(\pi, \xi_n) - c_1(\pi, \xi_n)\}$, $n \in \mathbb{Z}$, называются *спектральными параметрами задачи* (6), (7). Множества спектральных параметров ξ_n , σ_n , $n \in \mathbb{Z}$, и границ спектра λ_n , $n \in \mathbb{Z}$, называются *спектральными данными задачи*. Нахождение спектральных данных задачи (6), (7) является *прямой задачей*, а восстановление коэффициента $q(x)$ по спектральным данным — *обратной задачей*.

Если в задаче (6), (7) вместо $q(x)$ рассмотреть $q(x+\tau)$, то спектр полученной задачи не зависит от параметра τ : $\lambda_n(\tau) \equiv \lambda_n$, $n \in \mathbb{Z}$, а спектральные параметры зависят от τ : $\xi_n(\tau)$, $\sigma_n(\tau)$, $n \in \mathbb{Z}$, и удовлетворяют системе уравнений типа Дубровина–Трубовица

$$\frac{d\xi_n}{d\tau} = 2(-1)^{n-1} \sigma_n(\tau) h_n(\xi) \xi_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \left[\prod_{k=-\infty, k \neq n}^{+\infty} (\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)(\xi_k - \xi_n)^{-2} \right]^{1/2}.$$

Знак $\sigma_n(\tau)$ меняется на противоположный при каждом столкновении $\xi_n(\tau)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$.

Система уравнений Дубровина–Трубовица, а также формула следов

$$q(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau) h_n(\xi(\tau)),$$

дают метод решения обратной спектральной задачи.

Теорема 1. Для действительных непрерывно-дифференцируемых функций $q(x)$ компоненты $(y_1(x), y_2(x))^T$ решения (6) удовлетворяют уравнениям

$$-y_1'' + [q^2(x) + q'(x)] y_1 = \lambda^2 y_1, \quad -y_2'' + [q^2(x) - q'(x)] y_2 = \lambda^2 y_2.$$

Следствие 1. Если $(y_{n,1}(x), y_{n,2}(x))^T$ — собственная вектор-функция задачи (6), $y_1(0)=0$, $y_1(\pi)=0$, соответствующая собственному значению $\xi_n \neq 0$, то $y_{n,1}(x)$ является собственной функцией граничной задачи

$$-y_1'' + [q^2(x) + q'(x)]y_1 = \nu y_1, \quad y_1(0) = 0, \quad y_1(\pi) = 0,$$

соответствующей собственному значению ξ_n^2 . Здесь ν — спектральный параметр.

Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 1. Пусть вектор-функция $(y_1, y_2)^T$ является решением уравнения (6). Тогда справедливы следующие тождества:

$$2y_2y_1 = \frac{1}{2\lambda}[y_2^2 - y_1^2]' + \frac{1}{\lambda}q(y_1^2 + y_2^2), \quad \frac{1}{2}[y_2^2 + y_1^2]' = q(y_1^2 - y_2^2).$$

3. ЭВОЛЮЦИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Основной результат настоящей работы заключается в следующей теореме.

Теорема 2. Если набор $(q(x,t), \mu(x,t))$ является решением задачи (1)–(4), то спектр оператора (5) не зависит от параметра t , а спектральные параметры $\xi_n = \xi_n(t)$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, удовлетворяют системе уравнений типа Дубровина–Трубовица

$$\dot{\xi}_n = \frac{1}{\xi_n}(-1)^n \sigma_n(t) h_n(\xi) \left[q_t(0,t) - \mu_t(0,t) + \frac{\gamma(t)q(0,t)}{2} \right], \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (8)$$

При этом знаки $\sigma_n(t) = \pm 1$ меняются при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$ и выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n^0, \quad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n^0, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (9)$$

где ξ_n^0 , σ_n^0 — спектральные параметры оператора Дирака с коэффициентом $q_0(x)$.

Доказательство. Следуя работе [9], можно доказать, что если $q(x,t)$ — решение системы

$$q_{xt} = -2q\mu_t + G(x,t), \quad \mu_x = -q^2, \quad (10)$$

то справедливы равенства

$$\dot{\xi}_n(t) = \frac{1}{2\xi_n} [y_{n,2}^2(\pi,t) - y_{n,2}^2(0,t)][q_t(0,t) - \mu_t(0,t)] - \frac{1}{2\xi_n} \int_0^\pi (y_{n,2}^2 - y_{n,1}^2)G(x,t) dx, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (11)$$

где $y_n(x,t)$ — ортонормированные собственные функции задачи Дирихле (5) $y(0)=0$, $y(\pi)=0$, соответствующие собственным значениям $\xi_n(t)$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

В соответствии с (1) положим $G(x,t) = \gamma(t)q(0,t)q(x,t)$ и вычислим интеграл в (11):

$$-\frac{\gamma(t)q(0,t)}{2\xi_n} \int_0^\pi (y_{n,2}^2 - y_{n,1}^2)q dx = \frac{1}{4\xi_n} [y_{n,2}^2(\pi,t) - y_{n,2}^2(0,t)]\gamma(t)q(0,t).$$

В результате уравнение (11) запишем как

$$\dot{\xi}_n(t) = \frac{1}{2\xi_n} [y_{n,2}^2(\pi,t) - y_{n,2}^2(0,t)] \left[q_t(0,t) - \mu_t(0,t) + \frac{\gamma(t)q(0,t)}{2} \right], \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (12)$$

Из (12) и равенства $y_{n,2}^2(\pi,t) - y_{n,2}^2(0,t) = 2(-1)^n \sigma_n(t) h_n(\xi)$ получим уравнение (8).

Если заменить граничные условия Дирихле периодическими $y(\pi) = y(0)$ или антипериодическими $y(\pi) = -y(0)$ условиями, то вместо (12) получим уравнения $\dot{\lambda}_n = 0$. Таким образом, собственные значения λ_n , $n \in \mathbb{Z}$, периодической и антипериодической задач не зависят от параметра t . Теорема доказана.

Следствие 2. Если вместо $q(x, t)$ рассмотрим $q(x + \tau, t)$, то собственные значения периодической и антитериодической задач не зависят от параметров τ и t , а собственные значения ξ_n задачи Дирихле и знаки σ_n зависят от τ , t , т.е. $\xi_n = \xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n = \sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$. В этом случае задача (8), (9) примет вид

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = \frac{1}{\xi_n} (-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi) \left[q_t(\tau, t) - \mu_t(\tau, t) + \frac{\gamma(t)q(0, t)}{2} \right], \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (13)$$

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (14)$$

Из формулы следов

$$q(\tau, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi) \quad (15)$$

и равенства $\mu_x = -q^2$ получаем

$$\begin{aligned} q_t(\tau, t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial t}, \\ \mu(\tau, t) &= \mu_0(t) - \int_0^\tau q^2(s, t) ds, \\ \mu_t(\tau, t) &= \mu'_0(t) - 2 \int_0^\tau q(s, t) q_t(s, t) ds. \end{aligned} \quad (16)$$

Замечание 2. Исследуем существование и единственность решения задачи (13), (14) в случае, когда $q_0(x) \in C^3(\mathbb{R})$. Перепишем систему (13) в виде

$$\frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) \sqrt{(\xi_n(\tau, t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(\tau, t))} g_n(\xi(\tau, t)) f_n(\xi(\tau, t)), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} g_n(\xi) &= \frac{\beta(t)}{2\xi_n} \exp \left\{ 2 \int_0^x q(\tau, t) d\tau \right\} + \frac{\gamma(t)q(0, t)}{2\xi_n}, \\ f_n(\xi) &= \left[\prod_{k=-\infty, k \neq n}^{+\infty} (\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau, t))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau, t))(\xi_n(\tau, t) - \xi_k(\tau, t))^{-2} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

В системе уравнений (17) введём замену переменных

$$\xi_n(\tau, t) = \lambda_{2n-1} + (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) \sin^2 x_n(\tau, t), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (18)$$

и на основании равенств

$$\dot{\xi}_n = (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) \sin(2x_n) \dot{x}_n, \quad \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} = \frac{1}{2} (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) |\sin(2x_n)|$$

запишем её в виде

$$\dot{x}_n(\tau, t) = (-1)^n \sigma_n(\tau, t) \operatorname{sign}\{\sin x_n \cos x_n\} g_n(x) f_n(x), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (19)$$

В системе (19) знак $\sigma_n(\tau, t) = \pm 1$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau, t)$ с границами своей лакуны, при этом выражение $\sin x_n(\tau, t) \cos x_n(\tau, t)$ также меняет знак на противоположный. Будем выбирать начальные условия в виде

$$x_n(\tau, 0) = x_n^0(\tau) = \arcsin \sqrt{\frac{\xi_n^0(\tau) - \lambda_{2n-1}}{\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}}}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (20)$$

следовательно, $\sigma_n(\tau, t) \operatorname{sign}\{\sin x_n \cos x_n\} = \sigma_n^0(\tau)$. Таким образом, уравнение (20) приводится к виду

$$\dot{x}_n = (-1)^n \sigma_n^0(\tau) g_n(x) f_n(x), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

а с помощью обозначения

$$H_n(x) = (-1)^n \sigma_n^0(\tau) g_n(x) f_n(x)$$

запишем его как

$$\frac{dx_n(\tau, t)}{dt} = H_n(\dots, x_{-1}(\tau, t), x_0(\tau, t), x_1(\tau, t), \dots), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (21)$$

В банаховом пространстве $\mathbb{K} = \{x(\tau, t) = (\dots, x_{-1}(\tau, t), x_0(\tau, t), x_1(\tau, t), \dots) : \|x(\tau, t)\| = \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{+\infty} (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) |x_n(\tau, t)| < \infty\}$ система (21) приводится к одному уравнению

$$\frac{dx(\tau, t)}{dt} = H(x(\tau, t)),$$

а условия (20) — к

$$x_n(\tau, t)|_{t=0} = x_n^0(\tau), \quad x^0 \in \mathbb{K},$$

где $H(x) = (\dots, H_{-1}(x), H_0(x), H_1(x), \dots)$.

Известно [14, с. 181], что для того чтобы задача Коши $y' = F(y)$, $y(0) = y^0$ в банаховом пространстве \mathbb{K} имела единственное решение, достаточно выполнения условия Липшица для функции $F(y)$, т.е.

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \text{const} \cdot \|x - y\| \quad \text{для любых } x, y \in \mathbb{K}.$$

Поэтому достаточно показать, что функция $H(x)$ удовлетворяет условию Липшица в банаховом пространстве \mathbb{K} .

Из условия $q_0(x) \in C^3(\mathbb{R})$ вытекает, что $q_0^2(x) + q_0'(x) \in C^2(\mathbb{R})$. В силу следствия 1 и асимптотики (см. [15, с. 75]) собственных значений оператора Штурма–Лиувилля получим следующие асимптотики:

$$\lambda_{2n-1} = n + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \frac{\varepsilon_n^-}{n^2}, \quad \lambda_{2n} = n + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \frac{\varepsilon_n^+}{n^2},$$

где c_1, c_2 — постоянные числа и $\{\varepsilon_n^\pm\} \in l_2$, $\zeta_n \equiv \lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}$.

Так как $\xi_n(\tau, t) \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, то $\inf_{k \neq n} |\xi_n - \xi_k| \geq a > 0$. С учётом последнего неравенства и (18) оценим функции $|f_n(x)|$, $|\partial f_n(x)/\partial x_m|$ и $|g_n(x)|$, $|\partial g_n(x)/\partial x_m|$.

Лемма 2 [16]. *Справедливы следующие оценки:*

$$C_1 \leq |f_n(x)| \leq C_2, \quad \left| \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_m} \right| \leq C_3 \zeta_m, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

где положительные константы C_1 , C_2 и C_3 не зависят от t и n .

Лемма 3. *Справедливы следующие оценки:*

$$|g_n(x)| \leq \frac{C_4}{|n|}, \quad \left| \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_m} \right| \leq C_5 \frac{\zeta_m}{n},$$

где C_4 и C_5 — положительные постоянные, не зависящие от t и n .

Доказательство. Поскольку функции $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ ограничены, то найдутся такие действительные числа M_1 и M_2 , что выполняются неравенства $|\beta(t)| \leq M_1$, $|\gamma(t)| \leq M_2$. С учётом (18) получим следующие оценки:

$$\begin{aligned}
|g_n(x)| &\leq \frac{1}{2|\lambda_{2n-1} + \zeta_n \sin^2 x_n|} \left[M_1 \exp \left\{ \int_0^\tau \left| \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{+\infty} (-1)^{k-1} \zeta_k \sigma_k^0(s) \sin(2x_k(s, t)) f_k(x(s, t)) ds \right| \right\} + \right. \\
&\quad \left. + M_2 \left| \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{+\infty} (-1)^{k-1} \zeta_k \sigma_k^0(0) \sin(2x_k(0, t)) f_k(x(0, t)) \right| \right] \leq \\
&\leq \frac{1}{2A_1|n|} \left[M_1 \exp \left\{ \int_0^\tau \left| \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{+\infty} C_2 \zeta_k ds \right| \right\} + M_2 \left| \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{+\infty} C_2 \zeta_k \right| \right] \leq \frac{C_4}{|n|}, \\
\left| \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_m} \right| &\leq \frac{1}{2|\lambda_{2n-1} + \zeta_n \sin^2 x_n|} \left[M_1 \exp \left\{ \int_0^\tau \left| \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{+\infty} (-1)^{k-1} \zeta_k \sigma_k^0(s) \sin(2x_k(s, t)) f_k(x(s, t)) ds \right| \right\} \times \right. \\
&\quad \times \left(\left| \int_0^\tau (-1)^{m-1} \zeta_m \sigma_m^0(s) \left(2 \cos(2x_m(s, t)) f_m(x(s, t)) + \sin(2x_k(s, t)) \frac{\partial f_k(x(s, t))}{\partial x_m} \right) ds \right| + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\tau \left| \sum_{k=-\infty, k \neq m}^{+\infty} (-1)^{k-1} \zeta_k \sigma_k^0(s) \sin(2x_k(s, t)) \frac{\partial f_k(x(s, t))}{\partial x_m} ds \right| \right) + \\
&\quad + M_2 \left| (-1)^{m-1} \zeta_m \sigma_m^0(0) \left(2 \cos(2x_m(0, t)) f_m(x(0, t)) + \sin(2x_k(0, t)) \frac{\partial f_k(x(0, t))}{\partial x_m} \right) \right| + \\
&\quad + M_2 \left[\sum_{k=-\infty, k \neq m}^{+\infty} (-1)^{k-1} \zeta_k \sigma_k^0(0) \sin(2x_k(0, t)) \frac{\partial f_k(x(0, t))}{\partial x_m} \right] \leq \\
&\leq \frac{1}{2A_1|n|} \left[M_1 \exp \left\{ \int_0^\tau \left| \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{+\infty} C_2 \zeta_k ds \right| \right\} \left(d_1 \zeta_m |\tau| + d_2 \zeta_m^2 |\tau| + \zeta_m \int_0^\tau \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{+\infty} C_3 \zeta_k ds \right) + \right. \\
&\quad \left. + M_2 d_3 \zeta_m + M_2 d_4 \zeta_m^2 + M_2 \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{+\infty} C_3 \zeta_k \right] \leq C_5 \frac{\zeta_m}{|n|}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Используя результаты лемм 2 и 3, оценим производную функции $F_n(x) = g_n(x)f_n(x)$:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial F_n(x)}{\partial x_m} \right| &\leq \left| \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_m} f_n(x) + \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_m} g_n(x) \right| \leq \\
&\leq \left| \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_m} \right| |f_n(x)| + \left| \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_m} \right| |g_n(x)| \leq C_3 \zeta_m \frac{C_4}{|n|} + C_2 C_5 \frac{\zeta_m}{|n|} \leq C \frac{\zeta_m}{|n|},
\end{aligned}$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от m и n .

Лемма 4. Вектор-функция $H(x)$ удовлетворяет условию Липшица в банаховом пространстве \mathbb{K} , т.е. существует константа $L = \text{const} > 0$ такая, что для произвольных элементов $x(\tau, t), y(\tau, t) \in \mathbb{K}$ выполняется неравенство

$$\|H(x(\tau, t)) - H(y(\tau, t))\| \leq L \|x(\tau, t) - y(\tau, t)\|.$$

Доказательство. С учётом формулы $H_n(x) = (-1)^n \sigma_n^0(\tau) F_n(x)$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, имеем

$$|H_n(x(\tau, t)) - H_n(y(\tau, t))| = |F_n(x(\tau, t)) - F_n(y(\tau, t))|.$$

Применяя теорему Лагранжа о конечном приращении к функции $\varphi(t) = F_n(x + t(y - x))$ на отрезке $t \in [0, 1]$, получаем

$$F_n(x) - F_n(y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F_n(\theta)}{\partial x_m} (x_m - y_m),$$

где $\theta = x + t(y - x)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} |H_n(x(\tau, t)) - H_n(y(\tau, t))| &= |F_n(x(\tau, t)) - F_n(y(\tau, t))| \leq \sum_{m=-\infty, m \neq 0}^{+\infty} \left| \frac{\partial F_n(\theta)}{\partial x_m} \right| |x_m(\tau, t) - y_m(\tau, t)| \leq \\ &\leq \sum_{m=-\infty, m \neq 0}^{+\infty} \frac{C}{|n|} |\lambda_{2m} - \lambda_{2m-1}| |x_m - y_m| = \frac{C}{|n|} \|x - y\|. \end{aligned}$$

Теперь оценим норму

$$\begin{aligned} \|H(x) - H(y)\| &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}| |H_n(x) - H_n(y)| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{C}{n} |\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}| \|x - y\| = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{C}{n} |\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}| \|x - y\| = L \|x - y\|, \end{aligned}$$

где

$$L = \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{+\infty} \frac{C}{|n|} (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) = C \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{+\infty} \frac{\zeta_n}{|n|} < \infty, \quad \zeta_n \equiv \lambda_{2n} - \lambda_{2n-1},$$

т.е. условие Липшица выполнено.

Значит, решение задачи Коши (17), (14) для всех $t > 0$ существует и единственno. Лемма доказана.

Замечание 3. Покажем, что пара функций $q(x, t)$, $\mu(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1). Для этого используем систему Дубровина–Трубовица (13) и вторую формулу следов

$$q^2(\tau, t) + q_\tau(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau, t) \right). \quad (22)$$

Дифференцируя по t формулу (22), получаем

$$2qq_t(\tau, t) + q_{\tau t}(\tau, t) = -2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \xi_k(\tau, t) \frac{\partial \xi_k(\tau, t)}{\partial t}. \quad (23)$$

Далее, подставив систему уравнений (13) в (23), будем иметь

$$2qq_t(\tau, t) + q_{\tau t}(\tau, t) = 2 \left(q_t(\tau, t) - \mu_t(\tau, t) + \frac{\gamma(t)q(0, t)}{2} \right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(\tau, t) h_k(\xi).$$

С учётом (15) отсюда заключаем, что

$$2qq_t(\tau, t) + q_{\tau t}(\tau, t) = 2q(q_t(\tau, t) - \mu_t(\tau, t)) + \gamma(t)q(0, t)q,$$

$$q_{\tau t}(\tau, t) = -2q\mu_t(\tau, t) + \gamma(t)q(0, t)q.$$

Дифференцируя равенство (16) по τ , находим $\mu_\tau = -q^2$.

Следствие 3. Теорема 2 даёт способ решения задачи (1)–(4). Сначала находим спектральные данные λ_n , $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, оператора Дирака, соответствующие потенциалу $q_0(x+\tau)$. Далее, решая при $\tau=0$ задачу Коши (13), (14), находим $\xi_n(0,t)$ и $\sigma_n(0,t)$, $n \in \mathbb{Z}$. По этим данным определяем $q(0,t)$. После этого подставляем $q(0,t)$ в уравнение (13) и, решая задачу Коши при произвольном значении τ , находим $\xi_n(\tau,t)$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. По формуле следов (15) определяем $q(x,t)$ и затем из формулы (16) определяем $\mu(x,t)$.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wadati, M. The exact solution of the modified Korteweg–de Vries equation / M. Wadati // J. Phys. Soc. of Japan. — 1972. — V. 33, № 5. — P. 1456–1458.
2. Demiray, H. Variable coefficient modified KdV equation in fluid-filled elastic tubes with stenosis: Solitary waves / H. Demiray // Chaos Soliton Fract. — 2009. — V. 42, № 1. — P. 358–364.
3. Хасанов, М.М. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза с нагруженным членом в классе периодических функций / М.М. Хасанов // Узбек. мат. журн. — 2016. — Т. 4. — С. 139–147.
4. Уразбоев, Г.У. Обобщённый метод (G'/G) -расширения для нагруженного уравнения Кортевега–де Фриза / Г.У. Уразбоев, И.И. Балтаева, И.Д. Рахимов // Сиб. журн. индустр. математики. — 2021. — Т. 24, № 4. — С. 139–147.
5. Балтаева, И.И. Точные решения бегущей волны нагруженного модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза / И.И. Балтаева, И.Д. Рахимов, М.М. Хасанов. // Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Математика. — 2022. — Т. 41. — С. 85–95.
6. Olver, P.J. Evolution equations possessing infinitely many symmetries / P.J. Olver // J. Math. Phys. — 1977. — V. 18. — P. 1212–1215.
7. Уразбоев, Г.У. Интегрирование уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка методом обратной задачи рассеяния / Г.У. Уразбоев, И.И. Балтаева, О.Б. Исмоилов // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки — 2023. — Т. 33, № 3. — С. 523–533.
8. Уразбоев, Г.У. Солитонообразные решения модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка / Г.У. Уразбоев, И.И. Балтаева, Ш.Э. Атаназарова // Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Математика. — 2024. — Т. 47. — С. 63–77.
9. Уразбоев, Г.У. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка в классе периодических функций / Г.У. Уразбоев, А.Б. Яхшимуратов, М.М. Хасанов // Теор. и мат. физика. — 2023. — Т. 217, № 2. — С. 317–328.
10. Левитан, Б.М. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака / Б.М. Левитан, И.С. Саргсян. — М. : Наука, 1988. — 431 с.
11. Мисюра, Т.В. Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака. I / Т.В. Мисюра // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. — 1978. — № 30. — С. 90–101.
12. Хасанов, А.Б. Об обратной задаче для оператора Дирака с периодическим потенциалом / А.Б. Хасанов, А.М. Ибрагимов // Узбек. мат. журн. — 2001. — № 3. — С. 48–55.
13. Джаков, П.Б. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шредингера и Дирака / П.Б. Джаков, Б.С. Митягин // Успехи мат. наук. — 2006. — Т. 61, № 4. — С. 77–182.
14. Левитан, Б.М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля / Б.М. Левитан. — М. : Наука, 1984. — 240 с.
15. Марченко, В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения / В.А. Марченко. — Киев : Наукова думка, 1977. — 332 с.
16. Муминов, У.Б. Интегрирование дефокусирующего нелинейного уравнения Шредингера с дополнительными членами / У.Б. Муминов, А.Б. Хасанов // Теор. и мат. физика. — 2022. — Т. 211, № 1. — С. 84–104.

INTEGRATION OF THE NEGATIVE ORDER MODIFIED KORTEWEG–DE VRIES EQUATION WITH A LOADED TERM IN THE CLASS OF PERIODIC FUNCTIONS

© 2024 / G. U. Urazboev¹, M. M. Khasanov², O. B. Ismoilov³

^{1,2}*Urgench State University, Uzbekistan*

^{1,3}*Khorezm Branch of V.I. Romanovski Institute of Mathematics of Uzbekistan Academy of Science, Urgench, Uzbekistan*

e-mail: ¹*gayrat71@mail.ru*, ²*hmuzaffar@mail.ru*, ³*bakhromboyevich.oxunjon@gmail.com*

Spectral data of the Dirac operator with periodic potential are found. This operator is associated with the negative order modified Korteweg–de Vries equation with a loaded term. The obtained results make it possible to construct a solution to the negative order modified Korteweg–de Vries equation with a loaded term in the class of periodic functions using the inverse spectral problem method. The solvability of the Cauchy problem for an infinite system of Dubrovin–Trubovitz differential equations in the class of three times continuously differentiable periodic functions is proved.

Keywords: negative-order modified Korteweg–de Vries equation, loaded term, Dirac operator, inverse spectral problem, Dubrovin–Trubovitz system of equations, trace formula, periodic function

REFERENCES

1. Wadati, M., *The exact solution of the modified Korteweg–de Vries equation*, J. Phys. Soc. of Japan, 1972, vol. 33, no. 5, pp. 1456–1458.
2. Demiray, H., Variable coefficient modified KdV equation in fluid-filled elastic tubes with stenosis: solitary waves, *Chaos Soliton Fract*, 2009, vol. 42, no. 1, pp. 358–364.
3. Khasanov, M.M., Integration of the loaded modified Korteweg–de Vries equation in the class of periodic functions, *Uzbek Math. J.*, 2016, vol. 4, pp. 139–147.
4. Urazboev, G.U., Baltaeva, I.I., and Rakhimov, I.D., A generalized (G'/G) -expansion method for the loaded Korteweg–de Vries equation, *Sib. Zhurn. Industr. Matematiki*, 2021, vol. 24, no. 4, pp. 139–147.
5. Baltaeva, I.I., Rakhimov, I.D., and Khasanov, M.M., Exact traveling wave solutions of the loaded modified Korteweg–de Vries equation, *Bull. of Irkutsk State Univ. Ser. Mathematics*, 2022, vol. 41, pp. 85–95.
6. Olver, P.J., Evolution equations possessing infinitely many symmetries, *J. Math. Phys.*, 1977, vol. 18, pp. 1212–1215.
7. Urazboev, G.U., Baltaeva, I.I., and Ismoilov, O.B., Integration of the negative order Korteweg–de Vries equation by the inverse scattering method, *Vestn. Udmurt. Univ. Matematika. Mekhanika. Komp. Nauki*, 2023, vol. 33, no. 3, pp. 523–533.
8. Urazboev, G.U., Baltaeva, I.I., and Atanazarova, Sh.E., Soliton solutions of the negative order modified Korteweg–de Vries equation, *Bull. of Irkutsk State Univ. Ser. Mathematics*, 2024, vol. 47, pp. 63–77.
9. Urazboev, G.U., Yakhshimuratov, A.B., and Khasanov, M.M., Integration of negative-order modified Korteweg–de Vries equation in a class of periodic functions, *Theor. Math. Phys.*, 2023, vol. 217, no. 2, pp. 1689–1699.
10. Levitan, B.M. and Sargsyan, I.S., *Sturm–Liouville and Dirac Operators*, Dordrecht: Springer, 1990.
11. Misjura, T.V., Characterization of the spectra of the periodic and antiperiodic boundary value problems that are generated by the Dirac operator, *Theory of Functions, Functional Analysis and their Applications*, 1978, no. 30, pp. 90–101.
12. Khasanov, A.B. and Ibragimov, A.M., On the inverse problem for the Dirac operator with periodic potential, *Uzbek Math. J.*, 2001, no. 3, pp. 48–55.
13. Djakov, P.B. and Mityagin, B.S., Instability zones of periodic 1-dimensional Schrödinger and Dirac operators, *Russ. Math. Surv.*, 2006, vol. 61, no. 4, pp. 663–766.
14. Levitan, B.M., *Obratnyye zadachi Shturma–Liuvillya* (The Inverse Problems of Sturm–Liouville), Moscow: Nauka, 1984.
15. Marchenko, V.A., *Operatory Shturma–Liuvillya i ikh prilozheniya* (Sturm–Liouville Operators and their Applications), Kyiv: Naukova dumka, 1977.
16. Muminov, U.B. and Khasanov, A.B., Integration of a defocusing nonlinear Schrödinger equation with additional terms, *Theor. Math. Phys.*, 2022, vol. 211, no. 1, pp. 514–534.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956.223+517.956.225

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ В ПОЛУПОЛОСЕ

© 2024 г. Н. Ю. Капустин¹, Д. Д. Васильченко²

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: ¹n.kapustin@bk.ru, ²dvasil.arm@gmail.com

Поступила в редакцию 24.06.2024 г., после доработки 23.09.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

Доказаны теоремы существования и единственности решения задачи для уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями в полуполосе, а также получены интегральные представления для частных производных решения.

Ключевые слова: краевая задача, уравнение Лапласа, базис Рисса

DOI: 10.31857/S0374064124120102, EDN: IOSTMV

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим в полуполосе $D = \{(x, y) : 0 < x < \pi, y > 0\}$ краевую задачу для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (1)$$

в классе функций $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \cap \{y > 0\}) \cap C^2(D)$ с граничными условиями

$$u(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0, \quad y > 0, \quad (2)$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} \int_0^\pi \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \varphi(x) \right]^2 dx = 0, \quad \varphi(x) \in L_2(0, \pi), \quad (3)$$

$$u(x, y) \rightharpoonup 0, \quad y \rightarrow +\infty. \quad (4)$$

Аналогичная задача рассматривалась в статье [1] как вспомогательная при изучении задачи Трикоми–Неймана для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с граничными условиями второго рода на боковых сторонах полуполосы с коэффициентом $1/k$ при $u'_y(x, y)$, $|k| > 1$, где были использованы результаты работы [2]. На линии изменения типа ставилось условие склеивания нормальных производных по Франклю. Случай $k = 1$ (классическая задача с непрерывным градиентом) не рассматривался и теорема единственности для вспомогательной задачи не доказывалась.

На задачу Трикоми с эллиптической частью в полуполосе обратил внимание А.В. Бицадзе в связи с математическим моделированием плоскопараллельных движений газа. В данном случае построение решения с помощью конформного отображения приводит к краевой задаче относительно аналитической функции в верхней полуплоскости [3, с. 327], решение которой на основании формулы Шварца [3, с. 315] было выписано в квадратурах.

В работе [4] получено интегральное представление регулярного решения задачи для уравнения Лапласа в полуокружности с краевым условием первого рода на полуокружности и двумя

различными краевыми условиями типа наклонной производной на двух прямолинейных участках границы.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Решение задачи (1)–(4) существует и его можно представить в виде ряда*

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-(n+1/2)y} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right], \quad (5)$$

где коэффициенты A_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, определяются из разложения

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2} \right) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{2}}. \quad (6)$$

Доказательство. Ввиду основного результата работы [2] система $\{\sin[(n+1/2)x+\pi/4]\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис Рисса в пространстве $L_2(0, \pi)$. Разложим функцию $\varphi(x)/\sqrt{2}$ по этой системе. Коэффициенты разложения (6) удовлетворяют неравенствам Бесселя

$$C_1 \|\varphi\|_{L_2(0, \pi)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \leq C_2 \|\varphi\|_{L_2(0, \pi)}, \quad 0 < C_1 < C_2,$$

где постоянные C_1 и C_2 не зависят от φ . Следовательно, сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |A_n|$ и сходится равномерно ряд (5). Функция (5) является решением уравнения (1) и удовлетворяет граничным условиям (2) по построению. Условие (4) выполняется, так как $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1/2)y} = e^{-y/2}/(1 - e^{-y})$. Проверим выполнение условия (3).

Согласно разложению (6) условие (3) принимает вид

$$I(y) = 2 \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2} \right) (e^{-(n+1/2)y} - 1) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx.$$

Докажем, что $I(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow +0$. Запишем неравенство $I(y) \leq I_1(y) + I_2(y)$, где

$$I_1(y) = 4 \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=0}^m A_n \left(n + \frac{1}{2} \right) (e^{-(n+1/2)y} - 1) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx,$$

$$I_2(y) = 4 \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=m+1}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2} \right) (e^{-(n+1/2)y} - 1) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx.$$

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. В силу левой части неравенства Бесселя имеем оценку

$$\begin{aligned} I_2(y) &= 4 \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=m+1}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2} \right) (e^{-(n+1/2)y} - 1) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx \leq \\ &\leq C_3 \sum_{n=m+1}^{\infty} A_n^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 (e^{-(n+1/2)y} - 1)^2 \leq C_3 \sum_{n=m+1}^{\infty} A_n^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 < \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

если m достаточно велико.

Во втором слагаемом конечное число элементов, поэтому

$$\begin{aligned} I_1(y) &= 4 \int_0^\pi \left[\sum_{n=0}^m A_n \left(n + \frac{1}{2} \right) (e^{-(n+1/2)y} - 1) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx \leqslant \\ &\leqslant C_4 \sum_{n=0}^m A_n^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 (e^{-(n+1/2)y} - 1)^2 < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

при $0 < y < \delta$, если δ достаточно мал. Условие (3) выполнено. Теорема доказана.

Теорема 2. Решение задачи (1)–(4) единствено.

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ — решение однородной задачи. Введём следующие обозначения: $C_\varepsilon = (0, \varepsilon)$, $C_R = (0, R)$, $D_R = (\pi, R)$, $D_\varepsilon = (\pi, \varepsilon)$, $\Pi_{R\varepsilon}$ — прямоугольник $C_\varepsilon C_R D_R D_\varepsilon$. Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} (R-y)(u_{xx} + u_{yy}) dx dy = \\ &= \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} ((R-y)u_x u)_x dx dy + \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} ((R-y)u_y u)_y dx dy - \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} (R-y)(u_x^2 + u_y^2) dx dy + \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} u_y u dx dy = \\ &= - \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} (R-y)(u_x^2 + u_y^2) dx dy - \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (R-\varepsilon)(u_y - u_x)u dx - \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (R-\varepsilon)u_x u dx - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} u^2 dx + \frac{1}{2} \int_{C_R D_R} u^2 dx. \end{aligned}$$

Отсюда следуют цепочки неравенств

$$\begin{aligned} \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (R-\varepsilon)(u_x - u_y)u dx + \frac{1}{2} \int_{C_R D_R} u^2 dx &\leqslant (R-\varepsilon) \left[\int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 dx \right]^{1/2} \left[\int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} u^2 dx \right]^{1/2} + \frac{1}{2} \int_{C_R D_R} u^2 dx \leqslant \\ &\leqslant (R-\varepsilon)^2 \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 dx + \frac{1}{4} \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} u^2 dx + \frac{1}{2} \int_{C_R D_R} u^2 dx, \\ \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} (R-y)(u_x^2 + u_y^2) dx dy + \frac{1}{4} \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} u^2 dx + \frac{R-\varepsilon}{2} u^2(\pi, \varepsilon) &\leqslant (R-\varepsilon)^2 \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{C_R D_R} u^2 dx. \end{aligned}$$

В силу (3) имеет место равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 dx = 0,$$

откуда вытекает соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} (R-y)(u_x^2 + u_y^2) dx dy + \frac{1}{4} \int_0^\pi u^2(x, 0) dx + \frac{R}{2} u^2(\pi, 0) \leqslant \frac{1}{2} \int_{C_R D_R} u^2 dx.$$

Устремим теперь $R \rightarrow \infty$, тогда $\int_{C_R D_R} u^2 dx \rightarrow 0$, отсюда $u(x, y) \equiv 0$ в \overline{D} . Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть $u(x, y)$ — решение задачи (1)–(4), тогда u_x, u_y представимы в виде

$$u_y(x, y) = -\operatorname{Im} \left(\frac{\sqrt{1-e^{i2z}}}{\pi} e^{iz/2} \int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin t}}{(1-e^{i(z+t)})(1-e^{i(z-t)})} \varphi(t) dt \right), \quad (7)$$

$$u_x(x, y) = \operatorname{Re} \left(\frac{\sqrt{1-e^{i2z}}}{\pi} e^{iz/2} \int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin t}}{(1-e^{i(z+t)})(1-e^{i(z-t)})} \varphi(t) dt \right), \quad (8)$$

где $z = x + iy$.

Доказательство. Рассмотрим равенство (6). Система синусов $\{\sin[(n+1/2)x + \pi/4]\}_{n=0}^\infty$ образует базис в пространстве $L_2(0, \pi)$. Поэтому для коэффициентов $A_n(n+1/2)$ справедливо следующее представление [2]:

$$A_n \left(n + \frac{1}{2} \right) = \int_0^\pi h_{n+1}(t) \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt,$$

где

$$h_n(t) = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos(t/2))^\beta}{(\operatorname{tg}(t/2))^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^n \sin(kt) B_{n-k}, \quad B_l = \sum_{m=0}^l C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-l}^m (-1)^{l-m}, \quad C_l^n = \frac{l(l-1)\dots(l-n+1)}{n!}.$$

Пусть $u(x, y)$ — решение задачи (1)–(4), тогда оно имеет вид (5) и соответственно

$$\begin{aligned} u_y(x, y) &= -\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2} \right) e^{-(n+1/2)y} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right] = \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{-(n+1/2)y} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right] dt, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} u_y(x, y) &= -\operatorname{Im} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{-(n+1/2)y} e^{i(n+1/2)x} dt \right) = \\ &= -\operatorname{Im} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{i(n+1/2)z} dt \right) \stackrel{m=n+1}{=} \\ &\stackrel{m=n+1}{=} -\operatorname{Im} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_m(t) e^{i(m-1/2)z} dt \right) = -\operatorname{Im} \left(e^{-iz/2} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_m(t) e^{imz} dt \right). \end{aligned}$$

Поменяем местами знаки интегрирования и суммирования:

$$u_y(x, y) = -\operatorname{Im} \left(e^{-iz/2} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} \sum_{m=1}^{\infty} h_m(t) e^{imz} dt \right).$$

Введём обозначение

$$\begin{aligned} I(t, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t) e^{inz} = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos(t/2))^\beta}{(\operatorname{tg}(t/2))^{\gamma/\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \sin(kt) B_{n-k} e^{inz} = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos(t/2))^\beta}{(\operatorname{tg}(t/2))^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kt) \sum_{n=k}^{\infty} e^{inz} B_{n-k}, \end{aligned}$$

тогда для индекса $m = n - k$ получим

$$I(t, z) = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos(t/2))^\beta}{(\operatorname{tg}(t/2))^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kt) \sum_{m=0}^{\infty} e^{i(m+k)z} B_m = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos(t/2))^\beta}{(\operatorname{tg}(t/2))^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \sin(kt) \sum_{m=0}^{\infty} e^{imz} B_m,$$

где

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \sin(kt) = \frac{e^{iz} \sin t}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})}.$$

Рассмотрим ряд

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} e^{ilz} B_l &= \sum_{l=0}^{\infty} e^{ilz} \sum_{m=0}^l (-1)^{l-m} C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-\beta}^m = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} (-1)^{l-m} e^{ilz} C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-\beta}^m \stackrel{k=l-m}{=} \\ &\stackrel{k=l-m}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{i(m+k)z} C_{\gamma/\pi}^k C_{-\gamma/\pi-\beta}^m = \sum_{m=0}^{\infty} e^{imz} C_{-\gamma/\pi-\beta}^m \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{\gamma/\pi}^k e^{ikz} = \\ &= (1 + e^{iz})^{-\gamma/\pi-\beta} (1 - e^{iz})^{\gamma/\pi} = (1 + e^{iz})^{1/2} (1 - e^{iz})^{1/2} = \sqrt{1 - e^{i2z}}, \end{aligned}$$

так как в нашем случае $\beta = -1$, $\gamma = \pi/2$. Окончательно выводим формулу (7):

$$\begin{aligned} u_y(x, y) &= -\operatorname{Im} \left(e^{-iz/2} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} I(t, z) dt \right) = \\ &= -\operatorname{Im} \left(e^{-iz/2} \int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos(t/2))^\beta}{(\operatorname{tg}(t/2))^{\gamma/\pi}} \frac{e^{iz} \sin t}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} \sqrt{1 - e^{i2z}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt \right) = \\ &= -\operatorname{Im} \left(\frac{2}{\pi} e^{-iz/2} \int_0^{\pi} \frac{1}{2 \cos(t/2) \sqrt{\operatorname{tg}(t/2)}} \frac{e^{iz} \sin t}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} \sqrt{1 - e^{i2z}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt \right) = \\ &= -\operatorname{Im} \left(\frac{\sqrt{1 - e^{i2z}}}{\pi} e^{iz/2} \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{\sin t}}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} \varphi(t) dt \right). \end{aligned}$$

Рассуждая аналогично, получаем представление (8). Теорема доказана.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моисеев, Е.И. Об интегральном представлении задачи Неймана–Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе / Е.И. Моисеев, Т.Е. Моисеев, Г.О. Вафодорова // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 8. — С. 1070–1075.

2. Моисеев, Е.И. О базисности одной системы синусов / Е.И. Моисеев // Дифференц. уравнения. — 1987. — Т. 23, № 1. — С. 177–189.
3. Бицадзе, А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе. — М. : Наука, 1981. — 448 с.
4. Моисеев, Т.Е. Об интегральном представлении решения уравнения Лапласа со смешанными краевыми условиями / Т.Е. Моисеев // Дифференц. уравнения. — 2011. — Т. 47, № 10. — С. 1446–1451.

**BOUNDARY PROBLEM FOR THE LAPLACE EQUATION
WITH MIXED BOUNDARY CONDITIONS IN A SEMIBAND**

© 2024 / N. Y. Kapustin¹, D. D. Vasilchenko²

Lomonosov Moscow State University, Russia
e-mail: ¹*n.kapustin@bk.ru*, ²*dvasil.arm@gmail.com*

Theorems on the existence and uniqueness of the solution to the Laplace equation with mixed boundary conditions in a semiband have been proven in the work. Additionally, integral representations for the partial derivatives of the solution have been obtained.

Keywords: boundary problem, Laplace equation, Riesz basis

FUNDING

This work was carried out with the financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under agreement no. 075-15-2022-284.

REFERENCES

1. Moiseev, E.I., Moiseev, T.E., and Vafodorova, G.O., On an integral representation of the Neumann–Tricomi problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation, *Differ. Equat.*, 2015, vol. 51, no. 8, pp. 1065–1071.
2. Moiseev, E.I., O bazisnosti odnoj sistemy sinusov, *Differ. Uravn.*, 1987, vol. 23, no. 1, pp. 177–189.
3. Bicadze, A.V., *Nekotorye klassy uravnenij v chastnyh proizvodnyh* (Some Classes of Partial Differential Equations), Moscow: Nauka, 1981.
4. Moiseev, T.E., On an integral representation of the solution of the Laplace equation with mixed boundary conditions, *Differ. Equat.*, 2011, vol. 47, no. 10, pp. 1461–1467.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ ТОМА 60, 2024 г.*

<i>Аксенов А.В., Полянин А.Д.</i> Групповой анализ, редукции и точные решения уравнения Монжа–Ампера магнитной гидродинамики	6	750–763
<i>Александров А.Ю.</i> Построение диагональных функционалов Ляпунова–Красовского для одного класса позитивных дифференциально-алгебраических систем	5	579–589
<i>Алексеев В.В.</i> Периодическое решение уравнения Мэки–Гласса и анализ его сходимости к решению соответствующего предельного релейного уравнения	11	1580–1582
<i>Алимов Ш.А., Кудайбергенов А.К.</i> Об определении стационарной температуры в неограниченной полосе	8	1049–1062
<i>Алимурадов Р.Г., Марголина Н.Л., Ширяев К.Е.</i> О соотношении старшего ляпуновского и дискретным способом определяемых центрального и особого верхних показателей	6	844–845
<i>Апушкинская Д.Е., Новикова А.А., Репин С.И.</i> Апостериорные оценки погрешности приближённых решений задачи с препятствием для оператора p -Лапласа	10	1407–1421
<i>Артемьевая М.В., Корпусов М.О.</i> Задача Коши для одного нелинейного волнового уравнения	10	1299–1311
<i>Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В.</i> О гладкой управляемости в параболической задаче управления с точечным наблюдением	11	1575–1577
<i>Асташова И.В., Морозов Ю.Н., Филиновский А.В., Чечкин Г.А., Шабатина Т.И.</i> О математическом моделировании криохимического синтеза лекарственных наноформ	6	859–861
<i>Асташова И.В., Морозов Ю.Н., Филиновский А.В., Чечкин Г.А., Шабатина Т.И.</i> О свойствах решений уравнений, возникающих в задачах моделирования криохимического синтеза лекарственных наноформ	11	1443–1451
<i>Астровский А.И.</i> Наблюдаемость линейных нестационарных систем с ограничением на выходную функцию	2	285–288
<i>Асхабов С.Н.</i> Начальная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа свёртки третьего порядка	4	521–532
<i>Атамась Е.И.</i> Один метод реализации интервальных систем	2	284–285
<i>Ахметшин А.Д.</i> Краевая задача для одного уравнения с переменными коэффициентами и дробной производной Лиувилля	8	1124–1130
<i>Бадерко Е.А., Сахаров С.И.</i> Об однозначной разрешимости задачи Коши в классе $C^{1,0}(\overline{D})$ для параболических систем на плоскости	11	1471–1483
<i>Барабанов Е.А., Быков В.В.</i> Старший показатель Ляпунова параметрических семейств двумерных линейных дифференциальных гамильтоновых систем как функция параметра	11	1582–1583
<i>Басов В.В.</i> Классификация квазилинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и её применение при нормализации систем в критическом случае Богданова–Такенса	12	1587–1600
<i>Башуров В.В.</i> О колеблемости решений одного дифференциального уравнения нейтрального типа	11	1577–1579

*Составитель указателя К.Е. Панкратьев

<i>Бесов В.С., Качалов В.И.</i> Голоморфная регуляризация сингулярно возмущённых интегро-дифференциальных уравнений	1	3–12
<i>Бобылев А.А.</i> Построение передаточной функции оператора Пуанкаре–Стеклова для упругой полуплоскости с покрытием	9	1225–1240
<i>Бондарев А.А.</i> Многомерная автономная дифференциальная система, обладающая единичной мерой неустойчивости, но массивной частной устойчивостью	8	1011–1020
<i>Бондарев А.А.</i> О совпадении классов обеспечения асимптотической и частной неустойчивостей	6	845–846
<i>Бондарев А.А.</i> Три контрпримера двумерных автономных дифференциальных систем с тотальными радиальными свойствами	11	1573–1574
<i>Бризицкий Р.В., Максимова Н.Н.</i> Задачи мультиплексивного управления для диффузионно-дрейфовой модели зарядки неоднородного полярного диэлектрика	5	643–659
<i>Буданов В.М.</i> Метод построения периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений	5	590–603
<i>Быков В.В.</i> см. Барабанов Е.А.	11	1582–1583
<i>Быков В.В.</i> Условные показатели линейной системы	6	854–856
<i>Быкова Т.С., Зайцев В.А.</i> Об управлении спектром показателей линейных нестационарных систем в гильбертовом пространстве	8	1147–1149
<i>Быстрецкий М.В.</i> см. Наимов А.Н.	5	714–720
<i>Бычков Е.В.</i> см. Замышляева А.А.	8	1076–1085
<i>Бабищевич П.Н.</i> Схемы расщепления для эволюционных уравнений с факторизованным оператором	7	876–885
<i>Валеев Н.Ф.</i> см. Садовничий В.А.	4	492–499
<i>Валеев Н.Ф.</i> см. Султанаев Я.Т.	2	273–279
<i>Васильев В.Д.</i> см. Денисов Н.В.	11	1574–1575
<i>Васильченко Д.Д.</i> см. Капустин Н.Ю.	12	1713–1718
<i>Васьковский М.М., Стрюк П.П.</i> Существование и единственность сильных решений стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, управляемых дробными броуновскими движениями с индексами Херста $H > 1/4$	6	723–735
<i>Ветохин А.Н.</i> Бэрсовская классификация топологической энтропии семейств неавтономных динамических систем, непрерывно зависящих от вещественного параметра	6	857–858
<i>Ветохин А.Н.</i> К задаче Миллионщикова о классе Бэра миноранты старшего показателя Ляпунова	11	1566–1567
<i>Вильданова В.Ф.</i> Единственность энтропийного решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения с мерозначным потенциалом в гиперболическом пространстве	12	1653–1663
<i>Волков В.Т.</i> см. Никулин Е.И.	1	64–75
<i>Габбасов Н.С.</i> Оптимальный по порядку прямой метод решения особых интегро-дифференциальных уравнений	7	886–896
<i>Габидуллин Д.А.</i> Об условиях устойчивости некоторой нелинейной биологической модели развития эпидемии	11	1579–1580
<i>Гадзова Л.Х.</i> Задача Наймарк для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределённого дифференцирования	11	1452–1459
<i>Галанин М.П., Родин А.С.</i> Задача о падении ленты лайнера на наклонную опору	7	897–910

<i>Георгиевский Д.В., Раутиан Н.А.</i> Корректная разрешимость вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости	4	533–549
<i>Глушак А.В.</i> Начальные задачи для абстрактного уравнения Лежандра, содержащего два параметра	10	1312–1324
<i>Глушак А.В.</i> О разрешимости начальных и граничных задач для абстрактного функционально-дифференциального уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу	3	346–364
<i>Головизнин В.М., Конопляников В.В., Майоров П.А., Мухин С.И.</i> Балансно-характеристический метод расчёта гемодинамики в сосуде с подвижными стенками	3	418–432
<i>Голубев А.Е.</i> Стабилизация нелинейных динамических систем с учётом ограничений на состояния при помощи метода бэкстеппинга	5	660–671
<i>Голубев В.И., Никитин И.С., Шевченко А.В., Петров И.Б.</i> Явно-неявные схемы расчёта динамики упруговязкопластических сред с разупрочнением	6	817–829
<i>Гринь А.А.</i> см. Ли Ю.	6	736–749
<i>Гусев А.О., Мажсорова О.С.</i> Геометрическая консервативность разностных методов решения задачи Стефана на подвижных и фиксированных сетках	7	911–927
<i>Гусева М.Ю.</i> см. Евстафьева В.В.	12	1601–1615
<i>Давыдова М.А., Рублев Г.Д.</i> Асимптотически устойчивые решения с пограничными и внутренними слоями в прямых и обратных задачах для сингулярно возмущённого уравнения теплопроводности с нелинейной тепловой диффузией	4	439–462
<i>Дарьин А.Н.</i> см. Мельникова А.А.	11	1484–1498
<i>Деменчук А.К.</i> Сильно нерегулярное периодическое решение линейной периодической системы с программным управлением	8	1139–1141
<i>Денисов А.М., Соловьева С.И.</i> Приближённое решение обратной граничной задачи для сингулярно возмущённой системы уравнений с частными производными	7	928–936
<i>Денисов Н.В., Васильев В.Д.</i> Реализуемость неединичной суммы мер устойчивости и неустойчивости дифференциальной системы и их непрерывность по начальному моменту	11	1574–1575
<i>Джохадзе О.М., Харебагашвили С.С.</i> Решение некоторых задач в полуполосе в квадратурах для уравнения колебаний струны	2	175–186
<i>Долженкова Д.А.</i> см. Леваков А.А.	5	604–617
<i>Дурдиев Д.К.</i> Обратная задача определения двух коэффициентов при младших членах параболо-гиперболического уравнения	1	41–54
<i>Евстафьева В.В., Гусева М.Ю.</i> Исследование пространства параметров многомерной системы с релейным гистерезисом и возмущением	12	1601–1615
<i>Евстафьева В.В.</i> Построение управления для многомерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с релейным гистерезисом и возмущением	10	1368–1385
<i>Евстафьева В.В.</i> см. Камачкин А.М.	8	1021–1033
<i>Егорова А.Ю., Коненков А.Н.</i> Задача Коши для параболической системы с переменными коэффициентами в анизотропных пространствах Зигмунда	10	1325–1333
<i>Елкин В.И.</i> Применение дифференциально-геометрических методов теории управления в теории дифференциальных уравнений с частными производными. III	1	55–63
<i>Емельянов Д.П.</i> Решение краевой задачи для эллиптического уравнения с вырождением малого нецелого порядка	3	365–374
<i>Еремин Ю.А., Лопушенко В.В.</i> Численный метод решения задачи дифракции, описываемой уравнениями Максвелла с мезоскопическими граничными условиями	8	1100–1111

<i>Жураева Ю.Ю.</i> Теоремы типа Фрагмена–Линделёфа	8	1063–1075
<i>Зайцев В.А., Ким И.Г.</i> Матричное модальное управление блочными системами посредством статической обратной связи по выходу	8	1149–1152
<i>Зайцев В.А.</i> см. Быкова Т.С.	8	1147–1149
<i>Замарашикин Н.Л.</i> см. Когтенев Д.А.	9	1241–1260
<i>Замураев В.Г.</i> Существование оптимальных множеств для линейных вариационных уравнений и неравенств	6	786–797
<i>Замышляева А.А., Бычков Е.В.</i> Начально-краевая задача для нелинейного модифицированного уравнения Буссинеска	8	1076–1085
<i>Звягин А.В., Струков М.И.</i> О слабой разрешимости математической модели движения растворов полимеров, учитывающей память среды	10	1422–1428
<i>Зубова С.П., Раецкая Е.В.</i> Решение задачи размещения спектра для линейной системы управления, замкнутой обратной связью	6	798–816
<i>Ибрагимова Л.С.</i> см. Юмагулов М.Г.	1	24–40
<i>Изобов Н.А., Ильин А.В.</i> О числе экспоненциально убывающих решений возмущённой дифференциальной системы в двумерном антиперроновском эффекте	11	1583–1584
<i>Изобов Н.А., Ильин А.В.</i> Построение решений с отрицательными показателями дифференциальной системы в двумерном антиперроновском эффекте при возмущениях высшего порядка	12	1616–1622
<i>Ильин А.В., Фурсов А.С., Мосолова Ю.М.</i> О задаче стабилизации переключаемой интервальной линейной системы с соизмеримыми запаздываниями	2	280–282
<i>Ильин А.В., Фурсов А.С.</i> Стабилизация переключаемой системы с соизмеримыми запаздываниями при медленных переключениях	4	550–560
<i>Ильин А.В.</i> см. Изобов Н.А.	11	1583–1584
<i>Ильин А.В.</i> см. Изобов Н.А.	12	1616–1622
<i>Искандаров С., Халилов А.Т.</i> Метод функционалов Ляпунова и ограниченность решений и их первых и вторых производных линейного уравнения третьего порядка типа Вольтерры на полуоси	1	90–98
<i>Исмоилов О.Б.</i> см. Уразбоев Г.У.	12	1703–1712
<i>Кадиев Р.И., Поносов А.В.</i> Существование и единственность решений нелинейных функционально-интегральных уравнений Ито	9	1167–1189
<i>Камаров И.Р., Филиновский А.В.</i> Убывание при больших значениях времени решений смешанной задачи для волнового уравнения с линейной диссипацией	6	847–848
<i>Камачкин А.М., Евстафьева В.В., Потапов Д.К.</i> Аналитическое вычисление неподвижной точки оператора, порожденного многомерной системой с релейным гистерезисом	8	1021–1033
<i>Канатников А.Н., Ткачева О.С.</i> О численных методах в задачах локализации	11	1553–1561
<i>Капустин Н.Ю., Васильченко Д.Д.</i> Краевая задача для уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями в полуполосе	12	1713–1718
<i>Каркузаев С.А.</i> см. Кулаев Р.Ч.	8	1034–1048
<i>Карманов Д.А.</i> см. Никулин Е.И.	1	64–75
<i>Качалов В.И.</i> см. Бесов В.С.	1	3–12
<i>Каширин А.А., Смагин С.И.</i> О разрешимости на спектре граничных интегральных уравнений Фредгольма первого рода трёхмерной задачи дифракции	2	211–223
<i>Кащенко С.А.</i> Логистическое уравнение с сильно запаздывающей обратной связью	2	148–156
<i>Ким И.Г.</i> см. Зайцев В.А.	8	1149–1152

<i>Кипкаева О.С., Щепакина Е.А.</i> Смена устойчивости инвариантных многообразий дифференциальных систем с разномасштабными переменными	9	1155–1166
<i>Киселев А.П.</i> см. Плаченов А.Б.	11	1562–1565
<i>Когтенев Д.А., Замарашкин Н.Л.</i> Использование вейвлетов Хаара для решения одномерного гиперсингулярного интегрального уравнения	9	1241–1260
<i>Кожевникова Л.М.</i> Существование ренормализованного решения квазилинейного эллиптического уравнения без условия знака на младший член	6	764–785
<i>Кондырев О.В.</i> см. Смирнов Ю.Г.	9	1216–1224
<i>Коненков А.Н.</i> см. Егорова А.Ю.	10	1325–1333
<i>Конопляников В.В.</i> см. Головизнин В.М.	3	418–432
<i>Коробко Е.В.</i> Дискретный аналог уравнения типа Эмдена–Фаулера и его решения, эквивалентные степенным функциям	6	861–863
<i>Коростелева Д.М.</i> Аппроксимация функционально-алгебраических задач на собственные значения	5	707–713
<i>Корпусов М.О.</i> см. Артемьева М.В.	10	1299–1311
<i>Косов А.А., Семенов Э.И.</i> О точных решениях многомерного обобщённого уравнения Монжа–Ампера	10	1334–1349
<i>Крищенко А.П.</i> Итерационные последовательности метода локализации	11	1460–1470
<i>Круглов В.Е.</i> Формула Кристоффеля–Дарбу для полиномиальных собственных функций линейных дифференциальных уравнений второго порядка	4	463–471
<i>Крылов П.А.</i> см. Фурсов А.С.	11	1541–1552
<i>Кудайбергенов А.К.</i> см. Алимов Ш.А.	8	1049–1062
<i>Кузьмич А.В.</i> см. Ли Ю.	6	736–749
<i>Кулаев Р.Ч., Каркузаев С.А.</i> Оценки снизу главного собственного значения билапласиана на графе	8	1034–1048
<i>Куприянов М.Ю.</i> см. Хапаев М.М.	7	1001–1008
<i>Лаптинский В.Н.</i> Решение многоточечной задачи управления с интегральными ограничениями типа равенств	10	1386–1393
<i>Лашин Д.А.</i> см. Асташова И.В.	11	1575–1577
<i>Леваков А.А., Долженкова Д.А.</i> Теоремы существования и единственности решений стохастических дифференциально-разностных гибридных систем	5	604–617
<i>Ли Ю., Гринь А.А., Кузьмич А.В.</i> Уточнённое глобальное кольцо Пуанкаре–Бендиксона с предельным циклом системы Рэлея	6	736–749
<i>Лобода Н.А., Сташ А.Х.</i> Об управлении существенными спектрами показателей колеблемости двумерных дифференциальных систем	6	848–850
<i>Лобода Н.А.</i> см. Сташ А.Х.	4	500–507
<i>Ломов И.С.</i> Исследование асимптотических свойств решения одной задачи с параметром для оператора Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом	3	291–297
<i>Лопушенко В.В.</i> см. Еремин Ю.А.	8	1100–1111
<i>Луцкий А.Е.</i> см. Четверушкин Б.Н.	7	990–1000
<i>Мажсорова О.С.</i> см. Гусев А.О.	7	911–927
<i>Майоров П.А.</i> см. Головизнин В.М.	3	418–432
<i>Макин А.С.</i> О спектре несамосопряжённого оператора Дирака с двухточечными краевыми условиями	2	157–174
<i>Максимова Н.Н.</i> см. Бризицкий Р.В.	5	643–659

<i>Маматов А.Э.</i> Прямая задача теории рассеяния для системы дифференциальных уравнений Дирака на полуоси в случае конечной плотности	3	298–311
<i>Манита Л.А.</i> см. Ронжина М.И.	11	1531–1540
<i>Марголина Н.Л.</i> см. Алимурадов Р.Г.	6	844–845
<i>Мартынова В.Ю.</i> О существовании нелинеаризуемых решений в неклассической двухпараметрической нелинейной краевой задаче	4	472–491
<i>Матус П.П.</i> Применение операторных неравенств к исследованию устойчивости разностных схем для нелинейных краевых задач с нелинейностями неограниченного роста	6	830–843
<i>Мачтакова А.И., Петров Н.Н.</i> Задача группового преследования в линейных нестационарных дифференциальных играх с дробными производными	8	1144–1146
<i>Мелихов С.Н., Сулейманов Б.И., Шавлуков А.М.</i> Типичные провальные асимптотики квазиклассических приближений к решениям нелинейного уравнения Шредингера	5	618–631
<i>Мельникова А.А., Точилин П.А., Дарьин А.Н.</i> О свойствах множества разрешимости для линейной системы с неопределенностью	11	1484–1498
<i>Метельский А.В.</i> Управление спектром системы нейтрального типа	1	99–125
<i>Мироненко В.В.</i> см. Мироненко В.И.	1	13–23
<i>Мироненко В.И., Мироненко В.В.</i> Отражающая функция и обобщение понятия первого интеграла	1	13–23
<i>Мирсабуров М., Тураев Р.Н.</i> Об одной нелокальной задаче для уравнения Геллерстедта с сингулярными коэффициентами	8	1086–1099
<i>Мусеев Т.Е., Холомеева А.А.</i> Об одной задаче Геллерстедта с данными на параллельных характеристиках	10	1429–1434
<i>Морозов Ю.Н.</i> см. Асташова И.В.	6	859–861
<i>Морозов Ю.Н.</i> см. Асташова И.В.	11	1443–1451
<i>Мосолова Ю.М.</i> см. Ильин А.В.	2	280–282
<i>Мухамадиев Э., Наимов А.Н.</i> О разрешимости периодической задачи для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка	3	312–321
<i>Мухин С.И.</i> см. Головизнин В.М.	3	418–432
<i>Назаров С.А.</i> Локализация собственных функций задачи Дирихле около контура на границе тонкой области	12	1664–1684
<i>Назирова Э.А.</i> см. Султанаев Я.Т.	2	273–279
<i>Наимов А.Н., Быстрыцкий М.В.</i> О существовании периодических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с квазиоднородной нелинейностью	5	714–720
<i>Наимов А.Н.</i> см. Мухамадиев Э.	3	312–321
<i>Ненашев А.С.</i> Двухточечный метод коллокации численного решения одномерных гиперсингулярных интегральных уравнений на неравномерных разбиениях	9	1261–1275
<i>Никитин А.А.</i> см. Николаев М.В.	9	1205–1215
<i>Никитин И.С.</i> см. Голубев В.И.	6	817–829
<i>Николаев В.Г.</i> О структуре ядра задачи Шварца для эллиптических систем первого порядка на плоскости	5	632–642
<i>Николаев М.В., Никитин А.А.</i> О существовании равновесия в модели Дикмана–Лоу в случае кусочно-константных ядер	9	1205–1215

<i>Никулин Е.И., Волков В.Т., Карманов Д.А.</i> Структура внутреннего переходного слоя в задаче реакция–диффузия в случае сбалансированной реакции со слабым разрывом	1	64–75
<i>Новикова А.А.</i> см. Апушкинская Д.Е.	10	1407–1421
<i>Оу Ц.</i> см. Фурсов А.С.	8	1137–1139
<i>Павленко В.А.</i> Решения аналогов временных уравнений Шрёдингера, соответствующих паре гамильтоновых систем H^{2+2+1} иерархии вырождений изомонодромной системы Гарнье	1	76–89
<i>Паламарчук Е.С.</i> О чувствительности решений уравнений Риккати при малых изменениях коэффициентов и анализе оптимальности в линейных стохастических системах управления	12	1623–1639
<i>Петров И.Б.</i> см. Голубев В.И.	6	817–829
<i>Петров Н.Н.</i> см. Мачтакова А.И.	8	1144–1146
<i>Петросян Г.Г.</i> О системах управления, описываемых дифференциальными включениями дробного порядка с обратной связью	11	1499–1518
<i>Печенцов А.С.</i> Распределение спектра оператора Штурма–Лиувилля, возмущённого дельта-взаимодействием	7	867–875
<i>Пирогова А.Д., Четвериков В.Н.</i> Количественные показатели управляемости нелинейных систем	11	1519–1530
<i>Платонов А.В.</i> Об устойчивости по нелинейному нестационарному гибридному приближению	12	1640–1652
<i>Плаченов А.Б., Киселев А.П.</i> Конечно-энергетическое решение волнового уравнения, не стремящееся на бесконечности к сферической волне	11	1562–1565
<i>Подобряев А.В.</i> Сублоренцевы экстремали, заданные антинормой	3	386–398
<i>Полехина Р.Р., Савенков Е.Б.</i> Применение разностной схемы с хорошо контролируемой диссипацией для решения уравнений модели Капилы	7	937–953
<i>Полянин А.Д.</i> см. Аксенов А.В.	6	750–763
<i>Поносов А.В.</i> см. Кадиев Р.И.	9	1167–1189
<i>Попова С.Н., Фахразиева Э.А.</i> О свойстве локальной достижимости линейных управляемых гибридных систем	8	1146–1147
<i>Потапов Д.К.</i> Об оценках в уравнении с параметром и разрывным оператором	10	1435–1440
<i>Потапов Д.К.</i> см. Камачкин А.М.	8	1021–1033
<i>Похачевский В.А.</i> О бэрковской классификации слабых показателей колеблемости корней линейной системы	6	856–857
<i>Раецкая Е.В.</i> Зубова С.П.	6	798–816
<i>Раутшан Н.А.</i> см. Георгиевский Д.В.	4	533–549
<i>Ревизников Д.Л.</i> см. Сластущенский Ю.В.	7	954–966
<i>Репин С.И.</i> см. Апушкинская Д.Е.	10	1407–1421
<i>Родин А.С.</i> см. Галанин М.П.	7	897–910
<i>Романенков А.М.</i> Градиент в задаче управления процессами, описываемыми линейными псевдогиперболическими уравнениями	2	224–236
<i>Романов В.Г.</i> Обратная задача для волнового уравнения с двумя нелинейными членами	4	508–520
<i>Ронжина М.И., Манита Л.А.</i> Семейство логарифмических спиралей в гамильтоновых системах размерности 8 с управлением из круга	11	1531–1540
<i>Рублев Г.Д.</i> см. Давыдова М.А.	4	439–462
<i>Савенков Е.Б.</i> см. Полехина Р.Р.	7	937–953

<i>Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Валеев Н.Ф.</i> Оптимизационная обратная спектральная задача для одномерного оператора Шрёдингера на всей оси	4	492–499
<i>Самарин А.И.</i> см. Фомичев В.В.	2	260–272
<i>Самохин А.Б., Самохина А.С., Юрченков И.А.</i> Объёмные сингулярные интегральные уравнения для задач низкочастотного рассеяния электромагнитных волн в анизотропных структурах	9	1190–1204
<i>Самохина А.С.</i> см. Самохин А.Б.	9	1190–1204
<i>Самсонов А.А.</i> Асимптотические свойства параметрических задач на собственные значения в гильбертовом пространстве	8	1112–1123
<i>Сахаров С.И.</i> см. Бадерко Е.А.	11	1471–1483
<i>Семенов С.А.</i> см. Сластущенский Ю.В.	7	954–966
<i>Семенов Э.И.</i> см. Косов А.А.	10	1334–1349
<i>Сергеев И.Н.</i> О возможной зависимости мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы от начального момента	6	853–854
<i>Сергеев И.Н.</i> О реализуемости контрастных сочетаний мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы	6	852–853
<i>Сергеев И.Н.</i> Определение мер колеблемости, блуждаемости и вращаемости дифференциальной системы	11	1570–1571
<i>Сергеев И.Н.</i> Связь между устойчивостью и радиальной устойчивостью дифференциальной системы	11	1572–1573
<i>Сетуха А.В.</i> Сходимость метода кусочно-линейных аппроксимаций и коллокаций для двумерного гиперсингулярного интегрального уравнения на множестве с границей	9	1276–1296
<i>Сластущенский Ю.В., Ревизников Д.Л., Семенов С.А.</i> Методы параметрической идентификации дробно-дифференциальных уравнений	7	954–966
<i>Смагин С.И.</i> см. Каширин А.А.	2	211–223
<i>Смирнов Ю.Г., Кондырев О.В.</i> Интегро-дифференциальные уравнения в задаче рассеяния электромагнитных волн на диэлектрическом теле, покрытом графеном	9	1216–1224
<i>Соболев В.А.</i> Сингулярно возмущённая задача оптимального слежения	4	561–576
<i>Соловьев П.С., Соловьев С.И.</i> Вычисление ведущего собственного значения и соответствующего собственного элемента задач на собственные значения с нелинейной зависимостью от спектрального параметра	7	967–989
<i>Соловьев С.И.</i> см. Соловьев П.С.	7	967–989
<i>Соловьева С.И.</i> см. Денисов А.М.	7	928–936
<i>Сташ А.Х., Лобода Н.А.</i> О реализации конечных существенных спектров показателей колеблемости двумерных дифференциальных систем	4	500–507
<i>Сташ А.Х.</i> Об отсутствии непосредственной зависимости между спектрами показателей колеблемости двумерной нелинейной системы и системы её первого приближения	11	1568–1569
<i>Сташ А.Х.</i> Об отсутствии свойства остаточности у сильных показателей колеблемости на множестве решений линейных однородных дифференциальных уравнений высокого порядка	6	850–852
<i>Сташ А.Х.</i> см. Лобода Н.А.	6	848–850
<i>Струков М.И.</i> см. Звягин А.В.	10	1422–1428
<i>Стрюк П.П.</i> см. Васьковский М.М.	6	723–735
<i>Сулейманов Б.И.</i> см. Мелихов С.Н.	5	618–631

<i>Султанаев Я.Т., Валеев Н.Ф., Назирова Э.А.</i> Об асимптотике решений двучленных дифференциальных уравнений третьего порядка	2	273–279
<i>Султанаев Я.Т.</i> см. Садовничий В.А.	4	492–499
<i>Сумин В.И., Сумин М.И.</i> О регуляризации классических условий оптимальности в выпуклых задачах оптимизации систем вольтеррового типа с операторными ограничениями	2	237–259
<i>Сумин М.И.</i> см. Сумин В.И.	2	237–259
<i>Тимергалиев С.Н.</i> Разрешимость нелинейных краевых задач для дифференциальных уравнений равновесия непологих оболочек типа Тимошенко ненулевой гауссовой кривизны в изометрических координатах	12	1685–1702
<i>Ткачева О.С.</i> см. Канатников А.Н.	11	1553–1561
<i>Точилин П.А., Чистяков И.А.</i> О кусочно-кубических оценках функции цены в задаче целевого управления нелинейной системой	5	672–685
<i>Точилин П.А.</i> см. Мельникова А.А.	11	1484–1498
<i>Тураев Р.Н.</i> см. Мирсабуров М.	8	1086–1099
<i>Турбин М.В., Устюжанинова А.С.</i> Разрешимость начально-краевой задачи для модифицированной модели Кельвина–Фойгта с памятью вдоль траекторий движения жидкости	2	187–210
<i>Тюленев А.В.</i> Вычислимость решений начальной задачи для уравнений с запаздыванием	6	863–864
<i>Умаров Х.Г.</i> Асимптотическое поведение решения задачи Коши для одного нелинейного уравнения	10	1350–1367
<i>Уразбоев Г.У., Хасанов М.М., Исмоилов О.Б.</i> Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с нагруженным членом в классе периодических функций	12	1703–1712
<i>Устюжанинова А.С.</i> см. Турбин М.В.	2	187–210
<i>Утесов А.Б.</i> Об оценках погрешностей операторов дискретизации решения уравнения Пуассона	1	135–142
<i>Фахразиева Э.А.</i> см. Попова С.Н.	8	1146–1147
<i>Филиновский А.В.</i> см. Асташова И.В.	6	859–861
<i>Филиновский А.В.</i> см. Асташова И.В.	11	1443–1451
<i>Филиновский А.В.</i> см. Асташова И.В.	11	1575–1577
<i>Филиновский А.В.</i> см. Камаров И.Р.	6	847–848
<i>Фомичев В.В., Самарин А.И.</i> Каскадный супер-скручивающий наблюдатель для линейных мультиагентных систем без коммуникации	2	260–272
<i>Фурсов А.С., Крылов П.А.</i> О расширении множества разбиений пространства состояний для устойчивой переключаемой аффинной системы	11	1541–1552
<i>Фурсов А.С., Оу Ц.</i> О задаче слежения для динамической модели ленточного конвейера	8	1137–1139
<i>Фурсов А.С.</i> см. Ильин А.В.	2	280–282
<i>Фурсов А.С.</i> см. Ильин А.В.	4	550–560
<i>Халилов А.Т.</i> см. Искандаров С.	1	90–98
<i>Ханаев М.М., Куприянов М.Ю.</i> Разностная схема для разрывных решений уравнений Узаделя	7	1001–1008
<i>Харебегашвили С.С.</i> см. Джохадзе О.М.	2	175–186
<i>Хартовский В.Е.</i> К вопросу асимптотической наблюдаемости линейных непрерывно-дискретных систем	8	1142–1144

<i>Хартовский В.Е.</i> К вопросу назначения конечного спектра линейной системе нейтрального типа	2	282–284
<i>Хартовский В.Е.</i> Регуляторы финитной стабилизации для гибридных линейных непрерывно-дискретных систем	10	1394–1406
<i>Хартовский В.Е.</i> Финитная стабилизация и назначение конечного спектра единственным регулятором по неполным измерениям для линейных систем нейтрального типа	5	686–706
<i>Хасанов М.М.</i> см. Уразбоев Г.У.	12	1703–1712
<i>Холомеева А.А.</i> см. Моисеев Т.Е.	10	1429–1434
<i>Цветков И.М.</i> О динамическом растяжении тонкого круглого идеально жёсткопластического слоя из трансверсально-изотропного материала	3	375–385
<i>Чернов А.В.</i> О точной глобальной управляемости полулинейного эволюционного уравнения	3	399–417
<i>Четвериков В.Н.</i> см. Пирогова А.Д.	11	1519–1530
<i>Четверушкин Б.Н., Луцкий А.Е., Шильников Е.В.</i> Об одной модели для описания турбулентных течений	7	990–1000
<i>Чечкин Г.А.</i> см. Асташова И.В.	6	859–861
<i>Чечкин Г.А.</i> см. Асташова И.В.	11	1443–1451
<i>Чистяков И.А.</i> см. Точилин П.А.	5	672–685
<i>Шабатина Т.И.</i> см. Асташова И.В.	6	859–861
<i>Шабатина Т.И.</i> см. Асташова И.В.	11	1443–1451
<i>Шавлуков А.М.</i> см. Мелихов С.Н.	5	618–631
<i>Шамолин М.В.</i> Инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем с тремя степенями свободы	3	322–345
<i>Шевченко А.В.</i> см. Голубев В.И.	6	817–829
<i>Шильников Е.В.</i> см. Четверушкин Б.Н.	7	990–1000
<i>Ширяев К.Е.</i> см. Алимурадов Р.Г.	6	844–845
<i>Щелчков К.А.</i> О задаче управления нелинейной системой посредством дискретного управления в условиях воздействия помехи	1	126–134
<i>Щепакина Е.А.</i> см. Кипкаева О.С.	9	1155–1166
<i>Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С.</i> Эквивалентные дифференциальные уравнения в задачах теории управления и теории гамильтоновых систем	1	24–40
<i>Юрченков И.А.</i> см. Самохин А.Б.	9	1190–1204
<i>Янченко А.Я.</i> Целые решения одного класса алгебраических дифференциальных уравнений, обобщающих уравнения типа Брио–Буке	8	1131–1136

Свидетельство о регистрации средства массовой информации
№ 0110211 от 8 февраля 1993 г., выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Подписано к печати 16.12.2024. Дата выхода в свет 28.12.2024. Формат 60 x 88 1/8.
Усл. печ. л. 18,0. Уч.-изд. л. 18,0. Тираж 55 экз. Заказ 1673. Цена свободная.

Учредитель: Российская академия наук

Издатель: Российская академия наук, 119991 Москва, Ленинский просп., 14
Исполнитель по контракту № 4У-ЕП-038-24 ФГБУ «Издательство «Наука»
121099, г. Москва, Шубинский пер., д. 6, стр. 1.

Отпечатано в ФГБУ «Издательство «Наука»
121099, г. Москва, Шубинский пер., д. 6, стр. 1

◆◆◆◆ РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК ◆◆◆◆

Журналы РАН, выходящие в свет на русском языке

Автоматика и телемеханика	Лёд и Снег
Агрохимия	Лесоведение
Азия и Африка сегодня	Литология и полезные ископаемые
Акустический журнал	Мембранные технологии
Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы	Металлы
Астрономический журнал	Микология и фитопатология
Биологические мембранны	Микробиология
Биология внутренних вод	Микроэлектроника
Биология моря	Молекулярная биология
Биоорганическая химия	Нейрохимия
Биофизика	Неорганические материалы
Биохимия	Нефтехимия
Ботанический журнал	Новая и новейшая история
Вестник Дальневосточного отделения Российской академии наук	Общественные науки и современность
Вестник древней истории	Общество и экономика
Вестник Российской академии наук	Океанология
Вестник Российской сельскохозяйственной науки	Онтогенез
Водные ресурсы	Палеонтологический журнал
Вопросы истории естествознания и техники	Паразитология
Вопросы ихтиологии	Петрология
Вопросы языкоznания	Письма в Астрономический журнал
Вулканология и сейсмология	Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики
Высокомолекулярные соединения. Серия А	Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования
Высокомолекулярные соединения. Серия Б	Почвоведение
Высокомолекулярные соединения. Серия С	Приборы и техника эксперимента
Генетика	Прикладная биохимия и микробиология
Геология рудных месторождений	Прикладная математика и механика
Геомагнетизм и астрономия	Проблемы Дальнего Востока
Геоморфология и палеогеография	Проблемы машиностроения и надежности машин
Геотектоника	Проблемы передачи информации
Геохимия	Программирование
Геоэкология. Инженерная геология. Гидрогеология. Геокриология	Психологический журнал
Государство и право	Радиационная биология. Радиоэкология
Дефектоскопия	Радиотехника и электроника
Дифференциальные уравнения	Радиохимия
Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления	Расплавы
Доклады Российской академии наук. Науки о жизни	Растительные ресурсы
Доклады Российской академии наук. Науки о Земле	Российская археология
Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки	Российская история
Доклады Российской академии наук. Химия, науки о материалах	Российская сельскохозяйственная наука
Журнал аналитической химии	Российский физиологический журнал им. И.М. Сеченова
Журнал высшей нервной деятельности им. И.П. Павлова	Русская литература
Журнал вычислительной математики и математической физики	Русская речь
Журнал неорганической химии	Сенсорные системы
Журнал общей биологии	Славяноведение
Журнал общей химии	Современная Европа
Журнал органической химии	Социологические исследования
Журнал прикладной химии	Стратиграфия. Геологическая корреляция
Журнал физической химии	США & Канада: экономика, политика, культура
Журнал эволюционной биохимии и физиологии	Теоретические основы химической технологии
Журнал экспериментальной и теоретической физики	Теплофизика высоких температур
Записки Российского минералогического общества	Успехи современной биологии
Зоологический журнал	Успехи физиологических наук
Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа	Физика Земли
Известия Российской академии наук. Механика твердого тела	Физика и химия стекла
Известия Российской академии наук. Серия биологическая	Физика металлов и металловедение
Известия Российской академии наук. Серия географическая	Физика плазмы
Известия Российской академии наук. Серия литературы и языка	Физикохимия поверхности и защита материалов
Известия Российской академии наук. Серия физическая	Физиология растений
Известия Российской академии наук. Теория и системы управления	Физиология человека
Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана	Химическая физика
Известия Российской академии наук. Энергетика	Химия высоких энергий
Известия Русского географического общества	Химия твердого топлива
Исследование Земли из космоса	Цитология
Кинетика и катализ	Человек
Кolloидный журнал	Экология
Координатная химия	Экономика и математические методы
Космические исследования	Электрохимия
Кристаллография	Энтомологическое обозрение
Латинская Америка	Этнографическое обозрение
	Ядерная физика