ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2025, том 61, № 1, с. 50–67

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.32

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

© 2025 г. К. Б. Сабитов

Самарский государственный технический университет,
Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий
e-mail: sabitov_fmf@mail.ru

Поступила в редакцию 11.01.2022 г., после доработки 10.08.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

Для двумерного волнового уравнения в цилиндрической области изучена первая граничная задача, установлен критерий единственности её решения, которое построено в виде суммы ортогонального ряда. При обосновании сходимости ряда решена проблема малых знаменателей от двух натуральных аргументов. Установлена оценка об отделимости от нуля с соответствующей асимптотикой, что позволило доказать сходимость ряда в классе регулярных решений и устойчивость решения задачи.

Ключевые слова: волновое уравнение, задача Дирихле, критерий единственности, существование, устойчивость, ряд, малые знаменатели

DOI: 10.31857/S0374064125010058, EDN: HZWWAG

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим волновое уравнение

$$Lu \equiv u_{tt} - a^2(u_{xx}+u_{yy}) - bu = 0 \tag{1}$$

в цилиндре $Q=\{(x,y,t)\colon (x,y)\in D,\ 0<t<T\}$, где $D=\{(x,y)\colon x^2+y^2<l^2\}$; $a>0$, b, $T>0$ и $l>0$ — заданные действительные постоянные, и поставим первую граничную задачу.

Требуется найти функцию $u(x,y,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,y,t)\in C^1(\overline{Q})\cap C^2(Q); \tag{2}$$

$$Lu(x,y,t)\equiv 0, \quad (x,y,t)\in Q; \tag{3}$$

$$u(x,y,t)\big|_{x^2+y^2=l^2} = 0, \quad 0\leqslant t\leqslant T; \tag{4}$$

$$u(x,y,0)=\tau(x,y), \quad u(x,y,T)=\psi(x,y), \quad (x,y)\in\overline{D}, \tag{5}$$

где $\tau(x,y)$ и $\psi(x,y)$ — заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования с граничным условием (4).

Известно, что задача Дирихле для уравнений гиперболического типа поставлена некорректно. С.Л. Соболев показал [1], что исследование вопросов неустойчивых колебаний (резонансов колебаний в жидкости внутри тонкостенных баков ракет с собственными колебаниями) тесно связано с задачей Дирихле для волнового уравнения. В более известной форме эта связь показана в книге В.И. Арнольда [2, с. 132]. Достаточно полный обзор работ, посвящённых изучению задачи Дирихле для гиперболических уравнений, приведён в монографии Б.И. Пташника [3, с. 89–95] и в работах [4; 5, с. 112–118] автора.

Работы Р. Денчева [6–8] посвящены исследованию задачи Дирихле для уравнения (1) при $b=0$, $a=1$ с ненулевой правой частью и однородными условиями на границе области Ω, когда Ω — эллипсоид, цилиндр с образующими, параллельными оси t, и параллелепипед. В них также установлен критерий единственности и существования решения задачи в пространстве Соболева $W_2^1(\Omega)$ при определённых условиях на правую часть, связанных со сходимостью числовых рядов, при этом возникающие малые знаменатели не изучены.

В работе [9] для многомерного уравнения с волновым оператором в цилиндрической области $D\times(0,T)$ найдены условия $\sqrt{\lambda_k}T\neq m\pi$, где $k,m\in\mathbb{N}$, при которых имеет место теорема единственности решения задачи Дирихле. Здесь λ_k — собственные значения соответствующей спектральной задачи в области D.

В монографии Б.И. Пташника [3, с. 95–101] также изучена задача Дирихле в $(p+1)$-мерном параллелепипеде $Q=[0,T]\times\Pi$, где $\Pi=\{x\in R^p\colon 0\leqslant x_r\leqslant\pi,\ \ r=\overline{1,p}\}$, для строго гиперболического уравнения чётного порядка $2n$ с постоянными коэффициентами. Решение задачи определяется p-мерным рядом Фурье. Установлен критерий единственности решения в $C^{2n}(Q)$. Для серии неравенств, выражающих оценку малых знаменателей с соответствующей асимптотикой, приведено обоснование сходимости ряда в указанном классе. При этом не показано для каких чисел вида π/T эти оценки имеют место, только отмечено, что множество чисел π/T, для которых они не выполняются, есть множество нулевой меры Лебега.

В статье В.П. Бурского [10] получено необходимое и достаточное условие тривиальной разрешимости однородной задачи Дирихле в единичном шаре B с центром в начале координат в пространстве $C^2(\overline{B})$ для уравнения с комплексной постоянной a:

$$u_{xx}+u_{yy}-a^2u_{zz}=0.$$

В работах С.А. Алдашева [11–14] изучены задача Дирихле и задача со смешанными граничными условиями в цилиндрической области Q (где $l=1$, $T=\alpha$) для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором; решения задач построены в виде суммы ряда Фурье в сферической системе координат. Но из-за возникающих малых знаменателей нельзя считать, что эти ряды сходятся в пространстве $C^1(\overline{Q})\cap C^2(Q)$. При доказательстве теорем единственности также появляются вопросы о равномерной сходимости используемых рядов, так как они содержат малые знаменатели.

В данной статье в классе регулярных решений уравнения (1), т.е. удовлетворяющих условиям (2) и (3), установлен критерий единственности решения задачи (2)–(5) и само решение построено в явном виде — суммы ряда Фурье. При обосновании сходимости ряда возникла проблема малых знаменателей, как в известных работах В.И. Арнольда [15, 16] и В.В. Козлова [17], но от двух натуральных аргументов. В связи с этим установлены оценки об отделимости от нуля малых знаменателей, на основании которых доказана сходимость ряда в классе функций $C^2(\overline{Q})$ при некоторых условиях относительно функций $\tau(x,y)$ и $\psi(x,y)$, а также получены оценки об устойчивости решения.

2. КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

В цилиндрической системе координат $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $t=t$, $0\leqslant r<l$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, уравнение (1) примет вид

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}+\frac{b}{a^2}u=\frac{1}{a^2}u_{tt}. \tag{6}$$

Разделив переменные $u(r,\varphi,t)=v(r,\varphi)T(t)$ в уравнении (6), получим относительно функции $v(r,\varphi)$ следующую спектральную задачу:

$$v_{rr}+\frac{1}{r}v_r+\frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi}+\lambda^2 v=0, \tag{7}$$

$$v(l,\varphi)=0, \tag{8}$$

$$|v(0,\varphi)|<+\infty, \quad v(r,\varphi)=v(r,\varphi+2\pi), \tag{9}$$

где $\lambda^2=b/a^2+\mu^2$, μ — постоянная разделения переменных.

Решение задачи (7)–(9) аналогично [18, с. 215] будем искать в виде $v(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)$ и получим две одномерные спектральные задачи:

$$\Phi''(\varphi)+p^2\Phi(\varphi)=0, \quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, \tag{10}$$

$$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi), \quad \Phi'(\varphi)=\Phi'(\varphi+2\pi); \tag{11}$$

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+\left(\lambda^2-\frac{p^2}{r^2}\right)R(r)=0, \quad 0<r<l, \tag{12}$$

$$|R(0)|<+\infty, \quad R(l)=0. \tag{13}$$

Ненулевые периодические решения задачи (10) и (11) существуют лишь при целом $p=n$ и определяются по формуле

$$\Phi_n(\varphi)=a_n\cos(n\varphi)+b_n\sin(n\varphi),$$

где a_n, b_n — произвольные постоянные, $n=0,1,2,\ldots$ При $p=n$ общее решение уравнения (12) имеет вид

$$R_n(r)=c_nJ_n(\lambda r)+d_nY_n(\lambda r),$$

здесь c_n и d_n — произвольные постоянные, $J_n(\lambda r)$ и $Y_n(\lambda r)$ — цилиндрические функции первого и второго рода соответственно. Из первого условия в (13) следует, что $d_n=0$, а второе условие даёт уравнение

$$J_n(q)=0, \quad q=\lambda l,$$

которое, как известно, имеет счётное множество положительных корней q_{nm}, $n=0,1,2,\ldots$, $m=1,2,\ldots$, и им соответствуют собственные значения

$$\lambda_{nm}=q_{nm}/l, \quad m=1,2,\ldots,\ n=0,1,2,\ldots,$$

и собственные функции

$$\widetilde{R}_{nm}(r)=J_n(\lambda_{nm}r)=J_n\left(\frac{q_{nm}}{l}r\right)$$

спектральной задачи (12), (13).

Таким образом, спектральная задача (10), (11) имеет систему собственных функций

$$\Phi_n(\varphi)=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(n\varphi),\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(n\varphi)\right\}, \tag{14}$$

ортонормированную, полную и образующую базис в пространстве $L_2(0,2\pi)$, а спектральная задача (12), (13) — систему собственных функций

$$R_{nm}(r)=\frac{J_n(\lambda_{nm}r)}{\|J_n(\lambda_{nm}r)\|_{L_2(0,l)}}=\frac{\sqrt{2}}{l}\frac{J_n(\lambda_{nm}r)}{|J_{n+1}(q_{nm})|}, \tag{15}$$

полную и образующую ортонормированный базис в $L_2(0,l)$ с весом r.

Тогда спектральная задача (7)–(9) имеет собственные значения $\lambda_{nm}^2 = b/a^2 + \mu_{nm}^2 = (q_{nm}/l)^2$ и им соответствует с учётом (14) и (15) система собственных функций

$$v_{nm}(r,\varphi) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} R_{0m}(r), \frac{1}{\sqrt{\pi}} R_{nm}(r)\cos(n\varphi), \frac{1}{\sqrt{\pi}} R_{nm}(r)\sin(n\varphi) \right\}, \tag{16}$$

которая полна и образует ортонормированный базис в пространстве $L_2(D)$ с весом r.

В дальнейшем будем считать, что $b \geqslant 0$, так как если $b < 0$, то, начиная с некоторых номеров $n > n_0$ или $m > m_0$, правая часть $\lambda_{nm}^2 = b/a^2 + \mu_{nm}^2$ принимает только положительные значения, т.е. знак коэффициента b, по существу, не влияет на полученные результаты.

Пусть $u(r,\varphi,t)$ — решение задачи (2)–(5). На основании системы (16) введём функции

$$A_{0m}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint\limits_D u(r,\varphi,t) R_{0m}(r) r\, dr\, d\varphi, \tag{17}$$

$$A_{nm}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \iint\limits_D u(r,\varphi,t) R_{nm}(r)\cos(n\varphi) r\, dr\, d\varphi, \tag{18}$$

$$B_{nm}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \iint\limits_D u(r,\varphi,t) R_{nm}(r)\sin(n\varphi) r\, dr\, d\varphi. \tag{19}$$

Дифференцируя равенство (18) по t два раза и учитывая уравнение (6), получаем

$$A''_{nm}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \iint\limits_D u_{tt}(r,\varphi,t) R_{nm}(r)\cos(n\varphi) r\, dr\, d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{\sqrt{\pi}} \iint\limits_D \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} \right) R_{nm}(r)\cos(n\varphi) r\, dr\, d\varphi + bA_{nm}(t) = J_1 + J_2 + bA_{nm}(t), \tag{20}$$

где

$$J_1 = \frac{a^2}{\sqrt{\pi}} \iint\limits_D \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right) R_{nm}(r)\cos(n\varphi) r\, dr\, d\varphi = \frac{a^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{2\pi} \cos(n\varphi) \int\limits_0^l (ru_r)'_r R_{nm}(r)\, dr\, d\varphi, \tag{21}$$

$$J_2 = \frac{a^2}{\sqrt{\pi}} \iint\limits_D \frac{1}{r} u_{\varphi\varphi} R_{nm}(r)\cos(n\varphi)\, dr\, d\varphi = \frac{a^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^l \frac{1}{r} R_{nm}(r) \int\limits_0^{2\pi} u_{\varphi\varphi}\cos(n\varphi)\, d\varphi\, dr. \tag{22}$$

Вычислим внутренние интегралы в правых частях равенств (21) и (22):

$$\int\limits_0^l (ru_r)'_r R_{nm}(r)\, dr = ru_r R_{nm}(r)\big|_0^l - \int\limits_0^l u_r r R'_{nm}(r)\, dr = -\int\limits_0^l u_r r R'_{nm}(r)\, dr =$$

$$= ruR'_{nm}(r)\big|_0^l + \int\limits_0^l u(rR'_{nm}(r))'\, dr = -\lambda_{nm}^2 \int\limits_0^l urR_{nm}(r)\, dr + n^2 \int\limits_0^l u\frac{R_{nm}(r)}{r}\, dr,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} u_{\varphi\varphi}\cos(n\varphi)\, d\varphi = -n^2 \int\limits_0^{2\pi} u\cos(n\varphi)\, d\varphi.$$

Подставив эти значения в (21) и (22), а затем (21) и (22) в равенство (20), получим

$$A''_{nm}(t)+a^2\mu_{nm}^2A_{nm}(t)=0. \tag{23}$$

Общее решение уравнения (23) определяется по формуле

$$A_{nm}(t)=a_{nm}\cos(a\mu_{nm}t)+b_{nm}\sin(a\mu_{nm}t), \tag{24}$$

где a_{nm} и b_{nm} — произвольные постоянные. Для их определения воспользуемся граничными условиями (5):

$$A_{nm}(0)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\iint\limits_D u(r,\varphi,0)R_{nm}(r)\cos(n\varphi)r\,dr\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\iint\limits_D \tau(r,\varphi)R_{nm}(r)\cos(n\varphi)r\,dr\,d\varphi=:\tau_{nm}, \tag{25}$$

$$A_{nm}(T)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\iint\limits_D u(r,\varphi,T)R_{nm}(r)\cos(n\varphi)r\,dr\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\iint\limits_D \psi(r,\varphi)R_{nm}(r)\cos(n\varphi)r\,dr\,d\varphi=:\psi_{nm}. \tag{26}$$

Подчинив общее решение (24) граничным условиям (25) и (26), найдём

$$a_{nm}=\tau_{nm},\quad b_{nm}=\frac{1}{\sin(a\mu_{nm}T)}\big(\psi_{nm}-\tau_{nm}\cos(a\mu_{nm}T)\big)$$

при условии, что

$$\Delta_{nm}(T)=\sin(a\mu_{nm}T)\neq 0\quad\text{при всех } n,m\in\mathbb{N}. \tag{27}$$

Тогда

$$A_{nm}(t)=\tau_{nm}\frac{\sin(a\mu_{nm}(T-t))}{\sin(a\mu_{nm}T)}+\psi_{nm}\frac{\sin(a\mu_{nm}t)}{\sin(a\mu_{nm}T)}. \tag{28}$$

Продифференцировав равенство (19) два раза по t с учётом уравнения (6), получим

$$B''_{nm}(t)+a^2\mu_{nm}^2B_{nm}(t)=0.$$

Отсюда (по аналогии с функцией $A_{nm}(t)$) найдём при выполнении условия (27)

$$B_{nm}(t)=\widetilde{\tau}_{nm}\frac{\sin(a\mu_{nm}(T-t))}{\sin(a\mu_{nm}T)}+\widetilde{\psi}_{nm}\frac{\sin(a\mu_{nm}t)}{\sin(a\mu_{nm}T)}, \tag{29}$$

где

$$\widetilde{\tau}_{nm}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\iint\limits_D \tau(r,\varphi)R_{nm}(r)\sin(n\varphi)r\,dr\,d\varphi, \tag{30}$$

$$\widetilde{\psi}_{nm}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\iint\limits_D \psi(r,\varphi)R_{nm}(r)\sin(n\varphi)r\,dr\,d\varphi. \tag{31}$$

Теперь продифференцируем равенство (17) два раза по t и аналогично на основании уравнения (6) получим, что функция $A_{0m}(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$A''_{0m}(t)+a^2\mu_{0m}^2A_{0m}(t)=0.$$

Отсюда (по аналогии с функцией $A_{nm}(t)$) найдём

$$A_{0m}(t)=\tau_{0m}\frac{\sin(a\mu_{0m}(T-t))}{\sin(a\mu_{0m}T)}+\psi_{0m}\frac{\sin(a\mu_{0m}t)}{\sin(a\mu_{0m}T)} \tag{32}$$

при условии $\sin(\mu_{0m}T)\neq 0$ для всех $m\in\mathbb{N}$, где

$$\tau_{0m}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\iint\limits_D \tau(r,\varphi)R_{0m}(r)r\,dr\,d\varphi, \tag{33}$$

$$\psi_{nm}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\iint\limits_D \psi(r,\varphi)R_{0m}(r)r\,dr\,d\varphi. \tag{34}$$

Теперь докажем единственность решения задачи (2)–(5). Пусть $\tau(x,y)=\psi(x,y)\equiv 0$ и выполнены условия (27) при всех $m\in\mathbb{N}$ и $n\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$. Тогда в силу равенств (25), (26), (30), (31), (33) и (34) все $\tau_{nm}=0$, $\widetilde{\tau}_{nm}=0$, $\psi_{nm}=0$, $\widetilde{\psi}_{nm}=0$ при $n=0,1,2,\ldots,$ $m=1,2,\ldots$ Отсюда и на основании формул (32), (29), (28) и (17)–(19) имеем равенства

$$\iint\limits_D u(r,\varphi,t)R_{nm}(r)\cos(n\varphi)r\,dr\,d\varphi=0,\qquad \iint\limits_D u(r,\varphi,t)R_{nm}(r)\sin(n\varphi)r\,dr\,d\varphi=0$$

при всех $n=0,1,2,\ldots,$ $m=1,2,\ldots,$ $t\in[0,T]$. Из этих равенств на основании полноты системы функций (16) в пространстве $L_2(D)$ с весом r следует, что $u(r,\varphi,t)=0$ почти всюду в $\overline{D}$ при любом $t\in[0,T]$. Поскольку в силу (2) функция $u(r,\varphi,t)$ непрерывна в $\overline{Q}$, то $u(r,\varphi,t)\equiv 0$ в $\overline{Q}$.

Пусть при некоторых $n=n_0$ или $m=m_0$ выражение $\Delta_{n_0m}(T)=0$ или $\Delta_{nm_0}(T)=0$. Для определённости допустим, что $\Delta_{n_0m}(T)=0$. Тогда однородная задача (2)–(5) ($\tau(x,y)=\psi(x,y)\equiv 0$) имеет ненулевое решение

$$u_{n_0m}(r,\varphi,t)=\sin(a\mu_{n_0m}t)\big(a_{0m}R_{0m}(r)+a_{n_0m}R_{n_0m}(r)\cos(n_0\varphi)+b_{n_0m}R_{n_0m}(r)\sin(n_0\varphi)\big), \tag{35}$$

где a_{0m}, a_{n_0m} и b_{n_0m} — произвольные постоянные.

Рассмотрим вопрос о нулях выражения $\Delta_{nm}(T)$. Равенство

$$\Delta_{nm}(T)=\sin(a\mu_{nm}T)=0$$

имеет место только тогда, когда

$$T=\frac{\pi k}{a\mu_{nm}},\quad k\in\mathbb{N}. \tag{36}$$

Значит, $\Delta_{nm}(T)$ обращается в нуль, когда T определяется по формуле (36).

Таким образом, установлен критерий единственности решения задачи (2)–(5).

Теорема 1. *Если существует решение задачи* (2)–(5), *то оно единственно тогда и только тогда, когда при всех* n *и* m *выполнены условия* (27).

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

При выполнении условий (27) решение задачи (2)–(5) определяется суммой ряда

$$u(r,\varphi,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}A_{0m}(t)R_{0m}(r)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\big(A_{nm}(t)\cos(n\varphi)+B_{nm}(t)\sin(n\varphi)\big)R_{nm}(r), \tag{37}$$

где коэффициенты $A_{0m}(t)$, $A_{nm}(t)$ и $B_{nm}(t)$ находятся по формулам (32), (28) и (29) соответственно. Поскольку $\Delta_{nm}(T)$ является знаменателем коэффициентов ряда (37) и, как показано выше, уравнение $\sin(a\mu_{nm}T)=0$ имеет счётное множество нулей (36), то возникает проблема малых знаменателей. В связи с этим следует установить оценки об отделимости от нуля. Для упрощения в дальнейшем положим, что $b=0$. Выражение $\Delta_{nm}(T)$ при $b=0$ представим в следующем виде:

$$\Delta_{nm}(\nu)=\sin(\nu q_{nm}), \quad \nu=aT/l. \tag{38}$$

Лемма 1. *Если выполнено одно из следующих условий:*

1) *число $\nu/2=p$ натуральное и нечётное;*

2) *число $\nu/2=p/q$ — дробно-рациональное и отношение $(2r-p)/(2q)$ — не целое число, где $r\in\mathbb{N}_0$ и $0\leqslant r<q$,*

то существуют положительные постоянные C_0 и m_0 ($m_0\in\mathbb{N}$) такие, что при всех $m>m_0$ справедлива оценка

$$|\Delta_{nm}(\nu)|\geqslant C_0>0. \tag{39}$$

Доказательство. Для нулей q_{nm} функции Бесселя $J_n(q)$ при больши́х значениях $m>m_0$, где m_0 — достаточно большое натуральное число, справедлива асимптотическая формула [19, с. 241]

$$q_{nm}=\frac{\pi}{2}\left(2m+n-\frac{1}{2}\right)+O((4m+2n-1)^{-1}). \tag{40}$$

Подстановка (40) в (38) даёт

$$\Delta_{nm}(\nu)=\sin\frac{\nu\pi}{2}\left(2m+n-\frac{1}{2}\right)+O((4m+2n-1)^{-1}), \tag{41}$$

так как

$$\sin O((4m+2n-1)^{-1})\approx O((4m+2n-1)^{-1}), \quad \cos O((4m+2n-1)^{-1})\approx 1+O((4m+2n-1)^{-1})$$

при больши́х $m>m_0$.

Пусть число $\nu/2=p\in\mathbb{N}$ и нечётное. Тогда из равенства (41) при всех $m>m_0$ и $n\in\mathbb{N}_0$ получим

$$\begin{gathered}|\Delta_{nm}(\nu)|\geqslant\left|\sin\left(\pi p(2m+n)-\frac{p\pi}{2}\right)\right|-\left|O((4m+2n-1)^{-1})\right|=\\ =\left|\sin\frac{p\pi}{2}\right|-\left|O((4m+2n-1)^{-1})\right|=1-\left|O((4m+2n-1)^{-1})\right|>\frac{1}{2}\end{gathered} \tag{42}$$

в силу

$$\left|O((4m+2n-1)^{-1})\right|<C_1<\frac{1}{2}$$

при больши́х m.

Пусть $\nu/2=p/q$, $p,\ q\in\mathbb{N}$, $(p,q)=1$, $p/q\notin\mathbb{N}$. В этом случае разделим $p(2m+n)$ на q с остатком: $p(2m+n)=qs+r$, $s,\ r\in\mathbb{N}_0$, $0\leqslant r<q$. Тогда соотношение (41) примет вид

$$\Delta_{nm}(\nu)=\sin\left(s\pi+\frac{r\pi}{q}-\frac{p\pi}{2q}\right)+O((4m+2n-1)^{-1})=(-1)^s\sin\left(\pi\frac{2r-p}{2q}\right)+O((4m+2n-1)^{-1}).$$

Если $r=0$, то имеем случай 1) леммы. Тогда $1\leqslant r\leqslant q-1$. Отсюда (поскольку отношение $(2r-p)/(2q)$ — не целое число) следует, что

$$|\Delta_{nm}(\nu)|\geqslant\left|\sin\left(\pi\frac{2r-p}{2q}\right)\right|-\left|O((4m+2n-1)^{-1})\right|\geqslant\left|\sin\left(\pi\frac{2r-p}{2q}\right)\right|-C_1\geqslant C_2-C_1>0,\tag{43}$$

где

$$C_2=\min_{1\leqslant r\leqslant q-1}\left|\sin\left(\pi\frac{2r-p}{2q}\right)\right|.$$

Тогда из (42) и (43) при условии $C_1<C_2$ вытекает справедливость оценки (39).

Лемма 2. *Пусть выполнено одно из условий леммы 1, тогда при всех $m>m_0$, $n\in\mathbb{N}_0$ и любом $t\in[0,T]$ справедливы оценки*

$$|A_{nm}(t)|\leqslant M_1\big(|\tau_{nm}|+|\psi_{nm}|\big),\tag{44}$$

$$|B_{nm}(t)|\leqslant M_1\big(|\widetilde{\tau}_{nm}|+|\widetilde{\psi}_{nm}|\big),\tag{45}$$

$$|A'_{nm}(t)|\leqslant M_2\mu_{nm}\big(|\tau_{nm}|+|\psi_{nm}|\big),\quad |B'_{nm}(t)|\leqslant M_2\mu_{nm}\big(|\widetilde{\tau}_{nm}|+|\widetilde{\psi}_{nm}|\big),$$

$$|A''_{nm}(t)|\leqslant M_3\mu^2_{nm}\big(|\tau_{nm}|+|\psi_{nm}|\big),\quad |B''_{nm}(t)|\leqslant M_3\mu^2_{nm}\big(|\widetilde{\tau}_{nm}|+|\widetilde{\psi}_{nm}|\big),$$

здесь и далее M_i — положительные постоянные, зависящие от T, a и l.

Справедливость этих оценок непосредственно следует из формул (28) и (29) на основании неравенств (39).

Теперь формально из ряда (37) при $b=0$ почленным дифференцированием получим ряды

$$u_{tt}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}A''_{0m}(t)R_{0m}(r)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\big(A''_{nm}(t)\cos(n\varphi)+B''_{nm}(t)\sin(n\varphi)\big)R_{nm}(r),$$

$$u_{\varphi\varphi}=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}n^2\big(A_{nm}(t)\cos(n\varphi)+B_{nm}(t)\sin(n\varphi)\big)R_{nm}(r),$$

$$u_{rr}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}A_{0m}(t)R''_{0m}(r)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\big(A_{nm}(t)\cos(n\varphi)+B_{nm}(t)\sin(n\varphi)\big)R''_{nm}(r),$$

которые при любых $(r,\varphi,t)\in\overline{Q}$ мажорируются соответственно числовыми рядами

$$\frac{4M_3}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m>m_0}^{\infty}\mu^2_{0m}\big(|\tau_{0m}|+|\psi_{0m}|\big)|R_{0m}(r)|+$$
$$+\frac{M_3}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m>m_0}^{\infty}\mu^2_{nm}\big(|\tau_{nm}|+|\psi_{nm}|+|\widetilde{\tau}_{nm}|+|\widetilde{\psi}_{nm}|\big)|R_{nm}(r)|,\tag{46}$$

$$\frac{M_1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m>m_0}^{\infty}n^2\big(|\tau_{nm}|+|\psi_{nm}|+|\widetilde{\tau}_{nm}|+|\widetilde{\psi}_{nm}|\big)|R_{nm}(r)|,\tag{47}$$

$$\frac{M_1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m>m_0}^{\infty}\big(|\tau_{0m}|+|\psi_{0m}|\big)|R''_{0m}(r)|+$$
$$+\frac{M_1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m>m_0}^{\infty}\big(|\tau_{nm}|+|\psi_{nm}|+|\widetilde{\tau}_{nm}|+|\widetilde{\psi}_{nm}|\big)|R''_{nm}(r)|.\tag{48}$$

Лемма 3. *Пусть $0<r_0\leqslant r\leqslant l$, где r_0 — малая положительная фиксированная постоянная. Тогда при $m>m_0$ и любом фиксированном $n\in\mathbb{N}_0$ имеют место оценки*

$$|R_{nm}(r)|\leqslant M_4, \tag{49}$$

$$|R'_{nm}(r)|\leqslant M_5\mu_{nm}, \tag{50}$$

$$|R''_{nm}(r)|\leqslant M_6\mu_{nm}^2. \tag{51}$$

Доказательство. На основании асимптотической формулы для функции Бесселя первого рода $J_\nu(z)$ при больши́х значениях аргумента z [20, с. 98]

$$J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\cos\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2z}\sin\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]+O(z^{-5/2}) \tag{52}$$

имеем

$$|J_n(\mu_{nm}r)|\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi r_0\mu_{nm}}}\left(1+\frac{1}{2r_0\mu_{nm}}\right)\leqslant 2\sqrt{\frac{2}{\pi r_0\mu_{nm}}}, \tag{53}$$

так как $1/(2r_0\mu_{nm})<1$ при больши́х m.

Аналогично получим оценки

$$|J_{n+1}(q_{nm})|=|J_{n+1}(l\mu_{nm})|\leqslant 2\sqrt{\frac{2}{\pi l\mu_{nm}}}, \tag{54}$$

из которых следует оценка (49).

Теперь найдём производную

$$R'_{nm}(r)=\frac{\sqrt{2}}{l|J_{n+1}(q_{nm})|}\mu_{nm}J'_n(z), \quad z=\mu_{nm}r. \tag{55}$$

Используя равенство

$$J'_\nu(z)=\frac{1}{2}[J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+1}(z)] \tag{56}$$

и формулу (52), получаем для $J'_n(z)$ при больши́х z асимптотическую формулу

$$J'_n(z)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\cos\left(z-\frac{n-1}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(z-\frac{n+1}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right]+O(z^{-3/2})=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+O(z^{-3/2}),$$

на основании которой, аналогично оценкам (53) и (54), находим

$$|J'_n(\mu_{nm}r)|\leqslant 2\sqrt{\frac{2}{\pi r_0\mu_{nm}}}. \tag{57}$$

Тогда из равенства (55) в силу оценок (57) и (54) следует оценка (50).

Из (12) вычислим вторую производную

$$J''_n(\mu_{nm}r)=-\frac{1}{r}J'_n(\mu_{nm}r)+\left(\frac{n^2}{r^2}-\mu_{nm}^2\right)J_n(\mu_{nm}r). \tag{58}$$

Отсюда с учётом оценок (53) и (57) имеем

$$|J''_n(\mu_{nm}r)|\leqslant\frac{1}{r_0}2\sqrt{\frac{2}{\pi r_0\mu_{nm}}}+\frac{n^2}{r_0^2}2\sqrt{\frac{2}{\pi r_0\mu_{nm}}}+\mu_{nm}^2 2\sqrt{\frac{2}{\pi r_0\mu_{nm}}}.$$

Из данного неравенства в силу (54) убеждаемся в справедливости оценки (51).

Лемма 4. *Пусть* $0 < r_0 \leqslant r \leqslant l$. *Тогда при больши́х* n *и любом фиксированном* $m \in \mathbb{N}$ *справедливы оценки*

$$|R_{nm}(r)| \leqslant M_7, \tag{59}$$

$$|R'_{nm}(r)| \leqslant M_8 n, \tag{60}$$

$$|R''_{nm}(r)| \leqslant M_9 n^2. \tag{61}$$

Доказательство. Для получения этих оценок воспользуемся асимптотической формулой Лангера при больши́х значениях порядка p функции Бесселя [20, с. 103]

$$J_p(t) = \frac{1}{\pi}\sqrt{1 - \frac{\operatorname{arctg}\omega}{\omega}}\,K_{1/3}(z) + O(p^{-4/3}), \tag{62}$$

где

$$\omega = \sqrt{1-(t/p)^2}, \quad t < p, \quad z = p(\operatorname{Arth}\omega - \omega),$$

$K_{1/3}(z)$ — функция Макдональда.

Используя разложение в степенной ряд функции

$$\operatorname{arctg}\omega = \omega - \frac{\omega^3}{3} + \frac{\omega^5}{5} - \frac{\omega^7}{7} + \ldots,$$

оценим выражение

$$\frac{\omega^2}{3}\left(1 - \frac{3}{5}\omega^2\right) < 1 - \frac{\operatorname{arctg}\omega}{\omega} < \frac{\omega^2}{3}.$$

Отсюда при $0 < \omega < 1$ будем иметь

$$\sqrt{\frac{2}{15}}\omega < \left(1 - \frac{\operatorname{arctg}\omega}{\omega}\right)^{1/2} < \frac{\omega}{\sqrt{3}}. \tag{63}$$

Тогда из формулы (62) с учётом оценки (63) получим

$$|J_p(t)| \leqslant \frac{\omega}{\pi\sqrt{3}} K_{1/3}(z), \tag{64}$$

$$|J_p(t)| > \sqrt{\frac{2}{15}}\frac{\omega}{\pi} K_{1/3}(z). \tag{65}$$

Теперь на основании оценок (64) и (65) имеем

$$|J_n(\mu_{nm} r)| \leqslant \frac{\omega_1}{\pi\sqrt{3}} K_{1/3}(z_1), \tag{66}$$

$$|J_n(q_{nm})| \geqslant \sqrt{\frac{2}{15}}\frac{\omega_2}{\pi} K_{1/3}(z_2), \tag{67}$$

где

$$\omega_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{q_{nm} r}{n\,l}\right)^2}, \quad z_1 = n(\operatorname{Arth}\omega_1 - \omega_1),$$

$$\omega_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{q_{nm}}{n+1}\right)^2}, \quad z_2 = (n+1)(\operatorname{Arth}\omega_2 - \omega_2).$$

Из неравенств (66) и (67) следует оценка (59), так как $\omega_1 \approx \omega_2$ при больши́х n.

На основании формул (55) и (56) оценим производную $R'_{nm}(r)$:

$$|R'_{nm}(r)| \leqslant \frac{q_{nm}}{\sqrt{2}l^2|J_{n+1}(q_{nm})|}\big(|J_{n-1}(\mu_{nm}r)|+|J_{n+1}(\mu_{nm}r)|\big).$$

Отсюда с учётом оценок (66) и (67) получим (60).

В силу равенства (58) на основании (59) и (60) убеждаемся в справедливости оценки (61).

Замечание. Отметим, что функция $R_{nm}(r)$ и её производные $R'_{nm}(r)$, $R''_{nm}(r)$, начиная с некоторого номера n, при $r\to 0$ стремятся к нулю. Поэтому в леммах 3 и 4 оценки (49)–(51) и (59)–(61) получены при $r\geqslant r_0>0$.

В силу лемм 3 и 4 ряды (46)–(48) мажорируются комбинацией рядов

$$M_{10}\sum_{m>m_0}^{\infty} m^2\big(|\tau_{0m}|+|\psi_{0m}|\big),\quad M_{11}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m>m_0}^{\infty} n^2\big(|\tau_{0m}|+|\psi_{0m}|\big),$$

$$M_{12}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m>m_0}^{\infty}\mu_{nm}^2\big(|\tau_{nm}|+|\psi_{nm}|+|\widetilde{\tau}_{nm}|+|\widetilde{\psi}_{nm}|\big). \tag{68}$$

Обозначим через $C^{4,4}(\overline{D})$ множество функций $f(r,\varphi)$, имеющих непрерывные смешанные производные по r и φ до четвёртого порядка включительно в замкнутой области $\overline{D}$.

Лемма 5. *Пусть $\tau(r,\varphi)$, $\psi(r,\varphi)\in C^{4,4}(\overline{D})$ и $\tau^{(0,i)}(r,0)=\tau^{(0,i)}(r,2\pi)$, $i=\overline{0,3}$, $\tau^{(k,4)}(0,\varphi)=0$, $k=\overline{0,3}$, $\psi^{(0,i)}(r,0)=\psi^{(0,i)}(r,2\pi)$, $i=\overline{0,3}$, $\psi^{(k,4)}(0,\varphi)=0$, $k=\overline{0,3}$. Тогда коэффициенты τ_{nm}, $\widetilde{\tau}_{nm}$, ψ_{nm}, $\widetilde{\psi}_{nm}$ при $\mu_{nm}\to+\infty$ имеют оценки*

$$\tau_{nm}=O\Big(\frac{1}{n\mu_{nm}^4}\Big),\quad \widetilde{\tau}_{nm}=O\Big(\frac{1}{n\mu_{nm}^4}\Big),\quad \psi_{nm}=O\Big(\frac{1}{n\mu_{nm}^4}\Big),\quad \widetilde{\psi}_{nm}=O\Big(\frac{1}{n\mu_{nm}^4}\Big).$$

Доказательство. Рассмотрим коэффициенты τ_{nm}, ψ_{nm}, $\widetilde{\tau}_{nm}$ и $\widetilde{\psi}_{nm}$, определённые по формулам (25), (26), (30) и (31) соответственно. Представим τ_{nm} в следующем виде:

$$\tau_{nm}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^l R_{nm}(\mu_{nm}r)I(r)r\,dr, \tag{69}$$

где

$$I(r)=\int_0^{2\pi}\tau(r,\varphi)\cos(n\varphi)\,d\varphi.$$

По условию $\tau'_\varphi(r,0)=\tau'_\varphi(r,2\pi)$ и $\tau'''_\varphi(r,0)=\tau'''_\varphi(r,2\pi)$, тогда интеграл $I(r)$ с помощью четырёхкратного интегрирования по частям можно преобразовать к виду

$$I(r)=\frac{1}{n^4}\int_0^{2\pi}\tau_\varphi^{(4)}(r,\varphi)\cos(n\varphi)\,d\varphi. \tag{70}$$

Теперь интеграл (69) с учётом представления (70) запишем как

$$\tau_{nm}=\frac{\sqrt{2}}{l\sqrt{\pi}|J_{n+1}(q_{nm})|n^4}\int_0^{2\pi}J(\varphi)\cos(n\varphi)\,d\varphi, \tag{71}$$

где

$$J(\varphi)=\int_0^l\tau_\varphi^{(4)}(r,\varphi)J_n(\mu_{nm}r)r\,dr. \tag{72}$$

Заметим, что функция $X_n(r)=r^{-n}J_n(\xi)$, $\xi=\mu_{nm}r$, является решением дифференциального уравнения

$$X_n''(r)+\frac{2n+1}{r}X_n'(r)+\mu_{nm}^2X_n(r)=0. \tag{73}$$

Тогда интеграл (72) с учётом уравнения (73) преобразуем следующим образом:

$$J(\varphi)=\int\limits_0^l \tau_{\varphi}^{(4)}(r,\varphi)X_n(r)r^{n+1}\,dr=-\frac{1}{\mu_{nm}^2}\int\limits_0^l \tau_{\varphi}^{(4)}(r,\varphi)\left[X_n''(r)+\frac{2n+1}{r}X_n'(r)\right]r^{n+1}\,dr=$$

$$=-\frac{1}{\mu_{nm}^2}\int\limits_0^l \tau_{\varphi}^{(4)}(r,\varphi)\left[(r^{n+1}X_n'(r))'+nr^nX_n'(r)\right]dr=$$

$$=-\frac{1}{\mu_{nm}^2}\int\limits_0^l \tau_{r,\varphi}^{(2,4)}(r,\varphi)r^{n+1}X_n(r)\,dr-\frac{1}{\mu_{nm}^2}\int\limits_0^l \tau_{r,\varphi}^{(1,4)}(r,\varphi)r^nX_n(r)\,dr+\frac{n^2}{\mu_{nm}^2}\int\limits_0^l \tau_{r,\varphi}^{(0,4)}(r,\varphi)r^{n-1}X_n(r)\,dr=$$

$$=-\frac{1}{\mu_{nm}^2}J_1-\frac{1}{\mu_{nm}^2}J_2+\frac{n^2}{\mu_{nm}^2}J_3, \tag{74}$$

где

$$J_1=\int\limits_0^l \tau_{r,\varphi}^{(2,4)}(r,\varphi)r^{n+1}X_n(r)\,dr,\quad J_2=\int\limits_0^l \tau_1(r,\varphi)r^{n+1}X_n(r)\,dr,\quad J_3=\int\limits_0^l \tau_2(r,\varphi)r^{n+1}X_n(r)\,dr,$$

$$\tau_1(r,\varphi)=\frac{\tau_{r,\varphi}^{(1,4)}(r,\varphi)}{r},\quad \tau_2(r,\varphi)=\frac{\tau_{r,\varphi}^{(0,4)}(r,\varphi)}{r^2}.$$

Аналогично интегралу $J(\varphi)$ по формуле (74) преобразуем интегралы J_i, $i=1,2$:

$$J_i=-\frac{1}{\mu_{nm}^2}J_{i1}-\frac{1}{\mu_{nm}^2}J_{i2}+\frac{n^2}{\mu_{nm}^2}J_{i3}, \tag{75}$$

где

$$J_{11}=\int\limits_0^l \tau_{r,\varphi}^{(4,4)}(r,\varphi)r^{n+1}X_n(r)\,dr=\int\limits_0^l \tau_{r,\varphi}^{(4,4)}(r,\varphi)J_n(\mu_{nm}r)r\,dr,$$

$$J_{12}=\int\limits_0^l \tau_{r,\varphi}^{(3,4)}(r,\varphi)r^nX_n(r)\,dr=\int\limits_0^l \frac{\tau_{r,\varphi}^{(3,4)}(r,\varphi)}{r}J_n(\mu_{nm}r)r\,dr,$$

$$J_{13}=\int\limits_0^l \tau_{r,\varphi}^{(2,4)}(r,\varphi)r^{n-1}X_n(r)\,dr=\int\limits_0^l \frac{\tau_{r,\varphi}^{(2,4)}(r,\varphi)}{r^2}J_n(\mu_{nm}r)r\,dr,$$

$$J_{21}=\int\limits_0^l \tau_{1r}''(r,\varphi)r^{n+1}X_n(r)\,dr=\int\limits_0^l \tau_{1r}''(r,\varphi)J_n(\mu_{nm}r)r\,dr,$$

$$J_{22}=\int\limits_0^l \tau_{1r}'(r,\varphi)r^nX_n(r)\,dr=\int\limits_0^l \frac{\tau_{1r}'(r,\varphi)}{r}J_n(\mu_{nm}r)r\,dr,$$

$$J_{23}=\int\limits_0^l \tau_1(r,\varphi)r^{n-1}X_n(r)\,dr=\int\limits_0^l \frac{\tau_1(r,\varphi)}{r^2}J_n(\mu_{nm}r)r\,dr.$$

Интеграл J_3 преобразуем следующим образом:

$$J_3=\int\limits_0^l \tau_{r,\varphi}^{(0,4)}(r,\varphi)r^{-1}J_n(\mu_{nm}r)\,dr=\int\limits_0^l \tau_{r,\varphi}^{(0,4)}(r,\varphi)r^{-n-2}r^{n+1}J_n(\mu_{nm}r)\,dr=$$

$$=\frac{\tau_{r,\varphi}^{(0,4)}(r,\varphi)}{r}J_{n+1}(\mu_{nm}r)\Big|_0^l-\frac{1}{\mu_{nm}}\int\limits_0^l d\Big[r^{-n-2}\tau_{r,\varphi}^{(0,4)}(r,\varphi)\Big]\,r^{n+1}J_{n+1}(\mu_{nm}r)\,dr=$$

$$=-\frac{1}{\mu_{nm}}\int\limits_0^l \tau_{r,\varphi}^{(1,4)}(r,\varphi)r^{-1}J_{n+1}(\mu_{nm}r)\,dr+\frac{n+2}{\mu_{nm}}\int\limits_0^l \tau_{r,\varphi}^{(0,4)}(r,\varphi)r^{-2}J_{n+1}(\mu_{nm}r)\,dr=$$

$$=-\frac{1}{\mu_{nm}}J_{31}+\frac{n+2}{\mu_{nm}}J_{32}. \qquad (76)$$

После подстановки (75) и (76) в равенство (74) получим

$$J(\varphi)=\frac{1}{\mu_{nm}^4}\big(J_{11}+J_{12}+J_{21}+J_{22}\big)-\frac{n^2}{\mu_{nm}^4}\big(J_{13}+J_{23}\big)-\frac{n^2}{\mu_{nm}^3}J_{31}+\frac{n^2(n+2)}{\mu_{nm}^3}J_{32}. \qquad (77)$$

Если $\tau_{r,\varphi}^{(0,4)}(r,\varphi)\in C^4[0,l]$ и $\tau_{r,\varphi}^{(k,4)}(0,\varphi)=0$, $k=\overline{0,3}$, то справедливы представления

$$\tau_{r,\varphi}^{(0,4)}(r,\varphi)=\frac{\tau_{r,\varphi}^{(4,4)}(\theta,\varphi)r^4}{4!},\quad 0<\theta<r,$$

$$\tau_{r,\varphi}^{(1,4)}(r,\varphi)=\frac{\tau_{r,\varphi}^{(4,4)}(\theta,\varphi)r^3}{3!},\quad \tau_{r,\varphi}^{(2,4)}(r,\varphi)=\frac{\tau_{r,\varphi}^{(4,4)}(\theta,\varphi)r^2}{2!},\quad \tau_{r,\varphi}^{(3,4)}(r,\varphi)=\tau_{r,\varphi}^{(4,4)}(\theta,\varphi)r.$$

В силу этого в интегралах J_{31} и J_{32} функции $\tau_{r,\varphi}^{(0,4)}(r,\varphi)r^{-5/2}$, $\tau_{r,\varphi}^{(1,4)}(r,\varphi)r^{-3/2}$ непрерывно дифференцируемы на $[0,l]$, поэтому на данном промежутке имеют полную ограниченную вариацию, т.е. конечное изменение. С учётом теоремы из [21, с. 653] интегралы J_{31} и J_{32} при $\mu_{nm}\to\infty$ имеют оценку

$$J_{31}=O(\mu_{nm}^{-3/2}),\quad J_{32}=O(\mu_{nm}^{-3/2}). \qquad (78)$$

В интегралах J_{1i}, $i=1,2,3$, подынтегральные функции $\tau_{r,\varphi}^{(4,4)}(r,\varphi)$, $\tau_{r,\varphi}^{(3,4)}(r,\varphi)r^{-1}$ и $\tau_{r,\varphi}^{(2,4)}(r,\varphi)r^{-2}$ непрерывны на отрезке $[0,l]$. Тогда в силу теоремы Юнга [21, с. 654] эти интегралы при $\mu_{nm}\to\infty$ имеют оценку

$$J_{1i}=O(\mu_{nm}^{-1/2}). \qquad (79)$$

Теперь рассмотрим интегралы J_{2i}, $i=1,2,3$. В них функции $\tau_{1r}''(r,\varphi)$, $\tau_{1r}'(r,\varphi)r^{-1}$ и $\tau_{1r}(r,\varphi)r^{-2}$ также непрерывны на отрезке $[0,l]$, поэтому справедливы оценки

$$J_{2i}=O(\mu_{nm}^{-1/2}),\quad \mu_{nm}\to\infty. \qquad (80)$$

Тогда из представления (71) с учётом равенства (77) и оценок (78)–(80) получим

$$\tau_{nm}=O\bigg(\frac{1}{n\mu_{nm}^4}\bigg).$$

Аналогично из формул (26), (30) и (31) следуют остальные оценки. Лемма доказана.

Числовые ряды (68) в силу формулы (40) мажорируются соответственно сходящимися рядами

$$M_{13}\sum_{m>m_0}^{\infty}\frac{1}{m^2},\quad M_{14}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m>m_0}^{\infty}\frac{n}{(4m+2n-1)^4},\quad M_{15}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m>m_0}^{\infty}\frac{1}{n(4m+2n-1)^2}.$$

Если для чисел ν из леммы 1 при некоторых $m=m_1,m_2,\ldots,m_s\leqslant m_0$, где $1\leqslant m_1<m_2<\ldots$ $\ldots<m_s$, $\Delta_{nm_i}(\nu)=0$, то для разрешимости задачи (2)–(5) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\tau_{nm_i}=\psi_{nm_i}=0,\quad \widetilde{\tau}_{nm_i}=\widetilde{\psi}_{nm_i}=0,\quad i=\overline{1,s}. \tag{81}$$

В этом случае решение задачи (2)–(5) определяется в виде суммы ряда:

$$u(r,\varphi,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Bigg(\sum_{m=1}^{m_1-1}+\sum_{m=m_1+1}^{m_2-1}+\ldots+\sum_{m=m_{s-1}+1}^{m_s-1}+\sum_{m=m_s+1}^{\infty}\Bigg)A_{0m}(t)R_{0m}(r)+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(\sum_{m=1}^{m_1-1}+\sum_{m=m_1+1}^{m_2-1}+\ldots+\sum_{m=m_{s-1}+1}^{m_s-1}+\sum_{m=m_s+1}^{\infty}\Bigg)\times$$
$$\times\big(A_{nm}(t)\cos(n\varphi)+B_{nm}(t)\sin(n\varphi)\big)R_{nm}(r)+\sum_{i=1}^{s}C_{nm_i}u_{nm_i}(r,\varphi,t), \tag{82}$$

здесь $u_{nm_i}(r,\varphi,t)$ определяются по формуле (35), где m_0 нужно заменить на m_i, C_{nm_i} — произвольные постоянные; если в конечных суммах в правой части (82) верхний предел меньше нижнего, то их следует считать нулями.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены условия лемм 1 и 5. Тогда если $\Delta_{nm}(\nu)\neq 0$ при всех $m=\overline{1,m_0}$, то задача (2)–(5) однозначно разрешима и это решение определяется рядом (37); если $\Delta_{nm}(\nu)=0$ при некоторых $m=m_1,m_2,\ldots,m_s\leqslant m_0$, то задача (2)–(5) разрешима только тогда, когда выполнены условия (81) и решение определяется рядом (82).*

Отметим, что выполнения условия $\Delta_{nm}(\nu)\neq 0$ при $m=\overline{1,m_0}$ можно добиться, если $\nu\neq\pi k/q_{nm}$ (в силу формулы (36) при $b=0$).

4. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующие нормы:

$$\|u(r,\varphi,t)\|_{L_2(D)}=\iint\limits_D u^2(r,\varphi,t)r\,dr\,d\varphi,\quad \|u(r,\varphi,t)\|_{C(\overline{Q})}=\max_{r,\varphi,t\in\overline{Q}}|u(r,\varphi,t)|,$$
$$\|f^{(2,2)}_{r,\varphi}(r,\varphi)\|_{L_2(D)}=\iint\limits_D\big(f^{(2,2)}_{r,\varphi}(r,\varphi)\big)^2r\,dr\,d\varphi,\quad \|g^{(2,2)}_{r,\varphi}(r,\varphi)\|^2_{C(\overline{D})}=\max_{r,\varphi\in\overline{D}}|g^{(2,2)}_{r,\varphi}(r,\varphi)|.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и $\Delta_{nm}(\nu)\neq 0$ при $m=\overline{1,m_0}$. Тогда для решения (37) задачи (2)–(5) справедливы оценки*

$$\|u(r,\varphi,t)\|_{L_2(D)}\leqslant M_{16}\big(\|\tau(r,\varphi)\|_{L_2(D)}+\|\psi(r,\varphi)\|_{L_2(D)}\big), \tag{83}$$
$$\|u(r,\varphi,t)\|_{C(\overline{Q})}\leqslant M_{17}\big(\big\|\tau^{(2,2)}_{r,\varphi}(r,\varphi)\big\|_{C(\overline{D})}+\big\|\psi^{(2,2)}_{r,\varphi}(r,\varphi)\big\|_{C(\overline{D})}\big). \tag{84}$$

Доказательство. Построенная система собственных функций (16) ортонормирована в пространстве $L_2(D)$ с весом r. Тогда из формулы (37) на основании оценок (44), (45) и (49) будем иметь

$$\|u(r,\varphi,t)\|^2_{L_2(D)} = \sum_{m=1}^{\infty} A^2_{0m}(t) + \sum_{n,m=1}^{\infty} A^2_{nm}(t) + B^2_{nm}(t) \leqslant$$

$$\leqslant 2M_1^2 M_4^2 \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left(|\tau_{0m}|^2 + |\psi_{0m}|^2 \right) + \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(|\tau_{nm}|^2 + |\widetilde{\tau}_{nm}|^2 + |\psi_{nm}|^2 + |\widetilde{\psi}_{nm}|^2 \right) \right] =$$

$$= 2M_1^2 M_4^2 \left(\|\tau(r,\varphi)\|^2_{L_2(D)} + \|\psi(r,\varphi)\|^2_{L_2(D)} \right).$$

Отсюда получим оценку (83).

Пусть (r,φ,t) — произвольная точка $\overline{Q}$. Тогда из формулы (37) с учётом оценок (44), (45) и (49) имеем

$$|u(r,\varphi,t)| \leqslant M_1 M_4 \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left(|\tau_{0m}| + |\psi_{0m}| \right) + \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(|\tau_{nm}| + |\psi_{nm}| + |\widetilde{\tau}_{nm}| + |\widetilde{\psi}_{nm}| \right) \right]. \tag{85}$$

Далее на основании рассуждений, приведённых при доказательстве леммы 5, коэффициент τ_{nm} представим в виде

$$\tau_{nm} = -\frac{\sqrt{2}}{l\sqrt{\pi}|J_{n+1}(q_{nm})|n^2} \int_0^{2\pi} J(\varphi)\cos(n\varphi)\,d\varphi,$$

где

$$J(\varphi) = \int_0^l \tau^{(0,2)}_{r,\varphi}(r,\varphi) J_n(\mu_{nm}r) r\,dr = -\frac{1}{\mu^2_{nm}} \left(J_1' + J_2' - n^2 J_3' \right),$$

$$J_1' = \int_0^l \tau^{(2,2)}_{r,\varphi}(r,\varphi) J_n(\mu_{nm}r) r\,dr, \quad J_2' = \int_0^l \frac{\tau^{(1,2)}_{r,\varphi}(r,\varphi)}{r} J_n(\mu_{nm}r) r\,dr, \quad J_3' = \int_0^l \frac{\tau^{(0,2)}_{r,\varphi}(r,\varphi)}{r^2} J_n(\mu_{nm}r) r\,dr.$$

Если $\tau^{(0,2)}_{r,\varphi}(r,\varphi) \in C^2[0,l]$ и $\tau^{(0,2)}_{r,\varphi}(0,\varphi) = \tau^{(1,2)}(0,\varphi) = 0$, то функции $\tau^{(1,2)}_{r,\varphi}(r,\varphi) r^{-1} = \tau^{(2,2)}_{r,\varphi}(\theta,\varphi)$, $\tau^{(0,2)}_{r,\varphi}(r,\varphi) = \tau^{(2,2)}_{r,\varphi}(\theta,\varphi)/2$, $0 < \theta < r$, непрерывны на отрезке $[0,l]$, тогда

$$|\tau_{nm}| \leqslant \frac{M_{18}}{\mu^2_{nm}} |\tau^{(2,2)}_{nm}|,$$

где

$$\tau^{(2,2)}_{nm} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \iint_D \tau^{(2,2)}_{r,\varphi}(r,\varphi)\cos(n\varphi) R_{nm}(r) r\,dr\,d\varphi. \tag{86}$$

Аналогично получим оценки

$$|\widetilde{\tau}_{nm}| \leqslant \frac{M_{18}}{\mu^2_{nm}} |\widetilde{\tau}^{(2,2)}_{nm}|,$$

$$\widetilde{\tau}^{(2,2)}_{nm} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \iint_D \tau^{(2,2)}_{r,\varphi}(r,\varphi)\sin(n\varphi) R_{nm}(r) r\,dr\,d\varphi, \tag{87}$$

$$|\psi nm| \leqslant \frac{M_{18}}{\mu^2_{nm}} |\psi^{(2,2)}_{nm}|, \quad |\widetilde{\psi} nm| \leqslant \frac{M_{18}}{\mu^2_{nm}} |\widetilde{\psi}^{(2,2)}_{nm}|,$$

где $\psi^{(2,2)}_{nm}$ и $\widetilde{\psi}^{(2,2)}_{nm}$ определяются по формулам (86) и (87), но с заменой $\tau(r,\varphi)$ на $\psi(r,\varphi)$.

Теперь, продолжая оценку (85), будем иметь

$$|u(r,\varphi,t)|\leqslant M_{19}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_{0m}^{2}}\left(|\tau_{0m}^{(2,2)}|+|\psi_{0m}^{(2,2)}|\right)+\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_{nm}^{2}}\left(|\tau_{nm}^{(2,2)}|+|\widetilde{\tau}_{nm}^{(2,2)}|+|\psi_{nm}^{(2,2)}|+|\widetilde{\psi}_{nm}^{(2,2)}|\right)\right].$$

Отсюда, используя неравенство Буняковского, получаем

$$\begin{gathered}|u(r,\varphi,t)|\leqslant M_{20}\left\{\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_{0m}^{4}}\right)^{1/2}\left[\left(\sum_{m=1}^{\infty}|\tau_{0m}^{(2,2)}|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{m=1}^{\infty}|\psi_{0m}^{(2,2)}|^2\right)^{1/2}\right]+\right.\\ \left.+\left(\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_{nm}^{4}}\right)^{1/2}\left[\left(2\sum_{n,m=1}^{\infty}\left(|\tau_{nm}^{(2,2)}|^2+|\widetilde{\tau}_{nm}^{(2,2)}|^2\right)\right)^{1/2}+\left(2\sum_{n,m=1}^{\infty}\left(|\psi_{nm}^{(2,2)}|^2+|\widetilde{\psi}_{nm}^{(2,2)}|^2\right)\right)^{1/2}\right]\right\}\leqslant\\ \leqslant M_{21}\left[\left(\sum_{m=1}^{\infty}|\tau_{0m}^{(2,2)}|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{n,m=1}^{\infty}\left(|\tau_{nm}^{(2,2)}|^2+|\widetilde{\tau}_{nm}^{(2,2)}|^2\right)\right)^{1/2}+\right.\\ \left.+\left(\sum_{m=1}^{\infty}|\psi_{0m}^{(2,2)}|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{n,m=1}^{\infty}\left(|\psi_{nm}^{(2,2)}|^2+|\widetilde{\psi}_{nm}^{(2,2)}|^2\right)\right)^{1/2}\right]\leqslant\\ \leqslant M_{21}\sqrt{2}\left[\left(\sum_{m=1}^{\infty}|\tau_{0m}^{(2,2)}|^2+\sum_{n,m=1}^{\infty}\left(|\tau_{nm}^{(2,2)}|^2+|\widetilde{\tau}_{nm}^{(2,2)}|^2\right)\right)^{1/2}+\right.\\ \left.+\left(\sum_{m=1}^{\infty}|\psi_{0m}^{(2,2)}|^2+\sum_{n,m=1}^{\infty}\left(|\psi_{nm}^{(2,2)}|^2+|\widetilde{\psi}_{nm}^{(2,2)}|^2\right)\right)^{1/2}\right]=\\ =\sqrt{2}M_{21}\left(\|\tau^{(2,2)}(r,\varphi)\|_{L_2(D)}+\|\psi^{(2,2)}(r,\varphi)\|_{L_2(D)}\right)\leqslant M_{22}\left(\|\tau^{(2,2)}(r,\varphi)\|_{C(\overline{D})}+\|\psi^{(2,2)}(r,\varphi)\|_{C(\overline{D})}\right).\end{gathered}$$

Из последнего неравенства непосредственно следует оценка (84).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболев, С.Л. Пример корректной краевой задачи для уравнения колебания струны с данными на всей границе / С.Л. Соболев // Докл. АН СССР. — 1956. — Т. 109, № 4. — С. 707–709.
2. Арнольд, В.И. Математическое понимание природы / В.И. Арнольд. — М. : МЦНМО, 2010. — 144 с.
3. Пташник, Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / Б.И. Пташник. — Киев : Наукова думка, 1984. — 264 с.
4. Сабитов, К.Б. Задача Дирихле для уравнений с частными производными / К.Б. Сабитов // Мат. заметки. — 2015. — Т. 97, № 2. — С. 262–276.
5. Сабитов, К.Б. Уравнения математической физики / К.Б. Сабитов. — М. : Физматлит, 2013. — 352 с.
6. Денчев, Р. О спектре одного оператора / Р. Денчев // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 126, № 2. — С. 259–262.
7. Денчев, Р. О задаче Дирихле для волнового уравнения / Р. Денчев // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 127, № 3. — С. 501–504.

8. Денчев, Р. Задача Дирихле для волнового уравнения на параллелепипеде. — Дубна : Объединенный институт ядерных исследований, 1969. — 13 с.
9. Dunninger, D.R. The condition for uniqueness of the Dirichlet problem for hyperbolic equations in cylindrical domains / D.R. Dunninger, E.C. Zachmonoglou // J. Math. Mech. — 1969. — V. 18. — P. 763–766.
10. Бурский, В.П. Единственность решения задачи Дирихле в шаре для волнового уравнения / В.П. Бурский // Дифференц. уравнения. — 1988. — Т. 24, № 6. — С. 1038–1039.
11. Алдашев, С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором / С.А. Алдашев // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. академии наук. — 2011. — Т. 13, № 1. — С. 21–29.
12. Алдашев, С.А. Корректность задачи Пуанкаре в цилиндрической области для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором / С.А. Алдашев // Журн. вычислит. и прикл. математики. — 2013. — Т. 14, № 4. — С. 68–76.
13. Алдашев, С.А. Корректность локальной краевой задачи в цилиндрической области для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором / С.А. Алдашев // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. — 2015. — Т. 15, № 4. — С. 3–11.
14. Алдашев, С.А. Корректность краевой задачи в цилиндрической области для многомерного волнового уравнения / С.А. Алдашев // Вестн. Самар. гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2012. — Т. 29, № 4. — С. 48–55.
15. Арнольд, В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике / В.И. Арнольд // Успехи мат. наук. — 1963. — Т. 18, № 6. — С. 91–192.
16. Арнольд, В.И. Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя / В.И. Арнольд // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1961. — Т. 25. — С. 21–86.
17. Козлов, В.В. Условие вмороженности поля направлений, малые знаменатели и хаотизация стационарных течений вязкой жидкости / В.В. Козлов // Прикл. математика и механика. — 1999. — Т. 63, № 2. — С. 237–244.
18. Кошляков, Н.С. Уравнения математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глиннер, М.М. Смирнов. — М. : Высшая школа, 1970. — 712 с.
19. Олвер, М.М. Асимптотика и специальные функции / М.М. Олвер ; пер. с англ. Ю.А. Брычкова ; под ред. А.П. Прудникова. — М. : Наука, 1990. — 528 с.
20. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Т. 2 / Г. Бейтмен, А. Эрдейи ; пер. с англ. Н.Я. Виленкина — М. : Наука, 1966. — 296 с.
21. Ватсон, Г.Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1 / Г.Н. Ватсон ; пер. со 2-го англ. изд. В.С. Бермана. — М. : Изд-во иностр. лит., 1949. — 799 с.

DIRICHLET PROBLEM FOR A TWO-DIMENSIONAL WAVE EQUATION IN A CYLINDRICAL DOMAIN

 K. B. Sabitov

Samara State Technical University, Russia
Sterlitamak branch of Ufa University of Science and Technology, Russia
e-mail: sabitov_fmf@mail.ru

In this work, the first boundary value problem is studied for a two-dimensional wave equation in a cylindrical domain. A uniqueness criterion has been established. The solution is constructed as the sum of an orthogonal series. When justifying the convergence of a series, the problem of small denominators from two natural arguments arose for the first time. An estimate for separation from zero with the corresponding asymptotics was established, which made it possible to prove the convergence of the series in the class of regular solutions and the stability of the solution.

Keywords: wave equation, Dirichlet problem, uniqueness criterion, existence, stability, series, small denominators

REFERENCES

1. Sobolev, S.L., An example of a correct boundary value problem for the equation of string vibration with data on the entire boundary, *Dokl. AN USSR*, 1956, vol. 109, no. 4, pp. 707–709.
2. Arnold, V.I., *Matematicheskoye ponimaniye prirody* (Mathematical Understanding of Nature), Moscow: MC-CME, 2010.
3. Ptashnik, B.I., *Nekorrektnyye granichnyye zadachi dlya differentsial'nykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi* (Ill-Posed Boundary Value Problems for Partial Differential Equations), Kyiv: Naukova Dumka, 1984.
4. Sabitov, K.B., The Dirichlet problem for higher-order partial differential equations, *Math. Notes*, 2015, vol. 97, no. 1–2, pp. 255–267.
5. Sabitov, K.B., *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (Equations of Mathematical Physics), Moscow: Fizmatlit, 2013.
6. Denchev, R., On the spectrum of one operator, *DAN USSR*, 1959, vol. 126, no. 2, pp. 259–262.
7. Denchev, R., On the Dirichlet Problem for the Wave Equation, *DAN USSR*, 1959, vol. 127, no. 3, pp. 501–504.
8. Denchev, R., *Zadacha Dirikhle dlya volnovogo uravneniya na parallelepipede* (Dirichlet Problem for the Wave Equation on a Parallelepiped), Dubna: Joint Institute for Nuclear Research, 1969.
9. Dunninger, D.R. and Zachmonoglou, E.C., The condition for uniqueness of the Dirichlet problem for hyperbolic equations in cylindrical domains, *J. Math. and Mech.*, 1969, vol. 18, pp. 763–766.
10. Bursky, V.P., Uniqueness of the solution to the Dirichlet problem in a ball for the wave equation, *Differ. Equat.*, 1988, vol. 24, no. 6, pp. 1038–1039.
11. Aldashev, S.A., Well-posedness of the Dirichlet problem in a cylindrical domain for multidimensional hyperbolic equations with a wave operator, *Dokl. AMAN.*, 2011, vol. 13, no. 1, pp. 21–29.
12. Aldashev, S.A., Correctness of the Poincarè problem in a cylindrical domain for multidimensional hyperbolic equations with a wave operator, *J. Comput. Appl. Math.*, 2013, vol. 14, no. 4, pp. 68–76.
13. Aldashev, S.A., Correctness of a local boundary value problem in a cylindrical domain for multidimensional hyperbolic equations with a wave operator, *Vestnik NGU. Series Mathematics, Mechanics, Computer Science*, 2015, vol. 15, no. 4, pp. 3–11.
14. Aldashev, S.A., Correctness of the boundary value problem in a cylindrical domain for multidimensional wave equations, *Bull. of Samara State Univ. Series Physical and Mathematical Sciences*, 2012, vol. 29, no. 4. pp. 48–55.
15. Arnold, V.I., Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics, *Uspekhi Mat.*, 1963, vol. 18, no. 6, pp. 91–192.
16. Arnold, V.I., Small denominators I. On mappings of a circle onto itself, *Proc. of the USSR Academy of Sciences. Mathematical Series*, 1961, vol. 25, pp. 21–86.
17. Kozlov, V.V., A condition for the freezing of a direction field, small denominators, and the chaotization of steady flows of a viscous fluid, *J. Appl. Math. Mech.*, 1999, vol. 63, no. 2, pp. 229–235.
18. Koshlyakov, N.S., Glinner, E.B., and Smirnov, M.M., *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (Equations of Mathematical Physics), Moscow: Vyschaya schkola, 1970.
19. Olver, F.W.J., *Asymptotics and Special Functions*, New York; London: Academic Press, 1974.
20. Bateman, H. and Erdélyi, A., *Higher Transcendental Functions*, New York; Toronto; London: McGraw-Hill, 1953.
21. Watson, G.N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd ed., Cambridge: Cambridge University Press, 1944.