ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 12, с. 1713–1718

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956.223+517.956.225

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ В ПОЛУПОЛОСЕ

© 2024 г. Н. Ю. Капустин[1], Д. Д. Васильченко[2]

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: [1]n.kapustin@bk.ru, [2]dvasil.arm@gmail.com

Поступила в редакцию 24.06.2024 г., после доработки 23.09.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

Доказаны теоремы существования и единственности решения задачи для уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями в полуполосе, а также получены интегральные представления для частных производных решения.

Ключевые слова: краевая задача, уравнение Лапласа, базис Рисса

DOI: 10.31857/S0374064124120102, EDN: IOSTMV

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим в полуполосе $D=\{(x,y)\colon 0<x<\pi,\ \ y>0\}$ краевую задачу для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad (x,y)\in D, \tag{1}$$

в классе функций $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(\overline{D}\cap\{y>0\})\cap C^2(D)$ с граничными условиями

$$u(0,y)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y)=0,\quad y>0, \tag{2}$$

$$\lim_{y\to+0}\int\limits_0^\pi\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\varphi(x)\right]^2dx=0,\quad \varphi(x)\in L_2(0,\pi), \tag{3}$$

$$u(x,y)\rightrightarrows 0,\quad y\to+\infty. \tag{4}$$

Аналогичная задача рассматривалась в статье [1] как вспомогательная при изучении задачи Трикоми–Неймана для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с граничными условиями второго рода на боковых сторонах полуполосы с коэффициентом $1/k$ при $u'_y(x,y)$, $|k|>1$, где были использованы результаты работы [2]. На линии изменения типа ставилось условие склеивания нормальных производных по Франклю. Случай $k=1$ (классическая задача с непрерывным градиентом) не рассматривался и теорема единственности для вспомогательной задачи не доказывалась.

На задачу Трикоми с эллиптической частью в полуполосе обратил внимание А.В. Бицадзе в связи с математическим моделированием плоскопараллельных движений газа. В данном случае построение решения с помощью конформного отображения приводит к краевой задаче относительно аналитической функции в верхней полуплоскости [3, с. 327], решение которой на основании формулы Шварца [3, с. 315] было выписано в квадратурах.

В работе [4] получено интегральное представление регулярного решения задачи для уравнения Лапласа в полукруге с краевым условием первого рода на полуокружности и двумя различными краевыми условиями типа наклонной производной на двух прямолинейных участках границы.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Решение задачи (1)–(4) существует и его можно представить в виде ряда*

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n e^{-(n+1/2)y}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right], \tag{5}$$

где коэффициенты A_n, $n=0,1,2,\ldots,$ *определяются из разложения*

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\varphi(x)}{\sqrt{2}}. \tag{6}$$

Доказательство. Ввиду основного результата работы [2] система $\{\sin[(n+1/2)x+\pi/4]\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис Рисса в пространстве $L_2(0,\pi)$. Разложим функцию $\varphi(x)/\sqrt{2}$ по этой системе. Коэффициенты разложения (6) удовлетворяют неравенствам Бесселя

$$C_1\|\varphi\|_{L_2(0,\pi)}\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}A_n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\leqslant C_2\|\varphi\|_{L_2(0,\pi)},\quad 0<C_1<C_2,$$

где постоянные C_1 и C_2 не зависят от φ. Следовательно, сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|A_n|$ и сходится равномерно ряд (5). Функция (5) является решением уравнения (1) и удовлетворяет граничным условиям (2) по построению. Условие (4) выполняется, так как $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(n+1/2)y}=$ $=e^{-y/2}/(1-e^{-y})$. Проверим выполнение условия (3).

Согласно разложению (6) условие (3) принимает вид

$$I(y)=2\int_0^{\pi}\left[\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)(e^{-(n+1/2)y}-1)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2dx.$$

Докажем, что $I(y)\to 0$ при $y\to+0$. Запишем неравенство $I(y)\leqslant I_1(y)+I_2(y)$, где

$$I_1(y)=4\int_0^{\pi}\left[\sum_{n=0}^{m}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)(e^{-(n+1/2)y}-1)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2dx,$$

$$I_2(y)=4\int_0^{\pi}\left[\sum_{n=m+1}^{\infty}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)(e^{-(n+1/2)y}-1)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2dx.$$

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon>0$. В силу левой части неравенства Бесселя имеем оценку

$$I_2(y)=4\int_0^{\pi}\left[\sum_{n=m+1}^{\infty}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)(e^{-(n+1/2)y}-1)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2dx\leqslant$$

$$\leqslant C_3\sum_{n=m+1}^{\infty}A_n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2(e^{-(n+1/2)y}-1)^2\leqslant C_3\sum_{n=m+1}^{\infty}A_n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2<\frac{\varepsilon}{2},$$

если m достаточно велико.

Во втором слагаемом конечное число элементов, поэтому

$$I_1(y)=4\int\limits_0^{\pi}\left[\sum_{n=0}^{m}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)(e^{-(n+1/2)y}-1)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2dx\leqslant$$

$$\leqslant C_4\sum_{n=0}^{m}A_n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2(e^{-(n+1/2)y}-1)^2<\frac{\varepsilon}{2}$$

при $0<y<\delta$, если δ достаточно мало́. Условие (3) выполнено. Теорема доказана.

Теорема 2. *Решение задачи (1)–(4) единственно.*

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ — решение однородной задачи. Введём следующие обозначения: $C_\varepsilon=(0,\varepsilon)$, $C_R=(0,R)$, $D_R=(\pi,R)$, $D_\varepsilon=(\pi,\varepsilon)$, $\Pi_{R\varepsilon}$ — прямоугольник $C_\varepsilon C_R D_R D_\varepsilon$. Справедливы соотношения

$$0=\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}(R-y)(u_{xx}+u_{yy})\,dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}((R-y)u_xu)_x\,dx\,dy+\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}((R-y)u_yu)_y\,dx\,dy-\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}(R-y)(u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy+\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}u_yu\,dx\,dy=$$

$$=-\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}(R-y)(u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy-\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}(R-\varepsilon)(u_y-u_x)u\,dx-\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}(R-\varepsilon)u_xu\,dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}u^2\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{C_RD_R}u^2\,dx.$$

Отсюда следуют цепочки неравенств

$$\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}(R-\varepsilon)(u_x-u_y)u\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{C_RD_R}u^2\,dx\leqslant(R-\varepsilon)\left[\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}(u_y-u_x)^2\,dx\right]^{1/2}\left[\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}u^2\,dx\right]^{1/2}+\frac{1}{2}\int\limits_{C_RD_R}u^2\,dx\leqslant$$

$$\leqslant(R-\varepsilon)^2\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}(u_y-u_x)^2\,dx+\frac{1}{4}\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}u^2\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{C_RD_R}u^2\,dx,$$

$$\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}(R-y)(u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy+\frac{1}{4}\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}u^2\,dx+\frac{R-\varepsilon}{2}u^2(\pi,\varepsilon)\leqslant(R-\varepsilon)^2\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}(u_y-u_x)^2\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{C_RD_R}u^2\,dx.$$

В силу (3) имеет место равенство

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}(u_y-u_x)^2\,dx=0,$$

откуда вытекает соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}(R-y)(u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy+\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi}u^2(x,0)\,dx+\frac{R}{2}u^2(\pi,0)\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{C_RD_R}u^2\,dx.$$

Устремим теперь $R\to\infty$, тогда $\int_{C_RD_R}u^2\,dx\to0$, отсюда $u(x,y)\equiv0$ в $\overline{D}$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $u(x,y)$ — решение задачи (1)–(4), тогда u_x, u_y представимы в виде*

$$u_y(x,y)=-\operatorname{Im}\left(\frac{\sqrt{1-e^{i2z}}}{\pi}e^{iz/2}\int\limits_0^\pi\frac{\sqrt{\sin t}}{(1-e^{i(z+t)})(1-e^{i(z-t)})}\varphi(t)\,dt\right),\tag{7}$$

$$u_x(x,y)=\operatorname{Re}\left(\frac{\sqrt{1-e^{i2z}}}{\pi}e^{iz/2}\int\limits_0^\pi\frac{\sqrt{\sin t}}{(1-e^{i(z+t)})(1-e^{i(z-t)})}\varphi(t)\,dt\right),\tag{8}$$

где $z=x+iy$.

Доказательство. Рассмотрим равенство (6). Система синусов $\{\sin[(n+1/2)x+\pi/4]\}_{n=0}^\infty$ образует базис в пространстве $L_2(0,\pi)$. Поэтому для коэффициентов $A_n(n+1/2)$ справедливо следующее представление [2]:

$$A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)=\int\limits_0^\pi h_{n+1}(t)\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}\,dt,$$

где

$$h_n(t)=\frac{2}{\pi}\frac{(2\cos(t/2))^\beta}{(\operatorname{tg}(t/2))^{\gamma/\pi}}\sum_{k=1}^n\sin(kt)B_{n-k},\quad B_l=\sum_{m=0}^l C_{\gamma/\pi}^{l-m}C_{-\gamma/\pi-l}^m(-1)^{l-m},\quad C_l^n=\frac{l(l-1)\ldots(l-n+1)}{n!}.$$

Пусть $u(x,y)$ — решение задачи (1)–(4), тогда оно имеет вид (5) и соответственно

$$u_y(x,y)=-\sum_{n=0}^\infty A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)e^{-(n+1/2)y}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]=$$

$$=-\sum_{n=0}^\infty\int\limits_0^\pi\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_{n+1}(t)e^{-(n+1/2)y}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]dt,$$

или

$$u_y(x,y)=-\operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^\infty\int\limits_0^\pi\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_{n+1}(t)e^{-(n+1/2)y}e^{i(n+1/2)x}\,dt\right)=$$

$$=-\operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^\infty\int\limits_0^\pi\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_{n+1}(t)e^{i(n+1/2)z}\,dt\right)\overset{m=n+1}{=}$$

$$\overset{m=n+1}{=}-\operatorname{Im}\left(\sum_{m=1}^\infty\int\limits_0^\pi\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_m(t)e^{i(m-1/2)z}\,dt\right)=-\operatorname{Im}\left(e^{-iz/2}\sum_{m=1}^\infty\int\limits_0^\pi\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_m(t)e^{imz}\,dt\right).$$

Поменяем местами знаки интергирования и суммирования:

$$u_y(x,y)=-\operatorname{Im}\left(e^{-iz/2}\int\limits_0^\pi\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}\sum_{m=1}^\infty h_m(t)e^{imz}\,dt\right).$$

Введём обозначение

$$I(t,z)=\sum_{n=1}^\infty h_n(t)e^{inz}=\frac{2}{\pi}\frac{(2\cos(t/2))^\beta}{(\operatorname{tg}(t/2))^{\gamma/\pi}}\sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^n\sin(kt)B_{n-k}e^{inz}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{(2\cos(t/2))^\beta}{(\operatorname{tg}(t/2))^{\gamma/\pi}}\sum_{k=1}^\infty\sin(kt)\sum_{n=k}^\infty e^{inz}B_{n-k},$$

тогда для индекса $m=n-k$ получим

$$I(t,z)=\frac{2}{\pi}\frac{(2\cos(t/2))^{\beta}}{(\operatorname{tg}(t/2))^{\gamma/\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\sin(kt)\sum_{m=0}^{\infty}e^{i(m+k)z}B_m=\frac{2}{\pi}\frac{(2\cos(t/2))^{\beta}}{(\operatorname{tg}(t/2))^{\gamma/\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}e^{ikz}\sin(kt)\sum_{m=0}^{\infty}e^{imz}B_m,$$

где

$$\sum_{k=1}^{\infty}e^{ikz}\sin(kt)=\frac{e^{iz}\sin t}{(1-e^{i(z+t)})(1-e^{i(z-t)})}.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{l=0}^{\infty}e^{ilz}B_l=\sum_{l=0}^{\infty}e^{ilz}\sum_{m=0}^{l}(-1)^{l-m}C_{\gamma/\pi}^{l-m}C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}(-1)^{l-m}e^{ilz}C_{\gamma/\pi}^{l-m}C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m}\overset{k=l-m}{=}$$

$$\overset{k=l-m}{=}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}e^{i(m+k)z}C_{\gamma/\pi}^{k}C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m}=\sum_{m=0}^{\infty}e^{imz}C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}C_{\gamma/\pi}^{k}e^{ikz}=$$

$$=(1+e^{iz})^{-\gamma/\pi-\beta}(1-e^{iz})^{\gamma/\pi}=(1+e^{iz})^{1/2}(1-e^{iz})^{1/2}=\sqrt{1-e^{i2z}},$$

так как в нашем случае $\beta=-1$, $\gamma=\pi/2$. Окончательно выводим формулу (7):

$$u_y(x,y)=-\operatorname{Im}\left(e^{-iz/2}\int_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}I(t,z)\,dt\right)=$$

$$=-\operatorname{Im}\left(e^{-iz/2}\int_0^{\pi}\frac{2}{\pi}\frac{(2\cos(t/2))^{\beta}}{(\operatorname{tg}(t/2))^{\gamma/\pi}}\frac{e^{iz}\sin t}{(1-e^{i(z+t)})(1-e^{i(z-t)})}\sqrt{1-e^{i2z}}\,\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}\,dt\right)=$$

$$=-\operatorname{Im}\left(\frac{2}{\pi}e^{-iz/2}\int_0^{\pi}\frac{1}{2\cos(t/2)\sqrt{\operatorname{tg}(t/2)}}\frac{e^{iz}\sin t}{(1-e^{i(z+t)})(1-e^{i(z-t)})}\sqrt{1-e^{i2z}}\,\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}\,dt\right)=$$

$$=-\operatorname{Im}\left(\frac{\sqrt{1-e^{i2z}}}{\pi}e^{iz/2}\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{\sin t}}{(1-e^{i(z+t)})(1-e^{i(z-t)})}\varphi(t)\,dt\right).$$

Рассуждая аналогично, получаем представление (8). Теорема доказана.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моисеев, Е.И. Об интегральном представлении задачи Неймана–Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе / Е.И. Моисеев, Т.Е. Моисеев, Г.О. Вафодорова // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 8. — С. 1070–1075.

2. Моисеев, Е.И. О базисности одной системы синусов / Е.И. Моисеев // Дифференц. уравнения. — 1987. — Т. 23, № 1. — С. 177–189.
3. Бицадзе, А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе. — М. : Наука, 1981. — 448 с.
4. Моисеев, Т.Е. Об интегральном представлении решения уравнения Лапласа со смешанными краевыми условиями / Т.Е. Моисеев // Дифференц. уравнения. — 2011. — Т. 47, № 10. — С. 1446–1451.

BOUNDARY PROBLEM FOR THE LAPLACE EQUATION WITH MIXED BOUNDARY CONDITIONS IN A SEMIBAND

© 2024 / N. Y. Kapustin[1], D. D. Vasilchenko[2]

Lomonosov Moscow State University, Russia
e-mail: [1]n.kapustin@bk.ru, [2]dvasil.arm@gmail.com

Theorems on the existence and uniqueness of the solution to the Laplace equation with mixed boundary conditions in a semiband have been proven in the work. Additionally, integral representations for the partial derivatives of the solution have been obtained.

Keywords: boundary problem, Laplass equation, Riesz basis

FUNDING

This work was carried out with the financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under agreement no. 075-15-2022-284.

REFERENCES

1. Moiseev, E.I., Moiseev, T.E., and Vafodorova, G.O., On an integral representation of the Neumann–Tricomi problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation, *Differ. Equat.*, 2015, vol. 51, no. 8, pp. 1065–1071.
2. Moiseev, E.I., O bazisnosti odnoj sistemy sinusov, *Differ. Uravn.*, 1987, vol. 23, no. 1, pp. 177–189.
3. Bicadze, A.V., *Nekotorye klassy uravnenij v chastnyh proizvodnyh* (Some Classes of Partial Differential Equations), Moscow: Nauka, 1981.
4. Moiseev, T.E., On an integral representation of the solution of the Laplace equation with mixed boundary conditions, *Differ. Equat.*, 2011, vol. 47, no. 10, pp. 1461–1467.