ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 12, с. 1653–1663

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ЭНТРОПИЙНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МЕРОЗНАЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. Ф. Вильданова

Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра РАН, г. Уфа
e-mail: gilvenera@mail.ru

Поступила в редакцию 11.05.2024 г., после доработки 04.10.2024 г.; принята к публикации 31.10.2024 г.

Доказана единственность энтропийного решения в гиперболическом пространстве задачи Дирихле для нелинейного уравнения второго порядка с мерозначным потенциалом. Ограничения на структуру уравнения сформулированы в терминах обобщённой N-функции.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, энтропийное решение, гиперболическое пространство

DOI: 10.31857/S0374064124120062, EDN: IPFFXJ

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{H}^n$ — гиперболическое пространство размерности $n \geqslant 2$. В настоящей работе доказывается единственность энтропийного решения задачи Дирихле для уравнения

$$-\operatorname{div}(a(x, du)) + b_0(x, u) + b_1(x, u)\mu = f, \quad f \in L_1(\mathbb{H}^n),$$

где μ — неотрицательная мера Радона, du — дифференциал функции u. Существование энтропийных решений для этого уравнения было установлено в статье [1] (рассматривалась функция $a(x, u, du)$).

Понятие энтропийного решения задачи Дирихле было предложено в работе [2], в которой в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (необязательно ограниченной), $n \geqslant 2$, рассматривалось эллиптическое уравнение с L_1-данными

$$-\operatorname{div}(a(x, \nabla u)) = f(x, u), \quad \sup_{|u|<c} |f(x, u)| \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega), \quad c > 0.$$

На функцию a накладывались некоторые условия ограниченности, монотонности и коэрцитивности. Доказаны существование и единственность энтропийного решения задачи Дирихле. После этой работы энтропийные решения стали объектом исследования многих математиков. В работе [3] установлена эквивалентность энтропийных и ренормализованных решений нелинейной эллиптической задачи в пространствах Музилака–Орлича.

В статье [4] в ограниченной области Ω была рассмотрена задача

$$-\triangle u + \mu g(u) = \sigma, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

для которой установлены существование и единственность очень слабого решения при некоторых ограничениях на функцию g, меру Радона σ и неотрицательную меру μ из класса Морри.

В [5] для уравнения с мерой Радона σ

$$-\operatorname{div}(a(x,\nabla u))+a_0(x,u)=\sigma$$

доказаны существование и единственность ренормализованного решения задачи Дирихле для произвольной области Ω.

В статье [6] в неограниченной области исследована задача Дирихле

$$-\operatorname{div} a(x,u,\nabla u)+M'(x,u)+b(x,u,\nabla u)=\sigma, \quad u|_{\partial\Omega}=0,$$

где функции a, b имеют рост, определяемый обобщённой N-функцией $M(x,u)$, а ограниченная мера Радона σ имеет специальный вид. Требовалось, чтобы сопряжённая функция $\overline{M}(x,u)$ удовлетворяла Δ_2-условию и $b(x,u,\nabla u)u\geqslant 0$. Доказано существование энтропийного решения задачи Дирихле и обосновано, что оно является ренормализованным решением.

В настоящей работе предполагается, что функции $M(x,u)$ и $\overline{M}(x,u)$ удовлетворяют Δ_2-условию. Известно, что пространство $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ можно пополнять как по норме $(\int|\nabla u|^p dx)^{1/p}$, так и по норме $(\int(|u|^p+|\nabla u|^p)\,dx)^{1/p}$, причём во втором случае получается более узкое пространство $W_p^1(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{H}_p^1(\mathbb{R}^n)$. Как правило (см., например, [5, 6]), выбирается второй случай, что приводит к некоторым дополнительным ограничениям на функции, входящие в уравнение. Ниже, как и в [1], используется пространство $\mathcal{H}_M^1(\mathbb{R}^n)$ первого типа. Кроме того, в отличие от [2] и других исследований, монотонность функций b_i, $i=0,1$, по u не предполагается.

Отметим ещё работу [7], в которой доказана корректность нелинейной задачи Дирихле

$$\mathcal{L}u=-\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)+G(u))+\mu u=f, \qquad x\in\Omega, \qquad u|_{\partial\Omega}=0,$$

где $G(u)$ обозначает векторное поле $G(u)^i=F^i(x)u_{x_i}$, $F^i\in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Рассмотрен также случай $\Omega=\mathbb{R}^n$. Класс операторов $\mathcal{L}$ содержит оператор Шрёдингера $-\triangle+\mu$ с сингулярными потенциалами μ.

В [8] для уравнения вида

$$-\operatorname{div} a(x,\nabla u)=\mu, \quad x\in\Omega, \tag{1}$$

при некоторых условиях регулярности на функцию Музилака–Орлича $M(x,z)$ показано, что каждая ограниченная мера Радона μ в ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ может быть представлена в виде $\mu=\mu_M+\mu_s$, причём μ_M называется диффузной по M-ёмкости Cap_M и $\mu_M(E)=0$ для любого $E\subseteq\Omega$ такого, что $\mathrm{Cap}_M(E,\Omega)=0$, а μ_s сосредоточена на множестве нулевой M-ёмкости и называется сингулярной. Доказано существование (а при $\mu=\mu_M$ и единственность) ренормализованного решения задачи Дирихле.

В работе [9] для анизотропной N-функции $\Phi\in\Delta_2\bigcap\nabla_2$ установлено аналогичное разложение меры по анизотропной Φ-ёмкости и в случае диффузной меры μ_Φ доказана единственность апроксимационного решения задачи Дирихле в ограниченной области для уравнения (1).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Рассмотрим гиперболическое пространство $\mathbb{H}^n$, $n\geqslant 2$, в виде модели Пуанкаре в единичном шаре B_1 с римановой метрикой

$$g_{ij}(x)=\frac{4}{(1-|x|^2)^2}\delta_{ij}, \quad x\in B_1, \quad i,j=\overline{1,n},$$

кроме того, пусть g^{ij} — элементы обратной матрицы к (g_{ij}), $\partial B_1 \equiv \partial_\infty \mathbb{H}^n = \{\infty\}$. Геодезическое расстояние между произвольным $x \in \mathbb{H}^n$ и точкой 0 находится как

$$\rho(x) = \int\limits_0^{|x|} \frac{2}{1-s^2}\, ds = \ln \frac{1+|x|}{1-|x|}, \quad x \in B_1 \equiv \mathbb{H}^n; \tag{2}$$

поэтому $|x| = \operatorname{th}(\rho(x)/2)$.

В пространстве $\mathbb{H}^n$ элемент объёма равен

$$d\nu = \sqrt{g} dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \frac{2^n}{(1-|x|^2)^n} dx,$$

где dx — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Для каждого $x \in \mathbb{H}^n$ через $T_x\mathbb{H}^n$ обозначим касательное пространство в этой точке. Очевидно, что $(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \ldots, \partial/\partial x_n)$ — базис в $T_x\mathbb{H}^n$. Скалярное произведение векторов и длину вектора будем обозначать соответственно как $(\beta,\xi)_g \equiv (\beta,\xi)_{g,x} = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x)\beta^i\xi^j$ и $|\beta|_g = \sqrt{(\beta,\beta)_g}$ для любых $\beta, \xi \in T_x\mathbb{H}^n$, $x \in \mathbb{H}^n$, где $\beta = \sum_{i=1}^n \beta^i \partial/\partial x_i$, $\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i \partial/\partial x_i$ для некоторых $(\beta^1, \ldots, \beta^n) \in \mathbb{R}^n$ и $(\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n$. Градиент определяется формулой

$$\nabla_g u = \big((\nabla_g u)^1, \ldots, (\nabla_g u)^n\big), \quad (\nabla_g u)^i = \sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Через $\chi^k(\mathbb{H}^n)$ обозначим множество векторных полей класса C^k, $k \geqslant 0$, на многообразии $\mathbb{H}^n$.

Дифференциал df функции f имеет локальные координаты $\partial f/\partial x^i$ и при этом $|df|_g = |\nabla_g f|_g$. Производная Ли функции $f \in C^1(\mathbb{H}^n)$ вдоль векторного поля $X \in \chi^0(\mathbb{H}^n)$ в локальной системе координат определяется формулой

$$(df, X) = (X, df) = (\nabla f, X)_g = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i},$$

а дивергенция векторного поля X как

$$\operatorname{div}_g X = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\big(X^i \sqrt{g}\big).$$

Известно, что

$$\operatorname{div}_g(fX) = f \operatorname{div}_g X + (X, df).$$

Далее через $\mathcal{L}(V; W)$ обозначим множество линейных ограниченных операторов, определённых в банаховом пространстве V и принимающих значения в банаховом пространстве W.

Через $\langle l, v\rangle$ будем обозначать действие функционала $l \in V^*$ на вектор $v \in V$.

Приведём необходимые сведения из теории пространств Музилака–Орлича (см. [10]).

Определение 1. Пусть функция $M(x,z)\colon \mathbb{H}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $M(x,\cdot)$ — N-функция по $z \in \mathbb{R}$, т.е. она является выпуклой вниз, неубывающей, чётной, непрерывной, $M(x,0) = 0$ для п.в. $x \in \mathbb{H}^n$ и $\inf_{x \in \mathbb{H}^n} M(x,z) > 0$ для всех $z \neq 0$,

$$\lim_{z\to 0} \sup_{x \in \mathbb{H}^n} \frac{M(x,z)}{z} = 0, \quad \lim_{z\to\infty} \inf_{x \in \mathbb{H}^n} \frac{M(x,z)}{z} = \infty$$

(очевидно, что функция $M(x,z)/z$ не убывает);

2) $M(\cdot, z)$ — измеримая функция по $x \in \mathbb{H}^n$ для любых $z \in \mathbb{R}$.

Такая функция $M(x,z)$ называется *функцией Музилака–Орлича.*

Сопряжённая функция $\overline{M}(x,\cdot)$ к функции Музилака–Орлича $M(x,\cdot)$ для п.в. $x\in\mathbb{H}^n$ и любых $z\geqslant 0$ определяется равенством

$$\overline{M}(x,z)=\sup_{y\geqslant 0}\big(yz-M(x,y)\big).$$

Отсюда следует неравенство Юнга $|zy|\leqslant M(x,z)+\overline{M}(x,y),\ z,y\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{H}^n$.

Будем предполагать, что

$$M(\cdot,z),\overline{M}(\cdot,z)\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{H}^n),\quad z>0. \tag{3}$$

Говорят, что функция $M(x,z)$ удовлетворяет Δ_2-условию, если существуют постоянная C и функция $G\in L_1(\mathbb{H}^n)$ такие, что

$$M(x,2z)\leqslant CM(x,z)+G(x)\quad \text{для любых}\quad z\in\mathbb{R}\quad \text{и}\quad x\in\mathbb{H}^n.$$

Будем предполагать, что M и $\overline{M}$ удовлетворяют Δ_2-условию и подчиняются условию (3).

Определим пространство Лебега $L_M(\mathbb{H}^n)$ как множество таких измеримых на $\mathbb{H}^n$ функций u, для которых конечна норма Люксембурга

$$\|u\|_M=\inf\{k>0\colon \varrho(k^{-1}u)\leqslant 1\},\quad \varrho(u)=\int\limits_{\mathbb{H}^n} M(x,u)\,d\nu.$$

Пространство $L_M(\mathbb{H}^n)$ сепарабельное и рефлексивное, $(L_M(\mathbb{H}^n))^*=L_{\overline{M}}(\mathbb{H}^n)$ [11, следствие 3.6.7]. Сходимость $\|u_j-u\|_M\to 0$ равносильна модулярной сходимости $\varrho(u_j-u)\to 0$.

Для двух сопряжённых функций Музилака–Орлича M и $\overline{M}$, если $u\in L_M(\mathbb{H}^n)$ и $v\in L_{\overline{M}}(\mathbb{H}^n)$, выполняется неравенство Гёльдера $\left|\int_{\mathbb{H}^n} u(x)v(x)\,d\nu\right|\leqslant 2\|u\|_M\|v\|_{\overline{M}}$.

Для любого $\sigma>0$ определим шар в гиперболическом пространстве $\mathfrak{B}_\sigma=\{x\in\mathbb{H}^n\colon \rho(x)<\sigma\}$. Следовательно, для любого $r\in(0,1)$

$$B_r=\mathfrak{B}_{\ln\frac{1+r}{1-r}},$$

точнее, евклидов шар B_r является картой для гиперболического шара. Всюду далее числа r, σ связаны равенством $\sigma=\ln\big((1+r)/(1-r)\big)$. Очевидно, в силу гладкости метрики (g_{ij}) в шаре B_r, что геодезические расстояния ρ' между парами точек шара $\mathfrak{B}_\sigma$ оцениваются через евклидовы расстояния соответствующих точек в шаре B_r: $C^{-1}r'\leqslant\rho'\leqslant Cr'$. Пространства $W_p^1(\mathfrak{B}_\sigma)$ и $W_p^1(B_r)$ естественным образом отождествляются и соответствующие нормы эквивалентны.

Пространство $\mathcal{H}_M^1(\mathbb{H}^n)$ определим как пополнение пространства функций $\mathcal{D}(\mathbb{H}^n)$ по норме

$$\|u\|_{M,1}=\|\,|du|_g\,\|_M=\|u\|_V.$$

Для краткости это пространство будем обозначать через V. Сопряжённое к V пространство с индуцированной нормой обозначим через V^*. Для гиперболического пространства при $1\leqslant p<n$ известна оценка [12, теорема 2.28]

$$\|u\|_{p^*,\mathbb{H}^n}\leqslant C\|\nabla_g u\|_{p,\mathbb{H}^n},\quad u\in C_0^\infty(\mathbb{H}^n),\quad p^*=np/(n-p).$$

Отсюда следует, что

$$\|u\|_{W_p^1(\mathfrak{B}_r)}\leqslant h(r)\|u\|_V,\quad r>0, \tag{4}$$

где $h(r)$ — неотрицательная возрастающая функция.

Поскольку функция u с конечной нормой $\|\nabla_g u\|_{p,\mathbb{H}^n}$ имеет также конечную норму $\|u\|_{p^*,\mathbb{H}^n}$, т.е. в определённом смысле стремится к нулю на бесконечности, этот факт интерпретируем как краевое условие Дирихле в рассматриваемой нами задаче. Из Δ_2-условия на функцию $\overline{M}$ следует (см. [13, предложение 2.1]), что существуют числа $p\in(1,n)$, $\beta\in(0,1)$, r_0 такие, что при всех $\lambda>r_0$ и при почти всех $x\in\mathbb{H}^n$ выполнено неравенство

$$\beta\lambda^p < M(x,\lambda). \tag{5}$$

Напомним, что из ограниченной последовательности элементов $\{v^j\}\in L_M(\mathbb{H}^n)$, $j\in\mathbb{N}$, рассматриваемых как линейные функционалы на пространстве $L_{\overline{M}}(\mathbb{H}^n)$, можно выделить $*$-слабо сходящуюся подпоследовательность v^{j_k} [14, гл. 4, § 3, теорема 3].

Для $v\in L_M(\mathbb{H}^n)$ справедливы неравенства $\|v\|_M\leqslant\varrho_M(v)+1$; $\varrho_M(v)\leqslant\|v\|_M$, если $\|v\|_M\leqslant 1$; $\|v\|_M\leqslant\varrho_M(v)$, если $\|v\|_M>1$.

Последовательность функций $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}\in L_M(\mathbb{H}^n)$ называется *модулярно сходящейся* к $v\in\in L_M(\mathbb{H}^n)$, если существует число $\lambda>0$ такое, что $\lim_{j\to\infty}\varrho_M((v^j-v)/\lambda)=0$. Если M удовлетворяет Δ_2-условию, то модулярная сходимость и сходимость по норме совпадают.

Будем рассматривать оператор вида

$$\mathcal{B}u=b_0(x,u)+b_1(x,u)\mu,$$

где μ — неотрицательная мера Радона. Предполагается, что оператор $\mathcal{B}\colon\mathcal{D}(\mathbb{H})\to\mathcal{D}'(\mathbb{H})$ при $u,v\in\mathcal{D}(\mathbb{H}^n)$ действует по правилу

$$\langle\mathcal{B}u,v\rangle=\int\limits_{\mathbb{H}^n}b_0(x,u)v\,d\nu+\int\limits_{\mathbb{H}^n}b_1(x,u)v\,d\mu.$$

Левая часть последней формулы будет использоваться также для обозначения суммы двух интегралов в правой части для более широкого класса функций, и тогда символ $\mathcal{B}$ не следует понимать как оператор. Меру Радона μ на $\mathbb{H}^n$ можно рассматривать как меру на шаре B_1.

Пусть μ — мера Радона с конечной полной вариацией и носителем, лежащим в ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{H}^n$. Будем считать, что мера продолжена нулем вне Ω. Напомним, что μ принадлежит классу Морри $\mathbb{M}_s(\Omega)$, $s\geqslant 1$, если для любого шара с центром в x выполнено неравенство

$$|B_r(x)|_\mu:=\int\limits_{B_r(x)}d|\mu|\leqslant cr^{n(1-1/s)},\quad r>0,\quad x\in\Omega.$$

Докажем единственность энтропийного решения уравнения

$$-\operatorname{div}_g(a(x,du))+\mathcal{B}u=f,\quad f\in L_1(\mathbb{H}^n). \tag{6}$$

Будем предполагать, что существует число $s>np/(np+p-n)$ (p из (5)) такое, что

$$\mu\in\mathbb{M}_s(B_r)\quad\text{для любого}\quad r\in(0,1). \tag{7}$$

Известно [4, предложение 2.5] компактное вложение при $q<\theta p/(n-p)$ для неотрицательной меры $\mu\in\mathbb{M}_{n/(n-\theta)}(\Omega)$:

$$W_p^1(\Omega)\hookrightarrow L_{q,\mu}(\Omega). \tag{8}$$

В случае меры Лебега компактным является вложение $W_p^1(\Omega)\hookrightarrow L_{q_0}(\Omega)$ при $q_0<np/(n-p)$.

Очевидно, что класс Морри $\mathbb{M}_s(\mathfrak{B}_\sigma)$ мер на шаре $\mathfrak{B}_\sigma$ многообразия $\mathbb{H}^n$ можно рассматривать и как класс Морри $\mathbb{M}_s(B_r)$ мер на шаре B_r евклидова пространства.

Каратеодориевое отображение $a(x,y)\colon T_x^*\mathbb{H}^n \to T_x\mathbb{H}^n$ в (6) удовлетворяет при $x\in\mathbb{H}^n$ условиям:

– ограниченности с функцией $G\in L_1(\mathbb{H}^n)$ и константой $C>0$:

$$\overline{M}(x, |a(x,y)|_g) \leqslant G(x) + CM(x,|y|_g), \quad y\in T_x^*\mathbb{H}^n; \tag{9}$$

– коэрцитивности

$$(a(x,y),y) \geqslant c_0 M(x,|y|_g) - G(x), \quad c_0>0; \tag{10}$$

– монотонности

$$(a(x,y)-a(x,z), y-z) > 0, \quad y\neq z, \quad y,z\in T_x^*\mathbb{H}^n, \quad x\in\mathbb{H}^n. \tag{11}$$

Кроме того, пусть каратеодориевая функция b_0 и μ-каратеодориевая функция b_1 удовлетворяют неравенствам

$$|b_0(x,s)| \leqslant \widehat{G}_0(x), \quad |s|\leqslant 1, \quad x\in\mathbb{H}^n, \quad \widehat{G}_0\in L_1(\mathbb{H}^n), \tag{12}$$

$$|b_1(x,s)| \leqslant \widehat{G}_1(x), \quad |s|\leqslant 1, \quad x\in\mathbb{H}^n, \quad \widehat{G}_1\in L_{1,\mu}(\mathbb{H}^n), \tag{13}$$

$$b_i(x,r)r \geqslant 0, \quad i=0,1, \quad r\in\mathbb{R}. \tag{14}$$

Пусть существует возрастающая функция $\widetilde{g}(r)$, $r>0$, $\lim_{r\to\infty}\widetilde{g}(r)=\infty$, такая, что

$$|b_1(x,s)| > \widetilde{g}(r), \quad s\geqslant r, \quad x\in\mathbb{H}^n. \tag{15}$$

Определим функцию

$$T_k(r) = \begin{cases} k & \text{при } r>k, \\ r & \text{при } |r|\leqslant k, \\ -k & \text{при } r<-k. \end{cases}$$

Через $\mathring{\mathcal{T}}_M^1(\mathbb{H}^n)$ обозначим множество измеримых функций $u\colon \mathbb{H}^n\to\mathbb{R}$ таких, что $T_k(u)\in V$ при любом $k>0$.

Определение 2. *Энтропийным решением задачи Дирихле для уравнения* (6) называется функция $u\in\mathcal{T}_M^1(\mathbb{H}^n)$ такая, что при всех $k>0$, $\xi\in\mathcal{D}(\mathbb{H}^n)$ конечны интегралы $\int_{\mathbb{H}^n} b_0(x,u)\times$ $\times T_k(u-\xi)\,d\nu$, $\int_{\mathbb{H}^n} b_1(x,u)T_k(u-\xi)\,d\mu$ и верно неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{H}^n} ((a(x,du), dT_k(u-\xi)) - fT_k(u-\xi))\,d\nu + \langle \mathcal{B}u, T_k(u-\xi)\rangle \leqslant 0. \tag{16}$$

Обычно при определении энтропийного решения требуется, чтобы $b_0(x,u)\in L_1(\mathbb{H}^n)$. В настоящей работе этот факт устанавливается в лемме 1 как следствие условий (12)–(14). Отметим, что здесь речь не идёт о расширении области определения оператора $\mathcal{B}$.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1. *Пусть u — энтропийное решение задачи Дирихле для уравнения (6) и выполнены условия (7)–(11). Пусть функции $b_i(x,s)$, $i=0,1$, возрастают по s и выполнены неравенства (12)–(14). Тогда $b_0(x,u)\in L_1(\mathbb{H}^n)$, $b_1(x,u)\in L_{1,\mu}(\mathbb{H}^n)$ и при всех $k>k_0$ справедливы неравенства*

$$\int\limits_{\mathbb{H}^n} M(x, dT_k(u))\,d\nu \leqslant Ck. \tag{17}$$

Доказательство. Запишем неравенство (16) при $\xi=0$:

$$\int\limits_{\mathbb{H}^n}(a(x,du),dT_k(u))\,d\nu+\int\limits_{\mathbb{H}^n}(b_0(x,u)-f)T_k(u)\,d\nu+\int\limits_{\mathbb{H}^n}b_1(x,u)T_k(u)\,d\mu\leqslant 0.$$

Из условия (10) следует неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{H}^n}(a(x,du),dT_k(u))\,d\nu\geqslant\int\limits_{\mathbb{H}^n}(c_0M(x,|dT_k(u)|_g)-G(x))\,d\nu.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\mathbb{H}^n}(c_0M(x,|dT_k(u)|_g)+b_0(x,u)T_k(u))\,d\nu+\int\limits_{\mathbb{H}^n}b_1(x,u)T_k(u)\,d\mu\leqslant\int\limits_{\mathbb{H}^n}(G+fT_k(u))\,d\nu<\infty.$$

Следствием этого, ввиду (14), являются неравенства (17) и

$$\int\limits_{\mathbb{H}^n}|b_0(x,u)|\chi_{\{|u|>1\}}\,d\nu+\int\limits_{\mathbb{H}^n}|b_1(x,u)|\chi_{\{|u|>1\}}\,d\mu<\infty. \tag{18}$$

Из условий (12), (13) вытекает соотношение

$$\int\limits_{\mathbb{H}^n}|b_0(x,u)|\chi_{\{|u|\leqslant 1\}}\,d\nu+\int\limits_{\mathbb{H}^n}|b_1(x,u)|\chi_{\{|u|\leqslant 1\}}\,d\mu\leqslant\int\limits_{\mathbb{H}^n}(\widehat{G}_0(x)+\widehat{G}_1(x))\,d\nu<\infty,$$

откуда с учётом (18) получаем $b_0(x,u)\in L_1(\mathbb{H}^n)$, $b_1(x,u)\in L_{1,\mu}(\mathbb{H}^n)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть u — энтропийное решение задачи Дирихле для уравнения (6) и выполнены условия (7)–(11). Пусть функции $b_i(x,s)$, $i=0,1$, возрастают по s и выполнены неравенства (12)–(14). Тогда условие (16) справедливо при $\xi\in V\cap L_\infty(\mathbb{H}^n)$.*

Доказательство. Пусть $\xi\in V$, $\|\xi\|_\infty\leqslant C_0$. Тогда найдётся последовательность $v_i\in\mathcal{D}(\mathbb{H}^n)$, $i\in\mathbb{N}$, такая, что $\|v_i\|_\infty\leqslant C_0$, $dv_i\to d\xi$ в $L_M(\mathbb{H}^n)$. При этом из (4) следует сходимость $v_i\to\xi$ в $W_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{H}^n)$ и ν-п.в. в $\mathbb{H}^n$. В силу (8) имеем также сходимости $v_i\to\xi$ в $L_{q,\mu,\mathrm{loc}}(\mathbb{H}^n)$ и μ-п.в. в $\mathbb{H}^n$. Тогда

$$T_k(u-v_i)\to T_k(u-\xi)\quad \nu\text{-п.в. и } \mu\text{-п.в.}$$

Далее, $|dT_k(u-v_i)|\leqslant|dT_K(u)|+|dv_i(x)|$, где $K=k+C_0$. Нетрудно установить, что $dT_k(u-v_i)\rightharpoonup$ $\rightharpoonup dT_k(u-\xi)$ $*$-слабо в $L_M(\mathbb{H}^n)$. Пользуясь определением 2, запишем неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{H}^n}(a(x,du),dT_k(u-v_i))\,d\nu+\int\limits_{\mathbb{H}^n}b_0(x,u)T_k(u-v_i)\,d\nu+\int\limits_{\mathbb{H}^n}b_1(x,u)T_k(u-v_i)\,d\mu\leqslant\int\limits_{\mathbb{H}^n}fT_k(u-v_i)\,d\nu.$$

Первый интеграл имеет вид $\int_{\mathbb{H}^n}(a(x,dT_K(u)),dT_k(u-v_i))\,d\nu$, причём $a(x,dT_K(u))\in L_{\overline{M}}(\mathbb{H}^n)$ (ввиду (9)). Поэтому возможен предельный переход при $i\to\infty$ в этом интеграле. Предельный переход в оставшихся интегралах совершается по теореме Лебега с использованием леммы 1. Лемма доказана.

Основным результатом работы является

Теорема. *Пусть функции $b_i(x,s)$, $i=0,1$, возрастают по s и выполнены неравенства (12)–(14). Пусть u_1,u_2 — энтропийные решения задачи Дирихле для уравнения (6). Если выполнены условия (7)–(11), то $u_1=u_2$.*

Доказательство. Пользуясь определением 2 и леммой 2, запишем для u_1 неравенство

$$\int_{\mathbb{H}^n}(a(x,du_1),dT_k(u_1-T_h(u_2)))\,d\nu+\int_{\mathbb{H}^n}b_0(x,u_1)T_k(u_1-T_h(u_2))\,d\nu+$$
$$+\int_{\mathbb{H}^n}b_1(x,u_1)T_k(u_1-T_h(u_2))\,d\mu\leqslant\int_{\mathbb{H}^n}fT_k(u_1-T_h(u_2))\,d\nu. \tag{19}$$

Очевидно, что в (19) можно в качестве u_2 подставить u_1. Опуская индексы, будем иметь

$$\int_{\mathbb{H}^n}(a(x,du),dT_k(u-T_h(u)))\,d\nu+\int_{\mathbb{H}^n}b_0(x,u)T_k(u-T_h(u))\,d\nu+$$
$$+\int_{\mathbb{H}^n}b_1(x,u)T_k(u-T_h(u))\,d\mu\leqslant\int_{\mathbb{H}^n}fT_k(u-T_h(u))\,d\nu.$$

Используя (10) и (14), нетрудно получить неравенство

$$\int\limits_{\{\mathbb{H}^n:\,h\leqslant|u|<h+k\}}c_0M(x,u)\,d\nu\leqslant\int\limits_{\{\mathbb{H}^n:\,|u|\geqslant h\}}(G+|f|k)\,d\nu=\varepsilon(h), \tag{20}$$

где $\varepsilon(h)\to 0$ при $h\to\infty$. Действительно, из соотношения

$$I(h)=\int\limits_{\{\mathbb{H}^n:\,|u|\geqslant h\}}|G|\,d\nu\leqslant\int\limits_{\{\mathbb{H}^n:\,|u|\geqslant h,\ |x|<R\}}|G|\,d\nu+\int\limits_{\{\mathbb{H}^n:\,|u|\geqslant R\}}|G|\,d\nu$$

следует неравенство

$$\limsup_{h\to\infty}I(h)\leqslant\int\limits_{\{\mathbb{H}^n:\,|u|\geqslant R\}}|G|\,d\nu,$$

поскольку $G\in L_1(\mathbb{H}^n)$ и $\operatorname{meas}\{|u|\geqslant h,\ |x|<R\}\to 0$ при $h\to\infty$. В силу произвольности $R>0$ имеем $\limsup_{h\to\infty}I(h)=0$.

Складывая неравенство (19) для u_1 с аналогичным для u_2, получаем

$$I_1'+I_1''+I_2+I_3:=\int\limits_{\{\mathbb{H}^n:\,|u_1-T_h(u_2)|<k\}}(a(x,du_1),dT_k(u_1-T_h(u_2)))\,d\nu+$$
$$+\int\limits_{\{\mathbb{H}^n:\,|u_2-T_h(u_1)|<k\}}(a(x,du_2),dT_k(u_2-T_h(u_1)))\,d\nu+$$
$$+\int_{\mathbb{H}^n}(b_0(x,u_1)T_k(u_1-T_h(u_2))+b_0(x,u_2)T_k(u_2-T_h(u_1)))\,d\nu+$$
$$+\int_{\mathbb{H}^n}(b_1(x,u_1)T_k(u_1-T_h(u_2))+b_1(x,u_2)T_k(u_2-T_h(u_1)))\,d\mu\leqslant$$
$$\leqslant\int_{\mathbb{H}^n}f(T_k(u_1-T_h(u_2))+T_k(u_2-T_h(u_1)))\,d\nu=:I_4. \tag{21}$$

Чтобы совершить предельный переход $h\to\infty$, будем разбивать каждый из интегралов на несколько частей. Положим $A_0=\{x\in\mathbb{H}^n:\,|u_1-u_2|<k,\ |u_1|<h,\ |u_2|<h\}$. Интегралы $I_1'+I_1''$ по этому множеству можно записать в виде

$$I_0=\int_{A_0}((a(x,du_1)-a(x,du_2)),d(u_1-u_2))\,d\nu,$$

по множеству $A_1=\{x\in\mathbb{H}^n\colon |u_1-u_2|<k,\ \ |u_2|\geqslant h\}$ как

$$\int_{A_1}(a(x,du_1),d(u_1-T_h(u_2)))\,d\nu=\int_{A_1}(a(x,du_1),du_1)\,d\nu\geqslant-\int_{\{|u_2|\geqslant h\}}G(x)d\nu=-\varepsilon(h).$$

Для оставшегося множества $A_2=\{x\in\mathbb{H}^n\colon |u_1-u_2|<k,\ \ |u_1|\geqslant h,\ \ |u_2|<h\}$ имеем неравенство

$$\int_{A_2}(a(x,du_1),d(u_1-T_h(u_2)))\,d\nu\geqslant-\int_{A_2}(G(x)+(a(x,du_1),du_2))\,d\nu.$$

Очевидно, что

$$\left|\int_{A_2}(a(x,du_1),du_2)\,d\nu\right|\leqslant\int_{\mathbb{H}^n\colon h\leqslant|u_1|<h+k}\overline{M}(x,|a(x,du_1)|_g)\,d\nu+\int_{\mathbb{H}^n\colon h-k\leqslant|u_2|<h}M(x,|du_2|_g)\,d\nu\leqslant$$

$$\leqslant\int_{\mathbb{H}^n\colon h\leqslant|u_1|<h+k}(G(x)+CM(x,\widehat{d}|du_1|_g)\,d\nu+\int_{\mathbb{H}^n\colon h-k\leqslant|u_2|<h}M(x,|du_2|_g)d\nu=\varepsilon_1(h).$$

Последнее равенство вытекает из (9), (20) и Δ_2-условия. Аналогичные неравенства справедливы и для второго интеграла в (21). Суммируя эти соотношения, получаем $I_1'+I_1''\geqslant I_0-\varepsilon_2(h)$.

Интеграл I_3 по множеству $B_0=\{x\in\mathbb{H}^n\colon |u_1|<h,\ \ |u_2|<h\}$ даёт величину

$$J_0=\int_{B_0}(b_1(x,u_1)-b_1(x,u_2))T_k(u_1-u_2)\,d\mu\geqslant 0,$$

а по множеству $B_1=\{x\in\mathbb{H}^n\colon |u_1|\geqslant h\}$ с исчезающей мерой при $h\to\infty$ — величину, которая оценивается как

$$|J_1|\leqslant 2k\int_{B_1}(|b_1(x,u_1)|+|b_1(x,u_2)|)\,d\mu\leqslant\varepsilon_3(h).$$

По оставшемуся множеству интеграл J_2 имеет оценку $|J_2|\leqslant\varepsilon_4(h)$. В итоге $I_3\geqslant-\varepsilon_5(h)$. Аналогично $I_2\geqslant-\varepsilon_6(h)$, $I_4\leqslant\varepsilon_7(h)$.

Суммируя эти неравенства, находим, что $I_0\leqslant\varepsilon_8(h)$. Учитывая, что под интегралом стоит неотрицательная функция, по теореме Беппо–Леви при $h\to\infty$ получаем

$$\int_{\{\mathbb{H}^n\colon |u_1-u_2|<k\}}((a(x,du_1)-a(x,du_2)),d(u_1-u_2))\,d\nu\leqslant 0.$$

Переходя к пределу при $k\to\infty$, имеем

$$\int_{\mathbb{H}^n}\big((a(x,du_1)-a(x,du_2)),d(u_1-u_2)\big)\,d\nu\leqslant 0.$$

Отсюда, используя (11), заключаем, что $u_1=u_2$. Теорема доказана.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания (тема FMRS-2022-0124).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вильданова, В.Ф. Энтропийное решение для уравнения с мерозначным потенциалом в гиперболическом пространстве / В.Ф. Вильданова, Ф.Х. Мукминов // Мат. сб. — 2023. — Т. 214, № 11. — С. 37–62.
2. An L^1-theory of existence and nuniqueness of solutions of nonlinear elliptic equation / Ph. Benilan, L. Boccardo, Th. Gallouët [et al.] // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. — 1995. — V. 22, № 2. — P. 241–273.
3. Кожевникова, Л.М. Эквивалентность энтропийных и ренормализованных решений нелинейной эллиптической задачи в пространствах Музилака–Орлича / Л.М. Кожевникова, А.П. Кашникова // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 1. — С. 35–51.
4. Saintier, N. Nonlinear elliptic equations with measure valued absorption potential / N. Saintier, L. Véron // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. — 2021. — V. 22, № 1. — P. 351–397.
5. Malusa, A. Renormalized solutions to elliptic equations with measure data in unbounded domains / A. Malusa, M.M. Porzio // Nonlin. Anal. — 2007. — V. 67, № 8. — P. 2370–2389.
6. Кашникова, А.П. Существование решений нелинейных эллиптических уравнений с данными в виде меры в пространствах Музилака–Орлича / А.П. Кашникова, Л.М. Кожевникова // Мат. сб. — 2022. — Т. 213, № 4. — С. 38–73.
7. Vildanova, V.F. Perturbations of nonlinear elliptic operators by potentials in the space of multiplicators / V.F. Vildanova, F.Kh. Mukminov // J. Math. Sci. — 2021. — V. 257, № 5. — P. 569–578.
8. Chlebicka, I. Measure data elliptic problems with generalized Orlicz growth / I. Chlebicka // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. — 2023. — V. 153, № 2. — P. 588–618.
9. Chlebicka, I. Essentially fully anisotropic Orlicz functions and uniqueness to measure data problem / I. Chlebicka, P. Nayar // Math. Methods Appl. Sci. — 2022. — V. 45, № 14. — P. 8503–8527.
10. Musielak, J. Orlicz Spaces and Modular Spaces / J. Musielak. — Berlin : Springer-Verlag, 1983. — 222 p.
11. Harjulehto, P. Orlicz Spaces and Generalized Orlicz Spaces / P. Harjulehto, P. Hästö. — Cham : Springer, 2019. — 167 p.
12. Aubin, T. Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge–Ampère Equations / T. Aubin. — New York : Springer-Verlag, 1982. — 204 p.
13. Renormalized solutions of nonlinear elliptic problems in generalized Orlicz spaces / P. Gwiazda, P. Wittbold, A. Wroblewska, A. Zimmermann // J. Differ. Equat. — 2012. — V. 253, № 2. — P. 635–666.
14. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — М. : Наука, 1976. — 543 с.

UNIQUENESS OF THE ENTROPY SOLUTION TO THE DIRICHLET PROBLEM FOR AN ELLIPTIC EQUATION WITH A MEASURE-VALUED POTENTIAL IN A HYPERBOLIC SPACE

 V. F. Vildanova

Institute of Mathematics with Computing Centre of Ufa Scientific Center of RAS, Russia
e-mail: gilvenera@mail.ru

We consider the Dirichlet problem in the hyperbolic space for a nonlinear equation of the second order with measure-valued potential. The assumptions on the structure of the equation are stated in terms of a generalized N-function. The uniqueness of the entropy solution of the problem is proved.

Keywords: nonlinear equation, entropy solution, hyperbolic space

FUNDING

This work was carried out with the support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the state assignment (code of research topic FMRS-2022-0124).

REFERENCES

1. Vil'danova, V.F. and Mukminov, F.Kh., Entropy solution for an equation with measure-valued potential in a hyperbolic space, *Sb. Math.*, 2023, vol. 214, no. 11, pp. 1534–1559.
2. Benilan, Ph., Boccardo, L., Gallouët, Th., Gariepy, R., Pierre, M., and Vazquez, J.L., An L^1-theory of existence and nuniqueness of solutions of nonlinear elliptic equation, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 1995, vol. 22, no. 2, pp. 241–273.
3. Kozhevnikova, L.M. and Kashnikova, A.P., Equivalence of entropy and renormalized solutions of a nonlinear elliptic problem in Musielak–Orlicz spaces, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 1, pp. 34–50.
4. Saintier, N. and Véron L., Nonlinear elliptic equations with measure valued absorption potential, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 2021, vol. 22, no. 1, pp. 351–397.
5. Malusa, A. and Porzio M.M., Renormalized solutions to elliptic equations with measure data in unbounded domains, *Nonlin. Anal.*, 2007, vol. 67, no. 8, pp. 2370–2389.
6. Kashnikova, A.P. and Kozhevnikova L.M., Existence of solutions of nonlinear elliptic equations with measure data in Musielak–Orlicz spaces, *Sb. Math.*, 2022, vol. 213, no. 4, pp. 476–511.
7. Vildanova, V.F. and Mukminov, F.Kh., Perturbations of nonlinear elliptic operators by potentials in the space of multiplicators, *J. Math. Sci.*, 2021, vol. 257, no. 5, pp. 569–578.
8. Chlebicka, I. Measure data elliptic problems with generalized Orlicz growth, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A*, 2023, vol. 153, no. 2, pp. 588–618.
9. Chlebicka, I. and Nayar P., Essentially fully anisotropic Orlicz functions and uniqueness to measure data problem, *Math. Methods Appl. Sci.*, 2022, vol. 45, no. 14, pp. 8503–8527.
10. Musielak, J, *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, Berlin: Springer-Verlag, 1983.
11. Harjulehto, P. and Hästö, P., *Orlicz Spaces and Generalized Orlicz Spaces*, Cham: Springer, 2019.
12. Aubin, T., *Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère Equations*, New York: Springer-Verlag, 1982.
13. Gwiazda, P., Wittbold, P., Wroblewska, A., and Zimmermann, A., Renormalized solutions of nonlinear elliptic problems in generalized Orlicz spaces, *J. Differ. Equat.*, 2012, vol. 253, no. 2, pp. 635–666.
14. Kolmogorov, A.N. and Fomin, S.V., *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, Metric and Normed Spaces*, Graylock Press, 1957.