

ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО ПРОБЛЕМАМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ ПРИ МОСКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА*)

Ниже публикуются краткие аннотации докладов, состоявшихся в весеннем семестре 2024 г. (предыдущее сообщение о работе семинара дано в журнале “Дифференц. уравнения”. 2024. Т. 60. № 2; за дополнительной информацией обращаться по адресу: iline@cs.msu.ru)**)

А.С. Фурсов, Ц. Оу (МГУ ВМК, Москва, Россия) “О задаче слежения для динамической модели ленточного конвейера” (12.02.2024).

Рассматривается динамическая модель ленточного конвейера в виде следующей переключаемой системы:

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = \frac{u_1 - \mu v - m_1 g \sin \alpha}{m_0 + m_1}, \quad \dot{\alpha} = \omega, \quad \dot{\omega} = \frac{u_2 - p\omega}{h^2 s(m_0 + m_1)} - \frac{g \cos \alpha}{h}, \quad (1)$$

где x характеризует перемещение ленты конвейера, v и m_0 — линейная скорость и масса ленты конвейера, m_1 — общая масса грузов на конвейере, μ — коэффициент трения качения, g — ускорение свободного падения, u_1 — управление тягой конвейера, p — коэффициент осевого трения, h — положение центра масс конвейера относительно нижнего ролика, s — коэффициент, определяющий момент инерции конвейера, α — угол подъёма конвейера относительно горизонта, u_2 — управление углом ленты конвейера.

Для данной модели в работе [1] была сформулирована задача слежения, состоящая в поддержании на постоянном уровне значений скорости ленты и угла подъёма конвейера в процессе его функционирования при условии, что в произвольные моменты времени может производиться погрузка или разгрузка перемещаемых грузов, а именно, необходимо построить управление $u = (u_1, u_2)$, обеспечивающее стремление ошибок слежения e_v , e_α к нулю:

$$e_v = v_0 - v \rightarrow 0, \quad e_\alpha = \alpha_0 - \alpha \rightarrow 0,$$

где v_0 и α_0 — постоянные значения задающих сигналов.

При решении поставленной задачи в [1] было предложено для стабилизации скорости v использовать регулятор u_1 , обеспечивающий возникновение в замкнутой системе скользящего режима, а для стабилизации угла α — нечёткий регулятор u_2 .

В настоящей работе предлагается метод, позволяющий свести указанную выше задачу слежения к задаче стабилизации линейной интервальной системы статической обратной связью по состоянию.

*) Семинар основан академиками РАН С.В. Емельяновым и С.К. Коровиным.

**) Составитель хроники А.В. Ильин.

Итак, перепишем систему (1) в переменных e_v , e_α , ω :

$$\begin{aligned}\dot{e}_v &= \frac{\mu}{m_0 + m_1}(v_0 - e_v) + \frac{m_1 g}{m_0 + m_1} \sin(\alpha_0 - e_\alpha) - \frac{1}{m_0 + m_1} u_1, \quad \dot{e}_\alpha = -\omega, \\ \dot{\omega} &= -\frac{p}{h^2 s(m_1 + m_0)} \omega - \frac{g}{h} \cos(\alpha_0 - e_\alpha) + \frac{1}{h^2 s(m_1 + m_0)} u_2.\end{aligned}\quad (2)$$

Применяя к управляющим функциям u_1 , u_2 следующие преобразования:

$$u_1 = \mu v_0 + m_1 g \sin \alpha_0 + \bar{u}_1, \quad u_2 = sgh(m_1 + m_0) \cos \alpha_0 + \bar{u}_2, \quad (3)$$

перепишем систему (2) в виде

$$\begin{aligned}\dot{e}_v &= -\frac{\mu}{m_0 + m_1} e_v + \frac{m_1 g}{m_0 + m_1} (\sin(\alpha_0 - e_\alpha) - \sin \alpha_0) - \frac{1}{m_0 + m_1} \bar{u}_1, \quad \dot{e}_\alpha = -\omega, \\ \dot{\omega} &= -\frac{p}{h^2 s(m_1 + m_0)} \omega - \frac{g(\cos(\alpha_0 - e_\alpha) - \cos \alpha_0)}{h} + \frac{1}{h^2 s(m_1 + m_0)} \bar{u}_2\end{aligned}\quad (4)$$

и рассмотрим задачу стабилизации системы (4) в нулевом положении равновесия. Заметим, что функцию $h(t)$ приближённо можно считать кусочно-постоянной со значениями в некотором ограниченном множестве H . Учитывая это, линеаризуем систему (4) в некоторой окрестности нулевого положения равновесия (вариации переменных для упрощения обозначаем теми же буквами e_v , e_α , ω):

$$\begin{aligned}\dot{e}_v &= -\frac{\mu}{m_0 + m_1} e_v - \frac{m_1 g \cos \alpha_0}{m_0 + m_1} e_\alpha - \frac{1}{m_0 + m_1} \bar{u}_1, \quad \dot{e}_\alpha = -\omega, \\ \dot{\omega} &= -\frac{p}{h^2 s(m_1 + m_0)} \omega - \frac{g \sin \alpha_0}{h} e_\alpha + \frac{1}{h^2 s(m_1 + m_0)} \bar{u}_2\end{aligned}\quad (5)$$

и будем решать задачу стабилизации линейной системы (5), т.е. задачу поиска управления $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, обеспечивающего стремление к нулю её переменных состояния:

$$e_v \rightarrow 0, \quad e_\alpha \rightarrow 0, \quad \omega \rightarrow 0.$$

Заметим, что система (5) фактически является переключаемой системой, режимы которой описываются линейными стационарными подсистемами. Учитывая конечные диапазоны возможных изменений коэффициентов системы (5), сопоставим ей переключаемую линейную интервальную систему

$$\dot{e}_v = [a_{11}]e_v + [a_{12}]e_\alpha + [b_{11}]\bar{u}_1, \quad \dot{e}_\alpha = -\omega, \quad \dot{\omega} = [a_{32}]e_\alpha + [a_{33}]\omega + [b_{32}]\bar{u}_2 \quad (6)$$

или в матричной форме

$$\dot{\xi} = [A]\xi + [B]\bar{u}, \quad \xi = \begin{pmatrix} e_v \\ e_\alpha \\ \omega \end{pmatrix}, \quad [A] = \begin{pmatrix} [a_{11}] & [a_{12}] & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & [a_{32}] & [a_{33}] \end{pmatrix}, \quad [B] = \begin{pmatrix} [b_{11}] & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & [b_{32}] \end{pmatrix}.$$

Согласно [2, с. 25] если статическая обратная связь $\bar{u} = -K\xi$ (K — вещественная матрица размерности 2×3) обеспечивает существование единой функции Ляпунова для всех замкнутых этой обратной связью систем из интервального семейства (6), то она же обеспечивает

и стабилизацию переключаемой системы (5) в нуле. Нахождение указанной обратной связи может быть сведено в решении системы линейных матричных неравенств. При этом, выбирая должным образом указанную систему матричных неравенств, можно обеспечить наперёд заданную степень устойчивости замкнутой системы. Далее, переходя к управлению $u = (u_1, u_2)$ в соответствии с формулами (3) и заменяя функции m_1 и h их средними значениями из соответствующих интервалов, получаем решение исходной задачи слежения для системы (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

Литература. 1. Дружинина, О.В. Математическое моделирование систем конвейерного транспорта с интеллектуальным управлением / О.В. Дружинина, О.Н. Масина, А.А. Петров // Транспорт: наука, техника, управление. — 2021. — № 4. — С. 3–8. 2. Liberzon, D. Switching in Systems and Control / D. Liberzon. — Boston : Springer, 2003. — 233 p.

А. К. Деменчук (ИМ НАН Беларуси, Минск, Беларусь) “Сильно нерегулярное периодическое решение линейной периодической системы с программным управлением” (19.02.2024).

Будем рассматривать линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2, \quad (1)$$

в которой $A(t)$ — непрерывная ω -периодическая $n \times n$ -матрица, B — постоянная $n \times r$ -матрица ($r \leq n$), u — управление. Вопросы управляемости линейных систем изучались во многих работах в предположении совпадения частот решения и самой системы (см., например, [1]). Такой подход был обусловлен тем, что до середины XX века исследования по периодическим решениям дифференциальных систем базировались на предположении о соизмеримости периодов решения и самой системы, поэтому другие возможные соотношения частот не изучались.

По-видимому, первым, кто более детально исследовал данную проблему, был Х. Массера. В 1950 г. он показал, что периодические дифференциальные системы могут иметь периодические решения с иррациональным отношением периодов решения и системы [2]. Этот результат послужил началом нового направления в качественной теории дифференциальных уравнений, которое впоследствии развивалось для различных классов систем и их решений в работах [3–9] и др. Такие периодические решения ввиду их необычности, в сравнении с ранее изучавшимися, были названы *сильно нерегулярными*, их частотный спектр — *асинхронным*, а описываемые ими колебания — *асинхронными*.

Сложившееся мнение о невозможности, а затем об исключительности сильно нерегулярных колебаний отчасти было продиктовано схожей ситуацией в прикладных областях. В теории механических колебаний широко использовалось предположение о том, что поддерживаемые внешней гармонической силой колебания всегда происходят с частотой этой силы или кратной ей. Одна из причин такого предположения состоит в рассмотрении относительно простых систем, а также игнорировании целого ряда специфических эффектов (инерционных, термических и др.), вносящих временные сдвиги между значениями действующей силы и значениями динамических функций колебаний, которые могут привести к асинхронному возбуждению незатухающих колебаний. Между тем ещё в середине 30-х гг.

XX века в исследованиях под руководством Л.И. Мандельштама и Н.Д. Папалекси изучалась возможность параметрического воздействия на двухконтурные системы, при котором возбуждение колебаний осуществлялось на частотах, находящихся практически в любом отношении с частотами параметров системы [10]. Позднее в этом направлении исследовался, в частности, ряд систем, преобразующих энергию источника высокочастотных колебаний в низкочастотные колебания, частота которых практически не зависит от частоты источника (см., например, [11]).

Задача построения периодических дифференциальных систем, функционирующих в асинхронном режиме, сформулирована в работе [12] как задача управления асинхронным спектром. Далее в качестве управляющего воздействия $u(\cdot)$ в системе (1) будем использовать непрерывные на вещественной оси периодические r -вектор-функции, множество частот которых содержится в модуле частот матрицы коэффициентов. Тогда применительно к линейной системе (1) задача управления асинхронным спектром с целевым множеством L состоит в следующем: выбрать из указанного допустимого множества такое программное управление $u = U(t)$, чтобы система

$$\dot{x} = A(t)x + Bu(t) \quad (2)$$

имела сильно нерегулярное периодическое решение с заданным спектром частот L (целевым множеством). Если же требовать наличия у системы (2) только сильно нерегулярного периодического решения, без предварительного задания целевого множества, то такую (несколько менее жёсткую) задачу будем называть *задачей синтеза асинхронного режима (задачей возбуждения асинхронных колебаний)*.

Вопросы разрешимости сформулированных задач для системы (1) на основе вида среднего значения матрицы коэффициентов исследовались в статьях [13, 14]. Случай максимального ранга матрицы (равного числу её столбцов) при управлении изучен в [15].

В настоящей работе, предполагая, что ранг матрицы при управлении меньше числа её столбцов, укажем строение сильно нерегулярного периодического решения системы (2).

Для непрерывной на всей числовой оси ω -периодической вещественнозначной матрицы $F(t)$ определим её среднее значение $\hat{F} = \omega^{-1} \int_0^\omega F(t) dt$ и осциллирующую часть $\tilde{F}(t) = F(t) - \hat{F}$. Через $\text{rank}_{\text{col}} F$ обозначим столбцовый ранг матрицы $F(t)$ — наибольшее число её линейно независимых столбцов. Подобным образом можно определить и строчный ранг матрицы. Отметим, что в общем случае строчный и столбцовый ранги матрицы $F(t)$ могут не совпадать.

Далее считаем, что ранг постоянной матрицы B при управлении не является максимальным:

$$\text{rank } B = r_1 < r, \quad d_1 = n - r_1.$$

Тогда найдётся постоянная неособенная $n \times n$ -матрица S такая, что у матрицы SB будет d_1 нулевых первых строк. Введём замену фазовых переменных $y = Sx$, приводящую (1) к системе

$$\dot{y} = C(t)y + Du, \quad C(t) = SA(t)S^{-1}, \quad D = SB, \quad (3)$$

и соответствующей ей системе

$$\dot{y} = C(t)y + Du(t). \quad (4)$$

Через $C_{d_1,n}(t)$ обозначим матрицу размерности $d_1 \times n$, составленную из первых d_1 строк матрицы $C(t)$, а через $\tilde{C}_{d_1,n}(t)$ — её осциллирующую часть.

Укажем необходимое условие существования решения задачи возбуждения асинхронных колебаний.

Лемма. Для разрешимости задачи возбуждения асинхронных колебаний в системе (3) необходимо выполнение оценки

$$\text{rank}_{\text{col}} \tilde{C}_{d_1, n} = r_2 < n. \quad (5)$$

Оказывается, что в случае разрешимости между компонентами искомого решения системы (2) существует линейная зависимость, тесно связанная с оценкой (5), т.е. справедлива

Теорема. Пусть для системы (3) разрешима задача возбуждения асинхронных колебаний и $y = y(t) = \text{col}(y_1, \dots, y_n)$ — сильно нерегулярное периодическое решение системы (4). Тогда найдутся два набора попарно различных натуральных индексов (их можно считать упорядоченными)

$$1 \leq i_1 < \dots < i_{n-r_2} \leq n, \quad 1 \leq i_{n-r_2+1} < \dots < i_n \leq n$$

и некоторая постоянная $r_2 \times (n - r_2)$ -матрица F такие, что между координатами вектора y будет линейная зависимость вида

$$\text{col}(y_{i_{n-r_2+1}}, \dots, y_{i_n}) = F \text{col}(y_{i_1}, \dots, y_{i_{r_2}}).$$

Замечание. Аналогичный результат имеет место и в случае задачи управления асинхронным спектром.

Исследование выполнено в рамках гранта Президента Республики Беларусь на 2024 г.

Литература. 1. Zubov, V.I. Лекции по теории управления / В.И. Зубов. — М.: Наука, 1975. — 495 с. 2. Massera, J.L. Observaciones sobre las soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales / J.L. Massera // Bol. de la Facultad de Ingenieria. — 1950. — V. 4, № 1. — P. 37–45. 3. Курцвейль, Я. О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Я. Курцвейль, О. Вейвода // Чехосл. мат. журн. — 1955. — Т. 5, № 3. — С. 362–370. 4. Еругин, Н.П. О периодических решениях дифференциальных уравнений / Н.П. Еругин // Прикл. математика и механика. — 1956. — Т. 20, № 1. — С. 148–152. 5. Еругин, Н.П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами / Н.П. Еругин. — Минск: Изд-во АН БССР, 1963. — 273 с. 6. Гайшун, И.В. Уравнения в полных производных с периодическими коэффициентами / И.В. Гайшун // Докл. АН БССР. — 1979. — Т. 23, № 8. — С. 684–686. 7. Грудю, Э.И. Периодические системы, имеющие решения с несоизмеримыми периодами по отношению к периоду системы / Э.И. Грудю // Успехи мат. наук. — 1986. — Т. 41, № 4. — С. 200. 8. Грудю Э.И. О периодических решениях с несоизмеримыми периодами линейных неоднородных периодических дифференциальных систем / Э.И. Грудю, А.К. Деменчук // Дифференц. уравнения. — 1987. — Т. 23, № 3. — С. 409–416. 9. Борухов, В.Т. Сильно инвариантные подпространства неавтономных линейных периодических систем и их решения с периодом, несоизмеримым с периодом системы / В.Т. Борухов // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 5. — С. 585–591. 10. Папалекси, Н.Д. Об одном случае параметрически связанных систем / Н.Д. Папалекси // J. Phys. Acad. Sci. USSR. — 1939. — Т. 1. — С. 373–379. 11. Асинхронное возбуждение незатухающих колебаний / Д.И. Пеннер, Д.Б. Дубошинский, М.И. Козаков [и др.] // Успехи физ. наук. — 1973. — Т. 109, № 2. — С. 402–406. 12. Деменчук, А.К. Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний / А.К. Деменчук // Докл. НАН Беларуси. — 2009. — Т. 53, № 4. — С. 37–42. 13. Деменчук, А.К. Управление асинхронным спектром линейных систем с нулевым средним значением матрицы коэффициентов / А.К. Деменчук // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. — 2018. — Т. 26, № 1. — С. 31–34. 14. Деменчук, А.К. Управление асинхронным спектром линейных систем с матрицей при управлении максимального ранга / А.К. Деменчук // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. — 2019. — Т. 27, № 1-2. — С. 23–28. 15. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. — М.: Наука, 1989. — 666 с.

В. Е. Хартовский (ГрГУ имени Я. Купалы, Гродно, Беларусь) “К вопросу асимптотической наблюдаемости линейных непрерывно-дискретных систем” (26.02.2024).

В настоящей работе исследуются линейные автономные гибридные непрерывно-дискретные системы с известным выходным сигналом, измеряемым в дискретные моменты времени:

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (1)$$

$$x_2(t_{k+1}) = A_{21}x_1(t_k) + A_{22}x_2(t_k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

$$y(t_k) = \sum_{j=0}^m (C_{1j}x_1(t_{k-j}) + C_{2j}x_2(t_{k-j})), \quad k = m, m+1, \dots, \quad (3)$$

где $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$, $i, j = 1, 2$; $C_{ij} \in \mathbb{R}^{l \times n_i}$, $i = 1, 2$, $j = \overline{0, m}$; y — наблюдаемый выходной сигнал; $t_k = kh$, $k = 0, 1, \dots$, $h > 0$ — шаг квантования.

Обозначим $X(t) = \text{col}[x_1(t), x_2(t)]$. Начальное состояние для системы (1), (2) имеет вид

$$X(0) = \text{col}[a_1, a_2], \quad a_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Под *решением системы* (1), (2) с начальным условием (4) понимается пара функций $\{x_1(t), t \geq 0, x_2(t_k), k = 0, 1, \dots\}$, удовлетворяющих уравнениям (1), (2) и начальному условию (4), где $x_1(t)$, $t \geq 0$, — непрерывная функция, дифференцируемая при $t \neq t_j$, $j = 0, 1, \dots$; $x_2(t_k)$, $k = 0, 1, \dots$, — дискретная функция. В уравнении (1) при $t = t_k$ понимается правосторонняя производная.

Системы вида (1)–(3) можно интерпретировать [1] как непрерывные системы при воздействии регуляторов дискретного действия. Различные свойства наблюдаемости таких систем при $m = 0$ подробно изучены в работе [1]. Предлагаемый нами подход, в отличие от [1], основывается на решении задачи асимптотической наблюдаемости [2, 3], а также на методах построения наблюдателей из [4].

Предположим, что начальное условие (4) неизвестно. Цель исследования — по измерениям наблюдаемого выхода (3) восстановить вектор $X(t_0)$, где $t_0 > 0$ — достаточно большой момент времени.

Определение 1. Будем говорить, что система (1), (2) *финально наблюдаема*, если существует число $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что из условия $y(t_k) = 0$, $k = \overline{m, k_0}$, следует $X(t_{k_0}) = 0$.

Введём матрицы

$$A = \begin{bmatrix} e^{A_{11}h} & \int_0^h e^{A_{11}(h-\tau)} d\tau A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad C_j = [C_{1j}, C_{2j}], \quad C(\lambda) = \sum_{j=0}^m \lambda^j C_j.$$

Следуя идеям работы [1], можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. Для того чтобы система (1), (2) была финально наблюдаемой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rank} \begin{bmatrix} I_n - \lambda A \\ C(\lambda) \end{bmatrix} = n, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

Предположим, что условие (5) нарушается. В этом случае представляет интерес возможность восстановления текущего состояния $X(t_0)$ с некоторой ошибкой, стремящейся к нулю с возрастанием t_0 .

Определение 2. Будем говорить, что система (1), (2) *асимптотически наблюдаема*, если из условия $y(t_k) = 0$, $k = m, m+1, \dots$, следует $\|X(t_k)\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$.

Далее понадобятся некоторые обозначения. Пусть $B_j = C_j^T$. Построим уравнение

$$B_0 g(k+1) + \sum_{i=1}^m B_i g(k+1-i) = 0, \quad k = m, m+1, \dots \quad (6)$$

Последовательность $g(k)$, $k = m, m+1, \dots$, определяемая уравнением (6) и начальными условиями $g(i) = g_i$, $i = \overline{1, m}$, $g_i \in \mathbb{R}^l$, существует в том и только в том случае [5], если $g_{m-i} = T_i c$, $i = \overline{1, m}$, где $T_i \in \mathbb{R}^{l \times r}$ ($r \in \mathbb{N}$) — некоторые матрицы, $c \in \mathbb{R}^r$ — произвольный вектор (один и тот же для всех матриц T_i). Способ построения матриц T_i основан [5] на решении конечной цепочки алгебраических линейных систем. Набор матриц $\{T_i, i = \overline{1, m}\}$ назовём *базисным набором матриц* для уравнения (6). Если матрицы T_i образуют базисный набор, то любой другой базисный набор матриц образуют матрицы $\{T_i K, i = \overline{1, m}\}$, где K — некоторая невырожденная матрица.

Зафиксируем произвольный базисный набор матриц $\{T_i, i = \overline{1, m}\}$ и определим множество матриц

$$\mathbf{S} = \left\{ S \in \mathbb{R}^{r \times r} : B_0 T_1 S + \sum_{i=1}^m B_i T_i = 0, \quad T_k S = T_{k-1}, \quad k = \overline{2, m} \right\}.$$

В статье [6] предложен способ выбора из множества $\mathbf{S}$ матрицы с заданным спектром (или с заданной частью спектра) и получены условия возможности такого выбора. Пусть

$$G(\lambda, S) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i \sum_{j=0}^i B_j T S^{i-j},$$

где $S \in \mathbf{S}$, $\rho(S)$ — спектральный радиус матрицы S .

Теорема 2. Пусть существует матрица $S_0 \in \mathbf{S}$ такая, что $\rho(S_0) < 1$ и

$$\text{rank} \begin{bmatrix} I_n - \lambda A \\ C(\lambda) \\ (G(\lambda, S_0))^T \end{bmatrix} = n, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (7)$$

Тогда система (1), (3) *асимптотически наблюдаема*.

Схема доказательства. Если выполняется условие (7), то [7] существуют полиномиальные матрицы $M_{ij}(\lambda)$, $i = 1, 2$, $j = \overline{1, 3}$, подходящих размеров такие, что

$$\begin{vmatrix} I_n - \lambda A - \lambda M_{11}(\lambda) C(\lambda) - \lambda M_{13}(\lambda) (G(\lambda, S_0))^T & -\lambda M_{12}(\lambda) \\ -\lambda M_{21}(\lambda) C(\lambda) - \lambda M_{23}(\lambda) (G(\lambda, S_0))^T & I_l - \lambda M_{22}(\lambda) \end{vmatrix} \equiv 1.$$

Пусть $M_{ik}(\lambda) = \sum_{j=0}^{m_0} \lambda^j M_{ik}^j$, где M_{ik}^j — постоянные матрицы подходящих размеров. Определим систему с дискретным временем:

$$\begin{aligned} z_1(t_{k+1}) &= A z_1(t_k) + \sum_{j=0}^{m_0} M_{11}^j \sum_{i=0}^m C_i z_1(t_{k-j-i}) + \sum_{j=0}^{m_0} M_{12}^j z_2(t_{k-j}) + \sum_{j=0}^{m_0} M_{13}^j z_3(t_{k-j}) - \sum_{j=0}^{m_0} M_{11}^j w(t_{k-j}), \\ z_2(t_{k+1}) &= \sum_{j=0}^{m_0} M_{21}^j \sum_{i=0}^m C_i z_1(t_{k-j-i}) + \sum_{j=0}^{m_0} M_{22}^j z_2(t_{k-j}) + \sum_{j=0}^{m_0} M_{23}^j z_3(t_{k-j}) - \sum_{j=0}^{m_0} M_{21}^j w(t_{k-j}), \end{aligned}$$

$$z_3(t_{k+1}) = T_m^T \sum_{i=0}^m C_i z_1(t_{k-i}) + S_0^T z_3(t_k) - T_m^T w(t_k), \quad k = k_0, k_0 + 1, \dots, \quad k_0 \geq m_0 + m, \quad (8)$$

где матрица T_m берётся из описанного выше базисного набора матриц. Начальные условия для системы (8) возьмём в виде

$$z_1(t_k) = b_k^1, \quad k = \overline{k_0 - (m + m_0), k_0}; \quad z_2(t_k) = b_k^2, \quad z_3(t_k) = b_k^3, \quad k = \overline{k_0 - m_0, k_0}, \quad (9)$$

где b_k^1, b_k^2, b_k^3 — некоторые векторы подходящего размера. Легко видеть, что если нарушается условие (5), то среди матриц M_{i3}^j по крайней мере одна является ненулевой. Пусть произвольное, но фиксированное начальное состояние (4) системы (1)–(3) порождает выход $y(t_k) = \hat{y}(t_k)$, $k = m, m + 1, \dots$. Считаем, что $\rho(S_0) < 1$. Тогда, используя подход [4], можно показать, что если $w(t_k) = \hat{y}(t_k)$, $k = k_0, k_0 + 1, \dots$, то каково бы ни было начальное условие (9) для соответствующих решений систем (1)–(3) и (8) выполняется соотношение $\|z_1(t_k) - X(t_k)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Теорема доказана.

Литература. 1. Марченко, В.М. Наблюдаемость гибридных дискретно-непрерывных систем // В.М. Марченко // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, № 11. — С. 1421–1435. 2. Ильин, А.В. Синтез наблюдателей для асимптотически наблюдаемых систем с запаздыванием / А.В. Ильин, А.В. Буданова, В.В. Фомичев // Докл. РАН. — 2013. — Т. 448, № 4. — С. 399–402. 3. Хартовский, В.Е. К вопросу об асимптотической оценке решения линейных стационарных систем нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями / В.Е. Хартовский // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 12. — С. 1701–1716. 4. Хартовский, В.Е. Синтез наблюдателей для линейных систем нейтрального типа / В.Е. Хартовский // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 3. — С. 409–422. 5. Хартовский, В.Е. Об одном линейном автономном дескрипторном уравнении с дискретным временем. I. Приложение к задаче 0-управляемости / В.Е. Хартовский // Вестн. Удмуртск. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. — 2020. — № 2. — С. 290–311. 6. Хартовский, В.Е. Об одном линейном автономном дескрипторном уравнении с дискретным временем. II. Каноническое представление и структурные свойства / В.Е. Хартовский // Изв. Ин-та математики и информатики Удмуртск. гос. ун-та. — 2020. — Т. 55. — С. 102–121. 7. Хартовский, В.Е. Спектральное приведение линейных систем нейтрального типа / В.Е. Хартовский // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 3. — С. 375–390.

А. И. Мачтакова, Н. Н. Петров (УдГУ, Ижевск, Россия) “Задача группового преследования в линейных нестационарных дифференциальных играх с дробными производными” (25.03.2024).

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра $n + 1$ лиц: преследователей $P_1, \dots, P_n$ и убегающего E , описываемая системой

$$D^{(\alpha)} z_i = A_i(t) z_i + u_i - v, \quad z_i(t_0) = z_i^0, \quad u_i \in U_i, \quad v \in V. \quad (1)$$

Здесь $D^{(\alpha)}$ — производная по Капуто порядка α , $\alpha \in (0, 1)$, $A_i(t)$ — непрерывные матричные функции порядка $k \times k$, $z_i, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, U_i, V — компакты в $\mathbb{R}^k$, $i \in I = \{1, \dots, n\}$. Заданы терминальные множества $M_i^* = M_i + M_i^0$, где M_i — линейные подпространства пространства $\mathbb{R}^k$, M_i^0 — выпуклые компакты из L_i — ортогонального дополнения к M_i в $\mathbb{R}^k$. Считаем, что $z_i^0 \notin M_i^*$ для всех $i \in I$.

Определение 1. Будем говорить, что задана *квазистратегия* $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i , если определено отображение U_i^0 , ставящее в соответствие начальным позициям $z^0 = z_i^0$, $i \in I$, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего E измеримую функцию $u_i(t)$ со значениями в U_i .

Обозначим данную игру $G(n, z^0)$.

Определение 2. В игре $G(n, z^0)$ происходит *поимка*, если существуют момент $T > 0$ и квазистратегии $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ преследователей $P_1, \dots, P_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(t) \in V$, $t \in [t_0, T]$, существуют момент $\tau \in [t_0, T]$ и номер $p \in I$, для которых $z_p(\tau) \in M_p$.

Введём следующие обозначения [1]: E — единичная матрица порядка $k \times k$; $\text{Int } A$, со A — соответственно внутренность и выпуклая оболочка множества A ; $\pi_i: \mathbb{R}^k \rightarrow L_i$ — оператор ортогонального проектирования;

$$\Gamma(\beta) = \int_0^{+\infty} s^{\beta-1} e^{-s} ds; \quad {}_\tau J_t f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds;$$

$$G_i^0(t, \tau) = \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E, \quad G_i^{l+1}(t, \tau) = {}_\tau J_t (A_i(t) G_i^l(t, \tau)), \quad l=0, 1, \dots; \quad \Phi_i(t, \tau) = \sum_{l=0}^{+\infty} G_i^l(t, \tau);$$

$$\tilde{G}_i^0(t, \tau) = E, \quad \tilde{G}_i^{l+1}(t, \tau) = {}_\tau J_t (A_i(t) \tilde{G}_i^l(t, \tau)), \quad l=0, 1, \dots; \quad \Psi_i(t, \tau) = \sum_{l=0}^{+\infty} \tilde{G}_i^l(t, \tau);$$

$$W_i(t, \tau, v) = \pi_i \Phi_i(t, \tau) (U_i - v); \quad W_i(t, \tau) = \bigcap_{v \in V} W_i(t, \tau, v).$$

Предположение. Для всех $i \in I$, $t \geq t_0$, $\tau \in [t_0, t]$ выполнено условие $W_i(t, \tau) \neq \emptyset$.

Из теоремы об измеримом выборе [2, теорема 8.1.3] следует, что для каждого $i \in I$ при любом $t \geq t_0$ существует хотя бы один измеримый селектор $\gamma_i(t, \tau) \in W_i(t, \tau)$ для всех $t \geq t_0$, $\tau \in [t_0, t]$. Выберем произвольные измеримые селекторы $\gamma_i(t, \tau)$, зафиксируем их и обозначим

$$\xi_i(t) = \pi_i \Psi_i(t, t_0) z_i^0 + \int_{t_0}^t \gamma_i(t, \tau) d\tau.$$

Теорема 1. Пусть выполнено предположение и существуют $T > t_0$, $l \in I$ такие, что $\xi_l(T) \in M_l^0$. Тогда в игре $G(n, z^0)$ происходит поимка.

В дальнейшем будем считать, что $\xi_i(t) \notin M_i^0$ для всех $i \in I$, $t \geq t_0$.

Определим далее

$$\lambda_i(t, \tau, v) = \sup \{ \lambda \geq 0: \lambda (M_i^0 - \xi_i(t)) \cap (W_i(t, \tau, v) - \gamma_i(t, \tau)) \neq \emptyset \}, \quad \delta(t, \tau) = \min_{v \in V} \max_{i \in I} \lambda_i(t, \tau, v).$$

Теорема 2. Пусть выполнено предположение и $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t \delta(t, s) ds = +\infty$. Тогда в игре $G(n, z^0)$ происходит поимка.

Пример. Рассмотрим игру $G(2, z^0)$, в которой система (1) имеет вид

$$D^{(\alpha)} z_{i1} = t \cdot z_{i2}, \quad D^{(\alpha)} z_{i2} = u_i - v, \quad z_i(0) = z_i^0.$$

Здесь $I = \{1, 2\}$, $z_i = (z_{i1}, z_{i2}) \in \mathbb{R}^2$, $U_i = V = [-1, 1]$, $M_i^* = \{(z_{i1}, z_{i2}) \in \mathbb{R}^2: z_{i1} = 0\}$, $z_1^0 = (-1, -1)$, $z_2^0 = (1, 1)$. Обозначим

$$p(t, \tau) = \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad q(t, \tau) = \frac{\alpha(t-\tau)^{2\alpha-1}(t+\tau)}{\Gamma(2\alpha+1)}, \quad r(t, \tau) = \frac{(t-\tau)^\alpha(t+\alpha\tau)}{\Gamma(\alpha+2)}, \quad f(t) = 1 + \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}.$$

Тогда [1]

$$\Psi_i(t, \tau) = \begin{pmatrix} 1 & r(t, \tau) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_i(t, \tau) = \begin{pmatrix} p(t, \tau) & q(t, \tau) \\ 0 & p(t, \tau) \end{pmatrix}, \quad \pi_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $M_i^0 = \{0\}$,

$$\begin{aligned} W_i(t, \tau, v) &= q(t, \tau)(V - v), \quad W_i(t, \tau) = \{0\}, \quad \gamma_i(t, \tau) = 0, \\ \xi_1(t) &= \pi_1 \Psi_1(t, 0) z_1^0 = -f(t), \quad \xi_2(t) = \pi_2 \Psi_2(t, 0) z_2^0 = f(t), \\ \lambda_1(t, \tau, v) &= \frac{q(t, \tau)(1 - v)}{f(t)}, \quad \lambda_2(t, \tau, v) = \frac{q(t, \tau)(1 + v)}{f(t)}, \quad \delta(t, \tau) = \frac{q(t, \tau)}{f(t)}. \end{aligned}$$

Так как $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \delta(t, s) ds = +\infty$, то выполнены все условия теоремы 2, и, значит, в игре $G(2, z^0)$ происходит поимка.

Теорема 3. Пусть в системе (1) $t_0 = 0$, для всех $i \in I$ $A_i(t) = a_i E$ при $t \geq 0$, $M_i^* = \{0\}$, $U_i = V = \{v: \|v\| \leq 1\}$, $a_i \leq 0$ и $0 \in \text{Int co}\{z_i^0, i \in I\}$. Тогда в игре $G(n, z^0)$ происходит поимка.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № FEWS-2024-0009.

Литература. 1. Matychyn, I. Game-theoretical problems for fractional-order nonstationary systems / I. Matychyn, V. Onyshchenko // Fract. Calc. Appl. Anal. — 2023. — V. 26. — P. 1031–1051. 2. Aubin, J.P. Set-Valued Analysis / J.P. Aubin, H. Frankowska. — Boston : Birkhauser, 1990. — 461 p.

С. Н. Попова, Э. А. Фахразиева (УдГУ, Ижевск, Россия) “О свойстве локальной достижимости линейных управляемых гибридных систем” (08.04.2024).

Рассмотрим линейную управляемую гибридную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{11}(t)x(t) + A_{12}(k)y(k) + B_{11}(t)u(t) + B_{12}(k)v(k), \\ y(k+1) &= A_{21}(k)x(k) + A_{22}(k)y(k) + B_{21}(k)u(k) + B_{22}(k)v(k), \end{aligned} \quad (1)$$

где $t \in [k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, $u \in \mathbb{R}^{m_1}$, $v \in \mathbb{R}^{m_2}$; функции $A_{11}: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ и $B_{11}: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 \times m_1}$ кусочно-непрерывны, могут иметь лишь разрывы первого рода и непрерывны справа в точках разрыва; управление $u: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$ кусочно-непрерывно, может иметь лишь разрывы первого рода и непрерывно справа в точках разрыва; функции $A_{j2}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_j \times n_2}$, $B_{j2}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_j \times m_2}$ ($j = 1, 2$) и $B_{21}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_2 \times m_1}$ произвольны; управление $v: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ произвольно.

Под решением системы (1) при выбранных управлениях $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ понимаем функцию

$$z = z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}, \quad t \in [k, k+1), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

такую, что $x(t)$ и $y(k)$ удовлетворяют системе (1) при $t \in (k, k+1)$, при этом функция $x(t)$ непрерывна на промежутке $[0, +\infty)$.

Выберем в системе (1) управления $u(t) \equiv 0 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $v(t) \equiv 0 \in \mathbb{R}^{m_2}$ и получим свободную систему

$$\dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(k)y(k), \quad y(k+1) = A_{21}(k)x(k) + A_{22}(k)y(k). \quad (2)$$

Пусть $X(t, s)$ — матрица Коши системы

$$\dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t).$$

Положим

$$Z(k+1, k) = \begin{pmatrix} X(k+1, k) & \int_k^{k+1} X(k+1, s) ds A_{12}(k) \\ A_{21}(k) & A_{22}(k) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$Z(k, l) = Z(k, k-1)Z(k-1, k-2) \dots Z(l+1, l) = \prod_{j=l}^{k-1} Z(j+1, j), \quad k, l \in \mathbb{N}_0, \quad k > l.$$

Тогда для произвольного решения $z(\cdot)$ системы (2) справедливо равенство

$$z(k) = Z(k, l)z(l), \quad k, l \in \mathbb{N}_0, \quad k > l.$$

Будем называть матрицу $Z(k, l)$, $k, l \in \mathbb{N}_0$, $k > l$, *матрицей Коши* гибридной системы (2) в целочисленные моменты времени.

Замкнем систему (1) линейной обратной связью

$$u(t) = U(t)x(t), \quad v(k) = V(k)y(k),$$

где функция $U: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$ кусочно-непрерывна, может иметь лишь разрывы первого рода и непрерывна справа в точках разрыва; функция $V: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$ произвольна. В итоге получим замкнутую систему

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A_{11}(t) + B_{11}(t)U(t))x(t) + (A_{12}(k) + B_{12}(k)V(k))y(k), \\ y(k+1) &= (A_{21}(k) + B_{21}(k)U(k))x(k) + (A_{22}(k) + B_{22}(k)V(k))y(k). \end{aligned} \quad (3)$$

Положим $W(t) = (U(t), V(k))$, $t \in [k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Система (3) имеет вид (2), поэтому для неё также можно определить матрицу Коши в целочисленные моменты времени, которую будем обозначать $Z_W(k, l)$, $k, l \in \mathbb{N}_0$, $k > l$.

Определение 1. Пусть $k, l \in \mathbb{N}_0$, $k > l$. Система (3) называется *локально достижимой на отрезке* $[l, k]$, если найдётся такое $r > 0$, что для любой матрицы $H \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}$, удовлетворяющей неравенству $\|H - E\| \leq r$ ($E \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}$ — единичная матрица), существует управление $W(t) = (U(t), V(j))$, $t \in [j, j+1)$, $j \in \{l, \dots, k-1\} \subset \mathbb{N}_0$, такое, что $Z_W(k, l) = Z(k, l)H$.

Определение 2 [1]. Пусть $k, l \in \mathbb{N}_0$, $k > l$. Система (1) называется *вполне управляемой на отрезке* $[l, k]$, если для любых $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ и $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^{n_2}$ найдутся допустимые управления $u: [l, k) \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$ и $v: [l, k-1] \cap \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ такие, что решение $(x(\cdot), y(\cdot))$ системы (1) с начальными условиями $x(l) = x_0$, $y(l) = y_0$ и с выбранными $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ удовлетворяет равенствам $x(k) = x_1$, $y(k) = y_1$.

Теорема. Пусть $k, l \in \mathbb{N}_0$, $k > l$. Если система (1) вполне управляема на отрезке $[l, k]$, то соответствующая замкнутая система (3) локально достижима на этом отрезке.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № FEWS-2024-0009.

Литература. 1. Марченко, В.М. Гибридные дискретно-непрерывные системы. II. Управляемость и достижимость / В.М. Марченко // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, № 1. — С. 111–122.

Т. С. Быкова, В. А. Зайцев (УдГУ, Ижевск, Россия) “Об управлении спектром показателей линейных нестационарных систем в гильбертовом пространстве” (22.04.2024).

Пусть $\mathfrak{X}$ — сепарабельное гильбертово пространство; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathfrak{X}$; $\|x\|_{\mathfrak{X}} := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ — норма в $\mathfrak{X}$; $I: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ — тождественный оператор в $\mathfrak{X}$. Мы отождествляем

двойственное пространство $\mathfrak{X}^*$ с $\mathfrak{X}$. Через $\mathcal{L}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$ обозначим банахово пространство линейных ограниченных операторов $F: \mathfrak{X}_1 \rightarrow \mathfrak{X}_2$ с нормой $\|F\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)} := \sup\{\|Fx\|_{\mathfrak{X}_2} : \|x\|_{\mathfrak{X}_1} \leq 1\}$ (далее будем опускать индекс в обозначениях норм).

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathfrak{X}. \quad (1)$$

Предполагаем, что функция $A(\cdot)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $A(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ для всех $t \in \mathbb{R}$;
- 2) функция $\mathbb{R} \ni t \mapsto A(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ кусочно строго непрерывна;
- 3) $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|A(t)\| =: a < +\infty$.

Под *решением системы* (1) понимаем решение интегрального уравнения $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(s)x(s) ds$, где $x(t_0) = x_0$.

Через $\Phi(t, \tau)$ обозначим эволюционный оператор системы (1) [1, с. 147], т.е. решение операторной системы $dX/dt = A(t)X$, $X(\tau) = I$.

Через Σ_A обозначим *спектр показателей* [1, с. 170] системы (1), т.е. множество всех (верхних) показателей экспоненциального роста $\varkappa = \limsup_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln \|x(t)\|$ всевозможных (нетривиальных) решений $x(t)$ системы (1). В силу условия 3) для некоторого $a_1 > 0$ выполнено $\Sigma_A \subset [-a_1, a_1]$. Спектр показателей Σ_A системы (1) характеризует асимптотическое поведение решений системы (1), в частности, условие $\sup \Sigma_A < 0$ является достаточным условием экспоненциальной устойчивости системы (1).

Рассмотрим линейную систему управления

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathfrak{X}, \quad u \in \mathfrak{U}; \quad (2)$$

здесь $\mathfrak{U}$ — сепарабельное гильбертово пространство; $A(t)$ удовлетворяет условиям 1)–3); $B(t)$ удовлетворяет следующему условию:

- 4) для любого $t \in \mathbb{R}$ $B(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{X})$, функция $t \mapsto B(t)$ кусочно строго непрерывна и $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|B(t)\| < +\infty$.

В качестве допустимых управлений для системы (2) на некотором конечном промежутке $[t_0, t_1]$ выбираются функции $u(\cdot) \in L_2([t_0, t_1], \mathfrak{U})$.

Определение 1 [2]. Система (2) называется *в точности управляемой на отрезке* $[t_0, t_1]$, если для любых $x_0, x_1 \in \mathfrak{X}$ существует допустимое управление $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, которое переводит решение системы (2) из состояния $x(t_0) = x_0$ в состояние $x(t_1) = x_1$.

Пусть управление в системе (2) имеет вид линейной обратной связи по состоянию:

$$u(t) = U(t)x(t), \quad (3)$$

где $U(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{U})$ при всех $t \in \mathbb{R}$, $U(\cdot)$ кусочно строго непрерывна, $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|U(t)\| < +\infty$ (в этом случае управление (3) будет допустимым на любом промежутке $[t_0, t_1]$). Оператор обратной связи $U(\cdot)$, удовлетворяющий таким условиям, будем называть *допустимым*. Замкнутая система принимает вид

$$\dot{x}(t) = (A(t) + B(t)U(t))x(t). \quad (4)$$

Исследуется задача управления спектром показателей системы (4) в следующей постановке: с помощью допустимого оператора обратной связи $U(\cdot)$ требуется сдвинуть спектр показателей системы на произвольную наперёд заданную величину относительно спектра показателей свободной системы (1). Скажем, что *спектр показателей системы (4) допус-*

кает произвольный сдвиг, если для любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ существует допустимый оператор $U(\cdot)$ такой, что $\Sigma_{A+BU} = \Sigma_A + \lambda$.

Аналогичная задача об управлении верхним показателем Боля была решена в работе [3] для системы (2) с постоянными коэффициентами ($A(t) \equiv A$, $B(t) \equiv B$) и в [4] для системы (2) с периодическими коэффициентами ($A(t+\omega) \equiv A(t)$, $B(t+\omega) \equiv B(t)$). Для решения этой задачи использовалось свойство точной управляемости. Здесь мы решаем подобную задачу для произвольных систем с переменными коэффициентами, при этом для решения нам будет недостаточно свойства точной управляемости, а потребуется более сильное свойство *равномерной* точной управляемости.

Построим *грамиан управляемости* $W(t_1, t_0): \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ системы (2) на промежутке $[t_0, t_1]$ (см. [5]):

$$W(t_1, t_0)x = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, s)B(s)B^*(s)\Phi^*(t_0, s)x \, ds.$$

Система (2) является в точности управляемой на $[t_0, t_1]$ тогда и только тогда, когда существует $\gamma > 0$ такое, что для произвольного $x \in \mathfrak{X}$ выполнено неравенство $\langle W(t_1, t_0)x, x \rangle \geq \gamma \|x\|^2$ (см., например, [4, теорема 1]).

Определение 2. Будем говорить, что система (2) является *равномерно в точности управляемой*, если существуют $\vartheta > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ для произвольного $x \in \mathfrak{X}$ выполнено неравенство $\langle W(t_0 + \vartheta, t_0)x, x \rangle \geq \gamma \|x\|^2$.

Это определение восходит к определению 5.13 классической работы Р. Калмана [5], где равномерность понимается по $t \in \mathbb{R}$, на $W(t_0 + \vartheta, t_0)$ накладываются ещё три неравенства в смысле квадратичных форм. В определении 2 подобные условия не накладываются, поскольку они будут выполнены автоматически в силу условий 3) и 4).

На основе определения 2 установлены следующие результаты.

Теорема. Пусть система (2) является равномерно в точности управляемой. Тогда спектр показателей системы (4) допускает произвольный сдвиг.

Следствие. Пусть система (2) является равномерно в точности управляемой. Тогда она экспоненциально стабилизируема посредством обратной связи по состоянию (3).

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № FEWS-2024-0009.

Литература. 1. Далецкий, Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. — М.: Наука, 1970. — 536 с. 2. Triggiani, R. Controllability and observability in Banach space with bounded operators / R. Triggiani // SIAM J. Control. — 1975. — V. 13, № 2. — P. 462–491. 3. Zaitsev, V. On assignment of the upper Bohl exponent for linear time-invariant control systems in a Hilbert space by state feedback / V. Zaitsev, M. Zhuravleva // Mathematics. — 2020. — V. 8, № 6. — Art. 992. 4. Dashkovskiy, S. Assignment of the upper Bohl exponent for linear periodic control systems in Hilbert spaces / S. Dashkovskiy, V. Zaitsev // Europ. J. Contr. — 2022. — V. 67. — Art. 100703. 5. Kalman, R. Contribution to the theory of optimal control / R. Kalman // Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. — 1960. — V. 5, № 1. — P. 102–119.

В. А. Зайцев, И. Г. Ким (УдГУ, Ижевск, Россия) “Матричное модальное управление блочными системами посредством статической обратной связи по выходу” (13.05.2024).

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; $\mathbb{K}^n = \{x = \text{col}(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{K}\}$; $M_{m,n}$ — пространство $m \times n$ -матриц с элементами из поля $\mathbb{K}$; $M_n := M_{n,n}$; $I \in M_n$ — единичная матрица; τ — операция транспонирования матрицы.

Рассмотрим линейную стационарную управляемую систему с блочными матричными коэффициентами с блоками размерности $s \in \mathbb{N}$:

$$\dot{x} = Fx + Gu, \quad x \in \mathbb{K}^{ns}, \quad u \in \mathbb{K}^{ms}, \quad (1)$$

$$y = Hx, \quad y \in \mathbb{K}^{ks}, \quad (2)$$

где $F = \{F_{ij}\} \in M_{ns}$, $G = \{G_{j\alpha}\} \in M_{ns,ms}$, $H = \{H_{\beta i}\} \in M_{ks,ns}$, $F_{ij}, G_{j\alpha}, H_{\beta i} \in M_s$, $i, j = \overline{1, n}$, $\alpha = \overline{1, m}$, $\beta = \overline{1, k}$; x — вектор состояния, u — вектор управления, y — вектор выхода. Пусть управление в системе (1), (2) строится по принципу линейной статической обратной связи по выходу

$$u = Qy. \quad (3)$$

Здесь $Q = \{Q_{\alpha\beta}\} \in M_{ms,ks}$, $Q_{\alpha\beta} \in M_s$, $\alpha = \overline{1, m}$, $\beta = \overline{1, k}$. Замкнутая система принимает вид

$$\dot{x} = (F + GQH)x, \quad x \in \mathbb{K}^{ns}. \quad (4)$$

Пусть задан приведённый (старший коэффициент — единичная матрица) матричный многочлен степени n порядка s :

$$\Psi(\lambda) = I\lambda^n + \Gamma_1\lambda^{n-1} + \dots + \Gamma_{n-1}\lambda + \Gamma_n, \quad I, \Gamma_j \in M_s, \quad j = \overline{1, n}. \quad (5)$$

По многочлену (5) построим блочную сопровождающую матрицу Φ , соответствующую матричному многочлену $\Psi(\lambda)$ (см. [1]), т.е.

$$\begin{aligned} \Phi &= \{\Phi_{ij}\} \in M_{ns}, \quad \Phi_{ij} \in M_s, \quad i, j = \overline{1, n}; \quad \Phi_{i, i+1} = I \in M_s, \quad i = \overline{1, n-1}; \\ \Phi_{ij} &= 0 \in M_s, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, n}, \quad i+1 \neq j; \quad \Phi_{nj} = -\Gamma_{n+1-j}, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (6)$$

Матрицу Φ вида (6) также называют *нижней блочной матрицей Фробениуса*.

Определение. Скажем, что для системы (1), (2) разрешима задача матричного (блочного) модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу (3), если для любых матриц $\Gamma_i \in M_s$, $i = \overline{1, n}$, существует матрица $Q \in M_{ms,ks}$ обратной связи такая, что матрица $F + GQH$ замкнутой системы (4) подобна матрице Φ из (6).

Если $s = 1$, то указанная задача совпадает с обычной классической задачей скалярного модального управления, которая эквивалентна задаче о назначении спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу. Таким образом, мы рассматриваем обобщение задачи назначения спектра собственных значений на блочные матричные системы.

Зафиксируем $s, n, m, k \in \mathbb{N}$ и $p \in \{\overline{1, n}\}$. Введём вспомогательные определения и обозначения. Для фиксированного $s \in \mathbb{N}$ определим операцию блочного транспонирования $\mathcal{T}$ по следующему правилу: если $X = \{X_{ij}\} \in M_{qs,rs}$, $X_{ij} \in M_s$, $i = \overline{1, q}$, $j = \overline{1, r}$, то

$$X^{\mathcal{T}} := Y = \{Y_{ji}\} \in M_{rs,qs}, \quad Y_{ji} := X_{ij}, \quad j = \overline{1, r}, \quad i = \overline{1, q}.$$

Пусть X, Y — блочные матрицы с блоками размерности s такие, что число (блочных) столбцов матрицы X совпадает с числом (блочных) строк матрицы Y :

$$\begin{aligned} X &= \{X_{ij}\} \in M_{qs,rs}, \quad X_{ij} \in M_s, \quad i = \overline{1, q}, \quad j = \overline{1, r}; \\ Y &= \{Y_{j\nu}\} \in M_{rs,ts}, \quad Y_{j\nu} \in M_s, \quad j = \overline{1, r}, \quad \nu = \overline{1, t}. \end{aligned}$$

Для матриц X и Y определим операцию блочного умножения [2] по следующему правилу:

$$Z = X \star Y := \{Z_{i\nu}\}, \quad Z_{i\nu} := \sum_{j=1}^r X_{ij} \otimes Y_{j\nu} \quad i = \overline{1, q}, \quad \nu = \overline{1, t}.$$

Здесь $\otimes$ — кронекерово произведение матриц. Имеем $Z_{i\nu} \in M_{s^2}$, $i = \overline{1, q}$, $\nu = \overline{1, t}$, поэтому $Z := X \star Y \in M_{qs^2, ts^2}$.

Введём отображение $\text{VECRR}_s: M_{qs, rs} \rightarrow M_{s, qrs}$, разворачивающее матрицу $X = \{X_{ij}\} \in M_{qs, rs}$ по блочным строкам в блочную строку с блоками размерности s : $\text{VECRR}_s X = [X_{11}, \dots, X_{1r}, \dots, X_{q1}, \dots, X_{qr}]$.

Рассмотрим систему (1), (2). Предположим, что коэффициенты этой системы имеют следующий специальный вид: для некоторого $p \in \{1, \dots, n\}$ первые $p-1$ блочных строк матрицы G равны нулю, последние $n-p$ блочных столбцов матрицы H равны нулю, матрица F является нижней блочной матрицей Фробениуса, т.е.

$$F = \{F_{ij}\} \in M_{ns}, \quad F_{ij} \in M_s, \quad i, j = \overline{1, n};$$

$$F_{i, i+1} = I \in M_s, \quad i = \overline{1, n-1}; \quad F_{ij} = 0 \in M_s, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, n}, \quad i+1 \neq j; \quad (7)$$

$$G = \{G_{j\alpha}\} \in M_{ns, ms}, \quad G_{j\alpha} \in M_s, \quad j = \overline{1, n}, \quad \alpha = \overline{1, m};$$

$$G_{\nu\alpha} = 0 \in M_s, \quad \nu = \overline{1, p-1}, \quad \alpha = \overline{1, m}; \quad (8)$$

$$H = \{H_{\beta i}\} \in M_{ks, ns}, \quad H_{\beta i} \in M_s, \quad \beta = \overline{1, k}, \quad i = \overline{1, n};$$

$$H_{\beta\mu} = 0 \in M_s, \quad \beta = \overline{1, k}, \quad \mu = \overline{p+1, n}. \quad (9)$$

Рассмотрим матрицы

$$(H^T)^T \star G, \quad (H^T)^T \star FG, \quad \dots, \quad (H^T)^T \star F^{n-1}G.$$

Имеем $(H^T)^T \in M_{ks, ns}$, $F^{i-1}G \in M_{ns, ms}$, следовательно, $(H^T)^T \star F^{i-1}G \in M_{ks^2, ms^2}$ для всех $i = \overline{1, n}$. Построим матрицы $\text{VECRR}_{s^2}((H^T)^T \star F^{i-1}G) \in M_{s^2, kms^2}$, $i = \overline{1, n}$, и матрицу

$$\Theta = \begin{bmatrix} \text{VECRR}_{s^2}((H^T)^T \star G) \\ \text{VECRR}_{s^2}((H^T)^T \star FG) \\ \dots \\ \text{VECRR}_{s^2}((H^T)^T \star F^{n-1}G) \end{bmatrix} \in M_{ns^2, kms^2}.$$

Теорема 1. Для системы (1), (2) с коэффициентами (7)–(9) разрешима задача матричного (блочного) модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу (3), если выполнено условие $\text{rank } \Theta = ns^2$.

В частных случаях, когда блоки матриц системы состоят из скалярных матриц, условие на ранг матрицы Θ может быть понижено. Рассмотрим матрицу

$$\Omega := \begin{bmatrix} \text{VECRR}_s((H^T)^T G) \\ \text{VECRR}_s((H^T)^T FG) \\ \dots \\ \text{VECRR}_s((H^T)^T F^{n-1}G) \end{bmatrix} \in M_{ns, kms}.$$

Теорема 2. Пусть система (1), (2) имеет коэффициенты (7)–(9) и выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- (i) блоки матрицы H — скалярные матрицы;
- (ii) блоки матриц F и G — скалярные матрицы.

Тогда для системы (1), (2) разрешима задача матричного (блочного) модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу (3), если выполнено следующее условие:

$$\text{rank } \Omega = ns. \quad (10)$$

Предположим, что выполнены одновременно условия (i) и (ii) теоремы 2. Тогда матрицы (7)–(9) имеют вид $F = F_0 \otimes I$, $G = G_0 \otimes I$, $H = H_0 \otimes I$, $I \in M_s$, для некоторых матриц $F_0 \in M_n$, $G_0 \in M_{n,m}$, $H_0 \in M_{k,n}$. В таком случае условие (10) равносильно тому, что матрицы

$$H_0 G_0, \quad H_0 F_0 G_0, \quad \dots, \quad H_0 F_0^{n-1} G_0 \quad (11)$$

линейно независимы. Отсюда получаем

Следствие. Пусть система (1), (2) имеет коэффициенты (7)–(9) и выполнены условия (i) и (ii) теоремы 2. Тогда для системы (1), (2) разрешима задача матричного (блочного) модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу (3), если матрицы (11) линейно независимы.

Замечание. Результаты настоящей статьи обобщают полученные ранее в частных случаях: когда $s=1$ [3, 4] и когда управляемая система задана дифференциальным уравнением порядка n размерности s [2]. Следует отметить, что достаточные условия для этих частных случаев являлись также и необходимыми. В теоремах 1, 2 и в следствии необходимость пока не доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 24–21–00311).

Литература. 1. Gohberg, I. Spectral analysis of matrix polynomials. I. Canonical forms and divisors / I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman // Lin. Alg. Appl. — 1978. — V. 20, № 1. — P. 1–44. 2. Zaitsev, V. Matrix eigenvalue spectrum assignment for linear control systems by static output feedback / V. Zaitsev, I. Kim // Lin. Alg. Appl. — 2021. — V. 613. — P. 115–150. 3. Зайцев, В.А. Управление спектром в линейных системах с неполной обратной связью / В.А. Зайцев // Дифференц. уравнения. — 2009. — Т. 45, № 9. — С. 1320–1328. 4. Зайцев, В.А. Необходимые и достаточные условия в задаче управления спектром / В.А. Зайцев // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т. 46, № 12. — С. 1789–1793.