ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 7, с. 928–936

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.6+517.95

ПРИБЛИЖЁННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

© А. М. Денисов[1], С. И. Соловьева[2]

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: [1]*den@cs.msu.ru,* [2]*sol@cs.msu.ru*

Поступила в редакцию 02.02.2024 г., после доработки 02.02.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.

Рассмотрена начально-краевая задача для сингулярно возмущённой системы уравнений с частными производными. Поставлена обратная задача, состоящая в определении неизвестного граничного условия по одной из компонент решения начально-краевой задачи, заданной в фиксированной точке пространства. Предложены методы приближённого решения обратной задачи, основанные на использовании разложения решения начально-краевой задачи по малому параметру ε. Получены оценки точности приближённых решений. Приведены результаты численных расчётов, иллюстрирующие точность предложенных методов.

Ключевые слова: сингулярно возмущённая система, обратная задача, численные методы.

DOI: 10.31857/S0374064124070063, EDN: KNJURM

Рассмотрим начально-краевую задачу для сингулярно возмущённой системы уравнений с частными производными

$$\nu u_x(x,t)+\varepsilon u_t(x,t)+\varepsilon a_t(x,t)=Du_{xx}(x,t),\quad (x,t)\in Q_{t_0}, \tag{1}$$

$$a_t(x,t)=\gamma(u(x,t)-a(x,t)),\quad (x,t)\in Q_{t_0}, \tag{2}$$

$$u(0,t)=\mu(t),\quad 0\leqslant t\leqslant t_0, \tag{3}$$

$$u(l,t)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant t_0, \tag{4}$$

$$u(x,0)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{5}$$

$$a(x,0)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{6}$$

где $Q_{t_0}=\{(x,t)\colon 0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant t\leqslant t_0\}$; ν, D, γ — положительные постоянные; ε — малый параметр, $0<\varepsilon<1$.

Задачу (1)–(6) можно интерпретировать как математическую модель процесса динамики сорбции [1, с. 174], когда эффекты поглощения малы по сравнению с переносом и диффузией.

Далее, чтобы подчеркнуть зависимость решения задачи (1)–(6) от параметра ε, будем обозначать его $u(x,t;\varepsilon)$, $a(x,t;\varepsilon)$.

Сформулируем обратную задачу. Пусть постоянные ν, ε, D, γ заданы, а функция $\mu(t)$ неизвестна. Требуется определить $\mu(t)$, если задана дополнительная информация о решении задачи (1)–(6):

$$u(x_0,t;\varepsilon)=g(t;\varepsilon),\quad 0\leqslant t\leqslant t_0, \tag{7}$$

где x_0 — заданное число, $x_0\in(0,l)$, а $g(t;\varepsilon)$ — известная функция.

Дадим определение решения обратной задачи. Так как при неизвестной $\mu(t)$ функции $u(x,t;\varepsilon)$ и $a(x,t;\varepsilon)$ также неизвестны, то решением обратной задачи будем считать тройку функций $\{\mu(t),u(x,t;\varepsilon),a(x,t;\varepsilon)\}$.

Определение. Функции $\{\mu(t),u(x,t;\varepsilon),a(x,t;\varepsilon)\}$ называются *решением обратной задачи* (1)–(7), если $\mu\in C^1[0,t_0]$, $\mu(0)=0$, $u\in C^{2,1}(Q_{t_0})$, $a,a_t\in C(Q_{t_0})$ и $\{\mu(t),u(x,t;\varepsilon),a(x,t;\varepsilon)\}$ удовлетворяют уравнениям (1), (2) и условиям (3)–(7).

При выполнении определённых условий функция $u(x,t;\varepsilon)$ раскладывается по малому параметру ε. В данной работе это разложение используется для построения приближённых решений обратной граничной задачи. Подобный подход применялся для приближённого решения некоторых обратных задач [2–4]. Другим аспектам исследования обратных задач для сингулярно возмущённых уравнений с частными производными посвящены работы [5–12].

Рассмотрим функцию

$$f_0(x)=\frac{\exp\{\nu l/D\}-\exp\{\nu x/D\}}{\exp\{\nu l/D\}-1}. \tag{8}$$

Докажем, что функцию $\tilde\mu_0(t;\varepsilon)=g(t;\varepsilon)/f_0(x_0)$ можно рассматривать как приближённое решение обратной задачи.

Теорема 1. *Если функции $\{\mu(t),u(x,t;\varepsilon),a(x,t;\varepsilon)\}$ являются решением обратной задачи (1)–(7), то*

$$\max_{[0,t_0]}|\mu(t)-\tilde\mu_0(t;\varepsilon)|\leqslant c_1\varepsilon, \tag{9}$$

где c_1 — постоянная, не зависящая от t_0 и ε.

Далее через c_i обозначены положительные постоянные, не зависящие от x, t и ε.

Доказательство. Пусть функции $\{\mu(t),u(x,t;\varepsilon),a(x,t;\varepsilon)\}$ являются решением обратной задачи. Проинтегрировав уравнение (2) с учётом начального условия (6), имеем

$$a(x,t;\varepsilon)=\gamma\int\limits_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}u(x,\tau;\varepsilon)\,d\tau,\quad (x,t)\in Q_{t_0}.$$

Из этого представления и уравнений (1), (2) следует, что $u(x,t;\varepsilon)$ является решением уравнения

$$\nu u_x+\varepsilon u_t+\varepsilon\gamma u-\varepsilon\gamma^2\int\limits_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}u(x,\tau;\varepsilon)\,d\tau=Du_{xx},\quad (x,t)\in Q_{t_0}. \tag{10}$$

Рассмотрим функцию

$$w(x,t;\varepsilon)=\exp\{-\nu x/(2D)\}(u(x,t;\varepsilon)-\mu(t)f_0(x)). \tag{11}$$

Из уравнения (10), определения (8) и условий (3)–(5) следует, что функция $w(x,t;\varepsilon)$ является решением начально-краевой задачи

$$\varepsilon w_t+\left(\varepsilon\gamma+\frac{\nu^2}{4D}\right)w-\varepsilon\gamma^2\int\limits_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}w(x,\tau;\varepsilon)\,d\tau+\varepsilon m(t)f_0(x)\exp\left\{-\frac{\nu x}{2D}\right\}=Dw_{xx},\quad (x,t)\in Q_{t_0}, \tag{12}$$

$$w(0,t;\varepsilon)=w(l,t;\varepsilon)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant t_0, \tag{13}$$

$$w(x,0;\varepsilon)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{14}$$

где

$$m(t)=\mu'(t)+\gamma\mu(t)-\gamma^2\int\limits_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}\mu(\tau)\,d\tau.$$

Применяя метод разделения переменных, получаем следующее представление для решения задачи (12)–(14):

$$w(x,t;\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t;\varepsilon)\sin\frac{\pi nx}{l}, \tag{15}$$

в котором функции $T_n(t;\varepsilon)$ являются решениями задачи Коши

$$\varepsilon T_n'(t;\varepsilon)+\left[\varepsilon\gamma+D\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2+\frac{\nu^2}{4D}\right]T_n(t;\varepsilon)-\varepsilon\gamma^2\int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}T_n(\tau;\varepsilon)\,d\tau=-\varepsilon m(t)F_{0n},\quad 0\leqslant t\leqslant t_0, \tag{16}$$

$$T_n(0;\varepsilon)=0, \tag{17}$$

где коэффициенты Фурье функции $f_0(x)\exp\{-\nu x/(2D)\}$

$$F_{0n}=\frac{2}{l}\int_0^l f_0(x)\exp\left\{-\frac{\nu x}{2D}\right\}\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx=\frac{2}{\pi n}\left(1+\frac{(l\nu)^2}{(2\pi nD)^2}\right)^{-1}. \tag{18}$$

Интегрируя уравнение (16) с учётом условия (17), получаем

$$T_n(t;\varepsilon)=\gamma^2\int_0^t e^{-a_{n\varepsilon}(t-\tau)}\int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-\theta)}T_n(\theta;\varepsilon)\,d\theta\,d\tau-\int_0^t e^{-a_{n\varepsilon}(t-\tau)}m(\tau)F_{0n}\,d\tau,\quad 0\leqslant t\leqslant t_0,$$

где $a_{n\varepsilon}=\varepsilon^{-1}(D(\pi n/l)^2+\nu^2/(4D)+\varepsilon\gamma)$, следовательно, функция $T_n(t;\varepsilon)$ является решением интегрального уравнения

$$T_n(t;\varepsilon)=\int_0^t K_{n\varepsilon}(t,\theta)T_n(\theta;\varepsilon)\,d\theta-\int_0^t e^{-a_{n\varepsilon}(t-\tau)}m(\tau)F_{0n}\,d\tau,\quad 0\leqslant t\leqslant t_0, \tag{19}$$

с ядром

$$K_{n\varepsilon}(t,\theta)=\gamma^2\int_\theta^t e^{-a_{n\varepsilon}(t-\tau)-\gamma(\tau-\theta)}\,d\tau.$$

Из формулы (18) и определения чисел $a_{n\varepsilon}$ следует, что

$$\max_{[0,t_0]}\left|\int_0^t e^{-a_{n\varepsilon}(t-\tau)}m(\tau)F_{0n}\,d\tau\right|\leqslant c_2\frac{\varepsilon}{n^3}.$$

Учитывая это неравенство и уравнение (19), находим

$$\|T_n(t;\varepsilon)\|_{C[0,t_0]}\leqslant c_3\frac{\varepsilon}{n^3}. \tag{20}$$

Из оценки (20) и формулы (15) имеем

$$\max_{Q_{t_0}}|w(x,t;\varepsilon|\leqslant c_4\varepsilon. \tag{21}$$

Полагая в равенстве (11) $x=x_0$, используя условие (7) и определение функции $\tilde\mu_0(t;\varepsilon)$, будем иметь

$$\tilde\mu_0(t;\varepsilon)-\mu(t)=w(x_0,t;\varepsilon)\exp\{\nu x_0/(2D)\}(f_0(x_0))^{-1}.$$

Из этого равенства и неравенства (21) вытекает оценка (9). Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что функция $\tilde{\mu}_0(t;\varepsilon)$ аппроксимирует точное решение обратной задачи $\mu(t)$ с порядком $O(\varepsilon)$.

Покажем, что можно построить приближённое решение обратной задачи с порядком аппроксимации $O(\varepsilon^2)$. Рассмотрим функцию

$$f_1(x)=\frac{1}{e^{\nu l/D}-1}\left[\frac{2l}{\nu}e^{\nu l/D}\,\frac{e^{\nu x/D}-1}{e^{\nu l/D}-1}-\frac{x}{\nu}(e^{\nu l/D}+e^{\nu x/D})\right],$$

являющуюся решением краевой задачи

$$Df_1''(x)-\nu f_1'(x)=f_0(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{22}$$

$$f_1(0)=f_1(l)=0. \tag{23}$$

Из положительности функции $f_0(x)$ при $x\in(0,l)$, уравнения (22) и условий (23) следует, что $f_1(x)<0$ при $x\in(0,l)$.

Найдём коэффициенты Фурье F_{1n} функции $f_1(x)\exp\{-\nu x/(2D)\}$. Используя уравнение (22), условия (23) и формулу (18), получаем, что

$$F_{1n}=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f_1(x)\exp\left\{-\frac{\nu x}{2D}\right\}\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx=-\frac{F_{0n}}{D}\left(\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2+\frac{\nu^2}{4D^2}\right)^{-1}. \tag{24}$$

Будем далее предполагать, что известно значение функции $\mu(t)$ в точке t_0: $\mu(t_0)=\mu_0$.

Рассмотрим функцию $\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)$, являющуюся решением краевой задачи

$$\varepsilon f_1(x_0)\tilde{\mu}_1''(t;\varepsilon)+\big(2\varepsilon\gamma f_1(x_0)+f_0(x_0)\big)\tilde{\mu}_1'(t;\varepsilon)+\gamma f_0(x_0)\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)=g'(t;\varepsilon)+\gamma g(t;\varepsilon),\quad 0\leqslant t\leqslant t_0, \tag{25}$$

$$\tilde{\mu}_1(0;\varepsilon)=0,\quad \tilde{\mu}_1(t_0;\varepsilon)=\mu_0. \tag{26}$$

Теорема 2. *Если функции $\{\mu(t),u(x,t;\varepsilon),a(x,t;\varepsilon)\}$ являются решением обратной задачи (1)–(7), $\mu\in C^2[0,t_0]$, $\mu'(0)=0$, $\mu(t_0)=\mu_0$ и выполнено неравенство $2\varepsilon\gamma f_1(x_0)+f_0(x_0)>0$, то имеет место оценка*

$$\max_{[0,t_0]}|\mu(t)-\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)|\leqslant c_5\varepsilon^2. \tag{27}$$

Доказательство. Рассмотрим функции $T_n(t;\varepsilon)$ — решения задачи (16), (17), для которых справедливо представление

$$T_n(t;\varepsilon)=\varepsilon T_{0n}(t)+\varepsilon^2 T_{1n}(t;\varepsilon), \tag{28}$$

где

$$T_{0n}(t)=-m(t)F_{0n}(b_n)^{-1},\quad b_n=D\left(\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2+\frac{\nu^2}{4D^2}\right), \tag{29}$$

а функции $T_{1n}(t;\varepsilon)$ являются решениями задачи Коши

$$\varepsilon T_{1n}'(t;\varepsilon)+(b_n+\varepsilon\gamma)T_{1n}(t;\varepsilon)-\varepsilon\gamma^2\int\limits_0^t\exp\{-\gamma(t-\tau)\}T_{1n}(\tau;\varepsilon)\,d\tau=$$

$$=-T_{0n}'(t)-\gamma T_{0n}(t)+\gamma^2\int\limits_0^t\exp\{-\gamma(t-\tau)\}T_{0n}(\tau)\,d\tau,\quad 0\leqslant t\leqslant t_0, \tag{30}$$

$$T_{1n}(0;\varepsilon)=0. \tag{31}$$

Интегрируя уравнение (30) с учётом начального условия (31), получаем

$$T_{1n}(t;\varepsilon)=\gamma^2\int\limits_0^t\exp\left\{-\frac{b_n+\varepsilon\gamma}{\varepsilon}(t-\tau)\right\}\int\limits_0^\tau\exp\{-\gamma(\tau-\theta)\}T_{1n}(\theta;\varepsilon)\,d\theta\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\exp\left\{-\frac{b_n+\varepsilon\gamma}{\varepsilon}(t-\tau)\right\}\psi_n(\tau)\,d\tau,\quad 0\leqslant t\leqslant t_0,$$

где

$$\psi_n(t)=-T_{0n}'(t)-\gamma T_{0n}(t)+\gamma^2\int\limits_0^t\exp\{-\gamma(t-\tau)\}T_{0n}(\tau)\,d\tau. \tag{32}$$

Следовательно, функции $T_{1n}(t;\varepsilon)$ являются решениями интегрального уравнения

$$T_{1n}(t;\varepsilon)=\int\limits_0^t B_n(t,\tau;\varepsilon)T_{1n}(\tau;\varepsilon)\,d\tau+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\exp\left\{-\frac{b_n+\varepsilon\gamma}{\varepsilon}(t-\tau)\right\}\psi_n(\tau)\,d\tau,\quad 0\leqslant t\leqslant t_0, \tag{33}$$

с ядром

$$B_n(t,\tau;\varepsilon)=\gamma^2\int\limits_\tau^t\exp\left\{-\frac{b_n+\varepsilon\gamma}{\varepsilon}(t-\theta)-\gamma(\theta-\tau)\right\}d\theta.$$

Учитывая формулы (29), (32) и уравнение (33), находим оценку

$$\max_{[0,t_0]}|T_{1n}(t;\varepsilon)|\leqslant c_6 n^{-5}. \tag{34}$$

Из представления (28), формул (15) и (29) вытекает равенство

$$w(x,t;\varepsilon)=-\varepsilon m(t)\sum_{n=1}^{\infty}F_{0n}(b_n)^{-1}\sin\frac{\pi nx}{l}+\varepsilon^2 w_1(x,t;\varepsilon), \tag{35}$$

где

$$w_1(x,t;\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}T_{1n}(t;\varepsilon)\sin\frac{\pi nx}{l}. \tag{36}$$

Используя (34), получаем оценку

$$\max_{Q_{t_0}}|w_1(x,t;\varepsilon)|\leqslant c_7. \tag{37}$$

Из формул (24) и (35) следует, что

$$w(x,t;\varepsilon)=\varepsilon m(t)f_1(x)\exp\{-\nu x/(2D)\}+\varepsilon^2 w_1(x,t;\varepsilon).$$

Ввиду этого представления и формулы (11) имеем равенство

$$u(x,t;\varepsilon)=\mu(t)f_0(x)+\varepsilon m(t)f_1(x)+\varepsilon^2 w_1(x,t;\varepsilon)\exp\{\nu x/(2D)\},$$

положив в котором $x=x_0$, использовав условие (7) и определение функции $m(t)$, получим

$$\varepsilon f_1(x_0)\mu'(t)+\varepsilon\gamma f_1(x_0)\mu(t)-\varepsilon\gamma^2 f_1(x_0)\int\limits_0^t\exp\{-\gamma(t-\tau)\}\mu(\tau)\,d\tau+$$

$$+f_0(x_0)\mu(t)=g(t;\varepsilon)-\varepsilon^2 w_1(x_0,t;\varepsilon)\exp\{\nu x_0/(2D)\},\quad 0\leqslant t\leqslant t_0. \tag{38}$$

Из формулы (36), уравнения (30) и оценки (34) следует оценка

$$\varepsilon \max_{[0,t_0]} \left| \frac{\partial w_1}{\partial t}(x_0,t;\varepsilon) \right| \leqslant c_8. \tag{39}$$

Умножив уравнение (38) на $e^{\gamma t}$ и продифференцировав его затем по t, будем иметь

$$\varepsilon f_1(x_0)\mu''(t;\varepsilon) + \big(2\varepsilon\gamma f_1(x_0) + f_0(x_0)\big)\mu'(t;\varepsilon) + \gamma f_0(x_0)\mu(t;\varepsilon) =$$
$$= g'(t;\varepsilon) + \gamma g(t;\varepsilon) - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial w_1}{\partial t}(x_0,t;\varepsilon) + \gamma w_1(x_0,t;\varepsilon) \right) \exp\{\nu x_0/(2D)\}, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0. \tag{40}$$

Из условий теоремы получаем краевые условия для функции $\mu(t)$:

$$\mu(0) = 0, \quad \mu(t_0) = \mu_0. \tag{41}$$

Рассмотрим функцию $z(t;\varepsilon) = \tilde{\mu}_1(t;\varepsilon) - \mu(t)$. Из уравнений (25), (40) и краевых условий (26), (41) следует, что $z(t;\varepsilon)$ является решением краевой задачи

$$\varepsilon f_1(x_0)z''(t;\varepsilon) + \big(2\varepsilon\gamma f_1(x_0) + f_0(x_0)\big)z'(t;\varepsilon) + \gamma f_0(x_0)z(t;\varepsilon) = \varepsilon^2 w_2(t;\varepsilon), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0, \tag{42}$$
$$z(0) = 0, \quad z(t_0) = 0, \tag{43}$$

где

$$w_2(t;\varepsilon) = \left(\frac{\partial w_1}{\partial t}(x_0,t;\varepsilon) + \gamma w_1(x_0,t;\varepsilon) \right) \exp\left\{ \frac{\nu x_0}{2D} \right\}.$$

Решение задачи (42), (43) определяется формулой

$$z(t,\varepsilon) = (f_1(x_0)a_\varepsilon \operatorname{sh}(a_\varepsilon t_0))^{-1} \Bigg[\int_0^t \operatorname{sh}(a_\varepsilon \tau) \operatorname{sh}(a_\varepsilon (t-t_0)) \exp\{-d_\varepsilon (t-\tau)/2\} \varepsilon w_2(\tau;\varepsilon)\, d\tau +$$
$$+ \int_t^{t_0} \operatorname{sh}(a_\varepsilon t) \operatorname{sh}(a_\varepsilon (\tau-t_0)) \exp\{-d_\varepsilon (t-\tau)/2\} \varepsilon w_2(\tau;\varepsilon)\, d\tau \Bigg], \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0, \tag{44}$$

где

$$d_\varepsilon = 2\gamma + \frac{f_0(x_0)}{\varepsilon f_1(x_0)}, \quad a_\varepsilon = \sqrt{\frac{d_\varepsilon^2}{4} - \gamma \frac{f_0(x_0)}{\varepsilon f_1(x_0)}}.$$

Для чисел d_ε и a_ε справедливы неравенства

$$|a_\varepsilon + d_\varepsilon/2 - \gamma| \leqslant c_8\varepsilon, \quad |d_\varepsilon/2 - a_\varepsilon - f_0(x_0)(\varepsilon f_1(x_0))^{-1}| \leqslant c_9. \tag{45}$$

Используя оценки (37), (39), (45) и формулу (44), получаем, что

$$\max_{[0,t_0]} |z(t;\varepsilon)| = \max_{[0,t_0]} |\mu(t) - \tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)| \leqslant c_5\varepsilon^2.$$

Теорема доказана.

Из оценок (9) и (27) следует, что функции $\tilde{\mu}_0(t;\varepsilon)$ и $\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)$ можно рассматривать в качестве приближённых решений обратной задачи. Приведём некоторые результаты численных расчётов, иллюстрирующих это утверждение.

Схема расчётов была такова. Для заданных значений ν, ε, D, γ и функции $\mu(t)$ решалась задача (1)–(6) и находилась функция $u(x,t;\varepsilon)$. Далее дополнительно для решения обратной задачи (1)–(7) использовалась функция $g(t;\varepsilon)=u(x_0,t;\varepsilon)$, затем на основе предложенных методов с этой функцией вычислялись приближённые решения $\tilde{\mu}_0(t;\varepsilon)$, $\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)$ и сравнивались с точным решением $\mu(t)$. Все вычисления проводились при $l=2$, $T=2$, $\nu=1$, $D=1$, $\gamma=1$ и $x_0=1.6$.

На рис. 1 приведены графики различных функций $\mu(t)$ и соответствующих приближённых решений $\tilde{\mu}_0(t;\varepsilon)$, $\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)$. Полученные результаты показывают, что функции $\tilde{\mu}_0(t;\varepsilon)$ и $\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)$ можно рассматривать как приближённые решения обратной задачи, при этом приближённое решение $\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)$ более точно аппроксимирует искомое точное решение $\mu(t)$.

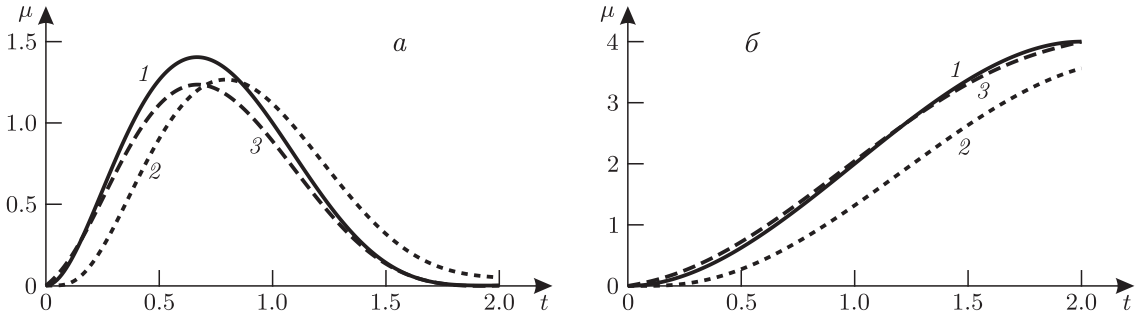

Рис. 1. Графики функции $\mu(t)$ (*1*) и приближённых решений $\tilde{\mu}_0(t;\varepsilon)$ (*2*), $\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)$ (*3*): *а* — $\mu(t)=t^2(2-t)^4$, $\varepsilon=0.2$; *б* — $\mu(t)=t^2(3-t)$, $\varepsilon=0.3$.

На рис. 2 приведены графики функций $\mu(t)$ и соответствующих приближённых решений $\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)$ для различных значений ε. Видно, что точность приближённого решения $\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)$ повышается при уменьшении параметра ε.

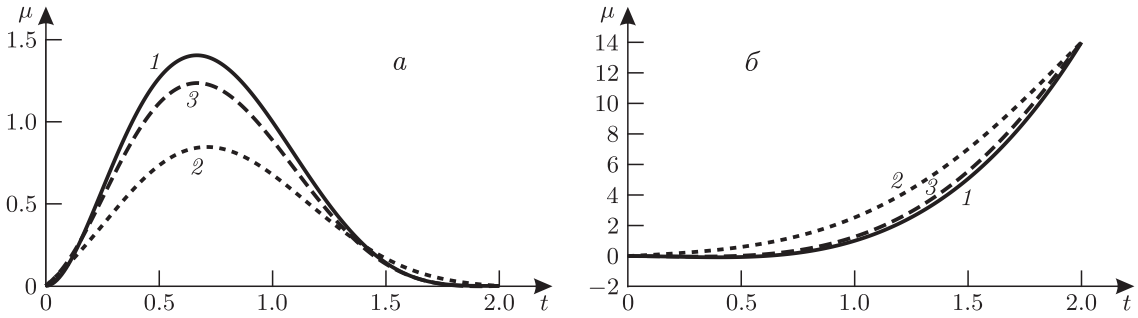

Рис. 2. Графики функций $\mu(t)$ (*1*) и приближённых решений $\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)$ для $\varepsilon=0.5$ (*2*) и $\varepsilon=0.2$ (*3*): *а* — $\mu(t)=t^2(2-t)^4$; *б* — $\mu(t)=0.5t^2(5t-3)$.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — 6-е изд., испр. и доп. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1999. — 742 с.
2. Денисов, А.М. Приближённое решение обратных задач для уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением / А.М. Денисов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2021. — Т. 61, № 12. — С. 2040–2049.
3. Денисов, А.М. Приближённое решение обратной задачи для интегродифференциального уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением / А.М. Денисов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2023. — Т. 63, № 5. — С. 702–709.
4. Денисов, А.М. Аппроксимация решения обратной задачи для сингулярно возмущённой системы уравнений в частных производных / А.М. Денисов // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 6. — С. 746–751.
5. Латтес, Р. Метод квазиобращения и его приложения / Р. Латтес, Ж.-Л. Лионс. — М. : Мир, 1970. — 336 с.
6. Иванов, В.К. Задача квазиобращения для уравнения теплопроводности в равномерной метрике / В.К. Иванов // Дифференц. уравнения. — 1972. — Т. 8, № 4. — С. 652–658.
7. Самарский, А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. — М. : Едиториал УРСС, 2004. — 480 с.
8. Короткий, А.И. Численное моделирование обратных ретроспективных задач тепловой конвекции с приложениями к задачам геодинамики / А.И. Короткий, И.А. Цепелев, А.Е. Исмаил-заде // Изв. Урал. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2008. — № 58, вып. 11. — С. 78–87.
9. Табаринцева, Е.В. О решении граничной обратной задачи для параболического уравнения методом квазиобращения / Е.В. Табаринцева, Л.Д. Менихес, А.Д. Дрозин // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Физика. — 2012. — № 6. — С. 8–13.
10. Belov, Yu.Ya. Determination of source function in composite type system of equations / Yu.Ya. Belov, V.G. Kopylova // Журн. Сиб. федерал. ун-та. Сер. Математика и физика. — 2014. — Т. 7, № 3. — С. 275–288.
11. Денисов, А.М. Численное решение обратных задач для гиперболического уравнения с малым параметром при старшей производной / А.М. Денисов, С.И. Соловьева // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 7. — С. 919–928.
12. Lukyanenko, D.V. Asymptotic analysis of solving an inverse boundary value problem for a nonlinear singularly perturbed time-periodic reaction–diffusion–advection equation / D.V. Lukyanenko, M.A. Shishlenin, V.T. Volkov // J. Inverse and Ill posed Problems. — 2019. — V. 27, № 5. — P. 745–758.

APPROXIMATE SOLUTION OF THE INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SINGULARLY PERTURBED SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

A. M. Denisov[1], S. I. Solov'eva[2]

Lomonosov Moscow State University, Russia
e-mail: [1]den@cs.msu.ru, [2]sol@cs.msu.ru

The initial boundary value problem for a singularly perturbed system of partial differential equations is considered. The inverse problem is formulated, which consists in determining an unknown boundary condition based on one of the components of the solution given at a fixed point in space. Methods of approximate solution of the inverse problem based on the use of small parameter expansion of the solution of the initial boundary value problem are proposed. Estimates of the accuracy of approximate solutions are obtained. The results of numerical calculations illustrating the accuracy of the proposed methods are presented.

Keywords: singularly perturbed system, inverse problem, numerical methods.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under agreement no. 075-15-2022-284.

REFERENCES

1. Tikhonov, A.N. and Samarskii, A.A., *Equations of Mathematical Physics*, London–New York: Pergamon Press, 1963.
2. Denisov, A.M. Approximate solution of inverse problems for the heat equation with a singular perturbation, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2021, vol. 61, no. 12, pp. 2004–2014.
3. Denisov, A.M. Approximate solution of an inverse problem for a singularly perturbed integro-differential heat equation, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2023, vol. 63, no. 5, pp. 837–844.
4. Denisov, A.M., Approximation of solution of an inverse problem for singularly perturbed system partial differential equations, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 6, pp. 762–768.
5. Lattès, R. and Lions, J.-L., *Méthode de Quasi-Réversibilité et Applications*, Paris: Dunod, 1967.
6. Ivanov, V.K., Problem of quasi inversion for the heat equation in uniform metric, *Differ. Uravn.*, 1972, vol. 8, no. 4, pp. 643–649.
7. Samarskii, A.A. and Vabishchevich, P.N., *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics*, Berlin–New York: De Gruyter, 2007.
8. Korotkii, A.I., Tsepelev, I.A., and Ismail-zade, A.T., Numerical modeling of inverse retrospective thermal convection problems with applications to geodynamic problems, *Izv. Ural. Univ. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2008, no. 58, pp. 78–87.
9. Tabarintseva, E.V., Menikhes, L.D., and Drozin, A.D., On solving a boundary inverse problem by the quasi-inversion method, *Vest. Yuzno-Ural. Gos. Univ. Ser. Mat. Mech. Fiz.*, 2012, no. 6, pp. 8–13.
10. Belov, Yu.Ya. and Kopylova, V.G., Determination of source function in composite type system of equations, *J. of Siberian Fed. Univ. Math. & Phys.*, 2014, vol. 7, no. 3, pp. 275–288.
11. Denisov, A.M. and Solov'eva, S.I., Numerical solution of inverse problems for a hyperbolic equation with a small parameter multiplying the highest derivative, *Differ. Equat.*, 2018, vol. 54, no. 7, pp. 900–910.
12. Lukyanenko, D.V., Shishlenin, M.A., and Volkov, V.T., Asymptotic analysis of solving an inverse boundary value problem for a nonlinear singularly perturbed time-periodic reaction–diffusion–advection equation, *J. Inverse and Ill posed Problems*, 2019, vol. 27, no. 5, pp. 745–758.