

УДК 517.927.4+517.988.63

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КВАЗИОДНОРОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© А. Н. Наимов¹, М. В. Быстрецкий²

Вологодский государственный университет

e-mail: ¹naimovan@vogu35.ru, ²pmbmv@bk.ru

Поступила в редакцию 25.02.2024 г., после доработки 28.04.2024 г.; принята к публикации 29.04.2024 г.

Рассмотрена система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с выделенной главной квазиоднородной нелинейностью. Доказана априорная оценка периодических решений этой системы в предположении неограниченности всех ненулевых решений невозмущённой системы. В отличие от предыдущих работ авторов, априорная оценка выведена без учёта множества нулей главной нелинейной части. С применением методов вычисления вращения векторных полей сформулирован и доказан критерий существования периодических решений при любом возмущении из заданного класса.

Ключевые слова: квазиоднородная нелинейность, возмущение, периодическое решение, априорная оценка, вращение векторного поля.

DOI: 10.31857/S0374064124050114, EDN: LAWFOL

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x'' = Q(x, x') + g(t, x, x'), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Здесь $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $Q: \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее условию квазиоднородности [1, с. 14]

$$Q(\lambda y_1, \lambda^{1+\nu} y_2) \equiv \lambda^{1+2\nu} Q(y_1, y_2) \quad (2)$$

при некотором $\nu > 0$ и любых значениях $\lambda > 0$. Отображение $g: \mathbb{R}^{1+2n} \mapsto \mathbb{R}^n$ непрерывно и удовлетворяет условию периодичности по первой переменной

$$g(t + \omega, y_1, y_2) \equiv g(t, y_1, y_2) \quad (3)$$

с фиксированным периодом $\omega > 0$, а по остальным переменным удовлетворяет следующему условию на порядок роста:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \max_{t \in \mathbb{R}, |y_1| + |y_2| \leq 1} r^{-(1+2\nu)} |g(t, ry_1, r^{1+\nu} y_2)| = 0. \quad (4)$$

Учитывая условия (2)–(4), отображение Q называем *главной квазиоднородной нелинейностью*, а отображение g — *возмущением*.

Вектор-функцию $x \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ называем ω -периодическим решением системы (1), если x удовлетворяет уравнениям (1) и условию $x(t+\omega) \equiv x(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

В настоящей работе исследован в два этапа по схеме работы [2] вопрос существования ω -периодических решений системы уравнений (1). На первом этапе найдены условия, при которых для ω -периодических решений имеет место априорная оценка

$$\max_{t \in \mathbb{R}} (|x(t)| + |x'(t)|) < M, \quad (5)$$

где константа M не зависит от x . На втором этапе в условиях априорной оценки, применяя методы вычисления вращения векторных полей, сформулировано и доказано необходимое и достаточное условие существования ω -периодических решений при любом возмущении g . Отметим, что результаты работы [2] не применимы к системе уравнений (1).

В статье [3] найдена априорная оценка и изучен вопрос существования периодических решений системы уравнений вида (1) в случае, когда отображение Q положительно однородно порядка $m > 1$, т.е. $Q(\lambda y_1, \lambda y_2) \equiv \lambda^m Q(y_1, y_2)$, $\lambda > 0$, и его множество нулей $\{(y_1, y_2) : Q(y_1, y_2) = 0\}$ образовано из конечного числа поверхностей с определёнными свойствами. В отличие от указанной работы априорная оценка (5) выведена при условии квазиоднородности (2), но без учёта множества нулей отображения Q . Существенное ограничение состоит в том, что при условии (2) порядок роста $|Q(y_1, y_2)|$ по $|y_2|$ меньше $|y_2|^2$.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Наряду с системой (1) рассмотрим также невозмущённую систему уравнений

$$z'' = Q(z, z'), \quad z \in \mathbb{R}^n. \quad (6)$$

Решение $z = z(t)$ системы (6) назовём *ограниченным*, если оно определено при всех $t \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет условию

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} (|z(t)| + |z'(t)|) < \infty.$$

Обозначим через $\mathfrak{R}_{n,\omega}(\nu)$ множество всех непрерывных отображений $g: \mathbb{R}^{1+2n} \mapsto \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условиям (3), (4). Если $Q(y, 0) \neq 0$ при $y \neq 0$, то определено вращение (степень отображения) $\gamma(Q(\cdot, 0))$ векторного поля $Q(\cdot, 0): \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ на сфере $|y| = 1$ пространства $\mathbb{R}^n$ [4, с. 16].

Основные результаты статьи содержатся в следующих двух теоремах.

Теорема 1. Пусть система уравнений (6) не имеет ненулевых ограниченных решений. Тогда при любом отображении $g \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\nu)$ для ω -периодических решений системы (1) имеет место априорная оценка (5).

Доказательство. Пусть система (6) не имеет ненулевых ограниченных решений. Предположим, что для ω -периодических решений системы (1) не имеет место априорная оценка (5), тогда существует неограниченная последовательность ω -периодических решений x_k , $k \in \mathbb{N}$, этой системы

$$r_k := \max_{t \in \mathbb{R}} (|x_k(t)| + |x'_k(t)|)^{1/(1+\nu)} = (|x_k(t_k)| + |x'_k(t_k)|)^{1/(1+\nu)} \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим вектор-функции $y_k(t) = r_k^{-1} x_k(t_k + r_k^{-\nu} t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, для которых

$$\begin{aligned} |y_k(t)| + |y'_k(t)|^{1/(1+\nu)} &\leq |y_k(0)| + |y'_k(0)|^{1/(1+\nu)} = 1, \\ y''_k(t) &= Q(y_k(t), y'_k(t)) + r_k^{-1-2\nu} g(t_k + r_k^{-\nu} t, r_k y_k(t), r_k^{1+\nu} y'_k(t)). \end{aligned}$$

Отсюда без ограничения общности можно считать, что последовательности вектор-функций $y_k, y'_k, k \in \mathbb{N}$, равномерно сходятся на любом конечном отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Переходя к пределу в системе уравнений для y_k и учитывая условие (4), получаем ненулевое ограниченное решение системы (6), что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Теорема 2. Если система уравнений (6) не имеет ненулевых ограниченных решений, то ω -периодическое решение системы (1) существует при любом отображении $g \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\nu)$ тогда и только тогда, когда $\gamma(Q(\cdot, 0)) \neq 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть система уравнений (6) не имеет ненулевых ограниченных решений и $\gamma(Q(\cdot, 0)) = 0$. Покажем, что при некотором $g \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\nu)$ система (1) не имеет ω -периодических решений.

Согласно теореме 5.2 [4, с. 24] из равенства $\gamma(Q(\cdot, 0)) = 0$ следует, что отображение $Q(y, 0)$ можно непрерывно продолжить внутри шара $|y| < 1$ без нулей некоторым отображением $F(y)$ таким, что $F(y) = Q(y, 0)$ при $|y| = 1$ и $F(y) \neq 0$ при $|y| < 1$. Положим $g_0(y_1) = F(y_1) - Q(y_1, 0)$ при $|y_1| \leq 1$ и $g_0(y_1) = 0$ при $|y_1| > 1$. Легко проверить, что $g_0 \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\nu)$ и при всех $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^{2n}$ справедливо неравенство

$$|y_2| + |Q(y_1, y_2) + g_0(y_1)| > 0. \quad (7)$$

Справедлива

Лемма. Система уравнений

$$x'' = Q(x, x') + g_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (8)$$

при некотором $\omega_0 > 0$ не имеет ω_0 -периодических решений.

Доказательство. Если указанное число ω_0 не существует, то имеем последовательность $(1/k)$ -периодических решений $x_k, k \in \mathbb{N}$, системы (8). Аналогично доказательству теоремы 1 можно показать, что

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{t \in \mathbb{R}} (|x_k(t)| + |x'_k(t)|) < \infty.$$

Учитывая систему (8), можно считать, что последовательности вектор-функций $x_k, x'_k, k \in \mathbb{N}$, равномерно сходятся на любом конечном отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$:

$$\sup_{a \leq t \leq b} (|x_k(t) - x_0(t)| + |x'_k(t) - x'_0(t)|) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Кроме того, в силу $(1/k)$ -периодичности $x_k, k \in \mathbb{N}$, при любых $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\frac{1}{k} \int_0^{1/k} (\langle x'_k(t), z_1 \rangle + \langle Q(x_k(t), x'_k(t)) + g_0(x_k(t)), z_2 \rangle) dt = 0,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Переходя здесь к пределу, получаем равенство

$$\langle x'_0(0), z_1 \rangle + \langle Q(x_0(0), x'_0(0)) + g_0(x_0(0)), z_2 \rangle = 0,$$

верное при любых $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$, что противоречит неравенству (7). Лемма доказана.

Если x — решение системы (8), то при любом $r > 0$ вектор-функция $\tilde{x}(t) = r^{-1}x(r^{-\nu}t)$, $t \in \mathbb{R}$, будет решением системы уравнений (1) с возмущением $g(y_1) = r^{-1-2\nu}g_0(ry_1)$, $y_1 \in \mathbb{R}^n$. Полагая $r = (\omega/\omega_0)^{1/\nu}$, получаем, что из ω -периодичности $\tilde{x}$ следует ω_0 -периодичность x . Отсюда в силу доказанной леммы вытекает, что для возмущения, заданного формулой $g(y_1) = (\omega_0/\omega)^{1+2\nu}g_0((\omega/\omega_0)^{1/\nu}y_1)$, $y_1 \in \mathbb{R}^n$, система уравнений (1) не имеет ω -периодических решений.

Достаточность. Пусть система уравнений (6) не имеет ненулевых ограниченных решений и $\gamma(Q(\cdot, 0)) \neq 0$. Покажем, что при любом $g \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\nu)$ существует ω -периодическое решение системы (1).

Существование ω -периодического решения системы (1) равносильно существованию нуля вполне непрерывного векторного поля

$$\Phi_g(x, y) := \left(x(t) - x(\omega) - \int_0^t y(s) ds, \quad y(t) - y(\omega) - \int_0^t (Q(x(s), y(s)) + g(s, x(s), y(s))) ds \right),$$

определённого в банаховом пространстве $E := C([0, \omega]; \mathbb{R}^{2n})$ с элементами вида (x, y) и нормой

$$\|(x, y)\|_E := \max_{0 \leq t \leq \omega} (|x(t)| + |y(t)|).$$

Из теоремы 1 вытекает, что $\Phi_{\lambda g}(x, y) \neq 0$ при любых $(x, y) \in E$, $\|(x, y)\|_E \geq M$ и $\lambda \in [0, 1]$. Отсюда, согласно теории вполне непрерывных векторных полей [4, с. 135], при каждом $\lambda \in [0, 1]$ определено вращение $\gamma_\infty(\Phi_{\lambda g})$ векторного поля $\Phi_{\lambda g}$ на бесконечности, равное вращению (степени отображения) $\Phi_{\lambda g}$ на сфере $\|(x, y)\|_E = r$ при $r \geq M$. Значение $\gamma_\infty(\Phi_{\lambda g})$ не меняется при изменении $\lambda \in [0, 1]$ [4, с. 135], поэтому верно равенство

$$\gamma_\infty(\Phi_g) = \gamma_\infty(\Phi_0). \quad (9)$$

Докажем равенство

$$\gamma_\infty(\Phi_0) = \gamma(Q(\cdot, 0)). \quad (10)$$

Для этого рассмотрим семейство векторных полей

$$\Psi_\lambda(x, y) := \left(x(t) - x(\omega) - \left(\int_0^t + \lambda \int_t^\omega \right) y(s) ds, \quad y(t) - y(\omega) - \left(\int_0^t + \lambda \int_t^\omega \right) Q(x(s), y(s)) ds \right), \quad \lambda \in [0, 1].$$

Проверим, что при любых $(x, y) \in E \setminus \{(0, 0)\}$, $\lambda \in [0, 1]$ верно

$$\Psi_\lambda(x, y) \neq 0. \quad (11)$$

Действительно, если при некоторых $(x_0, y_0) \in E \setminus \{(0, 0)\}$, $\lambda_0 \in [0, 1]$ справедливо равенство $\Psi_{\lambda_0}(x_0, y_0) = 0$, то

$$\begin{aligned} \int_0^\omega y_0(s) ds &= 0, \quad x_0(0) = x_0(\omega), \quad x'_0(t) = (1 - \lambda_0)y_0(t), \quad t \in (0, \omega), \\ \int_0^\omega Q(x_0(s), y_0(s)) ds &= 0, \quad y_0(0) = y_0(\omega), \quad y'_0(t) = (1 - \lambda_0)Q(x_0(t), y_0(t)), \quad t \in (0, \omega). \end{aligned}$$

В случае $\lambda_0 = 1$ получаем $x_0(t) \equiv y_0(t) \equiv 0$, что противоречит включению $(x_0, y_0) \in E \setminus \{(0, 0)\}$. А в случае $\lambda_0 < 1$ вектор-функция $z_0(t) = x_0(t)/(1 - \lambda_0)$, периодически продолженная на $\mathbb{R}$, будет ненулевым ограниченным решением системы уравнений (6), что противоречит условию теоремы. Следовательно, соотношение (11) верно.

Согласно теории вращения вполне непрерывных векторных полей [4, с. 135], во-первых, из (11) вытекает равенство

$$\gamma_\infty(\Phi_0) = \gamma_\infty(\Psi_1), \quad (12)$$

во-вторых, для вращения векторного поля Ψ_1 имеем

$$\gamma_\infty(\Psi_1) = \gamma_\infty(F_1), \quad (13)$$

где векторное поле

$$F_1(\xi, \eta) := (-\omega\eta, -\omega Q(\xi, \eta)), \quad (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{2n},$$

получается из Ψ_1 заменой вектор-функций x и y векторами $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$. В третьих, верно равенство

$$\gamma_\infty(F_1) = \gamma(F_1), \quad (14)$$

где $\gamma(F_1)$ — вращение векторного поля F_1 на любой сфере $|\xi| + |\eta| = r$ ненулевого радиуса r пространства $\mathbb{R}^{2n}$. На сфере $|\xi| + |\eta| = r$ векторное поле F_1 формулой $(-\omega\eta, -\omega Q(\xi, \lambda\eta))$, $\lambda \in [0, 1]$, гомотопируется к векторному полю

$$F_0(\xi, \eta) := (-\omega\eta, -\omega Q(\xi, 0)), \quad (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Отсюда получаем

$$\gamma(F_1) = \gamma(F_0) = \gamma(Q(\cdot, 0)). \quad (15)$$

Таким образом, из (12)–(15) следует (10).

Из равенств (9) и (10) вытекает, что $\gamma_\infty(\Phi_g) \neq 0$. Тогда, согласно принципу ненулевого вращения [4, с. 138], существует нуль векторного поля Φ_g . Теорема доказана.

3. ПРИМЕР

Рассмотрим систему уравнений вида

$$x'' = \varphi(x, \varepsilon x')Ax + g(t, x, x'), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (16)$$

где $g \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\nu)$, A — квадратная матрица порядка n , $\varphi: \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}$ — непрерывная функция, ε — параметр. Предположим, что матрица A и функция φ удовлетворяют условиям

$$\varphi(y, 0)\langle Ay, y \rangle > 0, \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \varphi(\lambda y_1, \lambda^{1+\nu} y_2) \equiv \lambda^{2\nu} \varphi(y_1, y_2), \quad \lambda > 0. \quad (17)$$

Например, φ можно задать формулой

$$\varphi(y_1, y_2) = (|y_1|^{m_1} + c_1 |y_2|^{m_1/(1+\nu)}) \dots (|y_1|^{m_q} + c_q |y_2|^{m_q/(1+\nu)}),$$

где $q \in \mathbb{N}$, $m_j, c_j \in \mathbb{R}$, $m_j > 0$, $j = \overline{1, q}$, $m_1 + \dots + m_q = 2\nu$. Для главной нелинейной части $Q(y_1, y_2) \equiv \varphi(y_1, \varepsilon y_2)Ay_1$ в силу условий (17) имеем $\gamma(Q(\cdot, 0)) = 1$. Система уравнений

$$z'' = \varphi(z, \varepsilon z')Az, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad (18)$$

при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ не имеет ненулевых ограниченных решений. Действительно, в противном случае при некоторых ε_k , $k \in \mathbb{N}$, где $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, система (18) имеет ненулевые ограниченные решения $z_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$. Можно считать, что

$$|z_k(t)| + |z'_k(t)|^{1/(1+\nu)} \leq |z_k(0)| + |z'_k(0)|^{1/(1+\nu)} = r_k, \quad t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для вектор-функций $v_k(t) = r_k^{-1} z_k(r_k^{-\nu} t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, имеем

$$v''_k(t) = \varphi(v_k(t), \varepsilon_k v'_k(t))Av_k(t),$$

$$|v_k(t)| + |v'_k(t)|^{1/(1+\nu)} \leq |v_k(0)| + |v'_k(0)|^{1/(1+\nu)} = 1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Переходя к пределу, получаем ненулевое ограниченное решение $v_0(t)$ системы

$$v'' = \varphi(v, 0)Av, \quad v \in \mathbb{R}^n. \quad (19)$$

С другой стороны, в силу условий (17) система (19) не имеет ненулевых ограниченных решений, так как для любого ненулевого решения v этой системы имеет место неравенство

$$\langle v'(t), v(t) \rangle' = |v'(t)|^2 + \varphi(v(t), 0) \langle Av(t), v(t) \rangle > 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ система уравнений (18) не имеет ненулевых ограниченных решений. Следовательно, при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ и любом отображении $g \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\nu)$, согласно теореме 2, существует ω -периодическое решение системы (16).

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00032).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд, В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В.И. Арнольд. — М. : Наука, 1978. — 304 с.
2. Мухамадиев, Э. О разрешимости периодической задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с главной положительно однородной нелинейностью / Э. Мухамадиев, А.Н. Наимов // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 2. — С. 280–282.
3. Мухамадиев, Э. О разрешимости периодической задачи для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка / Э. Мухамадиев, А.Н. Наимов // Дифференц. уравнения. — 2024. — Т. 60, № 3. — С. 312–321.
4. Красносельский, М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. — М. : Наука, 1975. — 512 с.

ON THE EXISTENCE OF PERIODIC SOLUTIONS OF A SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER WITH QUASI-HOMOGENEOUS NON-LINEARITY

A. N. Naimov¹, M. V. Bystretsky²

Vologda State University, Russia
e-mail: ¹naimovan@vogu35.ru, ²pmbmv@bk.ru

In the paper was investigated the a priori estimate and the existence of periodic solutions of a fixed period for a system of second-order ordinary differential equations with the main quasi-homogeneous non-linearity. It is proved that an a priori estimate of periodic solutions takes place if the corresponding unperturbed system does not have non-zero bounded solutions. Under the conditions of an a priori estimate, using methods for calculating the mapping degree of vector fields, a criterion for the existence of periodic solutions under any perturbation from a given class is formulated and proven. The results obtained differ from earlier results in that the set of zeros of the main non-linear part is not taken into account.

Keywords: quasi-homogeneous non-linearity, perturbation, periodic solution, a priori estimate, the mapping degree of vector field.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00032).

REFERENCES

1. Arnold, V.I., *Dopolnitel'nyye glavy teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* (Additional Chapters on the Theory of Ordinary Differential Equations), Moscow: Nauka, 1978.
2. Mukhamadiev, E. and Naimov, A.N., On the solvability of a periodic problem for a system of ordinary differential equations with the main positive homogeneous non-linearity, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 2, pp. 289–291.
3. Mukhamadiev, E. and Naimov, A.N., On the solvability of a periodic problem for a system of non-linear ordinary differential equations of second order, *Differ. Uravn.*, 2024, vol. 60, no. 3, pp. 312–321.
4. Krasnoselsky, M.A. and Zabreiko, P.P., *Geometricheskiye metody nelineynogo analiza* (Geometric Methods of Non-Linear Analysis), Moscow: Nauka, 1975.