ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 5, с. 707–713

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.63

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

© Д. М. Коростелева

Казанский (Приволжский) федеральный университет

e-mail: diana.korosteleva.kpfu@mail.ru

Поступила в редакцию 18.12.2023 г., после доработки 29.02.2024 г.; принята к публикации 22.03.2024 г.

Предложена новая симметричная вариационная функционально-алгебраическая постановка задачи на собственные значения в гильбертовом пространстве с линейной зависимостью от спектрального параметра для класса математических моделей тонкостенных конструкций с присоединённым осциллятором. Установлено существование собственных значений и собственных векторов. Построена симметричная аппроксимация задачи в конечномерном подпространстве с линейной зависимостью от спектрального параметра. Получены оценки погрешности приближённых собственных значений и собственных векторов. Теоретические результаты иллюстрируются на примере задачи механики конструкций.

Ключевые слова: собственное колебание, балка, осциллятор, собственное значение, собственный вектор, задача на собственные значения, метод конечных элементов.

DOI: 10.31857/S0374064124050107, EDN: LAXMVD

Задачи о собственных колебаниях тонкостенных конструкций с присоединёнными осцилляторами возникают при математическом моделировании в авиационной и космической технике, при проектировании надводных и подводных судов, при расчёте различных ёмкостей и резервуаров в химической и нефтяной промышленности [1, 2]. Применяемые ранее постановки таких задач состояли в решении симметричных задач на собственные значения с рациональной зависимостью от спектрального параметра и вызывали значительные трудности [3], для преодоления которых были предприняты многочисленные попытки линеаризации рациональных спектральных задач этого класса [4–9]. Однако используемые ранее подходы приводили к несимметричной линеаризованной задаче, что затрудняло исследование существования собственных значений и соответствующей полной ортонормированной системы собственных векторов, а также создавало сложности при решении несимметричных алгебраических задач на собственные значения с матрицами высокого порядка.

В настоящей статье предложена новая симметричная вариационная функционально-алгебраическая постановка задачи на собственные значения в гильбертовом пространстве с линейной зависимостью от спектрального параметра для класса математических моделей тонкостенных конструкций с присоединённым осциллятором. Эта постановка позволила традиционными вариационными методами установить существование последовательности конечнократных положительных собственных значений с предельной точкой на бесконечности и соответствующей полной ортонормированной системы собственных векторов, а также построить и исследовать симметричную аппроксимацию задачи в конечномерном подпространстве с линейной зависимостью от спектрального параметра.

Обозначим через $\mathbb{R}$ вещественную числовую прямую, $\mathbb{R}^+=(0,\infty)$, через V — вещественное бесконечномерное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|_V$. Зададим симметричные билинейные формы $a\colon V\times V\to\mathbb{R}$ и $b\colon V\times V\to\mathbb{R}$ такие, что $\alpha_1\|v\|_V^2\leqslant a(v,v)\leqslant\alpha_2\|v\|_V^2$ для произвольного $v\in V$ при фиксированных $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}^+$, $b(v,v)>0$ для $v\in V\setminus\{0\}$, $b(v_i,v_i)\to b(v,v)$ при $i\to\infty$ для слабо сходящейся последовательности $v_i\rightharpoonup v$ в V при $i\to\infty$. Выберем ненулевой линейный непрерывный функционал $g\colon V\to\mathbb{R}$.

Введём гильбертово пространство $\overline{V}=V\times\mathbb{R}$ с нормой $\|\overline{v}\|_{\overline{V}}=\big(\|v\|_V^2+\zeta^2\big)^{1/2}$ для $\overline{v}=(v,\zeta)^{\mathrm{т}}\in\overline{V}$. При фиксированных $\kappa,\mu\in\mathbb{R}^+$ определим симметричные билинейные формы $\overline{a}\colon\overline{V}\times\overline{V}\to\mathbb{R}$ и $\overline{b}\colon\overline{V}\times\overline{V}\to\mathbb{R}$ с помощью соотношений $\overline{a}(\overline{u},\overline{v})=a(u,v)+\kappa(\xi-g(u))(\zeta-g(v))$ и $\overline{b}(\overline{u},\overline{v})=b(u,v)+\mu\xi\zeta$ при $\overline{u}=(u,\xi)^{\mathrm{т}}\in\overline{V}$, $\overline{v}=(v,\zeta)^{\mathrm{т}}\in\overline{V}$.

Сформулируем задачу на собственные значения: найти $\lambda\in\mathbb{R}$ и $\overline{u}\in\overline{V}\setminus\{0\}$ из уравнения

$$\overline{a}(\overline{u},\overline{v})=\lambda\overline{b}(\overline{u},\overline{v}),\quad \overline{v}\in\overline{V}.\tag{1}$$

Теорема 1. *Задача (1) имеет неубывающую последовательность конечнократных собственных значений λ_k, $k\in\mathbb{N}$, таких, что $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_k\leqslant\ldots$, $\lambda_k\to\infty$ при $k\to\infty$, и соответствующую систему собственных векторов $\overline{u}_k=(u_k,\xi_k)^{\mathrm{т}}\in\overline{V}$, $k\in\mathbb{N}$, $\overline{a}(\overline{u}_i,\overline{u}_j)=\lambda_i\delta_{ij}$, $\overline{b}(\overline{u}_i,\overline{u}_j)=\delta_{ij}$, $i,j\in\mathbb{N}$. Векторы $\widetilde{u}_k=\overline{u}_k/\sqrt{\lambda_k}$, $k\in\mathbb{N}$, составляют полную ортонормированную систему в пространстве $\overline{V}$, т.е. для любого вектора $\overline{v}\in\overline{V}$ имеет место разложение $\overline{v}=\sum_{i=1}^{\infty}\overline{a}(\overline{v},\widetilde{u}_i)\widetilde{u}_i$.*

Доказательство. Существуют $\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2\in\mathbb{R}^+$ такие, что $\overline{\alpha}_1\|\overline{v}\|_{\overline{V}}^2\leqslant\overline{a}(\overline{v},\overline{v})\leqslant\overline{\alpha}_2\|\overline{v}\|_{\overline{V}}^2$ для любого $\overline{v}\in\overline{V}$. Кроме того, имеем $\overline{b}(\overline{v},\overline{v})>0$ при $\overline{v}\in\overline{V}\setminus\{0\}$. Введём положительный компактный самосопряжённый оператор $A\colon\overline{V}\to\overline{V}$, определяемый соотношением $\overline{a}(A\overline{u},\overline{v})=\overline{b}(\overline{u},\overline{v})$ для любых $\overline{u},\overline{v}\in\overline{V}$. Тогда задача (1) примет операторный вид $\overline{u}=\lambda A\overline{u}$. Применив к операторной задаче теорему Гильберта–Шмидта [10, с. 283], получим требуемый результат.

Зададим подпространства V_h размерности $M=M_h$ бесконечномерного гильбертова пространства V. Предположим, что $\varepsilon_h(v)=\inf_{v^h\in V_h}\|v-v^h\|\to 0$ при $h\to 0$ для любого v из пространства V. Для пространства $\overline{V}_h=V_h\times\mathbb{R}$ размерности $N=M+1$ сформулируем конечномерную аппроксимацию задачи (1): найти $\lambda^h\in\mathbb{R}$ и $\overline{u}^h\in\overline{V}_h\setminus\{0\}$ из уравнения

$$\overline{a}(\overline{u}^h,\overline{v}^h)=\lambda^h\overline{b}(\overline{u}^h,\overline{v}^h),\quad \overline{v}^h\in\overline{V}_h.\tag{2}$$

Теорема 2. *Задача (2) имеет собственные значения λ_k^h, $k=\overline{1,N}$, $0<\lambda_1^h\leqslant\lambda_2^h\leqslant\ldots\leqslant\lambda_N^h$, и соответствующую систему собственных векторов $\overline{u}_k^h=(u_k^h,\xi_k^h)^{\mathrm{т}}\in\overline{V}_h$, $k=\overline{1,N}$, $\overline{a}(\overline{u}_i^h,\overline{u}_j^h)=\lambda_i^h\delta_{ij}$, $\overline{b}(\overline{u}_i^h,\overline{u}_j^h)=\delta_{ij}$, $i,j=\overline{1,N}$. Векторы $\widetilde{u}_k^h=\overline{u}_k^h/\sqrt{\lambda_k^h}$, $k=\overline{1,N}$, составляют полную ортонормированную систему в пространстве $\overline{V}_h$, т.е. для любого вектора $\overline{v}^h\in\overline{V}_h$ имеет место разложение $\overline{v}^h=\sum_{i=1}^{N}\overline{a}(\overline{v}^h,\widetilde{u}_i^h)\widetilde{u}_i^h$.*

Доказательство. Определим положительный самосопряжённый оператор $A_h\colon\overline{V}_h\to\overline{V}_h$ с помощью соотношения $\overline{a}(A_h\overline{u}^h,\overline{v}^h)=\overline{b}(\overline{u}^h,\overline{v}^h)$ для любых $\overline{u}^h,\overline{v}^h\in\overline{V}_h$. Тогда задача (2) эквивалентна операторной задаче $\overline{u}^h=\lambda^hA_h\overline{u}^h$. Применяя теорему 5.21 из [11, с. 134] для операторной задачи в конечномерном евклидовом пространстве, выводим требуемый результат.

Пусть $\overline{W}_1$ и $\overline{W}_2$ — подпространства гильбертова пространства $\overline{V}$, $\dim\overline{W}_1=\dim\overline{W}_2<\infty$, $\overline{P}_i$ — оператор ортогонального проектирования из $\overline{V}$ на $\overline{W}_i$, $i=1,2$. Тогда раствор подпространств $\overline{W}_1$ и $\overline{W}_2$ вычисляется по формуле [12]

$$\vartheta(\overline{W}_1,\overline{W}_2)=\sup_{\overline{w}\in\overline{W}_2,\ \|\overline{w}\|_{\overline{V}}=1}\|\overline{w}-\overline{P}_1\overline{w}\|_{\overline{V}}=\sup_{\overline{w}\in\overline{W}_1,\ \|\overline{w}\|_{\overline{V}}=1}\|\overline{w}-\overline{P}_2\overline{w}\|_{\overline{V}}.$$

Пусть λ_k — собственное значение задачи (1) кратности s такое, что $\lambda_{k-1}<\lambda_k=\lambda_{k+1}=\ldots$ $\ldots=\lambda_{k+s-1}<\lambda_{k+s},\ \overline{u}_i=(u_i,\xi_i)^{\mathrm{т}},\ i=\overline{k,k+s-1},$ — соответствующие собственные векторы, $\lambda_i^h,\ \overline{u}_i^h,\ i=\overline{k,k+s-1},$ — приближения по схеме (2), $U_k=\operatorname{span}\{u_k,u_{k+1},\ldots,u_{k+s-1}\},\ \overline{U}_k=$ $=\operatorname{span}\{\overline{u}_k,\overline{u}_{k+1},\ldots,\overline{u}_{k+s-1}\},\ \overline{U}_k^h=\operatorname{span}\{\overline{u}_k^h,\overline{u}_{k+1}^h,\ldots,\overline{u}_{k+s-1}^h\}.$

Далее будем считать h достаточно малым, а через c будем записывать различные константы, не зависящие от h. Обозначим

$$\varepsilon_k^h=\sup_{u\in U_k,\ \|u\|_V=1}\varepsilon_h(u),\quad \overline{\varepsilon}_k^h=\sup_{\overline{u}\in\overline{U}_k,\ \|\overline{u}\|_{\overline{V}}=1}\overline{\varepsilon}_h(\overline{u}),\quad \overline{\varepsilon}_h(\overline{v})=\inf_{\overline{v}^h\in\overline{V}_h}\|\overline{v}-\overline{v}^h\|_{\overline{V}}.$$

Так как U_k — конечномерное подпространство V, то $\varepsilon_k^h\to 0$ при $h\to 0$.

Теорема 3. *Справедливы следующие оценки погрешности:*

$$0\leqslant\lambda_i^h-\lambda_i\leqslant c(\varepsilon_k^h)^2,\quad i=\overline{k,k+s-1},\quad \vartheta(\overline{U}_k,\overline{U}_k^h)\leqslant c\varepsilon_k^h.$$

Доказательство. С помощью теорем 10 и 11 из [12] находим требуемые оценки

$$0\leqslant\lambda_i^h-\lambda_i\leqslant c(\overline{\varepsilon}_k^h)^2=c(\varepsilon_k^h)^2,\quad \vartheta(\overline{U}_k,\overline{U}_k^h)\leqslant c\,\overline{\varepsilon}_k^h=c\,\varepsilon_k^h.$$

Для иллюстрации изложенных теоретических результатов сформулируем задачу о собственных колебаниях защемлённой на торцах неоднородной балки переменного сечения с присоединённым осциллятором. Будем предполагать, что ось балки длиной l в состоянии равновесия занимает отрезок $\overline{\Omega}=[0,l]$ горизонтальной оси Ox, $\Omega=(0,l)$. Пусть $\rho=\rho(x)$ и $E=E(x)$ — плотность и модуль упругости материала балки, $S=S(x)$ и $J=J(x)$ — площадь поперечного сечения балки и момент инерции сечения относительно своей горизонтальной оси. Пусть торцы балки с координатами $x=0$ и $x=l$ заделаны жёстко. Предположим, что в точке с координатой $z\in\Omega$ упруго присоединён груз массой $M>0$ (гармонический осциллятор) с коэффициентом упругости подвески $K>0$, при этом $\sqrt{K/M}$ — парциальная частота осциллятора.

Через $w(x,t)$ будем обозначать смещение от положения равновесия точки x оси балки в момент времени t, через $\eta(t)$ — смещение от положения равновесия груза массой M в момент времени t. Собственные колебания механической системы балка–осциллятор определяются функциями $w(x,t)$ и $\eta(t)$ следующего вида:

$$w(x,t)=u(x)v(t),\quad x\in\Omega,\quad \eta(t)=\xi v(t),\quad t>0, \tag{3}$$

где $v(t)=a_0\cos(\sqrt{\lambda}t)+b_0\sin(\sqrt{\lambda}t),\ t>0;\ a_0,\ b_0,\ \lambda$ — константы.

Функции вида (3) подчиняются уравнению вибрации балки [13, с. 146]

$$(E(x)J(x)w_{xx}(x,t))_{xx}+\rho(x)S(x)w_{tt}(x,t)=f(x,t),\quad x\in\Omega,\quad t>0, \tag{4}$$

и уравнению колебания осциллятора [1, с. 17]

$$M\eta''(t)+K(\eta(t)-w(z,t))=0,\quad t>0. \tag{5}$$

Действие присоединённого осциллятора на балку моделируется [1, с. 17] функцией правой части дифференциального уравнения (4) согласно формуле

$$f(x,t)=K(\eta(t)-w(z,t))\delta(x-z), \tag{6}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, сосредоточенная в точке $x=0$. К уравнениям (4)–(6) добавляются граничные условия защемления на торцах балки:

$$w(0,t)=w_x(0,t)=w(l,t)=w_x(l,t)=0, \quad t>0. \tag{7}$$

Подставив (3) в (4)–(7), получим задачу на собственные значения, состоящую в нахождении чисел λ, функций $u(x)$, $x\in\Omega$, и чисел ξ, составляющих ненулевые векторы $(u,\xi)^{\mathrm{т}}$, для которых выполняется следующая система уравнений:

$$(E(x)J(x)u''(x))''-K(\xi-u(z))\delta(x-z)=\lambda\,\rho(x)S(x)\,u(x),\ \ x\in\Omega, \tag{8}$$

$$K(\xi-u(z))=\lambda M\xi, \tag{9}$$

$$u(0)=u'(0)=u(l)=u'(l)=0. \tag{10}$$

Число λ называется *собственным значением* задачи (8)–(10), а вектор $(u,\xi)^{\mathrm{т}}$ — соответствующим *собственным вектором.*

Через $W_2^2(\Omega)$ обозначим вещественное гильбертово пространство Соболева, снабжённое нормой

$$\|v\|_2=\left(\sum_{i=0}^{2}|v|_i^2\right)^{1/2}, \quad |v|_0=\left(\int\limits_0^l v^2(x)\,dx\right)^{1/2}, \quad |v|_1=|v'|_0, \quad |v|_2=|v''|_0.$$

Пусть $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ — пространство функций v из пространства $W_2^2(\Omega)$, дополнительно удовлетворяющих граничным условиям $v(0)=v'(0)=v(l)=v'(l)=0$. В пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ в качестве нормы применяется полунорма $|.|_2$, которая определяет норму, эквивалентную исходной норме $\|.\|_2$.

Обозначим $V=\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$, $\kappa=K$, $\mu=M$. Зададим достаточно гладкие функции E, J, ρ и S. Предположим, что для положительных констант E_1, E_2, J_1, J_2, ρ_1, ρ_2, S_1, S_2 справедливы неравенства $E_1\leqslant E(x)\leqslant E_2$, $J_1\leqslant J(x)\leqslant J_2$, $\rho_1\leqslant\rho(x)\leqslant\rho_2$, $S_1\leqslant S(x)\leqslant S_2$ при $x\in\overline{\Omega}$. Определим билинейные формы $a\colon V\times V\to\mathbb{R}$ и $b\colon V\times V\to\mathbb{R}$ соотношениями

$$a(u,v)=\int\limits_0^l E(x)J(x)u''(x)v''(x)\,dx, \quad b(u,v)=\int\limits_0^l \rho(x)S(x)u(x)v(x)\,dx,$$

а линейный непрерывный функционал $g\colon V\to\mathbb{R}$ с помощью равенства $g(v)=v(z)$ для $v\in V$. Тогда обобщённая постановка задачи (8)–(10) примет вид задачи (1), для которой справедлива теорема 1.

На отрезке $\overline{\Omega}$ зададим сетку равноотстоящих узлов $x_i=ih$, $i=\overline{0,n}$, $h=l/n$, с ячейками сетки $e_i=[x_{i-1},x_i]$, $i=\overline{1,n}$. Предположим, что $z=x_m$, $0<m<n$. Определим конечномерное пространство эрмитовых кубических конечных элементов [14, с. 73]

$$V_h=\{v^h\colon v^h\in\ \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega),\ \ v^h|_{e_i}\in P_3(e_i),\ \ i=\overline{1,n}\},$$

где $P_3(e)$ — пространство полиномов степени не выше 3 на множестве e. Здесь V_h является подпространством $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$, $\dim V_h=2n-2$. Введём вещественное гильбертово пространство $\overline{V}_h=V_h\times\mathbb{R}$. Заметим, что $\overline{V}_h$ — подпространство $\overline{V}$, $\dim\overline{V}_h=N$, $N=2n-1$. Приближение по методу конечных элементов задачи (8)–(10) сводится к решению задачи (2), для которой выполняются теоремы 2 и 3 при $\varepsilon_k^h\leqslant ch^2$ [14, с. 79].

Задача собственных колебаний балки с присоединённым осциллятором решалась численно с помощью сеточной схемы метода конечных элементов (2). Расчёты проводились при следующих значениях параметров: $E(x)=1$, $J(x)=1$, $\rho(x)=1$, $S(x)=1$, $l=1$, $z=0.3$. Решена серия задач при разных значениях K и M. Вычислены порядки погрешности σ_k, $k=\overline{1,6}$, для собственных значений λ_k, $k=\overline{1,6}$, по формуле $\sigma_k=\log_2{(\lambda_k^h-\lambda_k^{h/2})/(\lambda_k^{h/2}-\lambda_k^{h/4})}$ при $n=20$, $h=0.05$. В результате вычислений экспериментально получена оценка погрешности $\lambda_k^h-\lambda_k\approx ch^{\sigma_k}$. Установлено, что порядок погрешности $\sigma_k\approx 4$ и не зависит от параметров K, M и z присоединённого осциллятора. В табл. 1 приведены собственные значения λ_k, $k=\overline{1,6}$, вычисленные на мелкой сетке размера $h/4=0.0125$, и порядки погрешности σ_k, $k=\overline{1,6}$, при $M=0.2$ и $K=10$, а в табл. 2 — при $K=1000$. Полученные численные данные согласуются с теоретическими результатами теоремы 3.

Таблица 1. Собственные значения и порядки погрешности при $K=10$

k	λ_k	σ_k
1	48.3785	4.0050
2	513.7568	3.9991
3	3826.5613	3.9963
4	14625.2273	3.9921
5	39945.6431	3.9863
6	89153.6318	3.9791

Таблица 2. Собственные значения и порядки погрешности при $K=1000$

k	λ_k	σ_k
1	391.5022	3.9989
2	2399.3140	3.9968
3	8765.1172	3.9957
4	16190.1720	3.9927
5	40165.0208	3.9863
6	91092.2721	3.9791

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Казанского (Приволжского) федерального университета в рамках реализации программы стратегического академического лидерства “Приоритет-2030”.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев, Л.В. Динамика пластин и оболочек с сосредоточенными массами / Л.В. Андреев, А.Л. Дышко, И.Д. Павленко. — М. : Машиностроение, 1988. — 200 с.
2. Динамика тонкостенных конструкций с присоединёнными массами / Л.В. Андреев, А.И. Станкевич, А.Л. Дышко, И.Д. Павленко. — М. : Изд-во МАИ, 2012. — 214 с.
3. Соловьёв, С.И. Нелинейные задачи на собственные значения. Приближённые методы / С.И. Соловьёв. — Saarbrücken : Lambert Academic Publishing, 2011. — 256 с.
4. Algazin, S.D. Numerical study of free oscillations of a beam with oscillators / S.D. Algazin // J. Appl. Mech. Techn. Phys. — 2006. — V. 47, № 3. — P. 433–438.
5. Algazin, S.D. Numerical analysis of free vibrations of a beam with oscillators / S.D. Algazin // J. Appl. Mech. Techn. Phys. — 2006. — V. 47, № 4. — P. 573–581.
6. Stammberger, M. An unsymmetric eigenproblem governing vibrations of a plate with attached loads / M. Stammberger, H. Voss // Proc. of the 12th Int. Conf. on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing 2009. Funchal, Madeira, Portugal, 1–4 September 2009. — New York : Curran Associates, Inc., 2010. — V. 1. — P. 2880–2889.

7. Su, Y. Solving rational eigenvalue problems via linearization / Y. Su, Z. Bai // SIAM J. Matrix Anal. Appl. — 2011. — V. 32, № 1. — P. 201–216.
8. Alam, R. Linearizations for rational matrix functions and Rosenbrock system polynomials / R. Alam, N. Behera // SIAM J. Matrix Anal. Appl. — 2016. — V. 37, № 1. — P. 354–380.
9. Güttel, S. The nonlinear eigenvalue problem / S. Güttel, F. Tisseur // Acta Numerica. — 2017. — V. 26. — P. 1–94.
10. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — М. : Наука, 1989. — 624 с.
11. Ильин, В.А. Линейная алгебра / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. — М. : Наука, 1984. — 296 с.
12. Соловьев, С.И. Аппроксимация вариационных задач на собственные значения / С.И. Соловьев // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т. 46, № 7. — С. 1022–1032.
13. Roseau, M. Vibrations in Mechanical Systems / M. Roseau. — Berlin : Springer-Verlag, 1987. — 515 p.
14. Стренг, Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс ; пер. с англ. В.И. Агошкова и др. — М. : Мир, 1977. — 350 с.

APPROXIMATION OF FUNCTIONAL-ALGEBRAIC EIGENVALUE PROBLEMS

D. M. Korosteleva

Kazan (Volga Region) Federal University, Russia
e-mail: diana.korosteleva.kpfu@mail.ru

A new symmetric variational functional-algebraic formulation of the eigenvalue problem in the Hilbert space with linear dependence on the spectral parameter for a class of mathematical models of thin-walled structures with an attached oscillator is proposed. The existence of eigenvalues and eigenvectors is established. A new symmetric approximation of the problem in a finite-dimensional subspace with linear dependence on the spectral parameter is constructed. Error estimates of the approximate eigenvalues and eigenvectors are obtained. The theoretical results are illustrated on the example of the problem of structural mechanics.

Keywords: eigenvibration, beam, oscillator, eigenvalue, eigenvector, eigenvalue problem, finite element method.

FUNDING

This work was carried out with financial support from Kazan (Volga region) Federal University within the framework of the strategic academic leadership program “Priority-2030”.

REFERENCES

1. Andreev, L.V., Dyshko, A.L., and Pavlenko, I.D., *Dinamika plastin i obolochek s sosredotochennymi massami* (Dynamics of Plates and Shells with Concentrated Masses), Moscow: Mashinostroenie, 1988.
2. Andreev, L.V., Stankevich, A.I., Dyshko, A.L., and Pavlenko, I.D., *Dinamika tonkostennykh konstruktsiy s prisoedinennymi massami* (Dynamics of Thin-Walled Constructions with Attached Masses), Moscow: Izdatel’stvo MAI, 2012.
3. Solov’ev, S.I., *Nelineinye zadachi na sobstvennye znacheniya. Priblizhennye metody* (Nonlinear Eigenvalue Problems. Approximate Methods), Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2011.
4. Algazin, S.D., Numerical study of free oscillations of a beam with oscillators, *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2006, vol. 47, no. 3, pp. 433–438.
5. Algazin, S.D., Numerical analysis of free vibrations of a beam with oscillators, *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2006, vol. 47, no. 4, pp. 573–581.
6. Stammberger, M. and Voss, H., An unsymmetric eigenproblem governing vibrations of a plate with attached loads, *Proceedings of the 12th International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing 2009, Funchal, Madeira, Portugal, 1–4 September 2009*, New York: Curran Associates, Inc., 2010, vol. 1, pp. 2880–2889.

7. Su, Y. and Bai, Z., Solving rational eigenvalue problems via linearization, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 2011, vol. 32, no. 1, pp. 201–216.
8. Alam, R. and Behera, N., Linearizations for rational matrix functions and Rosenbrock system polynomials, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 2016, vol. 37, no. 1, pp. 354–380.
9. Güttel, S. and Tisseur, F., The nonlinear eigenvalue problem, *Acta Numerica*, 2017, vol. 26, pp. 1–94.
10. Kolmogorov, A.N. and Fomin, S.V., *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* (Elements of Function Theory and Functional Analysis), Moscow: Nauka, 1989.
11. Il'in, V.A. and Poznyak, E.G., *Lineynaya algebra* (Linear Algebra), Moscow: Nauka, 1984.
12. Solov'ev, S.I., Approximation of variational eigenvalue problems, *Differ. Equat.*, 2010, vol. 46, no. 7, pp. 1030–1041.
13. Roseau, M., *Vibrations in Mechanical Systems*, Berlin: Springer-Verlag, 1987.
14. Strang, G. and Fix, G.J., *Teoriya metoda konechnykh elementov* (An Analysis of the Finite Element Method), Moscow: Mir, 1977.