ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 2, с. 157–174

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.984.5

О СПЕКТРЕ НЕСАМОСОПРЯЖЁННОГО ОПЕРАТОРА ДИРАКА С ДВУХТОЧЕЧНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

А. С. Макин

Российский университет дружбы народов, г. Москва

e-mail: alexmakin@yandex.ru

Поступила в редакцию 13.02.2023 г., после доработки 13.02.2023 г.; принята к публикации 13.11.2023 г.

Рассмотрена спектральная задача для оператора Дирака с произвольными двухточечными краевыми условиями и произвольным комплекснозначным суммируемым с квадратом потенциалом $V(x)$. Установлены необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять целая функция, чтобы являться характеристическим определителем указанного оператора. В случае нерегулярных краевых условий найдены условия, при выполнении которых множество комплексных чисел является спектром рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: оператор Дирака, характеристический определитель, спектр.

DOI: 10.31857/S0374064124020024, EDN: QOXJKB

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе изучается система Дирака

$$B\mathbf{y}' + V\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}, \tag{1}$$

где $\mathbf{y} = \mathrm{col}(y_1(x), y_2(x))$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},$$

а комплекснозначные функции $p, q \in L_2(0,\pi)$, с двухточечными краевыми условиями

$$U_1(\mathbf{y}) = a_{11}y_1(0) + a_{12}y_2(0) + a_{13}y_1(\pi) + a_{14}y_2(\pi) = 0, \tag{2}$$

$$U_2(\mathbf{y}) = a_{21}y_1(0) + a_{22}y_2(0) + a_{23}y_1(\pi) + a_{24}y_2(\pi) = 0, \tag{3}$$

в которых коэффициенты a_{ij}, $i = 1, 2$, $j = \overline{1,4}$, являются произвольными комплексными числами, а строки матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

линейно независимы.

Строение спектра оператора (1), (3) с регулярными краевыми условиями изучалось во многих работах, среди которых отметим [1–8]. Обширный список литературы по указанной теме приведён в обзоре [4]. Значительно менее исследованными остаются задачи (1)–(3)

с краевыми условиями, не являющимися регулярными (т.е. нерегулярными или вырожденными), изучение спектра которых составляет основное содержание настоящей работы. Пример задачи (1)–(3) с вырожденными краевыми условиями, система корневых функций которой содержит присоединенные функции сколь угодно высокого порядка, был построен в статье [9].

Обозначим через $\|f\|=(|f_1|^2+|f_2|^2)^{1/2}$ норму произвольного вектора $f=\mathrm{col}(f_1,f_2)\in\mathbb{C}^2$ и положим $\langle f,g\rangle=f_1\bar g_1+f_2\bar g_2$, а через $\|W\|=\sup_{\|f\|=1}\|Wf\|$ обозначим норму произвольной матрицы W размера 2×2. Обозначим через $L_{2,2}(a,b)$ пространство двумерных вектор-функций $f(t)=\mathrm{col}(f_1(t),f_2(t))$ с нормой $\|f\|_{L_{2,2}(a,b)}=(\int_a^b\|f(t)\|^2dt)^{1/2}$ и через $L_{2,2}^{2,2}(a,b)$ пространство матриц-функций $W(t)$ размера 2×2 с нормой $\|W\|_{L_{2,2}^{2,2}(a,b)}=(\int_a^b\|W(t)\|^2dt)^{1/2}$. Оператор $\mathbb{L}\mathbf{y}=B\mathbf{y}'+V\mathbf{y}$ будем рассматривать как линейный оператор в пространстве $L_{2,2}(0,\pi)$ с областью определения $D(\mathbb{L})=\{\mathbf{y}\in W_1^1[0,\pi]:\ \mathbb{L}\mathbf{y}\in L_{2,2}(0,\pi),\ U_j(\mathbf{y})=0,\ j=1,2\}$.

Обозначим через
$$E(x,\lambda)=\begin{pmatrix}c_1(x,\lambda) & -s_2(x,\lambda)\\ s_1(x,\lambda) & c_2(x,\lambda)\end{pmatrix}\tag{4}$$
матрицу фундаментальной системы решений уравнения (1) с краевыми условиями $E(0,\lambda)=I$, где I — единичная матрица, и через $E_0(x,\lambda)$ фундаментальную систему решений невозмущённого уравнения $B\mathbf{y}'=\lambda\mathbf{y}$ с краевыми условиями $E_0(0,\lambda)=I$. Очевидно, что
$$E_0(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\cos(\lambda x) & -\sin(\lambda x)\\ \sin(\lambda x) & \cos(\lambda x)\end{pmatrix}.$$

Хорошо известно, что элементы матрицы $E(x,\lambda)$ связаны соотношением
$$c_1(x,\lambda)c_2(x,\lambda)+s_1(x,\lambda)s_2(x,\lambda)=1,\tag{5}$$
справедливом при любых x, λ.

Собственные значения задачи (1)–(3) являются корнями характеристического уравнения
$$\Delta(\lambda)=0,$$
где
$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}U_1(E^{[1]}(\cdot,\lambda)) & U_1(E^{[2]}(\cdot,\lambda))\\ U_2(E^{[1]}(\cdot,\lambda)) & U_2(E^{[2]}(\cdot,\lambda))\end{vmatrix},$$
$E^{[k]}(x,\lambda)$ — k-й столбец матрицы (4).

Обозначим через J_{ij} определитель, составленный из i-го и j-го столбцов матрицы A, $J_0:=J_{12}+J_{34},\ J_1:=J_{14}-J_{23},\ J_2:=J_{13}+J_{24}$.

Методом оператора преобразования в работе [2] было показано, что характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи (1)–(3) может быть приведён к виду
$$\begin{gathered}\Delta(\lambda)=J_{12}+J_{34}+J_{14}c_2(\pi,\lambda)-J_{23}c_1(\pi,\lambda)-J_{13}s_2(\pi,\lambda)-J_{24}s_1(\pi,\lambda)=\\ =\Delta_0(\lambda)+\int\limits_0^\pi r_1(t)e^{-i\lambda t}dt+\int\limits_0^\pi r_2(t)e^{i\lambda t}dt,\end{gathered}\tag{6}$$
где функция
$$\Delta_0(\lambda)=J_0+J_1\cos(\pi\lambda)-J_2\sin(\pi\lambda)=J_0+\frac{J_1+iJ_2}{2}e^{i\pi\lambda}+\frac{J_1-iJ_2}{2}e^{-i\pi\lambda}\tag{7}$$

является характеристическим определителем невозмущённой задачи

$$B\mathbf{y}' = \lambda \mathbf{y}, \quad U(\mathbf{y}) = 0, \tag{8}$$

а функции $r_j \in L_2(0,\pi)$, $j = 1, 2$.

Краевые условия (2), (3) могут быть разделены на четыре основных типа.

Определение 1. Краевые условия (2), (3) называются *регулярными*, если

$$J_1^2 + J_2^2 = (J_{14} + J_{32})^2 + (J_{13} + J_{24})^2 \neq 0, \tag{9}$$

и *усиленно регулярными*, если дополнительно выполняется неравенство

$$J_0^2 \neq J_1^2 - J_2^2. \tag{10}$$

Определение 2. Краевые условия (2), (3) называются *регулярными*, но *не усиленно регулярными*, если справедливо (9), но (10) не имеет места, т.е.

$$J_0^2 = J_1^2 - J_2^2.$$

Определение 3. Краевые условия (2), (3) называются *нерегулярными*, если

$$J_0 \neq 0, \quad J_1 + iJ_2 \neq 0, \quad J_1 - iJ_2 = 0; \quad J_0 \neq 0, \quad J_1 + iJ_2 = 0, \quad J_1 - iJ_2 \neq 0.$$

Определение 4. Краевые условия (2), (3) называются *вырожденными*, если

$$J_1 = J_2 = 0; \quad J_0 = 0, \quad J_1 + iJ_2 \neq 0, \quad J_1 - iJ_2 = 0; \quad J_0 = 0, \quad J_1 + iJ_2 = 0, \quad J_1 - iJ_2 \neq 0.$$

Легко видеть, что краевые условия (2), (3) являются вырожденными тогда и только тогда, когда характеристическое уравнение $\Delta_0(\lambda) = 0$ не имеет корней или $\Delta_0(\lambda) \equiv 0$.

Обозначим $c_j(\lambda) = c_j(\pi, \lambda)$, $s_j(\lambda) = s_j(\pi, \lambda)$, $j = 1, 2$. Через PW_σ обозначим класс целых функций $f(z)$ экспоненциального типа, не превосходящего σ, таких, что $\|f\|_{L_2(R)} < \infty$. Известно [10], что функции $c_j(\lambda)$, $s_j(\lambda)$ допускают представление

$$c_j(\lambda) = \cos(\pi\lambda) + g_j(\lambda), \quad s_j(\lambda) = \sin(\pi\lambda) + h_j(\lambda),$$

где $g_j, h_j \in PW_\pi$, $j = 1, 2$.

Лемма (см. [5]). *Целые функции $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$ допускают представления*

$$u(\lambda) = \sin(\pi\lambda) + h(\lambda), \quad v(\lambda) = \cos(\pi\lambda) + g(\lambda),$$

где $h, g \in PW_\pi$, тогда и только тогда, когда

$$u(\lambda) = -\pi(\lambda_0 - \lambda) \prod_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{n}, \quad \lambda_n = n + \epsilon_n, \quad \{\epsilon_n\} \in l_2,$$

$$v(\lambda) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{n - 1/2}, \quad \lambda_n = n - 1/2 + \kappa_n, \quad \{\kappa_n\} \in l_2.$$

Сходимость бесконечных произведений понимается в смысле главного значения.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В настоящей статье будем изучать задачу (1)–(3) при выполнении условий

$$J_{14}\neq 0,\quad J_{23}\neq 0,\quad J_{13}J_{24}=0. \tag{11}$$

Соотношениям (11) удовлетворяет широкий класс краевых условий, например, условия, задаваемые матрицей

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\ 0 & b_2 & 0 & d_2\end{pmatrix},$$

где $a_1d_2b_2c_1\neq 0$, или

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & 0 & c_2 & 0\end{pmatrix},$$

где $a_2d_1b_1c_2\neq 0$; в том числе усиленно регулярные условия, если

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0\\ 0 & 1 & 0 & a\end{pmatrix}, \tag{12}$$

где $a\neq 0$, $a\neq \pm 1$; регулярные, но не усиленно регулярные, если в (12) $a=\pm 1$; нерегулярные, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2i\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

вырожденные условия, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Заметим, что условия (12) при $a\neq 0$, $a\neq\pm 1$ являются квазипериодическими, при $a=-1$ — периодическими и при $a=1$ — антипериодическими.

Рассмотрим систему Дирака (1)–(3), (11). Очевидно, что хотя бы одно из чисел J_{13}, J_{24} равно нулю. Пусть $J_{24}=0$, случай $J_{13}=0$ рассматривается совершенно аналогично. Из (6), (7) следует, что характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ этой задачи может быть приведён к виду

$$\Delta(\lambda)=J_0+J_{14}c_2(\lambda)-J_{23}c_1(\lambda)-J_{13}s_2(\lambda)=\Delta_0(\lambda)+f(\lambda), \tag{13}$$

где $\Delta_0(\lambda)=J_0+(J_{14}-J_{23})\cos(\pi\lambda)-J_{13}\sin(\pi\lambda)$, $f\in PW_\pi$.

Теорема 1. *Если $J_{14}+J_{23}\neq 0$, то для любой функции $f\in PW_\pi$ существует потенциал $V\in L_2(0,\pi)$ такой, что для характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ задачи (1)–(3), (11) с потенциалом $V(x)$ справедливо равенство (13). Если $J_{14}+J_{23}=0$, то последнее утверждение справедливо при выполнении дополнительного условия*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f(n)|<\infty. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть f — произвольная функция из класса PW_π. Из теоремы Пэли–Винера и [11, лемма 1.3.1] следует, что

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} e^{-\pi|\operatorname{Im}\lambda|}f(\lambda)=0. \tag{15}$$

Пусть λ_n $(n\in\mathbb{Z})$ — некоторая строго монотонно возрастающая последовательность вещественных чисел, удовлетворяющая условию $(*)$: $\lambda_n=n$, если $n>N_0$, где N_0 — некоторое натуральное число, и $\lambda_n=-\lambda_{-n}$ для любого $n\neq 0$.

Обозначим

$$s(\lambda)=-\pi(\lambda_0-\lambda)\prod_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda}{n}. \tag{16}$$

Из леммы следует, что

$$s(\lambda)=\sin(\pi\lambda)+h(\lambda), \tag{17}$$

где $h\in PW_\pi$, поэтому

$$|s(\lambda)|\geqslant C_1e^{\pi|\operatorname{Im}\lambda|} \tag{18}$$

если $|\operatorname{Im}\lambda|\geqslant M$, где M – достаточно большое число. Из (16) вытекает, что

$$\dot s(\lambda_0)=\pi\prod_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda_0}{n}>0.$$

Легко видеть, что неравенство $\dot s(\lambda_n)\dot s(\lambda_{n+1})<0$ имеет место для всех $n\in\mathbb{Z}$. Из двух последних неравенств следует, что

$$(-1)^n\dot s(\lambda_n)>0.$$

Из соотношения (17) и [10, лемма 2.1] вытекает, что

$$\dot s(\lambda_n)=\pi(-1)^n+\tau_n,$$

где $\{\tau_n\}\in l_2$, следовательно,

$$\frac{1}{\dot s(\lambda_n)}=\frac{(-1)^n}{\pi}+\sigma_n,\quad \{\sigma_n\}\in l_2. \tag{19}$$

Обозначим $\alpha=J_{14}$, $\beta=-J_{23}$, $\gamma=-J_{13}$, $u_+(\lambda)=(\alpha+\beta)\cos(\pi\lambda)+\gamma\sin(\pi\lambda)+f(\lambda)$. Заметим, что

$$\alpha\neq 0,\quad \beta\neq 0. \tag{20}$$

Рассмотрим уравнение

$$\alpha w^2-u_+(\lambda_n)w+\beta=0, \tag{21}$$

корни которого определяются по формуле

$$c_n^{\pm}=\frac{u_+(\lambda_n)\pm\sqrt{u_+^2(\lambda_n)-4\alpha\beta}}{2\alpha}.$$

Подставив в неё выражение для $u_+(\lambda_n)$, получим

$$c_n^{\pm}=\frac{1}{2\alpha}\Big[(\alpha+\beta)\cos(\pi\lambda_n)+\gamma\sin(\pi\lambda_n)+f(\lambda_n)\pm\sqrt{((\alpha+\beta)\cos(\pi\lambda_n)+\gamma\sin(\pi\lambda_n)+f(\lambda_n))^2-4\alpha\beta}\Big]=$$

$$=\frac{1}{2\alpha}\Big[(\alpha+\beta)\cos(\pi\lambda_n)+\gamma\sin(\pi\lambda_n)+f(\lambda_n)\pm$$

$$\pm\sqrt{(\alpha-\beta)^2+2(\alpha+\beta)\cos(\pi\lambda_n)(\gamma\sin(\pi\lambda_n)+f(\lambda_n))+(\gamma\sin(\pi\lambda_n)+f(\lambda_n))^2-(\alpha+\beta)^2\sin^2(\pi\lambda_n)}\Big].$$

Введём следующие обозначения:

$$F^{\pm}(\lambda)=\frac{1}{2\alpha}\Big[(\alpha+\beta)\cos(\pi\lambda)+\gamma\sin(\pi\lambda)+f(\lambda)\pm\sqrt{((\alpha+\beta)\cos(\pi\lambda)+\gamma\sin(\pi\lambda)+f(\lambda))^2-4\alpha\beta}\Big]=$$

$$=\frac{1}{2\alpha}\Big[(\alpha+\beta)\cos(\pi\lambda)+\gamma\sin(\pi\lambda)+f(\lambda)\pm$$

$$\pm\sqrt{(\alpha-\beta)^2+2(\alpha+\beta)\cos(\pi\lambda)(\gamma\sin\pi\lambda+f(\lambda))+(\gamma\sin(\pi\lambda)+f(\lambda))^2-(\alpha+\beta)^2\sin^2(\pi\lambda)}\Big],$$

$$F_0^{\pm}(\lambda)=\frac{1}{2\alpha}\Big[(\alpha+\beta)\cos(\pi\lambda)+\gamma\sin(\pi\lambda)\pm\sqrt{((\alpha+\beta)\cos(\pi\lambda)+\gamma\sin(\pi\lambda))^2-4\alpha\beta}\Big]=$$

$$=\frac{1}{2\alpha}\Big[(\alpha+\beta)\cos(\pi\lambda)+\gamma\sin(\pi\lambda)\pm\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha+\beta)\gamma\cos(\pi\lambda)\sin(\pi\lambda)+(\gamma^2-(\alpha+\beta)^2)\sin^2(\pi\lambda)}\Big].$$

Обозначим также через $\Gamma(z,r)$ круг с центром в точке z радиуса r. Пусть $\alpha\neq\beta$. Возможны следующие случаи.

1. $\mathrm{Im}(\beta/\alpha)\neq 0$. Пусть прямая l_0 проходит через точки 1 и $-\beta/\alpha$, а прямая l проходит через начало координат и параллельна l_0. Очевидно, существует число ε_0 такое, что круги $\Gamma(1,\varepsilon_0)$ и $\Gamma(-\beta/\alpha,\varepsilon_0)$ лежат строго по одну сторону от прямой l.

Из (15) и (20) следует, что существует чётное положительное $\tilde N$ такое, что

$$|F^{\pm}(\lambda)-F_0^{\pm}(\lambda)|<\frac{\varepsilon_0}{2} \tag{22}$$

для любого λ, если $|\lambda|\geqslant\tilde N-1$, $\lambda=k$, $k\in\mathbb{Z}$. Из (23) вытекает, что существует $0<\delta_0<1/4$ такое, что

$$|F_0^{\pm}(\lambda)-F_0^{\pm}(\lambda+z)|<\frac{\varepsilon_0}{2} \tag{23}$$

при $\lambda=\pm\tilde N$, $|z|<\delta_0$. Определим последовательность $\{\lambda_n\}$ $(n\in\mathbb{Z})$ следующим образом: $\lambda_n=n$, если $n\geqslant\tilde N+1$, и пусть $\lambda_n=\tilde N+\epsilon_n$, $0<\epsilon_1<\ldots<\epsilon_{\tilde N}<\delta$, если $n=\overline{1,\tilde N}$, $\lambda_n=-\lambda_{-n}$ при $n\neq 0$, $\lambda_0=\tilde N$. Очевидно, $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условиям $(*)$. Получаем, что если $|n|\geqslant\tilde N+1$, то все числа $(-1)^n c_n^+$ лежат внутри круга $\Gamma(1,\varepsilon_0)$ при чётных n, а все числа $(-1)^n c_n^-$ лежат внутри круга $\Gamma(1,\varepsilon_0)$ при нечётных n. Пусть $c_n=c_n^+$, если n чётно, и $c_n=c_n^-$, если n нечётно, следовательно, числа $(-1)^n c_n$ лежат внутри круга $\Gamma(1,\varepsilon_0)$.

Пусть $|n|\leqslant\tilde N$, тогда из (22) и (23) следует, что

$$|F^{\pm}(\lambda_n)-F_0^{\pm}(\tilde N)|<\varepsilon_0.$$

Очевидно, что в силу чётности $\tilde N$ все числа c_n^+ лежат внутри круга $\Gamma(1,\varepsilon_0)$, а все числа c_n^- лежат внутри круга $\Gamma(\beta/\alpha,\varepsilon_0)$. Положим $c_n=c_n^+$, если n чётно, тогда числа $(-1)^n c_n$ лежат внутри круга $\Gamma(1,\varepsilon_0)$. Пусть $c_n=c_n^-$, если n нечётно, тогда числа $(-1)^n c_n$ лежат внутри круга $\Gamma(-\beta/\alpha,\varepsilon_0)$, Таким образом, все числа $(-1)^n c_n$ $(n\in\mathbb{Z})$ лежат строго по одну сторону от прямой l.

2. $\mathrm{Im}(\beta/\alpha)=0$, $\mathrm{Re}(\beta/\alpha)<0$. Здесь существует число ε_0 такое, что круги $\Gamma(1,\varepsilon_0)$ и $\Gamma(-\beta/\alpha,\varepsilon_0)$ лежат строго правее мнимой оси. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получаем, что все числа $(-1)^n c_n$ лежат строго правее мнимой оси.

3. $\mathrm{Im}(\beta/\alpha)=0$, $\mathrm{Re}(\beta/\alpha)>0$. Обозначим $\tilde\alpha=\alpha\bar\alpha$, $\tilde\beta=\beta\bar\alpha$, $\tilde\gamma=\gamma\bar\alpha$, $\tilde f(\lambda)=\bar\alpha f(\lambda)$, тогда $\tilde\alpha>0$, $\tilde\beta>0$. Легко видеть, что

$$c_n^{\pm}=\frac{1}{2\tilde\alpha}\Big[(\tilde\alpha+\tilde\beta)\cos(\pi\lambda_n)+\tilde\gamma\sin(\pi\lambda_n)+\tilde f(\lambda_n)\pm\sqrt{((\tilde\alpha+\tilde\beta)\cos(\pi\lambda_n)+\tilde\gamma\sin(\pi\lambda_n)+\tilde f(\lambda_n))^2-4\tilde\alpha\tilde\beta}\Big].$$

Обозначим
$$R^{\pm}=\frac{1}{2\tilde\alpha}\Big[\tilde\gamma\pm\sqrt{\tilde\gamma^2-4\tilde\alpha\tilde\beta}\Big].$$

3.1. $\operatorname{Im}R^+\operatorname{Im}R^-<0$. В этом случае
$$\tilde\gamma^2-4\tilde\alpha\tilde\beta\neq 0. \tag{24}$$

Пусть для определённости $\operatorname{Im}R^+>0$, тогда $\operatorname{Im}R^-<0$. Из (24) следует, что существует $\varepsilon_1>0$ такое, что круги $\Gamma(R^+,\varepsilon_1)$ и $\Gamma(R^-,\epsilon_1)$ лежат строго по разные стороны от некоторой прямой l, проходящей через начало координат и отличной от вещественной оси. Очевидно, что существует число ε_2, $0<\varepsilon_2<\varepsilon_1$, такое, что круг $\Gamma(-1,\varepsilon_2)$ не пересекается с l, следовательно, круг $\Gamma(-1,\varepsilon_2)$ расположен строго по одну сторону от прямой l. Из (15) и (20) вытекает, что существует нечётное положительное число $\hat N$ такое, что
$$|F^{\pm}(\lambda)-F_0^{\pm}(\lambda)|<\frac{\varepsilon_1}{2} \tag{25}$$
для любого λ, если $|\lambda|\geqslant\hat N-1$, $\lambda=k$, $k\in\mathbb{Z}$. В силу (24) существует $0<\delta_1<1/4$ такое, что
$$|F_0^{\pm}(\lambda)-F_0^{\pm}(\lambda+z)|<\frac{\varepsilon_2}{2}, \tag{26}$$
если $\lambda=\pm(\hat N-1)$, $|z|<\delta_1$.

Определим последовательность $\{\lambda_n\}$ $(n\in\mathbb{Z})$ следующим образом: $\lambda_n=n$, если $n\geqslant\hat N+1$, и пусть $\lambda_n=\hat N-1/2+\epsilon_n$, $0<\epsilon_1<\ldots<\epsilon_{\hat N}<\delta_1$, если $n=\overline{1,\hat N}$, $\lambda_n=-\lambda_{-n}$ при $n\neq0$, $\lambda_0=\hat N-1/2$. Очевидно, что $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условиям $(*)$. Получаем, что если $|n|\geqslant\tilde N+1$, то все числа c_n^+ лежат внутри круга $\Gamma(1,\varepsilon_1)$ при чётных n, а все числа c_n^- лежат внутри круга $\Gamma(-1,\varepsilon_1)$ при нечётных n. Положим $c_n=c_n^+$, если n чётно, и $c_n=c_n^-$, если n нечётно, следовательно, числа $(-1)^nc_n$ лежат внутри круга $\Gamma(1,\varepsilon_1)$.

Пусть $|n|\leqslant\tilde N$, тогда из (25), (26) следует, что
$$|F^{\pm}(\lambda_n)-F_0^{\pm}(\hat N-1/2)|<\varepsilon_1,$$
а числа $c_n^+\in\Gamma(R^+,\varepsilon_1)$, $c_n^-\in\Gamma(R^-,\varepsilon_1)$. Предположим, например, что круг $\Gamma(R^+,\varepsilon_1)$ лежит по одну сторону от прямой l с кругом $\Gamma(1,\varepsilon_0)$. Положим $c_n=c_n^+$, если n чётно, и $c_n=c_n^-$, если n нечётно, тогда все числа $(-1)^nc_n$, $n\in\mathbb{Z}$, лежат строго по одну сторону от прямой l.

3.2. $\operatorname{Im}R^+=\operatorname{Im}R^-=0$. Существует число $\varepsilon_3>0$ такое, что круг $\Gamma(-1,\varepsilon_3)$ лежит строго ниже прямой $l_1:y=-x$, причём круг $\Gamma\Big(i\sqrt{\tilde\beta/\tilde\alpha},\varepsilon_3\Big)$ лежит строго выше прямой l_1, а круг $\Gamma\Big(-i\sqrt{\tilde\beta/\tilde\alpha},\varepsilon_3\Big)$ — строго ниже l_1.

Очевидно, что $\tilde\gamma/\tilde\alpha$ вещественно, следовательно, $\tilde\gamma$ вещественно.

Рассмотрим уравнение
$$(\tilde\alpha+\tilde\beta)\cos t+\tilde\gamma\sin t=0.$$

Так как $\tilde\alpha+\tilde\beta\neq0$, оно имеет корни
$$t_n=\operatorname{arcctg}\frac{-\tilde\gamma}{\tilde\alpha+\tilde\beta}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Обозначим
$$h_0=\frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg}\frac{-\tilde\gamma}{\tilde\alpha+\tilde\beta}.$$

Из (15) и (20) вытекает, что существует положительное число $\hat{N}$ такое, что

$$|F^{\pm}(\lambda)-F_0^{\pm}(\lambda)|<\frac{\varepsilon_3}{2}$$

для любого λ, если $|\lambda|\geqslant\hat{N}-1$, $\lambda=k-1$, $k\in\mathbb{Z}$, или $\lambda_n=\hat{\lambda}=t_{\hat{N}-1}/\pi$, а также существует $\delta_3>0$ такое, что

$$|F_0^{\pm}(\lambda)-F_0^{\pm}(\lambda+z)|<\frac{\varepsilon_3}{2},$$

если $\lambda=\pm\hat{\lambda}$, $|z|<\delta$.

Определим последовательность $\{\lambda_n\}$ $(n\in\mathbb{Z})$ следующим образом: $\lambda_n=n$ при $n\geqslant\hat{N}+1$, а если $1\leqslant n\leqslant\hat{N}$, то $\lambda_n=\hat{\lambda}+\epsilon_n$, где $0<\epsilon_1<\ldots<\epsilon_{\hat{N}}<\min\{\delta,1/2-h_0\}$, $\lambda_n=-\lambda_{-n}$ при $n\neq0$, $\lambda_0=\hat{\lambda}$. Очевидно, что $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условиям $(*)$. Легко видеть, что если $|n|\geqslant\tilde{N}+1$, то все числа c_n^+ лежат внутри круга $\Gamma(1,\varepsilon_0)$, если n чётно, а все числа c_n^- лежат внутри круга $\Gamma(-1,\varepsilon_0)$, если n нечётно. Положим $c_n=s_n^+$, если n чётно, и $c_n=s_n^-$, если n нечётно, следовательно, числа $(-1)^nc_n$ лежат внутри круга $\Gamma(1,\varepsilon_0)$.

Пусть $|n|\leqslant\tilde{N}$, тогда $c_n^+\in\Gamma(i\sqrt{\beta/\alpha},\varepsilon_2)$, $c_n^-\in\Gamma(-i\sqrt{\beta/\alpha},\varepsilon_2)$. Пусть $c_n=c_n^+$ при чётном n, и $c_n=c_n^-$ при нечётном n. Тогда все числа $(-1)^nc_n$ лежат строго выше прямой l. Так как [12] $\{f(\lambda_n)\}\in l_2$, то из определения чисел c_n следует, что всегда

$$c_n=(-1)^n+\vartheta_n,\quad \{\vartheta_n\}\in l_2. \tag{27}$$

Рассмотрим случай $\alpha=\beta$. Тогда

$$c_n^{\pm}=\frac{1}{2\alpha}\Big[2\alpha\cos(\pi\lambda_n)+\gamma\sin(\pi\lambda_n)+f(\lambda_n)\pm\sqrt{(2\alpha\cos(\pi\lambda_n)+\gamma\sin(\pi\lambda_n)+f(\lambda_n))^2-4\alpha^2}\Big]=$$

$$=\frac{1}{2\alpha}\Big[2\alpha\cos(\pi\lambda_n)+\gamma\sin(\pi\lambda_n)+f(\lambda_n)\pm$$

$$\pm\sqrt{4\alpha\cos(\pi\lambda_n)(\gamma\sin(\pi\lambda_n)+f(\lambda_n))+(\gamma\sin(\pi\lambda_n)+f(\lambda_n))^2-4\alpha^2\sin^2(\pi\lambda_n)}\Big].$$

Обозначим $\tilde{\alpha}=\alpha\bar{\alpha}$, $\tilde{\beta}=\beta\bar{\alpha}$, $\tilde{\gamma}=\gamma\bar{\alpha}$, $\tilde{f}(\lambda)=\bar{\alpha}f(\lambda)$, тогда $\tilde{\alpha}>0$,

$$c_n^{\pm}=\frac{1}{2\tilde{\alpha}}\Big[2\tilde{\alpha}\cos(\pi\lambda_n)+\tilde{\gamma}\sin(\pi\lambda_n)+f(\lambda_n)\pm\sqrt{(2\tilde{\alpha}\cos(\pi\lambda_n)+\tilde{\gamma}\sin(\pi\lambda_n)+f(\lambda_n))^2-4\tilde{\alpha}^2}\Big]=$$

$$=\frac{1}{2\tilde{\alpha}}\Big[2\tilde{\alpha}\cos(\pi\lambda_n)+\tilde{\gamma}\sin(\pi\lambda_n)+f(\lambda_n)\pm$$

$$\pm\sqrt{4\tilde{\alpha}\cos(\pi\lambda_n)(\tilde{\gamma}\sin(\pi\lambda_n)+f(\lambda_n))+(\tilde{\gamma}\sin(\pi\lambda_n)+f(\lambda_n))^2-4\tilde{\alpha}^2\sin^2(\pi\lambda_n)}\Big].$$

Далее аналогично случаю 3 строится последовательность c_n такая, что все числа $(-1)^nc_n$ лежат строго по одну сторону от некоторой прямой, проходящей через начало координат. Из определения чисел c_n и условия (14) вытекает, что выполняется равенство (27).

Отсюда следует, что все числа $z_n=c_n/\dot{s}(\lambda_n)$ во всех случаях лежат строго по одну сторону от некоторой прямой, проходящей через начало координат, а из (19) и (27) вытекает, что

$$z_n=\frac{1}{\pi}+\rho_n,\quad \{\rho_n\}\in l_2.$$

Пусть $\beta_n=c_n-\cos(\pi\lambda_n)$, тогда из (27) следует, что $\{\beta_n\}\in l_2$. Обозначим

$$h(\lambda)=s(\lambda)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\beta_n}{\dot{s}(\lambda_n)(\lambda-\lambda_n)}.$$

Согласно [13, с. 120] функция $h\in PW_\pi$ и $h(\lambda_n)=\beta_n$. Обозначим $c(\lambda)=\cos(\pi\lambda)+h(\lambda)$, тогда $c(\lambda_n)=c_n\neq 0$, следовательно, функции $c(\lambda)$ и $s(\lambda)$ не имеют общих корней.

Обозначим также второй столбец матрицы $E_0(x,\lambda)$ через

$$Y_0(x,\lambda)=\begin{pmatrix}-\sin(\lambda x)\\ \cos(\lambda x)\end{pmatrix}.$$

Пусть

$$F(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big(\frac{c_n}{\dot{s}(\lambda_n)}Y_0(x,\lambda_n)Y_0^T(t,\lambda_n)-\frac{1}{\pi}Y_0(x,n)Y_0^T(t,n)\Big).$$

Из [10] следует, что

$$\|F(\cdot,x)\|_{L^{2,2}_{2,2}(0,\pi)}+\|F(x,\cdot)\|_{L^{2,2}_{2,2}(0,\pi)}<C_2,$$

где C_2 не зависит от x.

Используя установленные выше свойства чисел z_n, докажем, что для каждого $x\in[0,\pi]$ однородное уравнение типа Гельфанда–Левитана

$$\mathbf{f}^T(t)+\int\limits_0^x\mathbf{f}^T(s)F(s,t)ds=0, \tag{28}$$

где $\mathbf{f}(t)=\mathrm{col}(f_1(t),f_2(t))$, $\mathbf{f}\in L_{2,2}(0,x)$, $\mathbf{f}(t)=0$, если $x<t\leqslant\pi$, имеет лишь тривиальное решение.

Умножая уравнение (28) на $\overline{\mathbf{f}^T(t)}$ и интегрируя полученное уравнение на отрезке $[0,x]$, получаем

$$\|\mathbf{f}\|^2_{L_{2,2}(0,x)}+\int\limits_0^x\Big\langle\int\limits_0^x\mathbf{f}^T(s)F(s,t)ds,\mathbf{f}^T(t)\Big\rangle dt=0. \tag{29}$$

Несложные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned}
&\mathbf{f}^T(s)F(s,t)=\\
&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big\{z_n\Big[f_1(s)\sin(\lambda_n s)\sin(\lambda_n t)-f_2(s)\cos(\lambda_n s)\sin(\lambda_n t),\\
&\quad -f_1(s)\sin(\lambda_n s)\cos(\lambda_n t)+f_2(s)\cos(\lambda_n s)\cos(\lambda_n t)\Big]-\\
&\quad -\frac{1}{\pi}\Big[f_1(s)\sin(ns)\sin(nt)-f_2(s)\cos(ns)\sin(nt),\\
&\quad -f_1(s)\sin(ns)\cos(nt)+f_2(s)\cos(ns)\cos(nt)\Big]\Big\}=\\
&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big\{z_n\Big[f_1(s)\sin(\lambda_n s)\sin(\lambda_n t)-f_2(s)\cos(\lambda_n s)\sin(\lambda_n t)\Big]-\\
&\quad -\frac{1}{\pi}\Big[f_1(s)\sin(ns)\sin(nt)-f_2(s)\cos(ns)\sin(nt)\Big],\\
&\quad z_n\Big[-f_1(s)\sin(\lambda_n s)\cos(\lambda_n t)+f_2(s)\cos(\lambda_n s)\cos(\lambda_n t)\Big]-\\
&\quad -\frac{1}{\pi}\Big[-f_1(s)\sin(ns)\cos(nt)+f_2(s)\cos(ns)\cos(nt)\Big]\Big\}.
\end{aligned} \tag{30}$$

Подставляя правую часть (30) во второй член в левой части (29), преобразуя повторные интегралы в произведения интегралов и используя вещественность всех чисел λ_n, находим, что

$$\int_0^x\left\langle\int_0^x \mathbf{f}^T(s)F(s,t)ds, \mathbf{f}^T(t)\right\rangle dt=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^x\left(\int_0^x\left\{z_n\Big[f_1(s)\sin(\lambda_n s)\sin(\lambda_n t)-f_2(s)\cos(\lambda_n s)\sin(\lambda_n t)\Big]-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\pi}\Big[f_1(s)\sin(ns)\sin(nt)-f_2(s)\cos(ns)\sin(nt)\Big]\right\}ds\right)\overline{f_1(t)}dt+$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^x\left(\int_0^x\left\{z_n\Big[-f_1(s)\sin(\lambda_n s)\cos(\lambda_n t)+f_2(s)\cos(\lambda_n s)\cos(\lambda_n t)\Big]-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\pi}\Big[-f_1(s)\sin(ns)\cos(nt)+f_2(s)\cos(ns)\cos(nt)\Big]\right\}ds\right)\overline{f_2(t)}dt=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(z_n\int_0^x\Big[f_1(s)\sin(\lambda_n s)-f_2(s)\cos(\lambda_n s)\Big]ds\int_0^x\sin(\lambda_n t)\overline{f_1(t)}dt-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi}\int_0^x\Big[f_1(s)\sin(ns)-f_2(s)\cos(ns)\Big]ds\int_0^x\sin(nt)\overline{f_1(t)}dt\right)+$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(z_n\int_0^x\Big[-f_1(s)\sin(\lambda_n s)+f_2(s)\cos(\lambda_n s)\Big]ds\int_0^x\cos(\lambda_n t)\overline{f_2(t)}dt-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi}\int_0^x\Big[-f_1(s)\sin(ns)+f_2(s)\cos(ns)\Big]ds\int_0^x\cos(nt)\overline{f_2(t)}dt\right)=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}z_n\left(\int_0^x\Big[f_1(s)\sin(\lambda_n s)-f_2(s)\cos(\lambda_n s)\Big]ds\int_0^x\sin(\lambda_n t)\overline{f_1(t)}dt+\right.$$

$$\left.+\int_0^x\Big[-f_1(s)\sin(\lambda_n s)+f_2(s)\cos(\lambda_n s)\Big]ds\int_0^x\cos(\lambda_n t)\overline{f_2(t)}dt\right)-$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left(\int_0^x\Big[f_1(s)\sin(ns)-f_2(s)\cos(ns)\Big]ds\int_0^x\sin(nt)\overline{f_1(t)}dt+\right.$$

$$\left.+\int_0^x\Big[-f_1(s)\sin(ns)+f_2(s)\cos(ns)\Big]ds\int_0^x\cos(nt)\overline{f_2(t)}dt\right)=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}z_n\left(\int_0^x\Big[f_1(t)\sin(\lambda_n t)-f_2(t)\cos(\lambda_n t)\Big]dt\int_0^x\sin(\lambda_n t)\overline{f_1(t)}dt+\right.$$

$$\left.+\int_0^x\Big[-f_1(t)\sin(\lambda_n t)+f_2(t)\cos(\lambda_n t)\Big]dt\int_0^x\cos(\lambda_n t)\overline{f_2(t)}dt\right)-$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\biggl(\int_0^x\Bigl[f_1(t)\sin(nt)-f_2(t)\cos(nt)\Bigr]dt\int_0^x\sin(nt)\overline{f_1(t)}dt+$$

$$+\int_0^x\Bigl[-f_1(t)\sin(nt)+f_2(t)\cos(nt)\Bigr]dt\int_0^x\cos(nt)\overline{f_2(t)}dt\biggr)=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}z_n\int_0^x\Bigl[f_1(t)\sin(\lambda_n t)-f_2(t)\cos(\lambda_n t)\Bigr]dt\int_0^x\Bigl[\overline{f_1(t)}\sin(\lambda_n t)-\overline{f_2(t)}\cos(\lambda_n t)\Bigr]dt-$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^x\Bigl[f_1(t)\sin(nt)-f_2(t)\cos(nt)\Bigr]dt\int_0^x\Bigl[\overline{f_1(t)}\sin(nt)-\overline{f_2(t)}\cos(nt)\Bigr]dt=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}z_n\biggl|\int_0^x\langle\mathbf{f}(t),Y_0(t,\lambda_n)\rangle dt\biggr|^2-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\biggl|\int_0^x\langle\mathbf{f}(t),Y_0(t,n)\rangle dt\biggr|^2. \tag{31}$$

Хорошо известно, что система функций $\{Y_0(t,n)/\sqrt{\pi}\}$ $(n\in\mathbb{Z})$ образует ортонормированный базис в пространстве $L_{2,2}(0,\pi)$, поэтому из равенства Парсеваля вытекает, что

$$\|\mathbf{f}\|^2_{L_{2,2}(0,x)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\biggl|\int_0^x\langle\mathbf{f}(t),Y_0(t,n)\rangle dt\biggr|^2. \tag{32}$$

Из (29), (31) и (32) следует, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}z_n\biggl|\int_0^x\langle\mathbf{f}(t),Y_0(t,\lambda_n)\rangle dt\biggr|^2=0.$$

Так как все числа z_n расположены строго по одну сторону от некоторой прямой, проходящей через начало координат, то

$$\int_0^x\langle\mathbf{f}(t),Y_0(t,\lambda_n)\rangle dt=0$$

для всех $n\in\mathbb{Z}$. Из (17) вытекает, что функция $s(\lambda)$ является функцией типа синуса [13, с. 118–119], поэтому [1, лемма 5.3] система $Y_0(t,\lambda_n)$ является базисом Рисса в $L_{2,2}(0,\pi)$, а значит, система $Y_0(t,\lambda_n)$ полна в пространстве $L_{2,2}(0,\pi)$, откуда следует, что $\mathbf{f}(t)\equiv 0$.

Согласно [10, теорема 5.1] функции $c(\lambda)$ и $-s(\lambda)$ являются элементами первой строки матрицы монодромии

$$\tilde{E}(\pi,\lambda)=\begin{pmatrix}\tilde{c}_1(\pi,\lambda) & -\tilde{s}_2(\pi,\lambda)\\ \tilde{s}_1(\pi,\lambda) & \tilde{c}_2(\pi,\lambda)\end{pmatrix}$$

задачи (1)–(3) с потенциалом $\tilde{V}\in L_2$, т.е.

$$c(\lambda)=\tilde{c}_1(\pi,\lambda),\quad s(\lambda)=\tilde{s}_2(\pi,\lambda). \tag{33}$$

Из (13) находим, что соответствующий характеристический определитель равен

$$\tilde{\Delta}(\lambda)=J_0+\alpha\tilde{c}_2(\lambda)+\beta\tilde{c}_1(\lambda)+\gamma\tilde{s}_1(\lambda)=J_0+(\alpha+\beta)\cos(\pi\lambda)+\gamma\sin(\pi\lambda)+\tilde{f}(\lambda),\quad \tilde{f}\in PW_\pi.$$

Из (5), (21) и (33) получаем, что

$$\tilde{\Delta}(\lambda_n)=J_0+\alpha\tilde{c}_2(\pi,\lambda_n)+\beta\tilde{c}_1(\pi,\lambda_n)=J_0+\frac{\alpha}{\tilde{c}_1(\pi,\lambda_n)}+\beta\tilde{c}_1(\pi,\lambda_n)=$$
$$=J_0+\frac{\beta}{c(\lambda_n)}+\alpha c(\lambda_n)=J_0+u_+(\lambda_n)=U(\lambda_n).$$

Отсюда следует, что функция

$$\Phi(\lambda)=\frac{U(\lambda)-\tilde{\Delta}(\lambda)}{s(\lambda)}=\frac{f(\lambda)-\tilde{f}(\lambda)}{s(\lambda)}$$

является целой функцией на всей комплексной плоскости.

Так как

$$|f(\lambda)-\tilde{f}(\lambda)|<c_1e^{\pi|\operatorname{Im}\lambda|}, \tag{34}$$

то из (18) имеем, что $|\Phi(\lambda)|\leqslant c_2$, если $|\operatorname{Im}\lambda|\geqslant M$. Обозначим через H объединение вертикальных отрезков $\{z:|\operatorname{Re}z|=n+1/2,\ |\operatorname{Im}\lambda|\leqslant M\}$, где $|n|=N_0+1,N_0+2,\ldots$ Поскольку $c(\lambda)$ является функцией типа синуса [14], то $|s(\lambda)|>\delta>0$, если $\lambda\in H$. Из последнего неравенства, (34) и принципа максимума модуля аналитической функции находим, что $|\Phi(\lambda)|<c_3$ в полосе $|\operatorname{Im}\lambda|\leqslant M$, следовательно, функция $\Phi(\lambda)$ ограничена во всей комплексной плоскости и в силу теоремы Лиувилля является постоянной. Пусть $|\operatorname{Im}\lambda|=M$. Тогда из (15) получаем, что $\lim_{|\lambda|\to\infty}(f(\lambda)-\tilde{f}(\lambda))=0$, а значит, $\Phi(\lambda)\equiv 0$, откуда вытекает, что $U(\lambda)\equiv\tilde{\Delta}(\lambda)$. Теорема 1 доказана.

Дополнительно предположим, что условия (2), (3) нерегулярные, тогда характеристическое уравнение невозмущённой задачи (8) может быть приведено к виду

$$\Delta_0(\lambda)=d-e^{i\pi\lambda}=0, \tag{35}$$

где $d\neq 0$. Пусть $d=e^{i\pi t}$, где $0\leqslant\operatorname{Re}t<2$. Из тривиального равенства

$$1-e^{i\pi\lambda}=-2ie^{i\pi\lambda/2}\sin(\pi\lambda/2)$$

и хорошо известного разложения функции $\sin z$ в бесконечное произведение следует, что

$$\Delta_0(\lambda)=-i\pi e^{i\pi(t+\lambda)/2}(\lambda-t)\prod_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{2n+t-\lambda}{2n},$$

и тогда уравнение (35) имеет корни

$$\lambda_n^0=2n+t,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Теорема 2. *Если $J_{14}+J_{23}\neq 0$, то для любой последовательности*

$$\lambda_n=2n+t+\varepsilon_n, \tag{36}$$

где $\varepsilon_n\in l_2$, существует потенциал $V\in L_2(0,\pi)$ такой, что спектр соответствующей задачи (1)–(3), (11) совпадает с множеством $\{\lambda_n\}$. Если $J_{14}+J_{23}=0$, то последнее утверждение справедливо для любой последовательности, удовлетворяющей соотношению (36) и дополнительному условию

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{2n+t-k}\right|<\infty, \tag{37}$$

если $t\neq 0,\ t\neq 1$; *дополнительным условиям*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{2n-2k-1}\right|<\infty,\qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty}|\varepsilon_{2k+t}|<\infty,$$

если $t=0$ *или* $t=1$.

Доказательство. Очевидно, что

$$|\Delta_0(\lambda)|<c_1e^{\pi|\operatorname{Im}\lambda|}. \tag{38}$$

Пусть последовательность λ_n удовлетворяет условию (36). Тогда существует постоянная M такая, что

$$\sup|\varepsilon_n|<M,\qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}}|\varepsilon_n|^2<M. \tag{39}$$

Обозначим

$$\Delta(\lambda)=-i\pi e^{i\pi(t+\lambda)/2}(\lambda-\lambda_0)\prod_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda}{2n}.$$

Пусть $f(\lambda)=\Delta(\lambda)-\Delta_0(\lambda)$. Исследование свойств функции $f(\lambda)$ основывается на следующих утверждениях.

Утверждение 1. *Функция* $f(\lambda)$ *является целой функцией экспоненциального типа, не превышающего* π.

Доказательство. Обозначим через Γ объединение кругов $\Gamma(2n+t,r_0)$, $n\in\mathbb{Z}$, где $r_0=\min\{|t|/4,1/4\}$ при $t\neq 0$ и $r_0=1/4$ при $t=0$. Если $\lambda\notin\Gamma$, то

$$f(\lambda)=-\Delta_0(\lambda)\left(1-\frac{\Delta(\lambda)}{\Delta_0}\right)=-\Delta_0(\lambda)(1-\phi(\lambda)), \tag{40}$$

где

$$\phi(\lambda)=\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda-t}\prod_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0}}^{\infty}\left(1+\frac{\varepsilon_n}{\lambda_n^0-\lambda}\right)=\prod_{n=-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{\varepsilon_n}{2n+t-\lambda}\right).$$

Оценим функцию $\phi(\lambda)$. Обозначим $\alpha_n(\lambda)=\varepsilon_n/(2n+t-\lambda)$. Из (39) следует, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\alpha_n(\lambda)|\leqslant\sum_{n=-\infty}^{\infty}\big(|\varepsilon_n|^2+|2n+t-\lambda|^{-2}\big)/2<c_3. \tag{41}$$

Легко видеть, что для всех $|n|>n_0$, где n_0 — достаточно большое число, справедливо неравенство

$$|\alpha_n(\lambda)|<1/4 \tag{42}$$

для любого $\lambda\notin\Gamma$. Если $|n|\leqslant n_0$, то неравенство (42) имеет место для всех достаточно больших $|\lambda|$, следовательно, указанное неравенство справедливо для всех $|\lambda|\geqslant C_0$. Из (41), (42) и элементарного неравенства

$$|\ln(1+z)|\leqslant 2|z|, \tag{43}$$

справедливого при $|z|\leqslant 1/4$, следует, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\ln(1+\alpha_n)|\leqslant c_4.$$

Здесь и в дальнейшем выбираем ту ветвь $\ln(1+z)$, которая обращается в нуль при $z=0$. Согласно [15, гл. V, § 1, п. 72] перепишем последнее соотношение в виде

$$|\phi(\lambda)| \leqslant \prod_{n=-\infty}^{\infty} |1+\alpha_n(\lambda)| \leqslant e^{c_4}. \tag{44}$$

Из (38), (40), (44) следует, что

$$|f(\lambda)| < c_5 e^{\pi|\operatorname{Im}\lambda|} \tag{45}$$

вне области $\Gamma' = \Gamma \cup \{|\lambda| < C_0\}$.

Обозначим $D = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[2n+\operatorname{Re}t-1/4, 2n+\operatorname{Re}t+1/4]$, $D_0=(0,2)\setminus D$. Легко видеть, что множество D_0 является объединением конечного числа интервалов, сумма длин которых не менее единицы. Пусть x_0 — середина одного из этих интервалов. Тогда все точки x_0+2k, $k\in\mathbb{Z}$, лежат вне множества D. В частности, неравенство (45) справедливо, если λ принадлежит прямым $\operatorname{Im}\lambda = \pm\hat{C}_0$, где $\hat{C}_0 = C_0+2|t|+1$, и вертикальным отрезкам с вершинами в точках $(x_0+2k, -\hat{C}_0)$, $(x_0+2k, \hat{C}_0)$, $|2k-1|>C_0$, $k\in\mathbb{Z}$. Согласно принципу максимума неравенство (45) имеет место на всей комплексной плоскости, следовательно, функция $f(\lambda)$ является целой функцией экспоненциального типа, не превышающего π.

Утверждение 2. *Функция f принадлежит классу PW_π.*

Доказательство. Обозначим

$$W(\lambda) = \ln\phi(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln(1+\alpha_n(\lambda)),$$

тогда

$$f(\lambda) = -\Delta_0(\lambda)\left(1-e^{W(\lambda)}\right). \tag{46}$$

Оценим функцию $W(\lambda)$, если $\lambda\notin\Gamma'$. Из (39), (42), (43) следует, что

$$|W(\lambda)| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\ln(1+\alpha_n(\lambda))| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2M}{|\lambda|} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{|\varepsilon_n|^2}{10M} + \frac{10M}{|2n-\lambda|^2}\right) \leqslant \frac{2M}{|\lambda|} + \frac{1}{10} + 20M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+|\operatorname{Im}\lambda|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2M}{|\lambda|} + \frac{1}{10} + 20M\left(\frac{2}{|\operatorname{Im}\lambda|^2} + \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+|\operatorname{Im}\lambda|^2}\right) \leqslant \frac{2M}{|\operatorname{Im}\lambda|} + \frac{1}{10} + 20M\left(\frac{2}{|\operatorname{Im}\lambda|^2} + \frac{\pi}{2|\operatorname{Im}\lambda|}\right),$$

откуда вытекает, что

$$|W(\lambda)| < 1/4, \tag{47}$$

если $|\operatorname{Im}\lambda| \geqslant M_1 = 10(\pi+2+22M)+\hat{C}_0$. Из элементарных соотношений

$$\frac{|z|}{2} \leqslant |1-e^z| \leqslant 2|z|,$$

справедливых при $|z|\leqslant 1/4$, получаем, что выполняется неравенство $|1-e^{W(\lambda)}| \leqslant 2|W(\lambda)|$, из которого и из (38), (46), (47) находим, что

$$|f(\lambda)| \leqslant c_6|W(\lambda)| \tag{48}$$

для $\lambda\in l$, где l – прямая $\operatorname{Im}\lambda=M_1$. Докажем, что

$$\int\limits_l |W(\lambda)|^2 d\lambda<\infty. \tag{49}$$

Из элементарного неравенства $|\ln(1+z)-z|\leqslant|z|^2$, справедливого при $|z|\leqslant 1/2$, получаем, что

$$\ln(1+z)-z=r(z),\quad |r(z)|\leqslant|z|^2,$$

следовательно,

$$W(\lambda)=S_1(\lambda)+S_2(\lambda),$$

где

$$S_1(\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n(\lambda),\quad |S_2(\lambda)|\leqslant\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\alpha_n(\lambda)|^2.$$

Очевидно, что

$$|W(\lambda)|\leqslant|S_1(\lambda)|+|S_2(\lambda)|. \tag{50}$$

Положим

$$I_m=\int\limits_l |S_m(\lambda)|^2 d\lambda,\quad m=1,2.$$

Вначале рассмотрим интеграл I_1. В [16, с. 221] показано, что

$$I_1=\int\limits_l\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{2n+t-\lambda}\right|^2 d\lambda=\int\limits_{l_1}\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{2n-\lambda}\right|^2 d\lambda<\infty, \tag{51}$$

где l_1 является прямой $\operatorname{Im}\lambda=M_1-\operatorname{Im}t$.

Легко видеть, что

$$|S_2(\lambda)|\leqslant\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{|\varepsilon_n|^2}{|2n+t-\lambda|^2}\leqslant c_7,$$

тогда

$$I_2\leqslant c_7\int\limits_l\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{|\varepsilon_n|^2}{|2n+t-\lambda|^2}\right)d\lambda\leqslant c_8\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\varepsilon_n|^2\int\limits_{l_1}\frac{d\lambda}{|2n-\lambda|^2}<c_9\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\varepsilon_n|^2<c_{10}. \tag{52}$$

Из (50)–(52) вытекает условие (49). Из (48), (49) и [17, гл. 3, п. 3.2.2] получаем, что

$$\int\limits_R |f(\lambda)|^2 d\lambda<\infty.$$

Таким образом, если $J_{14}+J_{23}\neq 0$, то функция $\Delta(\lambda)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1, и, значит, существует потенциал $V\in L_2(0,\pi)$ такой, что спектр соответствующей задачи (1)–(3), (11) определяется формулой (36).

Пусть $J_{14}+J_{23}=0$. Проверим, что функция $f(\lambda)$ удовлетворяет условию (14). Рассмотрим два случая.

1. $t\neq 0$, $t\neq 1$. Пусть $k\in\mathbb{Z}$. Очевидно, что

$$0<c_{11}<|\Delta_0(k)|<c_{12}. \tag{53}$$

Из (36) следует, что существует такое число $n_0>0$, что

$$\sum_{|n|>n_0}|\varepsilon_n|^2<\frac{1}{1000},$$

и для любого $|n|>n_0$ справедливо нервенство

$$|\varepsilon_n|^{2/3}<\frac{1}{1000}.$$

Пусть $\lambda\notin\Gamma'$. Дополнительно предположим, что

$$|\lambda|>M_2=1000(2n_0+1)n_0M.$$

Используя хорошо известное неравенство $ab\leqslant a^p/p+b^q/q$ $(a,b>0,\ p,q>1,\ 1/p+1/q=1)$, получаем, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\alpha_n(\lambda)|\leqslant\sum_{|n|\leqslant n_0}\frac{|\varepsilon_n|}{|2n+t-\lambda|}+\sum_{|n|>n_0}\frac{|\varepsilon_n|}{|2n+t-\lambda|}\leqslant$$

$$\leqslant 2M\sum_{|n|\leqslant n_0}\frac{1}{|2n-\lambda|}+2\sum_{|n|>n_0}\left(|\varepsilon_n|^2+\frac{|\varepsilon_n|^{2/3}}{|2n-\lambda|^{4/3}}\right)\leqslant\frac{1}{50}+\frac{1}{500}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4/3}}<\frac{1}{10},$$

следовательно, неравенство (51) имеет место для любого λ из рассматриваемой области.

Повторяя предыдущие рассуждения, находим, что

$$|f(\lambda)|\leqslant c_{13}\left(\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n(\lambda)\right|+\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\alpha_n(\lambda)|^2\right).$$

Из последнего неравенства вытекает, что для всех $|k|>k_0$, где $k_0=\max(C_0,M_2)$,

$$|f(k)|\leqslant c_{14}\left(\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{2n+t-k}\right|+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{|\varepsilon_n|^2}{|2n+t-k|^2}\right). \tag{54}$$

Очевидно, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{|\varepsilon_n|^2}{|2n+t-k|^2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\varepsilon_n|^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|2n+t-k|^2}<c_{15}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\varepsilon_n|^2<c_{16}. \tag{55}$$

Из (37), (53)–(55) следует справедливость условия (14).

2. $t=0$ или $t=1$. Пусть $t=0$, случай $t=1$ рассматривается аналогично.

Оценим $|f(2k+1)|$. Очевидно, что $\Delta_0(2k+1)=-2$. Рассуждая аналогично случаю 1, получаем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|f(2k+1)|<\infty. \tag{56}$$

Оценим $|f(2k)|$. Очевидно, что $\Delta_0(2k)=0$, следовательно, $f(2k)=\Delta(2k)$. Так как функция $\Delta(\lambda)$ ограничена в полосе $|\operatorname{Im}\lambda|\leqslant 1$ и для всех достаточно больших по абсолютной величине k $|\varepsilon_k|<1/2$, то согласно принципу максимума будем иметь

$$|f(2k)|=|\Delta(2k)|\leqslant|\varepsilon_{2k}|\max_{|2k-\lambda|=1}\left\{\left|\frac{\Delta(\lambda)}{\lambda_{2k}-\lambda}\right|\right\}\leqslant c_{17}|\varepsilon_{2k}|. \tag{57}$$

Из (56), (57) и условия теоремы 2 вытекает справедливость (14). Теорема доказана.

Заметим, что краевые условия

$$A=\begin{pmatrix}1 & -i & -1 & -i\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

удовлетворяющие соотношениям (11), являются нерегулярными, причём выполняется условие $J_{14}+J_{23}=0$.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Albeverio, A. Inverse spectral problems for Dirac operators with summable potentials / A. Albeverio, R. Hryniv, Ya. Mykytyuk // Russ. J. Math. Phys. — 2005. — V. 12, № 4. — P. 406–423.
2. Lunyov A. On the Riesz basis property of root vectors system for 2×2 Dirac type operators / A. Lunyov, M. Malamud // J. Math. Anal. Appl. — 2016. — V. 441, № 1. — P. 57–103.
3. Savchuk, A.M. The Dirac operator with complex-valued summable potential / A.M. Savchuk, A.A. Shkalikov // Math. Notes. — 2014. — V. 96, № 5. — P. 777–810.
4. Савчук, А.М. Спектральный анализ одномерной системы Дирака с суммируемым потенциалом и оператора Штурма—Лиувилля с коэффициентами-распределениями / А.М. Савчук, И.В. Садовничая // Соврем. математика. Фунд. направления. — 2020. — Т. 66, № 3. — С. 373–530.
5. Мисюра, Т.В. Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака. II / Т.В. Мисюра // Теория функций, функц. анализ и их приложения. — 1979. — Т. 31. — С. 102–109.
6. Набиев, И.М. Решение обратной квазипериодической задачи для системы Дирака / И.М. Набиев // Мат. заметки. — 2011. — Т. 89, № 6. — С. 885–893.
7. Djakov, P. Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions / P. Djakov, B. Mityagin // Indiana Univ. Math. J. — 2012. — V. 61. — P. 359–398.
8. Yurko, V.A. Inverse spectral problems for differential systems on a finite interval / V.A. Yurko // Results in Mathematics. — 2005. — V. 48, № 3–4. — P. 371–386.
9. Макин, А.С. О спектре двухточечных краевых задач для оператора Дирака / А.С. Макин // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 8. — С. 1023–1031.
10. Tkachenko, V. Non-self-adjoint periodic Dirac operators / V. Tkachenko // Oper. Theory: Adv. and Appl. — 2001. — V. 123. — P. 485–512.
11. Марченко, В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения / В.А. Марченко. — Киев : Наукова думка, 1977. — 330 с.
12. Tkachenko, V. Non-self-adjoint periodic Dirac operators with finite-band spectra / V. Tkachenko // Int. Equ. Oper. Theory. — 2000. — V. 36. — P. 325–348.
13. Левин, Б.Я. Целые функции (курс лекций) / Б.Я. Левин. — М. : МГУ, мех.-мат. факультет, 1971. — 126 с.
14. Левин, Б.Я. О малых возмущениях множества корней функций типа синуса / Б.Я. Левин, И.В. Островский // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1979. — Т. 43, № 1. — С. 87–110.
15. Лаврентьев, М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. — М. : Наука, 1973. — 736 с.
16. Sansug, J.-J. Characterization of the periodic and antiperiodic spectra of nonselfadjoint Hill's operators / J.-J. Sansug, V. Tkachenko // Oper. Theory Adv. and Appl. — 1997. — V. 98. — P. 216–224.
17. Никольский, С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С.М. Никольский. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1977. — 456 с.

ON THE SPECTRUM OF NON-SELFADJOINT DIRAC OPERATORS WITH TWO-POINT BOUNDARY CONDITIONS

A. S. Makin

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow
e-mail: alexmakin@yandex.ru

We consider spectral problem for the Dirac operator with arbitrary two-point boundary conditions and any square integrable potential V. The necessary and sufficient conditions are established that an entire function must satisfy in order to be a characteristic determinant of the specified operator. In the case of irregular boundary conditions, conditions are found under which a set of complex numbers is the spectrum of the problem under consideration.

Keywords: Dirac operator, characteristic determinant, spectrum.

REFERENCES

1. Albeverio, A. Inverse spectral problems for Dirac operators with summable potentials / A. Albeverio, R. Hryniv, Ya. Mykytyuk // Russ. J. Math. Phys. — 2005. — V. 12, № 4. — P. 406–423.
2. Lunyov A. On the Riesz basis property of root vectors system for 2×2 Dirac type operators / A. Lunyov, M. Malamud // J. Math. Anal. Appl. — 2016. — V. 441, № 1. — P. 57–103.
3. Savchuk, A.M. The Dirac operator with complex-valued summable potential / A.M. Savchuk, A.A. Shkalikov // Math. Notes. — 2014. — V. 96, № 5. — P. 777–810.
4. Savchuk, A.M. Spectral analysis of one-dimensional Dirac system with summable potential and Sturm–Liouville operator with distribution coefficients / A.M. Savchuk, I.V. Sadovnichaya // Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. — 2020. — V. 66, № 3. — P. 373–530.
5. Misyura, T.V. Characterization of spectra of periodic and anti-periodic problems generated by Dirac's operators. II / T.V. Misyura // Theoriya functfii, funct. analiz i ikh prilozhen. — 1979. — V. 31. — P. 102–109. [in Russian]
6. Nabiev, I.M. Solution of the quasiperiodic problem for the Dirac system / I.M. Nabiev // Math. Notes. — 2011. — V. 89, № 6. — P. 845–852.
7. Djakov, P. Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions / P. Djakov, B. Mityagin // Indiana Univ. Math. J. — 2012. — V. 61. — P. 359–398.
8. Yurko, V.A. Inverse spectral problems for differential systems on a finite interval / V.A. Yurko // Results in Mathematics. — 2005. — V. 48, № 3–4. — P. 371–386.
9. Makin, A.S. On the spectrum of two-point boundary value problems for the Dirac operator / A.S. Makin // Differ. Equat. — 2021. — V. 57, № 8. — P. 993–1002.
10. Tkachenko, V. Non-self-adjoint periodic Dirac operators / V. Tkachenko // Oper. Theory: Adv. and Appl. — 2001. — V. 123. — P. 485–512.
11. Marchenko, V.A. Sturm–Liouville operators and their applications / V.A. Marchenko. — Basel : Birkhauser Verlag, 1986.
12. Tkachenko, V. Non-self-adjoint periodic Dirac operators with finite-band spectra / V. Tkachenko // Int. Equ. Oper. Theory. — 2000. — V. 36. — P. 325–348.
13. Levin, B.Ya. Lectures on Entire Functions / B.Ya. Levin . — Providence : American Mathematical Society, 1996.
14. Levin, B.Ya. On small perturbations of the set of zeros of functions of sine type / B.Ya. Levin, I.V. Ostrovskii // Math. USSR-Izv. — 1980. — V. 14, № 1. — P. 79–101.
15. Lavrentiev, M.A. Methods of Theory of Complex Variable / M.A. Lavrentiev, B.V. Shabat. — Moscow : Nauka, 1973. — 736 p. [in Russian]
16. Sansug, J.-J. Characterization of the periodic and antiperiodic spectra of nonselfadjoint Hill's operators / J.-J. Sansug, V. Tkachenko // Oper. Theory Adv. and Appl. — 1997. — V. 98. — P. 216–224.
17. Nikolskii, S.M. Approximation of Functions of Several Variables and Embedding Theorems / S.M. Nikolskii. — Moscow : Nauka, 1977. — 456 p. [in Russian]