ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 4, с. 561–576

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО СЛЕЖЕНИЯ

В. А. Соболев

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва
e-mail: hsablem@gmal.com

Поступила в редакцию 02.06.2023 г., после доработки 12.12.2023 г.; принята к публикации 13.02.2024 г.

Рассматривается сингулярно возмущённая задача оптимального слежения с заданной эталонной траекторией в случае неполной информации о векторе состояния при наличии внешних возмущений. Для анализа возникающих при решении этой задачи дифференциальных уравнений применяется метод декомпозиции, в основе которого лежит техника интегральных многообразий быстрых и медленных движений.

Ключевые слова: оптимальное слежение, сингулярное возмущение, интегральное многообразие, декомпозиция.

DOI: 10.31857/S0374064124040105, EDN: OWPHWV

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В статье исследуется линейно-квадратичная задача оптимального слежения для систем с сингулярными возмущениями. Изучению задач управления с сингулярными возмущениями посвящено значительное число публикаций (см., в частности, обзоры [1–3]), при этом в большинстве работ применяется метод пограничных функций А.Б. Васильевой. Наряду с методом пограничных функций для исследования таких задач успешно применяются метод декомпозиции и метод интегральных многообразий [4–6].

Напомним, что конечномерная задача слежения для линейных систем общего вида ставится следующим образом (см., например, [7]): рассматривается система

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u+f(t), \quad x(0)=x_0, \tag{1}$$

$$y=C(t)x, \tag{2}$$

где x — вектор состояния системы, вектор y определяет выход системы, u — вектор управляющих параметров, f — вектор внешних возмущений. Эталонное движение задаётся в явном виде $\xi=\xi(t)$, а функционал качества имеет вид

$$J=\int\limits_0^{t_f}\big[(C(t)x(t)-\xi(t))^TQ(t)(C(t)x(t)-\xi(t))+u^T(t)R(t)u(t)\big]\,dt \tag{3}$$

или

$$J=\int\limits_0^{t_f}\big[(y(t)-\xi(t))^TQ(t)(y(t)-\xi(t))+u^T(t)R(t)u(t)\big]\,dt. \tag{4}$$

Допускается зависимость от одного или нескольких параметров. Предполагается, что все матричные функции, входящие в (1)–(3), непрерывны при $t\in[0,t_f]$.

Известно [7], что решение рассматриваемой задачи даётся следующим выражением для оптимального управления:

$$u_{opt} = -R^{-1}B^T(Px+\chi).$$

Здесь P — решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{P} + PA + A^T P - PSP + M = 0, \quad P(t_f) = 0, \tag{5}$$

а χ — решение линейной дифференциальной системы

$$\dot{\chi} = -(A-SP)^T\chi + C^T Q\xi - Pf = 0, \quad \chi(t_f) = 0. \tag{6}$$

Рассмотрим задачу слежения для управляемой системы вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1(t)x_1 + A_2(t)x_2 + B_1(t)u + f_1(t), \quad x_1(0) = x_{10}, \\ \varepsilon\dot{x_2} &= A_3(t)x_1 + A_4(t)x_2 + B_2(t)u + f_2(t), \quad x_2(0) = x_{20}, \end{aligned} \tag{7}$$

$$y = C_1(t)x_1 + C_2(t)x_2. \tag{8}$$

Здесь $x_1 \in \mathbb{R}^m$, $x_2 \in \mathbb{R}^n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, t_f]$, ε — положительный малый параметр, т.е. система (7) является сингулярно возмущённой. Эталонное движение задаётся в явном виде $\xi = \xi(t)$.

Функционал качества определяется по формуле

$$J = \int\limits_0^{t_f} \big[\big(C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t) - \xi(t)\big)^T Q(t)\big(C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t) - \xi(t)\big) + u^T(t)R(t)u(t)\big]\,dt \tag{9}$$

или (4).

Предполагается, что все матричные функции, входящие в (7)–(9), достаточное число раз непрерывно дифференцируемы при $t \in [0, t_f]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Введём также в рассмотрение матрицы A, B, C, S, M и вектор f:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \varepsilon^{-1}A_3 & \varepsilon^{-1}A_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \varepsilon^{-1}B_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & \varepsilon^{-1}S_2 \\ \varepsilon^{-1}S_2^T & \varepsilon^{-2}S_3 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2^T & M_3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \varepsilon^{-1}f_2 \end{pmatrix},$$

где

$$S_1 = B_1R^{-1}B_1^T, \quad S_2 = B_1R^{-1}B_2^T, \quad S_3 = B_2R^{-1}B_2^T,$$

$$M_1 = C_1^T QC_1, \quad M_2 = C_1^T QC_2, \quad M_3 = C_2^T QC_2.$$

Представим P и χ в следующем виде:

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & \varepsilon P_2 \\ \varepsilon P_2^T & \varepsilon P_3 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \varepsilon\chi_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда для матриц P_1, P_2, P_3 получается нелинейная система матричных уравнений

$$\begin{gathered} \dot{P}_1 = -P_1A_1 - A_1^TP_1 - P_2A_3 - A_3^TP_2^T + P_1S_1P_1 + P_1S_2P_2^T + P_2S_2^TP_1 + P_2S_3P_2^T - M_1 = F_1(P_1, P_2, t, \varepsilon), \\ \varepsilon\dot{P}_2 = -P_1A_2 - P_2A_4 - \varepsilon A_1^TP_2 - A_3^TP_3 + P_1S_2P_3 + P_2S_3P_3 + \varepsilon(P_1S_1P_2 + P_2S_2^TP_2) - M_2 = \\ = F_2(P_1, P_2, P_3, t, \varepsilon), \\ \varepsilon\dot{P}_3 = -P_3A_4 - A_4^TP_3 + P_3S_3P_3 + \varepsilon(-P_2^TA_2 - A_2^TP_2 + \varepsilon P_2^TS_1P_2 + P_2^TS_2P_3 + P_3S_2^TP_2) - M_3 = \\ = F_3(P_2, P_3, t, \varepsilon) \end{gathered} \tag{10}$$

с граничными условиями

$$P_1(t_f)=0, \quad P_2(t_f)=0, \quad P_3(t_f)=0.$$

Векторы χ_1 и χ_2 удовлетворяют линейной дифференциальной системе

$$\dot{\chi}_1=-(A_1-S_1P_1-S_2P_2^T)^T\chi_1-(A_3-S_2^TP_1-S_3P_2^T)^T\chi_2+C_1^TQ\xi-P_1f_1-P_2f_2, \tag{11}$$

$$\varepsilon\dot{\chi}_2=-(A_2-\varepsilon S_1P_2-S_2P_3)^T\chi_1-(A_4-\varepsilon S_2^TP_2-S_3P_3)^T\chi_2+C_2^TQ\xi-\varepsilon P_2^Tf_1-P_3f_2 \tag{12}$$

с граничными условиями

$$\chi_1(t_f)=0, \quad \chi_2(t_f)=0.$$

Для анализа сингулярно возмущённой системы матричных дифференциальных уравнений (10) разработаны различные методы построения приближённых решений [1–3]. В данной работе построение приближённых решений систем (10)–(12) базируется на методе декомпозиции, в основе которого лежит техника интегральных многообразий быстрых и медленных движений [4, 5]. Метод декомпозиции позволяет редуцировать данную систему к одному матричному дифференциальному уравнению для блока, соответствующего блоку медленных переменных P_1 в уравнении Риккати. Аналогичным образом обстоит дело с линейной сингулярно возмущённой дифференциальной системой, для построения приближённых решений которой также можно применять метод декомпозиции. Отметим, что в статье [8] метод декомпозиции, называемый авторами методом Соболева, применялся для исследования нелинейной сингулярно возмущённой задачи слежения специального вида.

Суть метода декомпозиции состоит в следующем. При некоторых естественных предположениях о нормальной гиперболичности сингулярно возмущённая система

$$\dot{X}=F(X,Y,t,\varepsilon), \quad \varepsilon\dot{Y}=G(X,Y,t,\varepsilon)$$

заменами

$$Y=Z+h(X,T,\varepsilon), \quad X=V+\varepsilon H(V,Z,t,\varepsilon) \quad (H(V,0,t,\varepsilon)\equiv 0)$$

приводится к виду

$$\dot{V}=F(V,h(V,t,\varepsilon)), \quad \varepsilon\dot{Z}=W(V,Z,t,\varepsilon) \quad (W(V,0,t,\varepsilon)\equiv 0),$$

где первое уравнение не зависит от быстрой переменной, а решениями второго уравнения являются пограничные функции. При этом h соответствует медленному интегральному многообразию исходной системы, а εH — быстрому многообразию некоторой вспомогательной системы; переменная V соответствует регулярной составляющей решения исходной системы, а переменная Z — погранслойной составляющей.

2. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ФУНКЦИОНАЛА

Для оценки погрешности при построении приближённого (субоптимального) управления вместо точного (оптимального) управления функционал (3) можно представить в следующем виде:

$$J=\int\limits_0^{t_f}\big[(C(t)x(t)-\xi(t))^TQ(t)(C(t)x(t)-\xi(t))+u^T(t)R(t)u(t)\big]\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{t_f}\big[\big(u+R^{-1}B^T(t)P(t)x(t)+R^{-1}B^T(t)\chi(t)\big)^TR(t)\big(u+R^{-1}B^T(t)P(t)x(t)+R^{-1}B^T(t)\chi(t)\big)\big]\,dt+$$

$$+x^T(0)P(0)x(0)+2x^T(0)\chi(0)+\kappa(0).$$

Здесь u – любое возможное управление, P и χ являются решениями задач (5) и (6) соответственно, а κ является решением уравнения

$$\dot{\kappa} = \chi^T S\chi - \xi^T Q\xi - 2f^T\chi$$

с условием на конце рассматриваемого промежутка $\kappa(t_f) = 0$, т.е.

$$\kappa(0) = -\int_0^{t_f} [\chi^T S\chi - \xi^T Q\xi - 2f^T\chi]\, dt.$$

Для доказательства этого факта достаточно использовать непосредственно проверяемое равенство

$$(C(t)x(t) - \xi(t))^T Q(t)(C(t)x(t) - \xi(t)) + u^T(t)R(t)u(t) =$$

$$= \big(u + R^{-1}B^T(t)x(t) + R^{-1}B^T(t)\chi(t)\big)^T R(t)\big(u + R^{-1}B^T(t)x(t) + R^{-1}B^T(t)\chi(t)\big) -$$

$$- \frac{d}{dt}\big(x^T(t)P(t)x(t) + 2x^T(t)\chi(t) + \kappa(t)\big).$$

Легко видеть, что минимальное значение J_{opt} определяется формулой

$$J_{opt} = x^T(0)P(0)x(0) + 2x^T(0)\chi(0) + \kappa(0)$$

при выборе

$$u = u_{opt} = -R^{-1}B^T(P_{opt}x_{opt} + \chi_{opt}),$$

где x_{opt} — решение системы (1), (2) при $u = u_{opt}$.

Пусть каким-либо способом построено субоптимальное управление

$$u_s = -R^{-1}B^T(P_s x_s + \chi_s)$$

с соответствующими приближёнными выражениями для вектора состояния x_s, коэффициента усиления P_s и векторов χ (χ_s) и κ (κ_s), где вместо нижнего индекса *subopt* используется индекс s. Введём следующие обозначения:

$$\Delta x = x_s - x_{opt}, \quad \Delta P = P_s - P_{opt}, \quad \Delta\chi = \chi_s - \chi_{opt}, \quad \Delta\kappa = \kappa_s - \kappa_{opt}, \quad \Delta J = J_s - J_{opt}.$$

При $x_s(0) = x_0$ возникающая при использовании субоптимального управления погрешность функционала качества ΔJ представима в виде

$$\Delta J = J_s - J_{opt} = \int_0^{t_f} \big[(R^{-1}B^T(\Delta P x_s + P_{opt}\Delta x + \Delta\chi))^T R(R^{-1}B^T(\Delta P x_s + P_{opt}\Delta x + \Delta\chi))\big]\, dt +$$

$$+ x_0^T P_s(0)x_0 + 2x_0^T\chi_s(0) + \kappa_s(0) - [x_0^T P_{opt}(0)x_0 + 2x_0^T\chi_{opt}(0) + \kappa_{opt}(0)].$$

Для краткости записи аргументы у функций под знаком интеграла опущены. После преобразования подынтегрального выражения с учётом введённых выше обозначений имеем

$$\Delta J = \int_0^{t_f} (\Delta P x_s + P_{opt}\Delta x + \Delta\chi)^T S(\Delta P x_s + P_{opt}\Delta x + \Delta\chi)\, dt +$$
$$+ x_0^T \Delta P(0)x_0 + 2x_0^T\Delta\chi(0) + \Delta\kappa(0). \tag{13}$$

Используя выражение для κ, получаем

$$\Delta\kappa(0) = -\int\limits_0^{t_f} \left[\chi_{opt}^T S\Delta\chi + \Delta\chi S\chi_s - 2f^T\Delta\chi\right] dt.$$

Следует отметить, что полученная формула не связана с конкретным выбором приближений и может применяться для оценки погрешности при применении как асимптотических, так и численных методов приближённого анализа.

Если, например, рассмотреть случай регулярной зависимости матричных и векторных функций, входящих в (1)–(3), от малого параметра в предположении, что эти функции достаточное число раз дифференцируемы по своим аргументам, то можно применить эту формулу для оценки погрешности функционала при применении простейшего варианта метода малого параметра. При этом проявляется некоторое отличие от задач оптимального управления, связанное с зависимостью погрешности от $\Delta\chi$.

Для задачи (7)–(9) формула (13) с учётом выражений

$$\Delta P x_s = \begin{pmatrix} \Delta P_1 x_{1s} + \varepsilon\Delta P_2 x_{2s} \\ \varepsilon\Delta P_2 x_{1s} + \varepsilon\Delta P_3 x_{2s} \end{pmatrix}, \quad P_{opt}\Delta x = \begin{pmatrix} P_{1opt}\Delta x_1 + \varepsilon P_{2opt}\Delta x_2 \\ \varepsilon P_{2opt}\Delta x_1 + \varepsilon P_{3opt}\Delta x_2 \end{pmatrix}, \quad \Delta\chi = \begin{pmatrix} \Delta\chi_1 \\ \varepsilon\Delta\chi_2 \end{pmatrix}$$

принимает вид

$$\begin{gathered} \Delta J = \int\limits_0^{t_f} \left[\Delta_1^T(S_1\Delta_1 + S_2\Delta_2) + \Delta_2^T(S_2^T\Delta_1 + S_3\Delta_2)\right] dt + x_{10}^T\Delta P_1(0)x_{10} + \\ + \varepsilon\left(x_{20}^T\Delta P_2(0)^T x_{10} + x_{10}^T\Delta P_2(0)x_{20} + x_{20}^T\Delta P_3(0)x_{20}\right) + 2x_{10}^T\Delta\chi_1(0) + 2\varepsilon x_{20}^T\Delta\chi_2(0) + \\ + 2\int\limits_0^{t_f} \left[\chi_1^T S_1\Delta\chi_1 + \chi_1^T S_2\Delta\chi_2 + \chi_2^T S_2^T\Delta\chi_1 + \chi_2^T S_3\Delta\chi_2 - f_1^T\Delta\chi_1 - \varepsilon f_2^T\Delta\chi_2\right] dt. \end{gathered} \tag{14}$$

Здесь

$$\Delta_1 = \Delta P_1 x_{1s} + \varepsilon\Delta P_2 x_{2s} + P_{1opt}\Delta x_1 + \varepsilon P_{2opt}\Delta x_2 + \Delta\chi_1,$$

$$\Delta_2 = (\Delta P_2)^T x_{1s} + \Delta P_3 x_{2s} + \varepsilon P_{2opt}\Delta x_1 + \varepsilon P_{3opt}\Delta x_2 + \Delta\chi_2.$$

3. ДЕКОМПОЗИЦИЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

Уравнения для блоков матричного дифференциального уравнения Риккати не зависят от χ, поэтому можно начать анализ с этих уравнений, следуя работам [4, 5, 9]. Такая система уравнений имеет медленное интегральное многообразие

$$P_2 = \Phi(P_1, t, \varepsilon) = \Phi_0(P_1, t) + \varepsilon\Phi_1(P_1, t) + \varepsilon^2 \ldots, \quad P_3 = \Psi(P_1, t, \varepsilon) = \Psi_0(t) + \varepsilon\Psi_1(P_1, t) + \varepsilon^2 \ldots$$

Движение по медленному интегральному многообразию описывается матричным дифференциальным уравнением

$$\begin{gathered} \dot P_1 = \bar F_1(P_1, t, \varepsilon) = F_1(P_1, \Phi(P_1, t, \varepsilon), t, \varepsilon) = -P_1(A_1 - S_2\Phi_0^T) - (A_1^T - \Phi_0 S_2^T)P_1 - \Phi_0 A_3 - A_3^T\Phi_0^T + \\ + P_1S_1P_1 - M_1 + \varepsilon(P_1S_2\Phi_1^T + \Phi_1 S_2^T P_1 - \Phi_1 A_3 - A_3^T\Phi_1^T + \Phi_1 S_2^T + \Phi_0 S_3\Phi_1^T) + \varepsilon^2 \ldots \end{gathered} \tag{15}$$

Заметим, что при $\varepsilon = 0$ это уравнение является матричным дифференциальным уравнением Риккати

$$\dot P_1 = -P_1\tilde A_1 - \tilde A_1^T P_1 + P_1S_1P_1 - (M_1 - \tilde M_1 - \tilde M_1^T),$$

где $\tilde A_1 = A_1 - S_2\Phi_0^T$, $\tilde Q_1 = M_1 + \Phi_0 A_3 + A_3^T\Phi_0^T$.

Для перехода в окрестность медленного интегрального многообразия $P_2 = \Phi(P_1, t, \varepsilon)$, $P_3 = \Psi(P_1, t, \varepsilon)$ следует ввести новые переменные Z_2 и Z_3 по формулам

$$P_2 = Z_2 + \Phi(P_1, t, \varepsilon), \quad P_3 = Z_3 + \Psi(P_1, t, \varepsilon).$$

В этом представлении матричные функции Z_2 и Z_3 играют роль правых пограничных функций, а $\Phi(P_1, t, \varepsilon)$ и $\Psi(P_1, t, \varepsilon)$ соответствуют регулярным членам асимптотики представления решений [1]. Если ограничиться рассмотрением регулярной составляющей решений до порядка $O(\varepsilon)$ и правых пограничных функций Z_2, Z_3 до порядка $O(1)$ включительно, то Z_2 из уравнения для P_1 удалять не нужно. В противном случае можно использовать технику быстрых интегральных многообразий для удаления переменной Z_2 с требуемой степенью точности [4, 5, 10].

Положив $\varepsilon = 0$ в (10), получим следующие соотношения для определения матричных функций $\Phi_0(P_1, t)$ и $\Psi_0(P_1, t)$:

$$0 = -P_1A_2 - \Phi_0A_4 - A_3^T\Psi_0 + P_1S_2\Psi_0 + \Phi S_3\Psi_0 - M_2, \quad 0 = \Psi_0^TS_3\Psi_0 - \Psi_0A_4 - A_4^T\Psi_0 - M_3.$$

Второе уравнение — это алгебраическое матричное уравнение Риккати, решение $\Psi_0 = \Psi_0(t)$ которого представляет собой положительно определённую матрицу, если тройка матриц $(\bar{M}_3, A_4, B_2)$ стабилизируема и полностью наблюдаема при всех $t \in [0, 1]$, где $\bar{M}_3^T\bar{M}_3 = M_3$ (см., например, [1, 6]). Напомним, что в этом случае матрица $D = A_4 - S_3\Psi_0$ является гурвицевой при всех $t \in [0, t_f]$. Теперь можно подставить $\Psi_0 = \Psi_0(t)$ в первое уравнение и найти

$$\Phi_0 = -(P_1A_2 + A_3^T\Psi_0 + M_2 - P_1S_2\Psi_0)D^{-1}.$$

Матричные функции Φ_1 и Ψ_1 определяются из уравнений инвариантности, которые в рассматриваемом случае с учётом равенства (15) принимают вид

$$\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial t}\big(\Phi(P_1, t, \varepsilon)\big) + \frac{\partial}{\partial P_1}\big(\Phi(P_1, t, \varepsilon)\big)\bar{F}_1\right] = F_2(P_1, \Phi(P_1, t, \varepsilon), \Psi(P_1, t, \varepsilon), t, \varepsilon),$$

$$\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial t}(\Psi(P_1, t, \varepsilon)) + \frac{\partial}{\partial P_1}\big(\Psi(P_1, t, \varepsilon)\big)\bar{F}_1\right] = F_3(\Phi(P_1, t, \varepsilon), \Psi(P_1, t, \varepsilon), t, \varepsilon).$$

Следует напомнить, что функции F_2, F_3 были введены в формулах (10). Приравнивая коэффициенты при первой степени малого параметра, получаем линейные относительно неизвестных матричных функций Φ_1 и Ψ_1 соотношения

$$\bar{F}_1(P_1, \Phi_0, t, 0)(-A_2 + S_2\Psi_0)D^{-1} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} =$$

$$= -\Phi_1A_4 - A_1^T\Phi_0 - A_3^T\Psi_1 + P_1S_1\Phi_0 + P_1S_2\Psi_1 + \Phi_0S_2^T\Phi_0 + \Phi_0S_3\Psi_1 + \Phi_1S_3\Psi_0,$$

$$\dot{\Psi}_0 = -\Phi^TA_2 - A_2^T\Phi_0 - A_4^T\Psi_1 + \Phi_0^TS_2\Psi_0 + \Psi_0S_2^T\Phi_0 + \Psi_1S_3\Psi_0 + \Psi_0S_3\Psi_1.$$

Из второго равенства находим Ψ_1, подставляем найденное выражение в первое уравнение и получаем Φ_1. При необходимости аналогичным образом из соответствующих линейных уравнений находятся Φ_2, Ψ_2 и т.д.

4. ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Вернёмся к рассмотрению системы дифференциальных уравнений для χ_1 и χ_2. После анализа решений матричного дифференциального уравнения Риккати коэффициенты этой системы можно считать известными. Более того, как отмечалось выше, в рассматриваемых предположениях матрица D является гурвицевой, и для анализа системы (11), (12) можно сначала применить известную методику блочной диагонализации (см., например, [4–6]) соответствующей однородной системы, принимая во внимание только регулярную составляющую решения матричного дифференциального уравнения Риккати, а матричные блоки Z_1, Z_2 и Z_3 формально отнести к неоднородности.

Систему (11), (12) представим в следующем виде:

$$\dot{\chi}_1 = -(A_1 - S_1V_1 - S_2V_2^T)^T\chi_1 - (A_3 - S_2^TV_1 - S_3V_2^T)^T\chi_2 + \varphi_1, \tag{16}$$

$$\varepsilon\dot{\chi}_2 = -(A_2 - \varepsilon S_1V_2 - S_2V_3)^T\chi_1 - (A_4 - \varepsilon S_2^TV_2 - S_3V_3)^T\chi_2 + \varphi_2. \tag{17}$$

Здесь V_1, V_2, V_3 — регулярные компоненты матричных блоков, которые соответствуют решению, принадлежащему интегральному многообразию медленных движений, т.е. V_1 удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению (15), $V_2 = \Phi(P_1, t, \varepsilon)$, $V_3 = \Psi(P_1, t, \varepsilon)$, а функции φ_1, φ_2 задаются равенствами

$$\varphi_1 = (\varepsilon Z_1S_1 + Z_2S_2)\chi_1 + (\varepsilon Z_1S_2 + Z_2S_3)\chi_2 + C_1^TQ\xi_1 - (V_1 + \varepsilon Z_1)f_1 - (V_2 + Z_2)f_2,$$

$$\varphi_2 = (\varepsilon Z_2^TS_1 + Z_3S_2^T)\chi_1 + (\varepsilon Z_2^TS_2 + Z_3S_3)\chi_2 + C_2^TQ\xi - (\varepsilon V_2^T + Z_2^T)f_1 - (V_3 + Z_3)f_2,$$

в которых учтено, что матричный блок P_1 представим в виде суммы V_1 и функции типа правого пограничного слоя εZ_1. К соответствующей однородной системе

$$\dot{\chi}_1 = -(A_1 - S_1V_1 - S_2V_2^T)^T\chi_1 - (A_3 - S_2^TV_1 - S_3V_2^T)^T\chi_2,$$

$$\varepsilon\dot{\chi}_2 = -(A_2 - \varepsilon S_1V_2 - S_2V_3)^T\chi_1 - (A_4 - \varepsilon S_2^TV_2 - S_3V_3)^T\chi_2$$

можно применить метод приведения к блочно-диагональной форме. С этой целью сначала вводится новая быстрая переменная $y_2 = \chi_2 - L\chi_1$. Используемая в этой формуле матричная функция $L = L(t, \varepsilon)$ удовлетворяет несимметричному матричному дифференциальному уравнению Риккати

$$\varepsilon\dot{L} + \varepsilon L[-(A_1 - S_1V_1 - S_2V_2^T)^T - (A_3 - S_2^TV_1 - S_3V_2^T)^TL] =$$
$$= -(A_2 - \varepsilon S_1V_2 - S_2V_3)^T - (A_4 - \varepsilon S_2^TV_2 - S_3V_3)^TL,$$

из которого она может быть легко найдена в виде разложения по степеням малого параметра

$$L = L_0(t) + \varepsilon L_1(t) + \ldots,$$

где

$$L_0(t) = -[D^T(t)]^{-1}(A_2 - S_2\Psi_0)^T,$$

$$L_1(t) = -[D^T(t)]^{-1}[\dot{L}_0 + L_0(-(A_1 - S_1V_1 - S_2V_2^T)^T - (A_3 - S_2^TV_1 - S_3\Phi_0^T)^TL_0) -$$
$$- \Phi_0^TS_1 - \Psi_1S_2^T - (S_2^T\Phi_0 + S_3\Psi_1)^TL_0].$$

Для переменных χ_1, y_2 получаем систему

$$\dot{\chi}_1 = [-(A_1 - S_1V_1 - S_2V_2^T)^T - (A_3 - S_2^TV_1 - S_3V_2^T)^TL]\chi_1 - (A_3 - S_2^TV_1 - S_3V_2^T)^Ty_2,$$

$$\varepsilon\dot{y}_2 = -[(A_4 - \varepsilon S_2^TV_2 - S_3V_3)^T + \varepsilon L(A_3 - S_2^TV_1 - S_3V_2^T)^T]y_2.$$

На следующем шаге вводится новая медленная переменная $y_1 = \chi_1 - \varepsilon Hy_2$. При этом матричная функция $H = H(t, \varepsilon)$ удовлетворяет линейному матричному дифференциальному уравнению

$$\varepsilon\dot{H} + H[(A_4 - \varepsilon S_2^TV_2 - S_3V_3)^T + \varepsilon L(A_3 - S_2^TV_1 - S_3V_2^T)^T] = -(A_3 - S_2^TV_1 - S_3V_2^T)^T,$$

из которого она может быть легко найдена в виде разложения по степеням малого параметра $H = H_0(t) + \varepsilon H_1(t) + \ldots$, где $H_0(t) = -(A_3 - S_2^T V_1 - S_3 V_2^T)^T [D^T(t)]^{-1}$.

В результате получаются две независимые подсистемы:

$$\dot{y}_1 = [-(A_1 - S_1 V_1)^T - (A_3 - S_2^T V_1 - S_3 V_2^T)^T L] y_1,$$

$$\varepsilon \dot{y}_2 = -[(A_4 - \varepsilon S_2^T V_2 - S_3 V_3)^T + \varepsilon L (A_3 - S_2^T V_1 - S_3 V_2^T)^T] y_2.$$

Если применить преобразование $y_2 = \chi_2 - L\chi_1$, $y_1 = \chi_1 - \varepsilon H y_2$ к неоднородной системе (16), (17), то получится дифференциальная система вида

$$\dot{y}_1 = [-(A_1 - S_1 V_1 - S_2 V_2^T)^T - (A_3 - S_2^T V_1 - S_3 V_2^T)^T L] y_1 + \tilde{f}_1, \tag{18}$$

$$\varepsilon \dot{y}_2 = -[(A_4 - \varepsilon S_2^T V_2 - S_3 V_3)^T + \varepsilon L (A_3 - S_2^T V_1 - S_3 V_2^T)^T] y_2 + \tilde{f}_2, \tag{19}$$

где $\tilde{f}_1 = (I + \varepsilon H L)\varphi_1 - H\varphi_2$, $\tilde{f}_2 = \varphi_2 - \varepsilon L \varphi_1$, а I — единичная матрица.

Правые части уравнений (18), (19) разнотипны, так как содержат регулярные функции и функции типа правого пограничного слоя, поэтому имеет смысл представить переменные y_1, y_2 в виде сумм переменных v_1, v_2 и z_1, z_2, т.е. $y_1 = v_1 + z_1$, $y_2 = v_2 + z_2$, где v_1, v_2 соответствуют регулярным компонентам решений, а z_1, z_2 представляют собой функции типа правого пограничного слоя. В уравнениях для v_1, v_2 сохранены только регулярные функции из правых частей уравнений (18), (19), а в уравнениях для z_1, z_2 — функции типа правого пограничного слоя. В результате получаем

$$\dot{v}_1 = [-(A_1 - S_1 V_1 - S_2 V_2^T)^T - (A_3 - S_2^T V_1 - S_3 V_2^T)^T L] v_1 + g_{11}, \tag{20}$$

$$\varepsilon \dot{v}_2 = -[(A_4 - \varepsilon S_2^T V_2 - S_3 V_3)^T + \varepsilon L (A_3 - S_2^T V_1 - S_3 V_2^T)^T] v_2 + g_{12}, \tag{21}$$

$$\dot{z}_1 = [-(A_1 - S_1 V_1)^T - (A_3 - S_2^T V_1 - S_3 V_2^T)^T L] z_1 + g_{21}, \tag{22}$$

$$\varepsilon \dot{z}_2 = -[(A_4 - \varepsilon S_2^T V_2 - S_3 V_3)^T + \varepsilon L (A_3 - S_2^T V_1 - S_3 V_2^T)^T] z_2 + g_{22}. \tag{23}$$

Здесь

$$g_{11} = [H M_2^T - (I + \varepsilon H L) M_1] \xi_1 + [H M_3 - (I + \varepsilon H L) M_2] \xi_2,$$

$$g_{12} = (\varepsilon L M_1 - M_2^T) \xi_1 + (\varepsilon L M_2 - M_3) \xi_2,$$

$$g_{21} = [\varepsilon Z_1 S_1 + (\varepsilon Z_1 S_2 + Z_2 S_3) L](v_1 + z_1) + [\varepsilon^2 Z_1 S_1 H + (\varepsilon Z_1 S_2 + Z_2 S_3)(I + \varepsilon L H)](v_2 + z_2),$$

$$g_{22} = [\varepsilon Z_2^T S_1 + Z_3 Z_2^T + \varepsilon Z_2^T S_2 + Z_3 Z_3](v_1 + z_1) +$$

$$+ [\varepsilon(\varepsilon Z_2^T S_1 + Z_3 S_2^T) H + (\varepsilon Z_2 S_2 + Z_3 S_3)(I + \varepsilon H L)](v_2 + z_2).$$

Вектор v_1 может быть найден с любой степенью точности как решение независимого линейного дифференциального уравнения (20). Ещё проще ситуация с вектором v_2, который может быть найден из независимого линейного дифференциального уравнения (21) только при помощи алгебраических операций. После того как найдены v_1 и v_2, линейные уравнения (22), (23) можно рассматривать как независимые и находить векторы z_1 и z_2 с любой степенью точности.

Таким образом, применение техники интегральных многообразий позволило осуществить декомпозицию задачи построения оптимального управления (2), (3) на несколько независимых подзадач, каждая из которых может быть решена с любой степенью точности по отношению к степеням малого параметра.

5. ПОСТРОЕНИЕ СУБОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

При построении субоптимального управления ограничимся вычислением регулярной составляющей решений до порядка $O(\varepsilon)$ включительно и правых пограничных функций Z_2, Z_3 (Z_1 имеет множителем малый параметр).

Из уравнений (20) и (21) переменные v_1 и v_2 могут быть найдены с любой степенью точности в виде асимптотических разложений без особых затруднений в силу линейности уравнений. В уравнении (20) достаточно учитывать члены нулевого и первого порядков по малому параметру. Тогда это уравнение принимает вид

$$\dot{v}_1 = [-(A_1 - S_1V_1 - S_2(\Phi_0 + \varepsilon\Phi_1)^T)^T - (A_3 - S_2^TV_1 - S_3(\Phi_0 + \varepsilon\Phi_1)^T)^T L]v_1 + g_{11}.$$

Из уравнения (21), которое запишем как

$$\varepsilon\dot{v}_2 = -[(D - \varepsilon S_2^T\Phi_0 - S_3\varepsilon\Psi_0)^T + \varepsilon L(A_3 - S_2^TV_1 - S_3\Phi_0^T)^T]v_2 + g_{12},$$

можно найти v_2 в виде разложения $v_2 = \phi_0 + \varepsilon\phi_1 + \ldots$, подставив которое в это уравнение и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, последовательно найдём

$$\phi_0 = -D^{-1}(M_2^T\xi_1 + M_3\xi_2),$$

$$\phi_1 = D^{-1}[L_0(M_1\xi_1 + M_2\xi_2)] + D^{-1}[\dot{\phi}_0 + (S_2^T\Phi_0 + S_3\Psi_0) - L_0((A_3 - S_2^TV_1 - S_3\Phi_0^T)^T)]\phi_0.$$

Для вектора z_2 приходим к уравнению

$$\varepsilon\dot{z}_2 = -Dz_2 + (Z_3Z_2^T + Z_3Z_3)v_1 + Z_3S_3(v_2 + z_2),$$

так как в пределах выбранной степени точности вектором z_1 можно пренебречь.

Это означает, что и функции χ_1, χ_2 могут быть найдены с любой степенью точности по формулам

$$\chi_1 = y_1 + \varepsilon Hy_2, \quad \chi_2 = Ly_1 + (I + \varepsilon LH)y_2.$$

Однако, учитывая введённые выше ограничения на точность вычислений, можно сделать вывод о том, что при вычислении переменной y_1 правыми пограничными функциями можно пренебречь, а для вычисления χ_1, χ_2 можно использовать следующие формулы:

$$\chi_1 = y_1 + \varepsilon H_0y_2, \quad \chi_2 = (L_0 + \varepsilon L_1)y_1 + (I + \varepsilon L_0H_0)y_2.$$

Для главного члена y_2 имеем задачу

$$\varepsilon\dot{y}_2 = -D(t)y_2 + Z_3S_3y_2,$$

где Z_3 является решением задачи

$$\varepsilon\dot{Z}_3 = -Z_3D - D^TZ_3 + Z_3S_3Z_3, \quad Z_3(t_f) = -\Psi_0(t_f).$$

Заметим, что решение этого матричного уравнения сводится к построению фундаментальной матрицы для линейной однородной системы $\varepsilon\dot{w} = D^Tw$ [5].

Формула для субоптимального управления может быть записана как

$$u_s = -R^{-1}[(B_1^TP_1 + B_2^TP_2^T)x_1 + (\varepsilon B_1^TP_2 + B_2^TP_3)x_2 + B_1^T\chi_1 + B_2^T\chi_2].$$

Здесь P_1 — решение матричного дифференциального уравнения (15) при $\varepsilon = 0$, $P_2 = \Phi_0 + \varepsilon\Phi_1 + Z_2$, где Z_2 является решением задачи

$$\varepsilon\dot{Z}_2 = Z_2S_3\Psi_0 + Z_2S_3Z_3 + P_1S_2Z_3 - A_3^TZ_3 - \Phi_0S_3Z_3, \quad Z_2(t_f) = -\Phi_0(t_f),$$

а при вычислении P_1 в последнем дифференциальном уравнении достаточно ограничиться приближением нулевого порядка.

6. ЗАДАЧА СЛЕЖЕНИЯ ЗА МЕСТОПОЛОЖЕНИЕМ ОБЪЕКТА

Рассмотрим управляемую систему вида

$$\varepsilon\ddot{x_1} - A_3(t)x_1 - A_4(t)\dot{x_1} = B_2(t)u + f_2(t),$$

$$y = C_1(t)x_1,$$

где $x_1 \in \mathbb{R}^n$, эталонное движение по-прежнему задаётся функцией $\xi = \xi(t)$, а функционал качества имеет вид

$$J = \int\limits_0^{t_f} \big[\big(C_1(t)x_1(t) - \xi(t)\big)^T Q(t)\big(C_1(t)x_1(t) - \xi(t)\big) + u^T(t)R(t)u(t)\big]\,dt. \tag{24}$$

Будем предполагать, что выполнено следующее

Условие. Все матричные и векторные функции, фигурирующие в постановке этой задачи, являются достаточно гладкими, а все собственные числа матрицы A_4 на рассматриваемом отрезке имеют отрицательные вещественные части.

Полагая $\dot{x_1} = x_2$, приходим к задаче вида (7)–(9) при

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \varepsilon^{-1}A_3 & \varepsilon^{-1}A_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon^{-1}B_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-2}S_3 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon^{-1}f_2 \end{pmatrix}.$$

В рассматриваемом случае формула (14) имеет вид

$$\Delta J = \int\limits_0^{t_f} \Delta_2^T S_3 \Delta_2\,dt + x_{10}^T \Delta P_1(0)x_{10} + \varepsilon(x_{20}^T \Delta P_2(0)^T x_{10} + x_{10}^T \Delta P_2(0)x_{20} + x_{20}^T \Delta P_3(0)x_{20}) +$$

$$+ 2x_{10}^T \Delta\chi_1(0) + 2\varepsilon x_{20}^T \Delta\chi_2(0) + \Delta\kappa(0),$$

где

$$\Delta\kappa(0) = -\int\limits_0^{t_f} \big[\chi_{2opt}^T S_3 \Delta\chi_2 + \Delta\chi_2 S_3 \chi_{2s} - 2\varepsilon f^T \Delta\chi_2\big]\,dt.$$

Нетрудно видеть, что пренебрежение в представлении переменных P_1, P_2, P_3 и χ_1, χ_2 регулярными членами порядка $O(\varepsilon^2)$ и правыми пограничными функциями, содержащими в качестве множителя малый параметр, приводит к погрешности порядка $O(\varepsilon^2)$ в функционале качества.

Система уравнений для матриц P_1, P_2, P_3 принимает вид

$$\dot{P}_1 = -P_2A_3 - A_3^T P_2^T + P_2S_3P_2^T - M_1 = F_1(P_1, P_2, t, \varepsilon),$$

$$\varepsilon\dot{P}_2 = -P_1 - P_2A_4 - A_3^T P_3 + P_2S_3P_3 = F_2(P_1, P_2, P_3, t, \varepsilon),$$

$$\varepsilon\dot{P}_3 = -P_3A_4 - A_4^T P_3 + P_3S_3P_3 - \varepsilon(P_2^T + P_2) = F_3(P_2, P_3, t, \varepsilon) \tag{25}$$

с граничными условиями

$$P_1(t_f) = 0, \quad P_2(t_f) = 0, \quad P_3(t_f) = 0.$$

Полагая в последних двух уравнениях данной системы матричных дифференциальных уравнений малый параметр равным нулю, получаем уравнения

$$0 = -P_1 - P_2A_4 - A_3^T P_3 + P_2S_3P_3, \quad 0 = -P_3A_4 - A_4^T P_3 + P_3S_3P_3.$$

Отсюда следует, что медленное интегральное многообразие этой системы имеет вид

$$P_2 = -P_1A_4^{-1} + \varepsilon\Phi_1(P_1, t) + \ldots, \quad P_3 = \varepsilon\Psi_1(P_1, t) + \ldots \tag{26}$$

Приравнивая в соответствующих уравнениях инвариантности члены, содержащие множителем первую степень малого параметра, получаем соотношения для определения матричных функций $\Phi_1(P_1, t)$ и $\Psi_1(P_1, t)$ соответственно:

$$-F_1(P_1, -P_1A_4^{-1}, t, 0) - P_1\frac{d}{dt}(A_4^{-1}) = -\Phi_1A_4 - A_3^T\Psi_1 - P_1A_4^{-1}S_3\Psi_1,$$

$$0 = -\Psi_1A_4 - A_4^T\Psi_1 + P_1A_4^{-1} + (P_1A_4^{-1})^T. \tag{27}$$

Последнее равенство представляет собой однозначно разрешимое матричное уравнение Ляпунова. После подстановки найденного решения Ψ_1 в предыдущее уравнение матрица Φ_1 находится умножением на A_4^{-1} соответствующих слагаемых, т.е.

$$\Phi_1 = \left(F_1(P_1, -P_1A_4^{-1}, t, 0) + P_1\frac{d}{dt}(A_4^{-1}) - A_3^T\Psi_1 - P_1A_4^{-1}S_3\Psi_1\right)A_4^{-1}. \tag{28}$$

При необходимости аналогичным образом определяются соответствующие матричные коэффициенты при более высоких степенях малого параметра.

Уравнение (15), описывающее движение на медленном интегральном многообразии, в рассматриваемом случае может быть представлено в следующем виде:

$$\dot{P}_1 = -\Phi_0A_3 - A_3^T\Phi_0^T - M_1 + \varepsilon(-\Phi_1A_3 - A_3^T\Phi_1^T + \Phi_0S_3\Phi_1^T + \Phi_1S_3\Phi_0^T) + \ldots \tag{29}$$

Важно отметить, что при $t = t_f$ матричные функции P_1, P_2, P_3 обращаются в нуль. Отсюда следует, что правые пограничные функции Z_2, Z_3 в представлении матриц P_2, P_3 должны содержать в качестве множителя малый параметр. Это означает, что если при построении закона управления пренебречь правыми пограничными функциями, то в силу формулы (14) погрешность функционала качества не превысит величину $O(\varepsilon^2)$.

Система уравнений для χ_1 и χ_2 в рассматриваемом случае имеет вид

$$\dot{\chi}_1 = -(A_3 - S_3P_2^T)^T\chi_2 + C_1^TQ\xi - P_2f_2, \tag{30}$$

$$\varepsilon\dot{\chi}_2 = -\chi_1 - (A_4 - S_3P_3)^T\chi_2 - P_3f_2 \tag{31}$$

с граничными условиями

$$\chi_1(t_f) = 0, \quad \chi_2(t_f) = 0.$$

Рассмотрим соответствующую однородную систему, не содержащую правых пограничных функций Z_1, Z_2, Z_3 и членов порядка $o(\varepsilon)$ у регулярных матричных функций V_2, V_3:

$$\dot{\chi}_1 = -(A_3 - S_3(-V_1A_4^{-1} + \varepsilon\Phi_1(V_1, t))^T)^T\chi_2, \quad \varepsilon\dot{\chi}_2 = -\chi_1 - (A_4 - \varepsilon S_3\Psi_1(V_1, t))^T\chi_2.$$

Для матричных функций L и H, пренебрегая членами второго и более высоких порядков в разложении по степеням малого параметра, получаем представления

$$L = L_0 + \varepsilon L_1 + O(\varepsilon^2), \quad H = H_0 + O(\varepsilon).$$

Здесь

$$L_0 = -(A_4^T)^{-1}, \quad L_1 = (A_4^T)^{-1}\big[\dot{L}_0 - L_0(A_3^T + (A_4^T)^{-1}V_1S_3)L_0 - \Psi_1S_3\big], \tag{32}$$

$$H_0 = -[A_3 + S_3V_1A_4^{-1}]^T(A_4^T)^{-1}.$$

После преобразований

$$y_2 = \chi_2 - L\chi_1, \quad y_1 = \chi_1 - \varepsilon Hy_2 \tag{33}$$

в неоднородной системе (30), (31) будем иметь уравнения

$$\dot{y}_1 = [-(A_3 + S_3\Phi(V_1, t, \varepsilon))^T L]y_1 + \tilde{f}_1, \quad (34)$$

$$\varepsilon\dot{y}_2 = -[(A_4 - \varepsilon S_3\Psi_1)^T + \varepsilon L_0(A_3 - S_3\Phi_0(t)^T)^T]y_2 + \tilde{f}_2.$$

Здесь

$$\tilde{f}_1 = (I + \varepsilon H_0 L_0)(C_1^T Q\xi - \Phi(V_1, t, \varepsilon)f_2) - H_0(-\varepsilon\Psi_1(V_1, t)f_2),$$

$$\tilde{f}_2 = -\varepsilon\Psi_1(V_1, t, \varepsilon)f_2 - \varepsilon L_0(C_1^T Q\xi - \Phi_0(t)f_2).$$

В этих уравнениях и в выражениях для функций $\tilde{f}_1$ и $\tilde{f}_2$ опущены правые пограничные функции Z_1, Z_2, Z_3 и члены порядка $o(\varepsilon)$ у регулярных функций. Принимая во внимание, что функция $\tilde{f}_2$ содержит малый параметр в качестве множителя, получаем следующее приближённое выражение для y_2:

$$y_2 = -\varepsilon A_4^{-1}\big(\Psi_1(V_1, t)f_2 - L_0(C_1^T Q\xi - \Phi_0(t)f_2)\big),$$

в котором учтены только регулярные члены порядка $O(\varepsilon)$, а регулярные члены более высоких порядков и правые пограничные функции, которые содержат в качестве множителя малый параметр, опущены. В рассматриваемом случае формула для оптимального управления принимает вид

$$u_{opt} = -R^{-1}B_2^T[P_2 x + P_3\dot{x} + \chi_2].$$

Чтобы получить погрешность порядка $O(\varepsilon^2)$ при вычислении значения функционала качества для субоптимального управления, следует использовать приближённое выражение

$$P_2 = \Phi(V_1, t, \varepsilon) \simeq \Phi_0 + \varepsilon\Phi_1 = -V_1 A_4^{-1} + \varepsilon\Phi_1(V_1, t), \quad P_3 \simeq \varepsilon\Psi_1(V_1, t). \quad (35)$$

Что касается χ_2, то использование представления

$$\chi_2 = Ly_1 + (I + \varepsilon LH)y_2,$$

вытекающего из (33), и полученного выше выражения для y_2 позволяет применять следующее приближённое выражение:

$$\chi_2 = (L_0 + \varepsilon L_1)y_1 - \varepsilon A_4^{-1}\left(\Psi_1(V_1, t)f_2 - L_0(C_1^T Q\xi - \Phi_0(t)f_2)\right).$$

Таким образом, система (25) имеет медленное интегральное многообразие, которое с точностью до членов порядка $O(\varepsilon)$ включительно описывается уравнениями (29), где Ψ_1 является решением уравнения Ляпунова (27), Φ_1 задаётся формулой (28), а матрица V_1 представляет собой решение матричного дифференциального уравнения

$$\dot{P}_1 = -P_2 A_3 - A_3^T P_2^T + P_2 S_3 P_2^T - M_1, \quad P_1(t_f) = 0,$$

в котором P_2 определяется выражением (35). Через v_2 обозначим выражение

$$v_2 = (L_0 + \varepsilon L_1)v_1 - \varepsilon A_4^{-1}\big(\Psi_1(V_1, t)f_2 - L_0(C_1^T Q\xi - \Phi_0(t)f_2)\big), \quad (36)$$

в нём в качестве v_1 следует взять решение уравнения (34) с граничным условием $y_1(t_f) = 0$.

Суммируя приведённое выше, можно выписать соотношения, необходимые для получения субоптимального управления. Пусть матричная функция V_1 является решением уравнения (29), описывающего движение по медленному интегральному многообразию с условием $V_1(t_f) = 0$, в котором отброшены члены второго и более высоких порядков по ε, т.е.

$$\dot{V}_1 = -\Phi_0 A_3 - A_3^T\Phi_0^T - M_1 + \varepsilon(-\Phi_1 A_3 - A_3^T\Phi_1^T + \Phi_0 S_3\Phi_1^T + \Phi_1 S_3\Phi_0^T), \quad V_1(t_f) = 0. \quad (37)$$

Здесь, в соответствии с формулами (26)–(28),

$$\Phi_0 = -V_1 A_4^{-1}, \tag{38}$$

матрица Ψ_1 является решением уравнения Ляпунова

$$\Psi_1 A_4 + A_4^T \Psi_1 = V_1 A_4^{-1} + (V_1 A_4^{-1})^T, \tag{39}$$

в котором аргумент t играет роль параметра, а для Φ_1 справедливо выражение

$$\Phi_1 = \left(-\Phi_0 A_3 - A_3^T \Phi_0^T - M_1 + V_1 \frac{d}{dt}(A_4^{-1}) - A_3^T \Psi_1 - V_1 A_4^{-1} S_3 \Psi_1\right) A_4^{-1}. \tag{40}$$

Используя формулы (37)–(40), с учётом членов нулевого и первого порядков по ε из (26) получаем

$$V_2 = -V_1 A_4^{-1} + \varepsilon \Phi_1, \tag{41}$$

$$V_3 = \varepsilon \Psi_1. \tag{42}$$

Принимая во внимание (32), (34) и (36), имеем

$$v_2 = (L_0 + \varepsilon L_1) v_1 - \varepsilon A_4^{-1} \big(\Psi_1(V_1, t) f_2 - L_0(C_1^T Q \xi - \Phi_0(t) f_2)\big). \tag{43}$$

Здесь

$$L_0 = -(A_4^T)^{-1}, \quad L_1 = (A_4^T)^{-1} \big[\dot{L}_0 - L_0(A_3^T + (A_4^T)^{-1} V_1 S_3) L_0 - \Psi_1 S_3\big],$$

v_1 является решением задачи

$$\dot{v}_1 = [-\big(A_3 + S_3(\Phi_0 + \varepsilon \Phi_1)\big)^T (L_0 + \varepsilon L_1)] v_1 + \tilde{f}_1, \quad v_1(t_f) = 0$$

при

$$\tilde{f}_1 = (I + \varepsilon H_0 L_0)(C_1^T Q \xi - \Phi(V_1, t, \varepsilon) f_2) - H_0(-\varepsilon \Psi_1(V_1, t) f_2),$$

$$H_0 = -[A_3 + S_3 V_1 A_4^{-1}]^T (A_4^T)^{-1}.$$

Полученные выражения позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема. *Если выполнено сформулированное условие, то применение субоптимального управления*

$$u_s = -R^{-1} B_2^T [V_2 x + V_3 \dot{x} + v_2],$$

где V_2 и V_3 заданы выражениями (41) и (42), а v_2 — выражением (43), приводит к погрешности порядка $O(\varepsilon^2)$ в функционале (24).

Пример. Рассмотрим управляемую систему вида

$$\varepsilon \ddot{x} + (1 + \varepsilon^2 \nu) \dot{x} = u + f, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Пусть наблюдается координата x, т.е. $y = x$, эталонное движение задаётся в явном виде $\xi = \xi(t)$, а функционал качества определяется формулой

$$J = \int_0^1 \big[(y(t) - \xi(t))^2 + u^2(t)\big]\, dt.$$

Здесь в качестве параметра ν рассматривается величина

$$\nu = \frac{-1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2}}{\varepsilon^2} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2}} \simeq 1/2.$$

Получаем соответствующие матрицы

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -(1+\varepsilon^2\nu)\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\quad S=\varepsilon^{-2}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad Q=(1),\quad R=(1).$$

Формула для оптимального управления принимает вид

$$u_{opt}=-[P_2x+P_3\dot{x}+\chi_2].$$

Матричное дифференциальное уравнение Риккати для элементов матрицы

$$P=\begin{pmatrix}P_1 & \varepsilon P_2\\ \varepsilon P_2^T & \varepsilon P_3\end{pmatrix}$$

может быть записано в виде системы трёх скалярных дифференциальных уравнений

$$\dot{P}_1=P_2^2-1,\quad \varepsilon\dot{P}_2=(1+\varepsilon^2\nu)P_2+P_2P_3-P_1,\quad \varepsilon\dot{P}_3=P_3^2-2\varepsilon P_2+(1+\varepsilon^2\nu)P_3.$$

Эта система имеет точное инвариантное многообразие

$$P_2=P_1-\varepsilon,\quad P_3=\varepsilon P_1-\varepsilon^2(1+\nu),$$

движение на котором описывается скалярным дифференциальным уравнением Риккати

$$\dot{P}_1=P_1^2-2\varepsilon P_1-(1-\varepsilon^2).$$

Преобразование

$$P_2=P_1-\varepsilon+Z_2,\quad P_3=\varepsilon(P_1-\varepsilon(1+\nu))+Z_3$$

приводит эту систему к виду

$$\dot{P}_1=(P_1-\varepsilon+Z_2)^2-1,\quad \varepsilon\dot{Z}_2=Z_2Z_3+Z_2(1+\varepsilon P_1+\varepsilon^2-\varepsilon 2P_1)+Z_3(P_1-\varepsilon),$$
$$\varepsilon\dot{Z}_2=Z_3^2+2Z_3(1-\varepsilon^2+\varepsilon P_1)-2\varepsilon Z_2.$$

Ограничимся рассмотрением регулярных компонентов решений до порядка $O(\varepsilon)$ и правых пограничных функций Z_2, Z_3 до порядка $O(1)$ включительно. Заметим, что $Z_2(1)=O(\varepsilon)$, $Z_3(1)=O(\varepsilon^2)$, что позволяет не принимать во внимание значения Z_2, Z_3 и перейти к рассмотрению только уравнений, описывающих поведение решений на медленном интегральном многообразии:

$$\dot{V}_1=(V_1-\varepsilon)^2-1,\quad V_1(1)=0,\quad V_2=V_1-\varepsilon,\quad V_3=\varepsilon V_1-\varepsilon^2(1+\nu).$$

Имеем

$$V_1(t,\varepsilon)=\varepsilon+\phi(t,\varepsilon),\quad V_2=\phi(t,\varepsilon),\quad V_3=\varepsilon V_1(t,\varepsilon)-\varepsilon^2(1+\nu).$$

Здесь

$$\phi(t,\varepsilon)=V_2=\frac{1-\varepsilon-(1+\varepsilon)\exp\{2(t-1)\}}{1-\varepsilon+(1+\varepsilon)\exp\{2(t-1)\}}.$$

Скалярные переменные χ_1 и χ_2 удовлетворяют линейной дифференциальной системе

$$\dot{\chi}_1=\phi\chi_2+\xi-\phi f,\quad \varepsilon\dot{\chi}_2=-\chi_1+(1+\varepsilon\phi)\chi_2-\varepsilon(\phi-\varepsilon\nu)f$$

с граничными условиями $\chi_1(1)=0$, $\chi_2(1)=0$. Следует отметить, что соответствующая однородная дифференциальная система

$$\dot{\chi}_1=\phi\chi_2,\quad \varepsilon\dot{\chi}_2=-\chi_1+(1+\varepsilon\phi)\chi_2$$

имеет точное медленное интегральное многообразие $\chi_2=\chi_1$ и точное быстрое интегральное многообразие $\chi_1=\varepsilon(\varepsilon+\phi)y_2/(1-\varepsilon^2)$, т.е. $L=1$, $H=(\varepsilon+\phi)/(1-\varepsilon^2)$. Преобразование (33) приводит однородную систему для переменных χ_1 и χ_2 к диагональному виду $\dot{y}_1=\phi y_1$, $\varepsilon\dot{y}_2=y_2$, а соответствующую неоднородную систему — к виду

$$\dot{y}_1=\phi y_1+\left(1+\varepsilon\frac{\varepsilon+\phi}{1-\varepsilon^2}\right)(\xi-\phi f)-\varepsilon(\phi-\varepsilon\nu)f, \quad \varepsilon\dot{y}_2=y_2+\varepsilon^2\nu f-\varepsilon\xi.$$

Пренебрегая выражениями второго и более высоких порядков по малому параметру, получаем дифференциальную систему

$$\dot{y}_1=\phi y_1+(1+\varepsilon\phi)\xi-(1+\varepsilon 2\phi)f, \quad \varepsilon\dot{y}_2=y_2-\varepsilon\xi.$$

Следовательно, для субоптимального управления имеем выражение

$$u_s=-(\phi(,\varepsilon)x+\varepsilon\phi(t,0)\dot{x}+v_1+\varepsilon\xi),$$

где $v_1=v_1(t,\varepsilon)$ — решение линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$\dot{v}_1=\phi(t,\varepsilon)v_1+(1+\varepsilon\phi(t,0))\xi-(1+\varepsilon 2\phi(t,0))f, \quad v_1(1,\varepsilon)=0,$$

которое легко проинтегрировать.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье для изучения сингулярно возмущённого оптимального отслеживания задач с заданной эталонной траекторией использован метод декомпозиции, основанный на геометрическом подходе к анализу дифференциальных систем с быстрыми и медленными переменными. Показано, что применение метода декомпозиции позволяет значительно уменьшить размерность сингулярно возмущённых систем матричных и векторных дифференциальных уравнений, возникающих при решении задач оптимального слежения, и тем самым упрощает анализ этих задач. Рассмотрено решение задачи о построении субоптимального управления, не содержащего пограничных функций, и приведён пример.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-11-00202).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева, А.Б. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления / А.Б. Васильева, М.Г. Дмитриев // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. — М. : ВИНИТИ, 1982. — Т. 20. — С. 3–78.
2. Дмитриев, М.Г. Сингулярные возмущения в задачах управления / М.Г. Дмитриев, Г.А. Курина // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 1. — С. 3–51.
3. Naidu, D.S. Singular perturbations and time scales in control theory and applications: an overview / D.S. Naidu // Dynam. Continuous, Discrete and Impulsive Syst. Ser. B: Appl. & Algorithms. — 2002. — V. 9, № 2. — P. 233–278.
4. Sobolev, V.A. Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed system / V.A. Sobolev // Syst. Control Lett. — 1984. — V. 5. — P. 169–179.

5. Воропаева, Н.В. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущённых систем / Н.В. Воропаева, В.А. Соболев. — М. : Физматлит, 2009. — 256 с.
6. Kokotović, P.V. Singular Perturbation Methods in Control. Analysis and Design / P.V. Kokotović, H.K. Khalil, J. O'Reily. — London : Academic Press, 1986. — 371 p.
7. Sontag, E. Mathematical Control Theory: Deterministic Finite-Dimensional Systems / E. Sontag. — 2nd ed. — New York : Springer-Verlag, 1998. — 531 p.
8. Prasov, A. Tracking performance of a highgain observer in the presence of measurement noise / A. Prasov, H.K. Khalil // Int. J. Adapt. Control Signal Proc. — 2016. — V. 30, № 8–10. — P. 1228–1243.
9. Соболев, В.А. Сингулярные возмущения в линейно-квадратичной задаче оптимального управления / В.А. Соболев // Автоматика и телемеханика. — 1991. — № 2. — С. 53–64.
10. Воропаева, Н.В. Конструктивный метод расщепления нелинейных сингулярно возмущённых дифференциальных систем / Н.В. Воропаева, В.А. Соболев // Дифференц. уравнения. — 1995. — Т. 31, № 4. — С. 569–578.

SINGULARLY PERTURBED OPTIMAL TRACKING PROBLEM

V. A. Sobolev

Samara National Research University, Russia
e-mail: hsablem@gmal.com

We consider a singularly perturbed optimal tracking problem with a given etalon trajectory in the case of incomplete information about the state vector in the presence of external disturbances. To analyze the differential equations that arise when solving this problem, the decomposition method is used, which is based on the technique of integral manifolds of fast and slow motions.

Keywords: optimal tracking problem, singular perturbation, integral manifold, decomposition.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 21-11-00202).

REFERENCES

1. Vasil'eva, A.B. and Dmitriev, M.G., Singular perturbations in optimal control problems, *J. Math. Sci.*, 1986, vol. 34, pp. 1579–1629.
2. Dmitriev, M.G. and Kurina, G.A., Singular perturbations in control problems, *Autom. Remote Control*, 2006, vol. 67, pp. 1–43.
3. Naidu, D.S., Singular perturbations and time scales in control theory and applications: an overview, *Dynam. Continuous, Discrete and Impulsive Syst. Ser. B: Appl. & Algorithms*, 2002, vol. 9, pp. 233–278.
4. Sobolev, V.A., Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed system, *Syst. Control Lett.*, 1984, vol. 5, pp. 169–179.
5. Voropaeva, N.V. and Sobolev, V.A., *Geometricheskaya dekompozitsiya singulyarno vozmushchennykh sistem* (Geometric decomposition of singularly perturbed systems), Moscow: Fizmatlit, 2009.
6. Kokotović, P.V., Khalil, H.K., and O'Reily, J., *Singular Perturbation Methods in Control. Analysis and Design*, London: Academic Press, 1986.
7. Sontag, E., *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite-Dimensional Systems*, 2nd ed., New York: Springer-Verlag, 1998.
8. Prasov, A. and Khalil, H.K., Tracking performance of a highgain observer in the presence of measurement noise, *Int. J. Adapt. Control Signal Proc.*, 2016, vol. 30, no. 8–10, pp. 1228–1243.
9. Sobolev, V.A., Singular perturbations in a linear-quadratic problem of optimal control, *Autom. Remote Control*, 1991, vol. 52, pp. 180–189.
10. Voropaeva, N.V. and Sobolev, V.A., A constructive method for splitting nonlinear singularly perturbed differential systems, *Differ. Equat.*, 1995, vol. 31, no. 4, pp. 528–537.