ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 4, с. 492–499

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.923+517.925.44

ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА НА ВСЕЙ ОСИ

В. А. Садовничий[1], Я. Т. Султанаев[2], Н. Ф. Валеев[3]

[1]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*
[2]*Башкирский государственный педагогический университет имени М. Акмуллы, г. Уфа*
[2]*Московский центр фундаментальной и прикладной математики*
[3]*Институт математики с вычислительным центром*
Уфимского федерального исследовательского центра РАН
e-mail: [1]info@rector.msu.ru, [2]sultanaevyt@gmail.com, [3]valeevnf@yandex.ru

Поступила в редакцию 06.03.2024 г., после доработки 06.03.2024 г.; принята к публикации 22.03.2024 г.

Исследуется оптимизационная обратная спектральная задача с неполными спектральными данными для одномерного оператора Шрёдингера на всей оси: для заданного потенциала q_0 найти ближайшую к нему функцию $\hat{q}$ такую, чтобы первые m собственных значений оператора Шрёдингера с потенциалом $\hat{q}$ совпали с заданными значениями $\lambda_k^* \in \mathbb{R},\ k=\overline{1,m}$.

Ключевые слова: обратная спектральная задача, система нелинейных уравнений Шрёдингера, оператор Шрёдингера.

DOI: 10.31857/S0374064124040043, EDN: PCJHYI

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В гильбертовом пространстве $H = L^2(\mathbb{R})$ рассматривается самосопряжённый оператор Шрёдингера

$$\mathcal{L}[q]\psi := -\psi''(x) + q(x)\psi(x),$$

в котором потенциал $q(x)$ удовлетворяет условиям

$$q(x) = q_0(x) + h(x), \quad h \in L^2(\mathbb{R}), \quad q_0 \in C^{loc}(\mathbb{R}), \quad \lim_{|x|\to+\infty} q_0(x) = +\infty. \tag{1}$$

Пространство потенциалов, удовлетворяющих условиям (1), будем для краткости обозначать через W.

Известно, что спектр $\sigma(\mathcal{L}[q])$ оператора Шрёдингера при условиях (1) ограничен снизу и состоит из невырожденных собственных значений, зависимых от потенциала $q(x)$:

$$\lambda_1(q) < \lambda_2(q) < \ldots < \lambda_k(q) < \ldots, \quad \lim_{k\to+\infty} \lambda_k(q) = +\infty.$$

При этом $\lambda_k(q)$ можно определять из принципа минимакса Куранта–Фишера по формуле

$$\lambda_k(q) = \sup_{\phi_1,\ldots,\phi_{k-1}} \inf_{\psi\neq 0} \left\{ \frac{(L[q]\psi,\psi)}{(\psi,\psi)} : (\psi,\phi_j) = 0,\ \ j = \overline{1,k-1} \right\}, \tag{2}$$

здесь $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в пространстве $L^2(\mathbb{R})$.

Задача восстановления потенциала $q(x)$ по спектральным данным $S:=\{\lambda_k(q)\}_{k=1}^{+\infty}$ является классической задачей, и, начиная со знаменитых работ В. Амбарцумяна, Г. Борга, И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана, В.А. Марченко и др., ей уделялось большое внимание (см., например, обзорную часть в монографии [1]).

Рассматриваемая в статье задача является обратной спектральной задачей для дифференциального оператора с неполными спектральными данными, в которой используются лишь конечное число собственных значений. Отметим, что такого рода задачи естественным образом возникают в прикладных исследованиях (см., например, [2]).

Очевидно, что задача восстановления потенциала в операторе $\mathcal{L}[q]$ только по заданному конечному числу собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, будет иметь бесконечное множество решений $q(x)$. В этом случае для корректной постановки задачи, исходя из её содержательного смысла, можно наложить дополнительные условия на форму собственных функций, краевые условия и т.д.

В данной работе предполагаем, что кроме конечного числа собственных значений заранее известна некоторая информация о потенциале q, а именно, будем искать потенциал q, наиболее близкий по "форме" к функции $q_0(x)$.

Обсуждаемую задачу удобно сформулировать в геометрических терминах. В связи с этим *изоспектральным многообразием оператора* $\mathcal{L}[q]$ для спектральных данных

$$\sigma=\{(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\ldots,\lambda_m^*)\in\mathbb{R}^m:\ \lambda_1^*<\lambda_2^*<\ldots<\lambda_m^*\}$$

будем называть множество (многообразие) потенциалов $q\in W$, на которых первые m собственных значений оператора $\mathcal{L}[q]$ принимают заданные значения λ_k^*, $k=\overline{1,m}$, т.е.

$$ISM(\mathcal{L}[q],W;\lambda_1^*,\lambda_2^*,\ldots,\lambda_m^*):=\{q\in W|\lambda_k(q)=\lambda_k^*,\ \ k=\overline{1,m}\}.$$

Теперь сформулируем *оптимизационную обратную спектральную задачу* (ООСЗ) как поиск минимального расстояния от заданного $q_0\in W$ до изоспектрального многообразия.

Задача $\boldsymbol{\mathcal{P}^0}$. Пусть заданы операторы $\mathcal{L}[q]$, $q_0\in W$ и изоспектральное многообразие $ISM:=ISM(\mathcal{L}[q],W;\lambda_1^*,\lambda_2^*,\ldots,\lambda_m^*)$. Требуется найти вещественный потенциал $\hat q\in ISM$ такой, что

$$\inf_{q\in ISM}\|q-q_0\|=\|\hat q-q_0\|.$$

Одним из интересных свойств ООСЗ является её связь с нелинейными дифференциальными операторами (см. [3, 4]). В частности, задача $\mathcal{P}^0$, как будет показано ниже, связана с системой нелинейных уравнений Шрёдингера

$$-\psi_1''+\left(q_0(x)+\sum_{k=1}^m\sigma_k\psi_k^2\right)\psi_1=\lambda_1^*\psi_1,\quad \ldots,\quad -\psi_m''+\left(q_0(x)+\sum_{k=1}^m\sigma_k\psi_k^2\right)\psi_m=\lambda_m^*\psi_m, \tag{3}$$

где $\sigma_k\in\{-1,0,1\}$, $k=\overline{1,m}$.

Задача вида $\mathcal{P}^0$ для оператора Штурма–Лиувилля на отрезке была исследована в статье [4], в частности, выведена система (3). В работах [5, 6] исследованы экстремальные свойства собственных значений оператора Штурма–Лиувилля на отрезке и получены уравнения вида (3), названные там "критическими уравнениями". При этом вывод последних в этих работах существенно опирается на результаты статьи [7] о характере зависимости собственных значений и собственных функций оператора Штурма–Лиувилля от потенциала $q(x)$. Здесь же мы предлагаем несколько иную схему вывода системы уравнений (3), которую можно применить не только для оператора Шрёдингера на всей вещественной прямой (см. также

[8, 9]), но и распространить на ООСЗ для широких классов операторов эллиптического типа.

Основной целью данной работы является доказательство утверждения о существовании решений ООСЗ $\mathcal{P}^0$, а также описание связи между задачей $\mathcal{P}^0$ и системой нелинейных уравнений Шрёдингера (3).

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ООСЗ

Сформулируем и докажем основное утверждение о существовании решений ООСЗ.

Теорема 1. *Пусть даны потенциал $q_0 \in W$ и числа $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^* \in \mathbb{R}$ такие, что изоспектральное многообразие $ISM(\mathcal{L}[q]), W; \lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_m^*)$ не пусто. Тогда существует решение $\hat{q} \in W$ оптимизационной обратной спектральной задачи $\mathcal{P}^0$.*

Доказательство. Рассмотрим минимизационную задачу

$$\hat{P} = \min_{q \in ISM} \bigl\{ \|q_0 - q\|_{L^2}^2 \colon \lambda_k^* = \lambda_k(q),\ \ k = \overline{1, m} \bigr\}. \tag{4}$$

Поскольку многообразие ISM не пусто, то найдётся хотя бы одна функция $q(x)$ такая, что $q(x) - q_0(x) \in L^2$ и $\lambda_k^* = \lambda_k(q)$, $k = \overline{1, m}$. Обозначим через $\{q_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset ISM$ минимизирующую последовательность задачи (4), т.е. $\|q_0 - q_j\|_{L^2}^2 \to \hat{P}$ при $j \to +\infty$ и $\lambda_k^* = \lambda_k(q_j)$ для всех $k = \overline{1, m}$.

Из ограниченности множества $\{\|q_0 - q_j\|^2\}_{j=1}^{+\infty}$ следует, что последовательность $\{q_j - q_0\}_{j=1}^{+\infty}$ ограничена в пространстве $L^2(\mathbb{R})$. Тогда в силу теоремы Банаха–Алаоглу существует функция $\hat{h} \in L^2(\mathbb{R})$ такая, что $\|q_0 - q_j\|_{L^2}^2 \to \hat{P}$ и $q_j - q_0 \rightharpoonup \hat{h}$ слабо в $L^2(\mathbb{R})$ при $j \to +\infty$.

Обозначим через $\phi_k[q_j](x)$ k-ю собственную функцию оператора $\mathcal{L}[q_j]$ и запишем для неё интегральное уравнение

$$\phi_k[q_j](x) = \lambda_k^* \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(x, \xi) \phi_k[q_j](\xi)\, d\xi - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(x, \xi)(q_j(\xi) - q_0(\xi)) \phi_k[q_j](\xi)\, d\xi. \tag{5}$$

Оператор $(\mathcal{L}[q_0])^{-1}$ компактный, а функция Грина $G_0(x, \xi)$ этого оператора ограничена: $\max_{x, \xi \in R} \|G_0(x, \xi)\| \leqslant C < +\infty$. Следовательно, справедлива оценка

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |\phi_k[q_j](x)| \leqslant \lambda_k^* \|(\mathcal{L}[q_0])^{-1}\|\, \|\phi_k[q_j]\| + \max_{x, \xi \in \mathbb{R}} |G_0(x, \xi)|\, \|q_j(\xi) - q_0(\xi)\|\, \|\phi_k[q_j]\|. \tag{6}$$

Теперь из (6) и тождества

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \bigl(|\phi_k'(q_j)|^2 + q_j \phi_k^2(q_j)\bigr)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \bigl(|\phi_k'(q_j)|^2 + q_0 \phi_k^2(q_j) + (q_j - q_0)\phi_k^2(q_j)\bigr)\, dx = \lambda_k \int\limits_{\mathbb{R}} \phi_k^2(q_j)\, dx$$

получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \bigl(|\phi_k'(q_j)|^2 + q_0 \phi_k^2(q_j)\bigr)\, dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \bigl(\lambda_k \phi_k^2(q_j) + |q_j - q_0| \phi_k^2(q_j)\bigr)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_k \|\phi_k(q_j)\|^2 + \max_{x \in \mathbb{R}} |\phi_k(q_j)| \int\limits_{\mathbb{R}} |q_j - q_0| |\phi_k(q_j)|\, dx \leqslant \max_{x \in \mathbb{R}} |\phi_k(q_j)| \|q_j - q_0\|_{L^2} \|\phi_k(q_j)\|_{L^2}.$$

Таким образом, $\phi_k(q_j)$ для всех $k = \overline{1, m}$ и $j \in \mathbb{N}$ равномерно ограничены в $W_2^1(\mathbb{R})$ и существует подпоследовательность, обозначаемая далее $\phi_k(q_j)$, такая, что $\phi_k(q_j) \to \hat{\phi}_k$ при $j \to +\infty$ сильно в $C(\mathbb{R})$.

Представим интегральное уравнение (5) для собственных функций $\phi_k(q_j)$ в виде

$$\phi_k[q_j](x) = \lambda_k^* \int\limits_{\mathbb{R}} G_0(x,\xi)\phi_k[q_j](\xi)\,d\xi - \int\limits_{\mathbb{R}} G_0(x,\xi)(q_j(\xi)-q_0(\xi))(\phi_k[q_j](\xi)-\hat{\phi}_k(\xi))\,d\xi + \\ + \int\limits_{\mathbb{R}} G_0(x,\xi)(q_j(\xi)-q_0(\xi))\hat{\phi}_k(\xi)\,d\xi. \tag{7}$$

Учитывая, что $q_j - q_0 \to \hat{h}$ слабо в L^2 и $\phi_k(q_j) \to \hat{\phi}_k$ сильно в $C(\mathbb{R})$ сходятся при $j \to +\infty$, перейдём в (7) к пределу при $j \to +\infty$ и получим интегральное уравнение для $\hat{\phi}_k(x)$:

$$\hat{\phi}_k(x) = \lambda_k^* \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(x,\xi)\hat{\phi}_k(\xi)\,d\xi - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(x,\xi)\hat{h}(\xi)\hat{\phi}_k(\xi)\,d\xi, \tag{8}$$

которое, что очевидно, эквивалентно уравнению

$$\mathcal{L}[\hat{q}]\phi_k[\hat{q}] = \lambda_k^*\phi_k[\hat{q}], \quad \phi_k[\hat{q}] \in L^2(\mathbb{R}).$$

Из сильной сходимости подпоследовательности $\phi_k[q_j] \to \hat{\phi}_k[\hat{q}]$ в $C(\mathbb{R})$ и принципа минимакса (2) для $\lambda_k(q_j)$ вытекает, что

$$\lambda_1(\hat{q}) < \lambda_2(\hat{q}) < \ldots < \lambda_m(\hat{q}).$$

Следовательно, $\hat{q}$ является решением минимизационной задачи $\hat{P}$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть даны $q_0 \in W$ и $\lambda_1^* \in \mathbb{R}$ такие, что $\lambda_1^* < \lambda_1(q_0)$. Тогда оптимизационная обратная спектральная задача $\mathcal{P}^0$ имеет единственное решение $\hat{q} \in W$.*

Доказательство. Введём множество $M(\lambda) := \{q \in W : \lambda \leqslant \lambda_1(q)\}$. Заметим, что в силу соотношения

$$\lambda_1(q) = \inf_{\psi \neq 0}\left\{\frac{(L[Q]\psi,\psi)}{(\psi,\psi)}\right\}$$

множество $M(\lambda)$ является выпуклым. Рассмотрим следующую задачу о минимизации функционала расстояния:

$$\check{P} = \min\{\rho(q) := \|q_0 - q\|^2_{L^2} : q \in M(\lambda^*)\}.$$

Из теоремы 1 следует существование решения этой задачи. Выпуклость множества $M(\lambda_1^*)$ и строгая выпуклость функционала расстояния $\rho(q)$ обеспечивают единственность $\hat{q}$ и

$$\hat{q} \in \partial M(\lambda_1^*) = ISM(\mathcal{L}[q], W; \lambda_1^*).$$

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ООСЗ

Установим связь между ООСЗ $\mathcal{P}^0$ и системой нелинейных уравнений Шрёдингера (3).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и $\hat{q} \in W$ — решение ООСЗ $\mathcal{P}^0$. Тогда найдутся константы $\sigma_1, \ldots, \sigma_m \in \{-1, 0, 1\}$ такие, что система уравнений (3) имеет слабое решение $(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_m) \in W_2^1(\mathbb{R})$ и решение $\hat{q} \in W$ ООСЗ $\mathcal{P}^0$ представимо в виде*

$$\hat{q}(x) = q_0(x) - \sum_{k=1}^{m} \sigma_k \hat{u}_k^2(x). \tag{9}$$

Сначала докажем вспомогательное утверждение (подробное доказательство см. в [4]).

Лемма. *Пусть $q \in W$ и $\phi_i(x)$, $i = \overline{1,m}$, $m \geqslant 1$, — собственные функции оператора $\mathcal{L}[q]$. Тогда система функций $\{\phi_i^2(x)\}_{i=1}^m$ линейно независима в пространстве $L^2(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что собственные функции $\phi_i(x)$, $i=\overline{1,m}$, дважды непрерывно дифференцируемы на вещественной прямой.

Пусть утверждение верно для $m-1$, покажем его справедливость для m. Предположим, что

$$\text{п. в.} \quad \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \phi_i^2(x) = 0 \tag{10}$$

для некоторых α_1, α_2, ..., α_m таких, что $\sum_{i=1}^m |\alpha_i| \neq 0$. Последовательно продифференцировав равенство (10), получим

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_i \phi_i(x)\phi_i'(x) = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \phi_i \phi_i'' + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (\phi_i')^2 = 0. \tag{11}$$

Теперь из соотношений $\mathcal{L}[q]\phi_i \equiv -\phi_i'' + q\phi_i = \lambda_i \phi_i$, $i=\overline{1,m}$, и (10) следует, что

$$\text{п. в.} \quad \sum_{j=1}^{m} \alpha_i ((\phi_i'(x))^2 - \lambda_i \phi_i^2(x)) = 0. \tag{12}$$

Очевидно, что

$$((\phi_i')^2)' = 2(q-\lambda_i)\phi_i\phi_i', \quad i=\overline{1,m},$$

тогда из (12) имеем равенство

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_i (2(q-\lambda_i)\phi_i\phi_i' - 2\lambda_i\phi_i\phi_i') = 0,$$

из которого, учитывая (11), получаем $\sum_{i=1}^m \alpha_i\lambda_i\phi_i(x)\phi_i'(x) = 0$. Вследствие $\lim_{x\to\infty}\phi_i(x) = 0$, $i=\overline{1,m}$, находим $\sum_{i=1}^m \alpha_i\lambda_i\phi_i^2(x) = 0$. Но тогда из (10) вытекает, что $\sum_{i=1}^{m-1}\gamma_i\phi_i^2(x) = 0$ для некоторого ненулевого набора констант γ_1, ..., γ_{m-1}. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\hat{q}$ — решение ООСЗ $\mathcal{P}^0$. Введём в рассмотрение $(m+1)$-параметрическое семейство функций

$$\delta(x,t,\vec{p}) = \delta_0(x)t + p_1\phi_1^2[\hat{q}](x) + \ldots + p_m\phi_m^2[\hat{q}](x), \tag{13}$$

где $\delta_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\vec{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, $\phi_j^2[\hat{q}](x)$, $j=\overline{1,m}$, — собственные функции оператора $\mathcal{L}[q]$. Тогда семейство операторов $\mathcal{L}(t,\vec{p}) := \mathcal{L}[\hat{q}(x) + \delta(x,t,\vec{p})]$ в окрестности точки $t=0$, $\vec{p}=0$ является аналитическим семейством операторов переменных t, $\vec{p}$. Следовательно, собственные функции $\{\phi_j(x)\}_{j=1}^m$ и собственные значения $\{\lambda_k\}_{j=1}^m$ оператора $\mathcal{L}(t,\vec{p})$ будут аналитическими функциями переменных t, p_1, ..., p_m в некоторой окрестности точки $t=0$, $\vec{p}=0$. Теперь потребуем, чтобы

$$\hat{q}(x) + \delta(x,t,\vec{p}) \in ISM(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*).$$

Это условие равносильно системе уравнений для аналитических в некоторой окрестности точки $t=0$, $\vec{p}=0$ функций

$$\lambda_k(t,\vec{p}) := \lambda_k[\hat{q}(x) + \delta(x,t,\vec{p})] = \lambda_k^*, \quad k=\overline{1,m}. \tag{14}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial\lambda_k(t,\vec{p})}{\partial p_j} = (\phi_j^2, \phi_k^2)_{L^2}.$$

В силу сформулированной леммы система функций $\{\phi_k^2\}_{k=1}^m$ линейно независима и якобиан

$$J=\left(\frac{\partial\lambda_k(t,\vec{p})}{\partial p_j}\right)_{k,j=1}^m=\left(\phi_j^2,\phi_k^2\right)_{k,j=1}^m$$

системы (14) невырожден. Следовательно, эта система однозначно разрешима относительно переменных $p_1,\ \ldots,\ p_m$ в некоторой окрестности точки $t=0,\ p_1=\ldots=p_m=0$. Более того, для любой функции $\delta_0(x)$ в (14) функции $p_k=p_k(t),\ k=\overline{1,m}$, будут аналитическими по t в некоторой окрестности точки $t=0$, причём

$$\lambda_k(t,p_1(t),\ldots,p_m(t))\equiv\lambda_k^*,\quad k=\overline{1,m}. \tag{15}$$

Теперь в (14) потребуем, чтобы

$$(\delta_0,\phi_k^2)_{L^2}=0\quad\text{для всех }\ k=\overline{1,m}. \tag{16}$$

Раскладывая левые части уравнений (15) по степеням t в окрестности $t=0$, получаем

$$\left.\frac{dp_k(t)}{dt}\right|_{t=0}=0\quad\text{для всех }\ k=\overline{1,m}.$$

Таким образом, для любого $\delta_0(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющего условиям (16), существует функция $\delta(x,t)$ такая, что

$$\hat{q}(x)+\delta(x,t)\in ISM(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_m^*),\quad \delta(x,t)=\delta_0(x)t+O(t^2). \tag{17}$$

Поскольку в точке $\hat{q}(x)\in ISM(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_m^*)$ достигается минимум функционала

$$\hat{P}=\min_{q\in L^2}\big\{\|q_0-q\|^2\colon\ \lambda_k^*=\lambda_k(q),\ \ k=\overline{1,m}\big\},$$

то для любой функции вида $\delta(x,t)=\delta_0(x)t+O(t^2)$, $\delta_0(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условиям (16) и (17), справедливо неравенство

$$\|\hat{q}+\delta(x,t)-q_0\|_{L^2}^2-\|\hat{q}-q_0\|_{L^2}^2=2(\hat{q}-q_0,\delta(x,t))_{L^2}+(\delta(x,t),\delta(x,t))_{L^2}\geqslant 0.$$

Поскольку $\delta(x,t)=\delta_0(x)t+O(t^2)$, то, очевидно, $(\hat{q}-q_0,\delta(x,t))_{L^2}=0$ для любых $\delta_0(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условиям (16). Отсюда вытекает, что $\hat{q}-q_0$ принадлежит линейной оболочке $L(\phi_1^2,\ldots,\phi_m^2)$, т.е.

$$\hat{q}(x)=q_0(x)-\sum_{k=1}^m\alpha_k\hat{\phi}_k^2(x).$$

Положив $\hat{u}_k(x)=\hat{\phi}_k(x)/\sqrt{|\alpha_k|}$, завершим доказательство существования решений системы (3) и требуемого представления оптимального потенциала $\hat{q}(x)$.

4. ПРИМЕР

Пусть заданы потенциал $q_0(x)=ax^2$ $(a>0)$ и спектральные данные $\lambda_1^*<\lambda_2^*<\ldots<\lambda_m^*$. Тогда изоспектральное многообразие $ISM(\mathcal{L}[q]),W;\lambda_1^*,\lambda_2^*,\ldots,\lambda_m^*)$ не пусто и все условия теорем 1 и 2 выполнены. Следовательно, существует оптимальный потенциал $\hat{q}\in ISM$, определяемый формулой вида (9), а собственные функции $\psi_k[\hat{q}](x)$, $k=\overline{1,m}$, являются решениями системы связанных нелинейных квантовых гармонических осцилляторов

$$-\psi_1''+\left(ax^2+\sum_{k=1}^m\alpha_k\psi_k^2\right)\psi_1=\lambda_1^*\psi_1,\quad\ldots,\quad -\psi_m''+\left(ax^2+\sum_{k=1}^m\alpha_k\psi_k^2\right)\psi_m=\lambda_m^*\psi_m.$$

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование Я.Т. Султанаева выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00580).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юрко, В.А. Обратные спектральные задачи и их приложения / В.А. Юрко. — Саратов : Изд-во Саратов. пед. ин-та, 2001. — 499 p.
2. Chu, M. Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Applications / M. Chu, G.H. Golub. — Oxford : Oxford University Press, 2005. — 387 p.
3. Ilyasov, Y.Sh. On nonlinear boundary value problem corresponding to N-dimensional inverse spectral problem / Y.Sh. Ilyasov, N.F. Valeev // J. Differ. Equat. — 2019. — V. 266, № 8. — P. 4533–4543.
4. Ilyasov, Ya. Recovery of the nearest potential field from the m observed eigenvalues / Ya. Ilyasov, N. Valeev // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2021. — V. 426, № 5. — Art. 132985.
5. Tian, Y. On the polynomial integrability of the critical systems for optimal eigenvalue gaps / Y. Tian, Q. Wei, and M. Zhang // J. Math. Phys. — 2023. — V. 64. — Art. 092701.
6. Zhao, M. Optimal inverse problems of potentials for two given eigenvalues of Sturm–Liouville problems / M. Zhao, J. Qi // Proc. of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics. Published online. — 2024. — 24 p.
7. Wei, Q. Extremal values of eigenvalues of Sturm–Liouville operators with potentials in L_1 balls / Q. Wei, G. Meng, M. Zhang // J. Differ. Equat. — 2009. — V. 247, № 2. — P. 364–400.
8. Садовничий, В.А. Оптимизационная спектральная задача для оператора Штурма–Лиувилля в пространстве вектор-функций / В.А. Садовничий, Я.Т. Султанаев, Н.Ф. Валеев // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2023. — Т. 513. — С. 93–98.
9. Садовничий, В.А. Оптимизационная обратная спектральная задача для векторного оператора Штурма–Лиувилля / В.А. Садовничий, Я.Т. Султанаев, Н.Ф. Валеев // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 12. — С. 1707–1711.

OPTIMIZATION INVERSE SPECTRAL PROBLEM FOR THE ONE-DIMENSIONAL SCHRÖDINGER OPERATOR ON THE ENTIRE AXIS

V. A. Sadovnichii[1], Ya. T. Sultanaev[2], N. F. Valeev[3]

[1]*Lomonosov Moscow State University, Russia*
[2]*Akmulla Bashkir State Pedagogical University, Ufa, Russia*
[2]*Moscow Center for Applied and Fundamental Mathematics, Russia*
[3]*Institute of Mathematics with Computing Centre —*
Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of RAS, Russia
e-mail: [1]info@rector.msu.ru, [2]sultanaevyt@gmail.com, [3]valeevnf@yandex.ru

We investigate the statement of the optimization inverse spectral problem with incomplete spectral data for the one-dimensional Schrödinger operator on the entire axis: for a given potential q_0, find the closest function $\hat{q}$ such that the first m eigenvalues of the Schrodinger operator with potential $\hat{q}$ coincided with the given values $\lambda_k^* \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, m}$.

Keywords: inverse spectral problem, nonlinear Schrödinger equation, Schrödinger operator.

FUNDING

Ya.T. Sultanaev's research was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00580)

REFERENCES

1. Yurko, V.A., *Inverse Spectral Problems and their Applications*, Saratov: PI Press, 2001.
2. Chu, M. and Golub, G.H., *Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Applications*, Oxford: Oxford University Press, 2005.
3. Ilyasov, Y.Sh. and Valeev, N.F., On nonlinear boundary value problem corresponding to N-dimensional inverse spectral problem, *J. Differ. Equat.*, 2019, vol. 266, no. 8, pp. 4533–4543.
4. Ilyasov, Ya. and Valeev, N., Recovery of the nearest potential field from the m observed eigenvalues, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2021, vol. 426, no. 5, Art. 132985.
5. Tian, Y., Wei, Q., and Zhang, M., On the polynomial integrability of the critical systems for optimal eigenvalue gaps, *J. Math. Phys.*, 2023, vol. 64, Art. 092701.
6. Zhao, M. and Qi, J., Optimal inverse problems of potentials for two given eigenvalues of Sturm–Liouville problems, *Proc. of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, Published online, 2024, pp. 1–24.
7. Wei, Q., Meng, G., and Zhang, M., Extremal values of eigenvalues of Sturm–Liouville operators with potentials in L_1 balls, *J. Differ. Equat.*, 2009, vol. 247, no. 2, pp. 364–400.
8. Sadovnichii, V.A., Sultanaev, Y.T., and Valeev, N.F., Optimization spectral problem for the Sturm–Liouville operator in a vector function space, *Dokl. Math.*, 2023, vol. 108, pp. 406–410.
9. Sadovnichii, V.A., Sultanaev, Y.T., and Valeev, N.F. Optimization inverse spectral problem for a vector Sturm–Liouville operator, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, pp. 1694–1699.