

УДК 519.63

БАЛАНСНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЁТА ГЕМОДИНАМИКИ В СОСУДЕ С ПОДВИЖНЫМИ СТЕНКАМИ

В. М. Головизнин¹, В. В. Конопляников²,
П. А. Майоров³, С. И. Мухин⁴

¹⁻⁴Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

^{1,3,4}Московский центр фундаментальной и прикладной математики

e-mail: ¹gol@ibrae.ac.ru, ²vaskonopl@mail.ru, ³maiorov.peter@gmail.com, ⁴vmmus@cs.msu.ru

Поступила в редакцию 01.11.2023 г., после доработки 01.11.2023 г.; принята к публикации 13.11.2023 г.

Построен численный алгоритм расчёта течения крови в объёмном сосуде. Выведена система дифференциальных уравнений, описывающих динамику жидкости в отдельном сосуде с подвижными стенками в цилиндрических координатах в предположении осевой симметрии в смешанных эйлерово-лагранжевых координатах. Для полученной системы уравнений построена балансно-характеристическая схема по методике КАБАРЕ. Приведены результаты расчётов тестовых задач.

Ключевые слова: гемодинамика, смешанные эйлерово-лагранжевые переменные, слабо-сжимаемая жидкость, гиперболическое уравнение, балансно-характеристическая схема.

DOI: 10.31857/S0374064124030104, EDN: PHINYP

ВВЕДЕНИЕ

Существует много практически интересных медицинских и физиологических проблем, исследования которых требуют аккуратных и точных расчётов многомерных течений в кровеносных сосудах. Ещё более важным и сложным является расчёт течения крови в выделенном сосуде как в элементе общей системы кровообращения с учётом взаимовлияния общей и локальной гемодинамики. Такая постановка задачи, с одной стороны, является вполне естественной, а с другой — её реализация требует решения по крайней мере трёх сложнейших задач. Первая — это создание эффективного алгоритма численного решения многомерных уравнений, описывающих ток жидкости в объёмном сосуде. Как правило, соответствующий алгоритм базируется на решении многомерных уравнений Навье–Стокса и их модификаций в области различной степени сложности. Вторая задача — создание моделей и численных алгоритмов для воспроизведения кровотока в замкнутой системе кровообращения. В настоящее время глобальный кровоток в основном описывается на базе квазиодномерного приближения. И третья задача — объединение многомерной модели кровотока в выделенном сосуде с квазиодномерной моделью кровообращения во всём организме. Особенности и возможные решения второй задачи (построения квазиодномерных моделей глобального кровотока и методов их решения) приведены в ряде работ (см., например [1–4]). Описание системы сосудов на базе квазиодномерных моделей позволяет предложить вариант решения третьей задачи — совмещение с двух- и трехмерными моделями. Базовые подходы к решению этой проблемы содержатся, например, в работах [5–7].

Первая задача, на первый взгляд, мало отличается от традиционной задачи — численного решения многомерных уравнений Навье–Стокса в области заданного вида. Количество

работ на эту тему очень велико, а их обзор не является целью данной статьи. Но численный алгоритм расчёта гемодинамики отдельного сосуда (как элемента системы) должен удовлетворять ряду дополнительных специфических требований в диапазоне от разумной вычислительной сложности и робастности до консервативности, бездиссипативности и воспроизведения свойств характерных течений. Обзор особенностей гемодинамических расчётов и большое количество литературы на эту тему можно найти, например, в [8, 9].

Построению эффективного численного алгоритма расчёта течения крови в объёмном сосуде посвящена и данная работа. На первом этапе рассмотрим течение слабосжимаемой жидкости в отдельном сосуде с подвижными стенками в цилиндрических координатах в предположении осевой симметрии. Полагаем, что осесимметричная подвижность стенок может быть как заданной, так и обуславливаться внутрисосудистым давлением и эластическими свойствами стенок сосуда, и тем самым заранее неизвестна. Построение уравнений для описания такого течения удобно проводить в смешанных эйлерово-лагранжевых (СЭЛ) координатах и в общем случае это не является проблемой. Но при численном решении этой задачи возникает необходимость обеспечить корректность подвижной сетки и вычислить якобиан, участвующий в СЭЛ формулировке задачи. Оба процесса являются трудоёмкими. Для того чтобы избежать указанных сложностей в численном решении, в данной работе предлагается заранее учитывать при построении СЭЛ уравнений определённый тип подвижности дискретной сетки и тип вычислительного алгоритма — сеточно-характеристический метод [10]. Учёт суммарного численного алгоритма при получении СЭЛ позволяет значительно упростить построение вычислительного алгоритма, повысить надёжность и эффективность предлагаемой разностной схемы.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1.1. УРАВНЕНИЯ В ПЕРЕМЕННЫХ ЭЙЛЕРА

Рассмотрим осесимметричные течения в трёхмерном пространстве в цилиндрической системе координат (x, r, ϕ) и произвольную односвязную область с гладкой границей в трёхмерном пространстве. Будем считать, что ротор поля скоростей вдоль оси X в среде $\vec{W} = (W_x, W_r, W_\phi) = (u, v, w)$ равен нулю, т.е. $w = 0$.

Положим, что среда является баротропной, т.е. давление P в ней зависит только от её плотности ρ , $P = P(\rho)$.

Пусть G — элемент области, ∂G — её граница. Уравнения баланса массы и импульса в интегральной форме имеют следующий вид [11]:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial G} \rho(\vec{W} \cdot \vec{n}) ds &= \iiint_G \operatorname{div}(\rho \vec{W}) r dr d\phi dx = \iiint_G \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho v)}{\partial r} \right] r dr d\phi dx, \\ \left\{ \begin{aligned} \iiint_G \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} r dr d\phi dx &= - \iint_{\partial G} \rho u (\vec{W} \cdot \vec{n}) ds - \iint_{\partial G} P n_x ds, \\ \iiint_G \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} r dr d\phi dx &= - \iint_{\partial G} \rho v (\vec{W} \cdot \vec{n}) ds - \iint_{\partial G} P n_r ds. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Уравнения неразрывности и движения в дифференциальном виде записываются как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho v)}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho uv)}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho v^2)}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial r} = 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения совместно с уравнением состояния баротропной среды $P = P(\rho)$ составляют замкнутую систему уравнений в эйлеровых координатах. Следует отметить, что в неё не входит уравнение баланса энергии, поскольку мы полагаем, что давление не зависит от температуры.

Обычно задачи взаимодействия жидкости и подвижной структуры (в данном случае подвижных или эластичных стенок) задаются в разных системах координат. Параметры течения жидкости заданы в эйлеровой системе координат: скорость и давление жидкости в пространственных точках $(x, r, \phi) \in G$, где G — физическая область, занимаемая жидкостью. Упругие структуры обычно задаются в лагранжевой системе координат: наблюдается смещение u' материальных точек $(x', r', \phi') \in G(t)$ в отсчётной области $G(t)$. Сформулируем задачу взаимодействия жидкости и подвижной границы в общем виде.

1.2. УРАВНЕНИЯ БАРОТРОПНОЙ СРЕДЫ В СМЕШАННЫХ ЭЙЛЕРОВО-ЛАГРАНЖЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Объединим задачу взаимодействия жидкости и стенок сосуда за счёт СЭЛ переменных.

В трёхмерном пространстве рассмотрим произвольную односвязную область $G(t)$ с подвижной гладкой границей $\partial G(t)$. Будем считать, что в каждый момент времени известны деформации $\vec{p} = (x, r, \phi)$ и скорости деформации этой границы $\dot{\vec{p}} = (\dot{x}, \dot{r}, \dot{\phi})$. В рамках данной работы ограничимся рассмотрением осесимметрических течений, т.е. $\dot{\phi} = 0$. Функции \vec{p} и $\dot{\vec{p}}$, описывающие границу $\partial G(t)$, полагаем заданными во всех точках пространства (x, r, ϕ) .

В указанных условиях рассмотрим процедуру нахождения уравнения неразрывности в СЭЛ переменных. Изменение массы $M_{G(t)}$, заключённой в объёме $G(t)$, определим как

$$\frac{\partial M_{G(t)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{G(t)} \rho r \, dr \, d\phi \, dx. \quad (1)$$

Область интегрирования зависит от времени, и для того чтобы занести производную по времени под знак интеграла отобразим подвижную область $G(t)$, заданную в пространстве (x, r, ϕ) , на неподвижную область Ω в опорных переменных (α, β, γ) .

Будем считать, что это отображение не вырождено и его якобиан J всюду больше нуля:

$$J = \frac{\partial(x, r, \phi)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial x}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial r}{\partial \alpha} & \frac{\partial r}{\partial \beta} & \frac{\partial r}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} & \frac{\partial \phi}{\partial \beta} & \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \end{vmatrix} > 0.$$

Перейдём в интеграле (1) к опорным переменным (к области Ω , не зависящей от времени), внесём производную под знак интеграла и вернёмся к исходным переменным, записав подынтегральное выражение удобным для нас образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{G(t)}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{G(t)} \rho r \, dr \, d\phi \, dx = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho r J \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma = \iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho r J)}{\partial t} \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma = \\ &= \iiint_{G(t)} \frac{1}{J} \frac{\partial(\rho r J)}{\partial t} \, dr \, d\phi \, dx = \iiint_{G(t)} \frac{1}{r J} \frac{\partial(\rho r J)}{\partial t} r \, dr \, d\phi \, dx. \end{aligned}$$

Изменение массы происходит за счёт потока вещества через границу, и закон сохранения массы имеет вид

$$\begin{aligned} \iiint_{G(t)} \frac{1}{rJ} \frac{\partial(\rho r J)}{\partial t} r dr d\phi dx &= - \iint_{\partial G(t)} \rho((\vec{W} - \dot{\vec{p}}) \cdot \vec{n}) ds = - \iiint_{G(t)} \operatorname{div}(\rho(\vec{W} - \dot{\vec{p}})) r dr d\phi dx = \\ &= - \iiint_{G(t)} \left[\frac{\partial(\rho(u - \dot{x}))}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho(v - \dot{r}))}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho(w - \dot{\phi}))}{\partial \phi} \right] r dr d\phi dx = \\ &= - \iiint_{G(t)} \left[\frac{\partial(\rho(u - \dot{x}))}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho(v - \dot{r}))}{\partial r} \right] r dr d\phi dx. \end{aligned}$$

Здесь $\vec{W} - \dot{\vec{p}}$ — скорость среды относительно движущейся границы; учтено, что $\dot{\phi} = 0$.

Тогда уравнение неразрывности в интегральной форме запишется как

$$\iiint_{G(t)} \left[\frac{1}{rJ} \frac{\partial(\rho r J)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho(u - \dot{x}))}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho(v - \dot{r}))}{\partial r} \right] r dr d\phi dx = 0,$$

и из него следует уравнение в дифференциальной форме

$$\frac{1}{rJ} \frac{\partial(\rho r J)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho(u - \dot{x}))}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho(v - \dot{r}))}{\partial r} = 0. \quad (2)$$

В уравнение (2) помимо скоростей $\dot{\vec{p}} = (\dot{x}, \dot{r}, \dot{\phi} = 0)$, которые будем считать известными, входит якобиан преобразования координат J , вычисление которого обычно вызывает сложности. Способ его нахождения будет определён в дальнейшем.

Интегральная и дифференциальная формы закона сохранения импульса (уравнение движения) в СЭЛ переменных находятся аналогичным образом. Интегральная форма (изменение компонент импульса происходит за счёт конвективного переноса и импульса сил давления) записывается как

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{G(t)} \rho \vec{W} r dr d\phi dx &= \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{G(t)} \rho u r dr d\phi dx = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho u r J d\alpha d\beta d\gamma \\ \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{G(t)} \rho v r dr d\phi dx = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho v r J d\alpha d\beta d\gamma \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho u r J)}{\partial t} d\alpha d\beta d\gamma = \iiint_{G(t)} \frac{1}{rJ} \frac{\partial(\rho u r J)}{\partial t} r dr d\phi dx & \begin{cases} - \iint_{\partial G(t)} \rho u ((\vec{W} - \dot{\vec{p}}) \cdot \vec{n}) ds - \iint_{\partial G(t)} P n_x ds \\ - \iint_{\partial G(t)} \rho v ((\vec{W} - \dot{\vec{p}}) \cdot \vec{n}) ds - \iint_{\partial G(t)} P n_r ds. \end{cases} \\ \iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho v r J)}{\partial t} d\alpha d\beta d\gamma = \iiint_{G(t)} \frac{1}{rJ} \frac{\partial(\rho v r J)}{\partial t} r dr d\phi dx & \end{cases} \end{aligned}$$

Ей соответствует дифференциальная форма

$$\begin{aligned} \frac{1}{rJ} \frac{\partial(\rho u r J)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u(u - \dot{x}))}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho u(v - \dot{r}))}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial x} &= 0, \\ \frac{1}{rJ} \frac{\partial(\rho v r J)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v(u - \dot{x}))}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho v(v - \dot{r}))}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial r} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Совместно уравнение неразрывности (2) и уравнения (3) составляют замкнутую систему уравнений динамики баротропной жидкости в СЭЛ переменных для осесимметрического течения в сосуде с подвижными стенками.

Важно отметить, что в принятой нами постановке изменение расчётной области со временем происходит только за счёт движения стенок сосуда в радиальном направлении. Таким образом, $\dot{x}(x, r, t) = 0$, что будет дальше учитываться по мере необходимости. Кроме того, поскольку кровь рассматривается как ньютоновская жидкость, то необходимо учесть влияние вязкости и в правой части динамических уравнений (3) должны присутствовать диссипативные члены.

Окончательно рассматриваемая нами система уравнений примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{rJ} \frac{\partial(\rho rJ)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho(u-\dot{x}))}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho(v-\dot{r}))}{\partial r} &= 0, \\ \frac{1}{rJ} \frac{\partial(\rho rJ)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u(u-\dot{x}))}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho u(v-\dot{r}))}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial x} &= [\vec{\Delta}(\nu \vec{W})]_x = \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right], \\ \frac{1}{rJ} \frac{\partial(\rho rJ)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v(u-\dot{x}))}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho v(v-\dot{r}))}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial r} &= [\vec{\Delta}(\nu \vec{W})]_r = \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right], \\ P &= P(\rho). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\vec{\Delta}$ — векторный оператор Лапласа, а ν — коэффициент вязкости среды.

1.3. ПРИВЕДЕНИЕ К ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМУ ВИДУ

Запишем систему уравнений (2), (3) в так называемой “простой” форме. В уравнении неразрывности

$$\frac{1}{rJ} \frac{\partial(\rho rJ)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho(u-\dot{x}))}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho(v-\dot{r}))}{\partial r} = 0$$

преобразуем первый член:

$$\frac{1}{rJ} \frac{\partial(\rho rJ)}{\partial t} = \rho \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r)}{\partial t} = \rho \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho \dot{r}}{r}. \quad (5)$$

Первое слагаемое в (5) можно представить как

$$\begin{aligned} \rho \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial t} &= \rho \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial(x, r, \phi)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = \rho \frac{\partial(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial(x, r, \phi)} \left[\frac{\partial(\dot{x}, r, \phi)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, \dot{r}, \phi)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, r, \dot{\phi})}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \right] = \\ &= \rho \left[\frac{\partial(\dot{x}, r, \phi)}{\partial(x, r, \phi)} + \frac{\partial(x, \dot{r}, \phi)}{\partial(x, r, \phi)} + \frac{\partial(x, r, \dot{\phi})}{\partial(x, r, \phi)} \right] = \rho \left[\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь преобразуем дивергентные члены: компонента вдоль оси X имеет вид

$$\frac{\partial(\rho(u-\dot{x}))}{\partial x} = (u-\dot{x}) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial(u-\dot{x})}{\partial x}, \quad (7)$$

вдоль оси R —

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho(v-\dot{r}))}{\partial r} = \rho \frac{\partial(v-\dot{r})}{\partial r} + (v-\dot{r}) \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho)}{\partial r} = \rho \frac{\partial(v-\dot{r})}{\partial r} + (v-\dot{r}) \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\rho(v-\dot{r})}{r}. \quad (8)$$

Подставив в (5) формулы (6)–(8), придём к соотношению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (u-\dot{x}) \frac{\partial \rho}{\partial x} + (v-\dot{r}) \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right] = 0. \quad (9)$$

Первое уравнение системы (3) представим в виде

$$\left(u \frac{1}{rJ} \frac{\partial(\rho rJ)}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \left(u \frac{\partial(\rho(u-\dot{x}))}{\partial x} + \rho(u-\dot{x}) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(u \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho(v-\dot{r}))}{\partial r} + \rho(v-\dot{r}) \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} = 0.$$

Соберём в одну скобку все члены, пропорциональные скорости u :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho(u - \dot{x}) \frac{\partial u}{\partial x} + \rho(v - \dot{r}) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial x} + u \left[\frac{1}{rJ} \frac{\partial(\rho r J)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho(u - \dot{x}))}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho(v - \dot{r}))}{\partial r} \right] = 0.$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой левую часть уравнения неразрывности, которая равна нулю. В результате остаётся

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho(u - \dot{x}) \frac{\partial u}{\partial x} + \rho(v - \dot{r}) \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \rho} \right) \frac{\rho}{x} = 0. \quad (10)$$

Второе уравнение системы (3) аналогичным образом преобразуется к виду

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho(u - \dot{x}) \frac{\partial v}{\partial x} + \rho(v - \dot{r}) \frac{\partial v}{\partial r} + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \rho} \right) \frac{\rho}{r} = 0. \quad (11)$$

Уравнения (9)–(11) составляют систему исходных уравнений в “простой” форме, которую удобно записать в векторно-матричном виде:

$$\frac{\partial \vec{z}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \vec{z}}{\partial x} + \mathbf{A}_r \frac{\partial \vec{z}}{\partial r} = \vec{h}, \quad (12)$$

$$\vec{z} = (\rho, u, v)^T, \quad \vec{h} = \left(-\frac{\rho v}{r}, 0, 0 \right)^T,$$

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} (u - \dot{x}) & \rho & 0 \\ (c^2/\rho) & (u - \dot{x}) & 0 \\ 0 & 0 & (u - \dot{x}) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_r = \begin{pmatrix} (v - \dot{r}) & 0 & \rho \\ 0 & (v - \dot{r}) & 0 \\ (c^2/\rho) & 0 & (v - \dot{r}) \end{pmatrix}; \quad c^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho}.$$

Собственные числа этих матриц определяются по формулам

$$\begin{aligned} \lambda_1^x &= (u - \dot{x}) + c, & \lambda_2^x &= (u - \dot{x}) - c, & \lambda_3^x &= (u - \dot{x}), \\ \lambda_1^r &= (v - \dot{r}) + c, & \lambda_2^r &= (v - \dot{r}) - c, & \lambda_3^r &= (v - \dot{r}), \end{aligned}$$

левые собственные векторы — по формулам

$$\begin{aligned} \vec{l}_1^x &= (c/\rho, 1, 0), & \vec{l}_2^x &= (-c/\rho, 1, 0), & \vec{l}_3^x &= (0, 0, 1), \\ \vec{l}_1^r &= (c/\rho, 0, 1), & \vec{l}_2^r &= (-c/\rho, 0, 1), & \vec{l}_3^r &= (0, 1, 0). \end{aligned}$$

Представим систему (12) в виде

$$\frac{\partial \vec{z}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \vec{z}}{\partial x} = \vec{G}_x = \vec{h} - \mathbf{A}_r \frac{\partial \vec{z}}{\partial r}.$$

Система характеристических уравнений в направлении оси X :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + [(u - \dot{x}) + c] \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) &= F_1^x = \vec{l}_1^x \cdot \left(\vec{h} - \mathbf{A}_r \frac{\partial \vec{z}}{\partial r} \right), \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + [(u - \dot{x}) - c] \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) &= F_2^x = \vec{l}_2^x \cdot \left(\vec{h} - \mathbf{A}_r \frac{\partial \vec{z}}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (u - \dot{x}) \frac{\partial v}{\partial x} &= F_3^x = \vec{l}_3^x \cdot \left(\vec{h} - \mathbf{A}_r \frac{\partial \vec{z}}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, что конкретный вид правых частей характеристических уравнений нам в дальнейшем не понадобится.

Аналогично получаем систему характеристических уравнений вдоль направления R :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) + [(v - \dot{r}) + c] \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r}\right) &= F_1^r = \vec{l}_1^r \cdot \left(\vec{h} - \mathbf{A}_x \frac{\partial \vec{z}}{\partial x}\right), \\ \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) + [(v - \dot{r}) - c] \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r}\right) &= F_2^r = \vec{l}_2^r \cdot \left(\vec{h} - \mathbf{A}_x \frac{\partial \vec{z}}{\partial x}\right), \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (v - \dot{r}) \frac{\partial u}{\partial r} &= F_3^r = \vec{l}_3^r \cdot \left(\vec{h} - \mathbf{A}_x \frac{\partial \vec{z}}{\partial x}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема, на которую мы будем опираться при построении вычислительного алгоритма.

Теорема. *Вдоль произвольного направления, задаваемого единичным вектором \vec{n} , характеристическая форма системы уравнений в СЭЛ переменных (2), (3) в терминах инвариантов Римана будет иметь следующий вид:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{I}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \vec{I}}{\partial \vec{n}} &= \vec{F}, \tag{15} \\ \vec{I} &= (\vec{W} \cdot \vec{n} + c \cdot \ln \rho, \vec{W} \cdot \vec{n} - c \cdot \ln \rho, \vec{W} \cdot \vec{\tau})^T, \\ \Lambda^x &= \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots) = \text{diag}((\vec{W} - \dot{\vec{p}}) \cdot \vec{n} + c, (\vec{W} - \dot{\vec{p}}) \cdot \vec{n} - c, (\vec{W} - \dot{\vec{p}}) \cdot \vec{n}), \\ \vec{F} &= [F^x, F^r] \cdot \vec{n}, \quad \|\vec{\tau}\| = 1, \quad \vec{\tau} \cdot \vec{n} = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

где \vec{I} — вектор инвариантов Римана, λ_m — собственные значения по соответствующим направлениям, \vec{F} — вектор правых частей.

2. БАЛАНСНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ СХЕМА

Введём в пространстве (x, r) фиксированную по x и подвижную по r пространственную сетку $\omega_h = \{(x_i, r_{i,j}) : i = \overline{0, N_x}, j = \overline{0, N_r}\}$ и неравномерную сетку по времени

$$\omega_\tau = \left\{ t_n = \sum_{i=0}^{n-1} \tau_i, \quad n \in \{0 \dots K\} \right\}.$$

Кроме слоёв по времени с целыми индексами t_n будем рассматривать также промежуточные — $t_{n+1/2} = t_n + \tau_n/2$.

В центрах ячеек пространственной сетки зададим полный набор консервативных переменных $\vec{\varphi} = \{\rho, u, v\}$. Центры ячеек пронумеруем полуцелыми нижними индексами. Дополнительно в центрах граней сетки зададим второй полный набор переменных (потокowych) $\vec{\Psi} = \{\rho, u, v\}$, которые, в зависимости от того на какой грани — вертикальной или горизонтальной — определены, имеют один целый и один полуцелый индекс. В случае если какая-либо величина (в основном геометрические параметры) относится к узлу сетки, она будет снабжена двумя целыми индексами.

Консервативные переменные будем рассматривать как на целых, так и на промежуточных слоях по времени $t_n, t_{n+1/2}$ и t_{n+1} , а потоковые — только на целых слоях по t_n и t_{n+1} .

Для сокращения записи введём локальные обозначения. На рис. 1 приведена одна ячейка сетки ($\Psi_T, \Psi_B, \Psi_L, \Psi_R$ — потоковые величины на верхней, нижней, левой и правой гра-

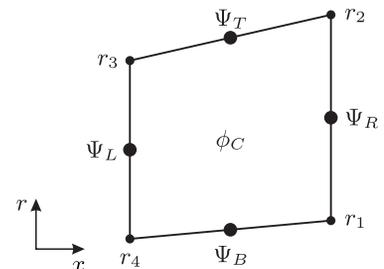


Рис. 1. Локальные обозначения переменных в расчётной ячейке.

нях ячейки соответственно, ϕ_C — консервативная переменная). Особо отметим, что расчётная ячейка представляет собой не трапецию, а тор, получающийся путём вращения этой трапеции вокруг оси X .

Построение схемы будем проводить по методике КАБАРЕ [12]. Численная схема состоит из трёх фаз: фаза 1 и фаза 3 — балансные, в этих фазах вычисляются консервативные переменные $\vec{\phi}$ на промежуточном слое по времени $t_{n+1/2}$ и на новом слое по времени t_{n+1} соответственно; фаза 2 — характеристическая, определяющая алгоритм вычисления потоковых переменных $\vec{\Psi}^{n+1}$.

2.1. БАЛАНСНЫЕ ФАЗЫ СХЕМЫ

Для аппроксимации пространственных производных в системе уравнений (4) воспользуемся методом конечного объёма. Рассмотрим однородные уравнения (2), (3) без вязких слагаемых, учтём их позже. Проинтегрируем каждое из этих уравнений по расчётной ячейке:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Delta G(t)} \left(\frac{1}{rJ} \frac{\partial(\rho r J)}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho(v-\dot{r}))}{\partial r} \right] \right) r dr d\phi dx &= 0, \\ \iiint_{\Delta G(t)} \left(\frac{1}{rJ} \frac{\partial(\rho u r J)}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho u(v-\dot{r}))}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial x} \right] \right) r dr d\phi dx &= 0, \\ \iiint_{\Delta G(t)} \left(\frac{1}{rJ} \frac{\partial(\rho v r J)}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho v u)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho v(v-\dot{r}))}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial r} \right] \right) r dr d\phi dx &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Рассмотрим вначале член, содержащий производную по времени в первом уравнении:

$$\iiint_{\Delta G(t)} \frac{1}{rJ} \frac{\partial(\rho r J)}{\partial t} r dr d\phi dx = \iiint_{\Delta \Omega} \frac{\partial(\rho r J)}{\partial t} d\alpha d\beta d\gamma = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Delta \Omega} \rho r J d\alpha d\beta d\gamma = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Delta G(t)} \rho r dr d\phi dx = \frac{\partial}{\partial t} \rho^* V,$$

где V — объём расчётной ячейки, ρ^* — плотность в некоторой точке расчётной ячейки. При выводе этой цепочки равенств использовалась теорема о среднем.

Для двух оставшихся уравнений аналогично получаем

$$\iiint_{\Delta G(t)} \frac{1}{rJ} \frac{\partial(\rho u r J)}{\partial t} r dr d\phi dx = \frac{\partial}{\partial t} (\rho u)^* V, \quad \iiint_{\Delta G(t)} \frac{1}{rJ} \frac{\partial(\rho v r J)}{\partial t} r dr d\phi dx = \frac{\partial}{\partial t} (\rho v)^* V.$$

Интегралы от квадратных скобок в уравнениях системы (17) преобразуем по формуле Остроградского–Гаусса в поверхностные интегралы:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Delta G(t)} \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho(v-\dot{r}))}{\partial r} \right] r dr d\phi dx &= \iint_{\partial \Delta G(t)} \rho ((\vec{W} - \dot{\vec{p}}) \cdot \vec{n}) dS, \\ \iiint_{\Delta G(t)} \left[\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho u(v-\dot{r}))}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial x} \right] r dr d\phi dx &= \iint_{\partial \Delta G(t)} ([\rho u(\vec{W} - \dot{\vec{p}}) + \vec{P}_x] \cdot \vec{n}) dS, \\ \iiint_{\Delta G(t)} \left[\frac{\partial(\rho v u)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho v(v-\dot{r}))}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial r} \right] r dr d\phi dx &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iiint_{\Delta G(t)} \left[\frac{\partial(\rho v u)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho v (v - \dot{r}))}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial r P}{\partial r} - \frac{P}{r} \right] r dr d\phi dx = \\
&= \oint_{\partial \Delta G(t)} ([\rho v (\vec{W} - \dot{\vec{p}}) + \vec{P}_r] \cdot \vec{n}) dS - \iiint_{\Delta G(t)} \frac{P}{r} r dr d\phi dx, \tag{18}
\end{aligned}$$

где $\vec{P}_x = (P, 0, 0)$, а $\vec{P}_r = (0, P, 0)$. Здесь в третьем уравнении системы учитываем тождество

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rP)}{\partial r} - \frac{P}{r}.$$

Поверхностные интегралы аппроксимируем по формуле средних прямоугольников. Для уравнения неразрывности имеем

$$\begin{aligned}
&\oint_{\partial \Delta G(t)} \rho ((\vec{W} - \dot{\vec{p}}) \cdot \vec{n}) dS \approx \\
&\approx (\rho u)_R \pi (r_2^2 - r_1^2) + (\rho u)_T \pi (r_3^2 - r_2^2) + (\rho u)_L \pi (r_4^2 - r_3^2) + (\rho u)_B \pi (r_1^2 - r_4^2) + \\
&\quad + [\rho(v - \dot{r})]_T \pi (r_3 + r_2)(x_2 - x_3) + [\rho(v - \dot{r})]_B \pi (r_4 + r_1)(x_4 - x_1), \tag{19}
\end{aligned}$$

для второго уравнения в (18)

$$\begin{aligned}
&\oint_{\partial \Delta G(t)} ([\rho u (\vec{W} - \dot{\vec{p}}) + \vec{P}_x] \cdot \vec{n}) dS \approx \\
&\approx (\rho u^2 + P)_R \pi (r_2^2 - r_1^2) + (\rho u^2 + P)_T \pi (r_3^2 - r_2^2) + (\rho u^2 + P)_L \pi (r_4^2 - r_3^2) + (\rho u^2 + P)_B \pi (r_1^2 - r_4^2) + \\
&\quad + [\rho u (v - \dot{r})]_T \pi (r_3 + r_2)(x_2 - x_3) + [\rho u (v - \dot{r})]_B \pi (r_4 + r_1)(x_4 - x_1), \tag{20}
\end{aligned}$$

для третьего —

$$\begin{aligned}
&\oint_{\partial \Delta G(t)} ([\rho v (\vec{W} - \dot{\vec{p}}) + \vec{P}_r] \cdot \vec{n}) dS \approx \\
&\approx (\rho v u)_R \pi (r_2^2 - r_1^2) + (\rho v u)_T \pi (r_3^2 - r_2^2) + (\rho v u)_L \pi (r_4^2 - r_3^2) + (\rho v u)_B \pi (r_1^2 - r_4^2) + \\
&\quad + [\rho v (v - \dot{r}) + P]_T \pi (r_3 + r_2)(x_2 - x_3) + [\rho v (v - \dot{r}) + P]_B \pi (r_4 + r_1)(x_4 - x_1); \\
&\quad \iiint_{\Delta G(t)} \frac{P}{r} r dr d\phi dx \approx \left(\frac{P}{r} \right)^* V. \tag{21}
\end{aligned}$$

Все потоковые сеточные величины определены в серединах граней расчётных ячеек, поэтому формула прямоугольников является естественной.

В сеточные уравнения (19)–(21) входят скорости перемещения узлов расчётной сетки в вертикальном направлении. В нашем случае они определяются изменением формы внешней границы области, которая считается заданной:

$$(R_T)_i^n = (f_1)_i^n.$$

На текущем слое по времени узлы вдоль вертикальных отрезков распределены равномерно:

$$r_{i,j}^n = \Delta r_i^n (j - 1), \quad j = \overline{1, N_r}; \quad \Delta r_i^n = \frac{(f_1)_i^n}{N_r - 1}.$$

Потребуем равномерное распределение и на слое t^{n+1} :

$$r_{i,j}^{n+1} = \Delta r_i^{n+1}(j-1), \quad j = \overline{1, N_r}; \quad \Delta r_i^{n+1} = \frac{(f1)_i^{n+1}}{N_r - 1}.$$

Уравнение движения узла аппроксимируем со вторым порядком:

$$\frac{r_{i,j}^{n+1} - r_{i,j}^n}{\tau} = \frac{1}{2} \cdot (\dot{r}_{i,j}^{n+1} + \dot{r}_{i,j}^n) \implies \dot{r}_{i,j}^{n+1} = 2 \cdot \frac{r_{i,j}^{n+1} - r_{i,j}^n}{\tau} - \dot{r}_{i,j}^n.$$

Начальное значение скорости узлов определим как

$$\frac{r_{i,j}^2 - r_{i,j}^1}{\tau} = \dot{r}_{i,j}^1.$$

Скорости перемещения узлов сетки \dot{r} в вертикальном направлении относятся, естественно, к узлам. Положим скорости движения середин граней равными полусумме скоростей, образующих эту грань узлов.

Собирая аппроксимации пространственных производных (19)–(21) в линейные разностные (сеточные) операторы L_ρ , $L_{\rho u}$, $L_{\rho v}$, получаем систему дифференциальных по времени и разностных по пространству уравнений, которую в операторном виде можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}[\rho^*V] + L_\rho(\rho, u, v, \dot{r}) &= 0, & \frac{\partial}{\partial t}[(\rho u)^*V] + L_{\rho u}(\rho, u, v, \dot{r}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}[(\rho v)^*V] + L_{\rho v}(\rho, u, v, \dot{r}) - \left(\frac{P}{r}\right)^* V &= 0. \end{aligned}$$

Эти операторы в общем случае аппроксимируют дифференциальную задачу с первым порядком по пространственным переменным. Можно показать, что если сеточное отображение обладает свойством локальной гладкости, то порядок аппроксимации увеличивается до второго.

Для аппроксимации по времени используется метод «предиктор–корректор». Для учёта вязких членов системы (4) воспользуемся методом расщепления по физическим процессам. Балансные фазы рассмотрим в два этапа: на первом этапе учтём конвективные члены, на втором – вязкие. На первом этапе фазы 1 вычисляются промежуточные значения консервативных переменных на промежуточном шаге по времени:

$$\begin{aligned} \frac{(\rho V)_c^{n+1/2} - (\rho V)_c^n}{\tau/2} + L_\rho(\rho^n, u^n, v^n, \dot{r}^n) &= 0, & \frac{(\rho \hat{u} V)_c^{n+1/2} - (\rho u V)_c^n}{\tau/2} + L_{\rho u}(\rho^n, u^n, v^n, \dot{r}^n) &= 0, \\ \frac{(\rho \hat{v} V)_c^{n+1/2} - (\rho v V)_c^n}{\tau/2} + L_{\rho v}(\rho^n, u^n, v^n, \dot{r}^n) - \left(\frac{P}{r} V\right)_c^n &= 0. \end{aligned}$$

На втором этапе фазы 1 учитывается вязкость:

$$\begin{aligned} \frac{u_c^{n+1/2} - \hat{u}_c^{n+1/2}}{\tau/2} &= \nu \left[\frac{\hat{u}_{cR}^{n+1/2} - 2\hat{u}_c^{n+1/2} + \hat{u}_{cL}^{n+1/2}}{h_x} + \frac{\hat{u}_{cT}^{n+1/2} - 2\hat{u}_c^{n+1/2} + \hat{u}_{cB}^{n+1/2}}{h_r} + \frac{\hat{u}_{cT}^{n+1/2} - \hat{u}_{cB}^{n+1/2}}{r_c 2h_r} \right], \\ \frac{v_c^{n+1/2} - \hat{v}_c^{n+1/2}}{\tau/2} &= \nu \left[\frac{\hat{v}_{cR}^{n+1/2} - 2\hat{v}_c^{n+1/2} + \hat{v}_{cL}^{n+1/2}}{h_x} + \right. \\ &\left. + \frac{\hat{v}_{cT}^{n+1/2} - 2\hat{v}_c^{n+1/2} + \hat{v}_{cB}^{n+1/2}}{h_r} + \frac{\hat{v}_{cT}^{n+1/2} - \hat{v}_{cB}^{n+1/2}}{r_c 2h_r} - \frac{\hat{v}_c^{n+1/2}}{r_c^2} \right]. \end{aligned} \tag{22}$$

Здесь индексами cL , cR , cT , cB обозначаются консервативные величины из ячеек слева, справа, сверху, снизу относительно рассматриваемой ячейки соответственно.

Третью фазу — корректор — также рассмотрим в два этапа. Первый этап:

$$\begin{aligned} \frac{(\rho V)_c^{n+1} - (\rho V)_c^{n+1/2}}{\tau/2} + L_\rho(\rho^{n+1}, u^{n+1}, v^{n+1}, \dot{r}^{n+1}) &= 0, \\ \frac{(\rho \hat{u} V)_c^{n+1} - (\rho \hat{u} V)_c^{n+1/2}}{\tau/2} + L_{\rho u}(\rho^{n+1}, u^{n+1}, v^{n+1}, \dot{r}^{n+1}) &= 0, \\ \frac{(\rho \hat{v} V)_c^{n+1} - (\rho \hat{v} V)_c^{n+1/2}}{\tau/2} + L_{\rho v}(\rho^{n+1}, u^{n+1}, v^{n+1}, \dot{r}^{n+1}) - \left(\frac{P}{r} V\right)_c^{n+1} &= 0. \end{aligned}$$

На втором этапе фазы 3 тоже учитываем вязкость (по формулам, аналогичным (22)).

2.2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФАЗА 2

Для вычисления потоковых переменных на новом слое по времени рассмотрим характеристическую форму уравнений (15). Присутствие логарифма в инвариантах Римана (16) порождает существенную нелинейность, но при условии слабосжимаемости можно рассмотреть приближение локальных инвариантов Римана в каждой пространственно-временной расчётной ячейке:

$$\vec{I} = \left(\vec{W} \cdot \vec{n} + \left\langle \frac{c}{\rho} \right\rangle \cdot \rho, \vec{W} \cdot \vec{n} - \left\langle \frac{c}{\rho} \right\rangle \cdot \rho, \vec{W} \cdot \vec{\tau} \right)^T, \quad (23)$$

где угловые скобки означают, что данные значения берутся из центра ячейки.

Характеристическая фаза схемы КАБАРЕ представляет собой линейную экстраполяцию локальных инвариантов Римана (23) по направлениям, определяемым собственными значениями системы (16) на полуцелом слое. Так, для направления OX , $\vec{n} = (1, 0)^T$, экстраполяция имеет следующий вид:

$$(I_m^x)_{i,j+1/2}^{n+1} = \begin{cases} 2(I_m^x)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - (I_m^x)_{i+1,j+1/2}^n, & \text{если } \tilde{\lambda}_m > 0, \\ 2(I_m^x)_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} - (I_m^x)_{i-1,j+1/2}^n, & \text{если } \tilde{\lambda}_m < 0, \quad m = \overline{1,3}, \\ 0.5[(I_m^x)_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} + (I_m^x)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}], & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\tilde{\lambda}_m = 0.5[(\lambda_m^x)_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} + (\lambda_m^x)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}].$$

Аналогичная процедура экстраполяции для нахождения локальных инвариантов Римана на новом временном слое проводится для направления OR , $\vec{n} = (0, 1)^T$.

Для сохранения монотонности к вычисленным значениям инвариантов на новом слое по времени применяется стандартная для схемы КАБАРЕ процедура монотонизации на основе принципа максимума [13].

По найденным локальным инвариантам Римана на новом слое по времени вычисляются новые потоковые значения $\vec{\Psi}^{n+1}$ на каждой грани расчётной сетки.

3. ТЕСТОВЫЕ РАСЧЁТЫ

Ниже приведём результаты расчётов стандартных тестов.

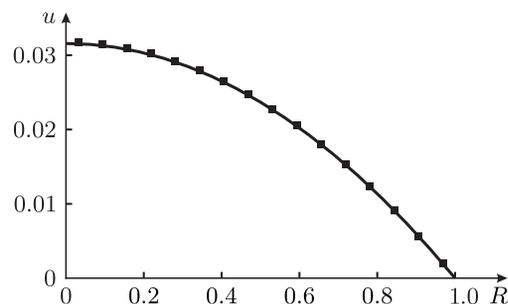
3.1. КЛАССИЧЕСКИЙ ТЕСТ О ТЕЧЕНИИ ПУАЗЕЙЛЯ

Рассмотрим установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе $\{(x, r): 0 \leq x \leq L = 4\pi, 0 \leq r \leq R_0 = 1\}$ с жёсткими неподвижными стенками при по-

стоянной разности давлений P_L и P_R на левом и правом концах трубы соответственно. Формирующееся течение называется *течением Пуазейля* и имеет следующий профиль скорости:

$$u_p(x, r) = \frac{P_R - P_L}{4\nu L} (R^2 - r^2). \tag{24}$$

Считаем среду вязкой ($\nu = 0.63$) и слабосжимаемой с уравнением состояния $P(\rho) = c^2(\rho - \rho_0)$, где $c = 10$ и $\rho_0 = 1$. Расчёты выполнены при следующих начальных и граничных условиях:



$$\begin{aligned} u(x, r, t_0) &= 0, & v(x, r, t_0) &= 0, & \rho(x, r, t_0) &= \rho_0; \\ \rho(0, r, t) &= \rho_L = 1.0, & \rho(4\pi, r, t) &= \rho_R = 0.99; \\ v(x, 0, t) &= 0, & v(x, R_0, t) &= 0, \\ u(x, R_0, t) &= 0. \end{aligned}$$

Рис. 2. Графики зависимости скорости от радиальной координаты.

На рис. 2 приведены зависимости компоненты скорости u от радиальной координаты для аналитического решения (24) (кривая) и для численного решения (точки). Расчёт проводился на сетке $(N_x \times N_r) = (200 \times 16)$. Для построения графика использовались данные о скоростях, взятые в центральном сечении трубы. Максимальная погрешность $\max |u_h - u_p| = 1.6 \cdot 10^{-4}$, т.е. имеет место практически точное совпадение.

пользовались данные о скоростях, взятые в центральном сечении трубы. Максимальная погрешность $\max |u_h - u_p| = 1.6 \cdot 10^{-4}$, т.е. имеет место практически точное совпадение.

3.2. КАНАЛ С ПОДВИЖНЫМИ СТЕНКАМИ

Покажем работоспособность вычислительного алгоритма, собственно, при подвижных границах. Рассмотрим течение жидкости в вытянутом вдоль оси $x \in (0, 4\pi)$ цилиндре с симметрично изменяющимися относительно оси стенками. Динамика стенок цилиндра описывается выражением

$$R(x, t) = R_0 + \Delta R \sin(u_0 t - x), \quad u_0 = 0.1, \quad R_0 = 1, \quad \Delta R = 0.1.$$

Это соответствует бегущей волне с фазовой скоростью, равной величине u_0 , и с периодом $T_0 = 2\pi/u_0 = 20\pi$.

Как и прежде, будем считать жидкость невязкой и слабосжимаемой. Уравнение состояния для неё запишем как $P(\rho) = c^2(\rho - \rho_0)$, где $c = 10$ и $\rho_0 = 1$. В начальный момент времени жидкость находилась в состоянии покоя (нулевые скорости) и $\rho(x, r, t_0) = \rho_0 = 1$. На боковых сечениях цилиндра задавались периодические условия для скорости и плотности, на стенках цилиндра — условие прилипания.

Под действием движущейся поверхности в области образуется периодическое течение жидкости с периодом T_0 .

В расчётах использовались подвижные с равномерным распределением по вертикали узлы

$$r_{i,j}^n = \Delta r_i^n (j - 1), \quad j = \overline{1, N_r}; \quad \Delta r_i^n = \frac{R(x_i, t_n)}{N_r - 1};$$

$$\dot{r}_{ij}^n = \lambda \frac{\partial R}{\partial t} \Big|_{(x_i, t_n)}, \quad \lambda = \frac{r_{ij}^n}{R(x_i, t_n)} \in [0, 1].$$

Таким образом, узлы с индексами $j = N_r$ находились на поверхности R и двигались со скоростью, равной скорости поверхности.

На рис. 3 приведено векторное поле скоростей в расчёте на сетке $(N_x \times N_r) = (200 \times 16)$ на момент времени t , равный половине периода колебания поверхности T_0 .

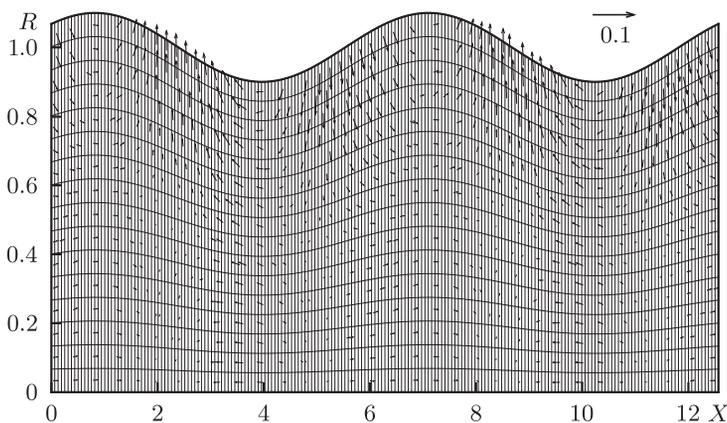


Рис. 3. Поле скоростей при $t = T_0/2$

Расчёты подтвердили консервативность схемы: полная масса жидкости $M = \sum_{ij} V_{i,j} \rho_{ij}$ сохраняется с машинной точностью. На рис. 4 представлены графики полных импульсов по оси OX (p_u) и в радиальном направлении OR (p_v), $t^* = t/T_0$. Они подтверждают установление T_0 -периодического течения в канале и малую диссипативность построенной схемы.

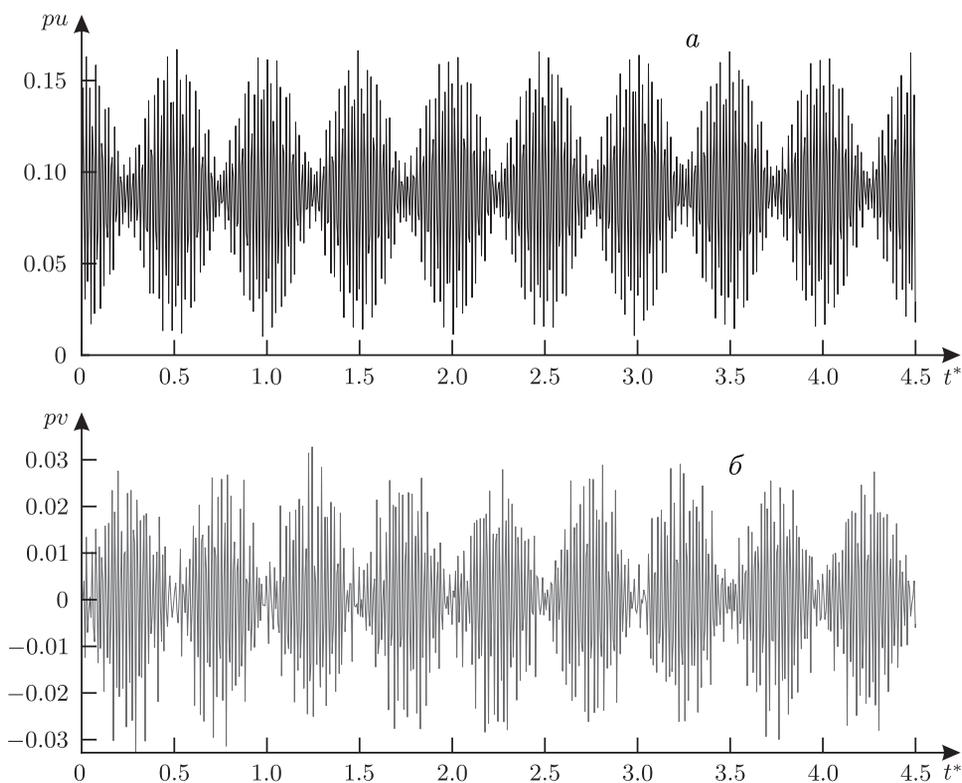


Рис. 4. Графики полного импульса: a — по оси OX , b — по оси OR .

Представленные результаты показывают работоспособность предложенного алгоритма. Полное описание валидации и верификации построенной схемы не входит в задачи данной работы и является предметом отдельных публикаций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе выведена система дифференциальных уравнений, описывающих течение крови как вязкой слабосжимаемой жидкости в отдельном сосуде с подвижными стенками в цилиндрических координатах в предположении осевой симметрии в смешанных эйлерово-лагранжевых координатах. Уравнения в СЭЛ переменных построены с учётом указанной особенности рассматриваемого течения и в привязке к характеру дискретной сетки для предполагаемого вычислительного алгоритма. Для полученной системы уравнений построена балансно-характеристическая схема на основе методики КАБАРЕ.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sherwin, S.J. One-dimensional modelling of a vascular network in space-time variables / S.J. Sherwin, V. Franke, J. Peiro, K. Parker // *J. of Engineering Math.* — 2003. — V. 47. — P. 217–250.
2. Formaggia, L. One-dimensional models for blood flow in arteries / L. Formaggia, D. Lamponi, A. Quarteroni // *J. of Engineering Math.* — 2003. — V. 47. — P. 251–276.
3. Симаков, С.С. Современные методы математического моделирования кровотока с помощью осредненных моделей / С.С. Симаков // *Компьютер. исследования и моделирование.* — 2018. — Т. 10, № 5. — С. 581–604.
4. Вычислительный эксперимент в гемодинамике / А.Я. Буничева, С.И. Мухин, Н.В. Соснин, А.П. Фаворский // *Дифференц. уравнения.* — 2004. — Т. 40, № 7. — С. 920–935.
5. Multiscale modelling of the circulatory system: a preliminary analysis / L. Formaggia, F. Nobile, A. Quarteroni, A. Veneziani // *Comput. Visual. Sci.* — 1999. — V. 2. — P. 75–83.
6. On the coupling of 3D and ID Navier–Stokes equations for flow problems in compliant vessels / L. Formaggia, J.-F. Gerbeau, F. Nobile, A. Quarteroni // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* — 2001. — V. 191, № 6–7. — P. 561–582.
7. Dobroserdova, T. Multiscale coupling of compliant and rigid walls blood flow models / T. Dobroserdova, M. Olshanskii, S. Simakov // *Int. J. for Numerical Methods in Fluids.* — 2016. — V. 82, № 12. — P. 799–817.
8. Quarteroni, A. Computational vascular fluid dynamics: problems, models and methods / A. Quarteroni, M. Tuveri, A. Veneziani // *Comput. Visualisation Sci.* — 2000. — V. 2. — P. 163–197.
9. Personalized Computational Hemodynamics: Models, Methods, and Applications for Vascular Surgery and Antitumor Therapy / Y. Vassilevski, M. Olshanskii, S. Simakov [et al.]. — Academic Press, 2020. — 280 p.
10. A finite element method for the Navier–Stokes equations in moving domain with application to hemodynamics of the left ventricle / A. Danilov, A. Lozovskiy, M. Olshanskii, Yu. Vassilevski // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* — 2017. — V. 32, № 4. — P. 225–236.
11. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — М. : Наука, 1986. — 736 с.
12. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов / В.М. Головизнин, М.А. Зайцев, С.А. Карабасов, И.А. Короткин. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2013. — 467 с.
13. Головизнин, В.М. Нелинейная коррекция схемы Кабаре / В.М. Головизнин, С.А. Карабасов // *Мат. моделирование.* — 1998. — Т. 10, № 12. — С. 107–123.

**BALANCE-CHARACTERISTIC METHOD
FOR CALCULATING HEMODYNAMICS OF A SINGLE VESSEL**

V. M. Goloviznin¹, V. V. Konopliankov², P. A. Maiorov³, S. I. Mukhin⁴

¹⁻⁴Lomonosov Moscow State University, Russia

^{1,3,4}Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Russia

e-mail: ¹gol@ibrae.ac.ru, ²vaskonopl@mail.ru, ³maiorov.peter@gmail.com, ⁴vmmus@cs.msu.ru

The paper is devoted to the construction of a numerical algorithm for calculating the blood flow in a volume vessel. The derivation of the system of differential equations describing the dynamics of fluid in a single vessel with moving walls in cylindrical coordinates assuming axial symmetry in arbitrary eulerian-lagrangian variables is given. Balance-characteristic scheme based on the CABARET methodology is constructed for the obtained system of equations. The results of calculations of test problems are given.

Keywords: hemodynamics, eulerian–lagrangian coordinates, weakly compressible fluid, hyperbolic equation, conservative-characteristic schemes.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation of the program for the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics within the framework agreement no. 075-15-2022-284.

REFERENCES

1. Sherwin, S.J., Franke, V., Peiro, J., and Parker, K., One-dimensional modelling of a vascular network in space-time variables, *J. Engineer. Math.*, 2003, vol. 47, pp. 217–250.
2. Formaggia, L., Lamponi, D., and Quarteroni, A., One-dimensional models for blood flow in arteries, *J. Engineer. Math.*, 2003, vol. 47, pp. 251–276.
3. Simakov, S.S., Modern methods of mathematical modeling of blood flow using reduced order methods, *Comp. Research Model.*, 2018, vol. 10, no. 5, pp. 581–604.
4. Bunicheva, A.Ya., Mukhin, S.I., Sosnin, N.V., and Favorskii, A.P., Numerical experiment in hemodynamics, *Differ. Equat.*, 2004, vol. 40, no. 7, pp. 984–999.
5. Formaggia, L., Nobile, F., Quarteroni, A., and Veneziani, A., Multiscale modelling of the circulatory system: a preliminary analysis, *Comput. Visual. Sci.*, 1999, vol. 2, pp. 75–83.
6. Formaggia, L., Gerbeau, J.-F., Nobile, F., and Quarteroni, A., On the coupling of 3D and 1D Navier–Stokes equations for flow problems in compliant vessels, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2001, vol. 191, no. 6–7, pp. 561–582.
7. Dobroserdova, T., Olshanskii, M., and Simakov S., Multiscale coupling of compliant and rigid walls blood flow models, *Int. J. Numer. Methods in Fluids*, 2016, vol. 82, no. 12, pp. 799–817.
8. Quarteroni, A., Tuveri, M., and Veneziani, A., Computational vascular fluid dynamics: problems, models and methods, *Comput. Visualisation Sci.*, 2000, vol. 2, pp. 163–197.
9. Vassilevski, Y., Olshanskii, M., Simakov, S., Kolobov, A., and Danilov, A., *Personalized Computational Hemodynamics: Models, Methods, and Applications for Vascular Surgery and Antitumor Therapy*, Academic Press, 2020.
10. Danilov, A., Lozovskiy, A., Olshanskii, M., and Vassilevski, Yu., A finite element method for the Navier–Stokes equations in moving domain with application to hemodynamics of the left ventricle, *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 2017, vol. 32, no. 4, pp. 225–236.
11. Landau, L.D. and Lifshitz, E.M., *Teoreticheskaya fizika. T. VI. Gidrodinamika* (Course of Theoretical Physics. Vol. VI. Hydrodynamics), Moscow: Nauka, 1986.
12. Goloviznin, V.M., Zaitsev, M.A., Karabasov, S.A., and Korotkin, I.A., *Novyye algoritmy vychislitel'noy gidrodinamiki dlya mnogoprotsessornykh vychislitel'nykh kompleksov* (New CFD Algorithms for Multiprocessor Computer Systems), Moscow: MSU Press, 2013.
13. Goloviznin, V.M. and Karabasov, S.A., Nonlinear correction of Cabaret scheme, *Mat. Model.* 1998, vol. 10, no. 12, pp. 107–123.