ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 3, с. 386–398

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

СУБЛОРЕНЦЕВЫ ЭКСТРЕМАЛИ, ЗАДАННЫЕ АНТИНОРМОЙ

А. В. Подобряев

Институт программных систем имени А.К. Айламазяна РАН, г. Переславль-Залесский
e-mail: alex@alex.botik.ru

Поступила в редакцию 30.06.2023 г., после доработки 20.12.2023 г.; принята к публикации 26.12.2023 г.

Выведена гамильтонова система для экстремалей в левоинвариантной сублоренцевой задаче на группе Ли в предположении, что сублоренцева структура определяется произвольным замкнутым выпуклым острым конусом и ассоциированной с ним непрерывной антинормой в соответствующей алгебре Ли. Получены условия, при которых нормальные экстремальные траектории сохраняют свой каузальный тип. Кроме того, показано, что касательные векторы анормальных экстремальных траекторий либо светоподобны, либо являются касательными векторами некоторых субримановых анормальных экстремальных траекторий, которые определяются распределением плоскостей, порождённым конусом.

Ключевые слова: лоренцево многообразие, сублоренцево многообразие, антинорма, экстремаль, экстремальная траектория, каузальный тип.

DOI: 10.31857/S0374064124030089, EDN: PLBQDM

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время вырос интерес к исследованию левоинвариантных лоренцевых и сублоренцевых задач с точки зрения геометрической теории управления. Отметим прежде всего пионерские в этом направлении работы М. Гроховского [1, 2], посвящённые сублоренцевой геометрии группы Гейзенберга. Эти исследования были продолжены Ю.Л. Сачковым и Е.Ф. Сачковой [3, 4] (см. также статью [5] о левоинвариантной сублоренцевой геометрии на пространстве анти-де Ситтера и работы [6, 7] о левоинвариантной лоренцевой геометрии на плоскости Лобачевского).

Для описания сублоренцевых экстремальных траекторий в данной статье использован гамильтонов формализм принципа максимума Понтрягина. Трудность заключается в том, что сублоренцев функционал длины содержит квадратный корень, а оптимизационная задача заключается в максимизации этого функционала, в отличие от субримановой задачи, цель которой — минимизация соответствующего функционала длины. Именно поэтому стандартная для субримановой геометрии [8, гл. 3] замена функционала длины на функционал энергии (см., например, [9, § 3.3.1]) в сублоренцевом случае не работает. Напомним, что при этом используется неравенство Коши–Буняковского–Шварца

$$l(g)^2 = \left(\int_0^{t_1} \sqrt{q(\dot g(t))}\,dt\right)^2 \leqslant t_1 \int_0^{t_1} q(\dot g(t))\,dt = 2t_1 J(g),$$

где $g\colon [0,t_1]\to G$ — допустимая траектория, длина касательного вектора которой определяется квадратичной формой q; $l(g)$ и $J(g)$ — длина и энергия кривой g соответственно. Важно отметить, что равенство в этом соотношении достигается только на кривых постоянной скорости.

Тем не менее оказывается, что “энергия” может быть использована в сублоренцевом случае для описания нормальных экстремалей. Кроме того, мы рассматриваем более общую постановку задачи, в которой левоинвариантная сублоренцева структура задана с помощью произвольного замкнутого выпуклого острого конуса в алгебре Ли и ассоциированной с ним непрерывной антинормы. С помощью принципа максимума Понтрягина выводится соответствующая гамильтонова система. Оказывается, что при некоторых дополнительных условиях нормальная экстремальная траектория сохраняет свой каузальный тип (т.е. её касательный вектор всегда остается либо времениподобным, либо светоподобным). В отличие от римановой геометрии анормальные экстремальные траектории всегда возникают в лоренцевой геометрии и совпадают со светоподобными экстремальными траекториями и тем самым нестрого анормальны. В сублоренцевой геометрии, вообще говоря, анормальные экстремальные траектории могут иметь как светоподобные касательные векторы, так и касательные векторы, совпадающие с касательными векторами некоторых из субримановых анормальных траекторий, определяемых распределением плоскостей, которое линейно порождено конусом. Если это распределение контактно, то анормальные экстремальные траектории светоподобны и нестрого анормальны.

В контексте настоящей работы следует упомянуть статью Л.В. Локуциевского [10], в которой разработана замечательная техника выпуклой тригонометрии, позволяющая параметризовать решения гамильтоновых систем для экстремалей в субфинслеровом случае с двумерным распределением [11, 12], а также для некоторых распределений бо́льших размерностей [13]. Представляет интерес разработка вогнутой гиперболической тригонометрии для сублоренцевых задач, определяемых произвольными антинормами.

Настоящая работа имеет следующую структуру: в п. 1 приводятся понятие антинормы и постановка задачи оптимального управления, в п. 2 даются некоторые необходимые определения из выпуклого анализа и с помощью принципа максимума Понтрягина выводится гамильтонова система для экстремальных траекторий, в п. 3 рассмотрены примеры.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\mathcal{C}$ — замкнутый выпуклый конус в конечномерном вещественном векторном пространстве V.

Определение 1. *Относительной внутренностью* конуса $\mathcal{C}$ называется множество

$$\operatorname{ri}\mathcal{C}=\{u\in\mathcal{C}\colon \text{ для любого } v\in\mathcal{C},\ v\neq u, \text{ существуют } \lambda\in(0,1) \text{ и } w\in\mathcal{C}, \text{ что } u=\lambda v+(1-\lambda)w\}.$$

Относительной границей конуса $\mathcal{C}$ будем называть множество $\partial_{\mathrm{r}}\mathcal{C}=\mathcal{C}\setminus\operatorname{ri}\mathcal{C}$.

Определение 2. *Антинормой* [14], ассоциированной с конусом $\mathcal{C}$, называется функция $\alpha\colon V\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ такая, что

(i) $\alpha|_{\operatorname{ri}\mathcal{C}}>0,\ \alpha|_{\partial_{\mathrm{r}}\mathcal{C}}=0,\ \alpha|_{V\setminus\mathcal{C}}=-\infty$;

(ii) для любых $v\in V$ и $\lambda>0$ выполнено равенство $\alpha(\lambda v)=\lambda\alpha(v)$;

(iii) для любых $v,w\in V$ выполнено $\alpha(v+w)\geqslant\alpha(v)+\alpha(w)$, т.е. функция α вогнута.

Будем называть антинорму α *непрерывной*, если функция $\alpha|_{\mathcal{C}}$ непрерывна.

Рассмотрим следующую левоинвариантную задачу оптимального управления на вещественной конечномерной группе Ли G. Пусть $\mathcal{C}$ — замкнутый выпуклый конус в соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{g}$, α — ассоциированная с ним непрерывная антинорма. Требуется найти липшицеву кривую $g\colon [0,t_1]\to G$, соединяющую единичный элемент id группы G с наперёд заданным элементом $g_1 \in G$, и измеримое управление $u \in L^\infty([0,t_1],\mathcal{C}\setminus 0)$ со значениями в множестве $\mathcal{C}\setminus 0$ такие, что

$$g(0)=\mathrm{id}, \quad g(t_1)=g_1, \quad \dot g(t)=L_{g(t)*}u(t), \quad \int\limits_0^{t_1}\alpha(u(t))\,dt\to\max, \tag{1}$$

где терминальное время t_1 свободно, через L_g обозначен левый сдвиг на элемент $g\in G$, а через L_{g*} — его дифференциал.

Замечание 1. Естественно называть задачу (1) *сублоренцево-финслеровой задачей*. Действительно, если антинорма α определяется невырожденной квадратичной формой сигнатуры $(1,n)$, например,

$$\alpha|_{\mathcal{C}}(u)=\sqrt{u_0^2-u_1^2-\ldots-u_n^2}, \quad \mathcal{C}=\{u=(u_0,u_1,\ldots,u_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\colon\ u_0^2\geqslant u_1^2+\ldots+u_n^2,\ u_0\geqslant 0\},$$

то получается задача максимизации лоренцевой длины в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,n}$.

Если $\dim\mathcal{C}<\dim\mathfrak{g}$, то скорости допустимых кривых лежат в некотором распределении подпространств в касательном расслоении группы G. По аналогии с субримановым случаем будем называть соответствующую задачу *сублоренцевой*.

Кроме того, в постановке задачи (1) рассматривается произвольная непрерывная антинорма. В случае произвольной нормы соответствующая задача минимизации называется *финслеровой*, поэтому в нашем случае естественно говорить о лоренцево-финслеровой задаче.

Замечание 2. Каково множество достижимости для задачи (1)? Существует ли оптимальное решение этой задачи для данных граничных условий? Вообще говоря, эти вопросы нетривиальны. Например, в лоренцевой задаче на пространстве анти-де Ситтера [5] необходимое условие оптимальности (принцип максимума Понтрягина) выделяет множество (в котором могут существовать глобально оптимальные решения), содержащееся внутри нетривиального множества достижимости. При этом глобально оптимальные решения существуют и имеют ограниченную длину. В некотором смысле противоположным примером является сублоренцева задача на группе Гейзенберга [3], где глобально оптимальные решения существуют на всём множестве достижимости. В настоящей работе изучаются лишь экстремальные траектории, т.е. траектории, удовлетворяющие необходимому условию оптимальности — принципу максимума Понтрягина.

2. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ

Напомним некоторые необходимые определения из выпуклого анализа. Всюду ниже V^* обозначает двойственное пространство векторного пространства V, а $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ — каноническое спаривание ковекторов и векторов.

Определение 3. Конус $\mathcal{C}^\vee=\{p\in V^*\colon\ p|_{\mathcal{C}}\leqslant 0\}\subset V^*$ называется *отрицательным двойственным конусом* для конуса $\mathcal{C}$. *Антисферой* радиуса r антинормы α называется множество $S_r=\{v\in V\colon\ \alpha(v)=r\}$. *Двойственной функцией* для α называется функция $\alpha^\vee\colon V^*\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ такая, что

$$\alpha^\vee(p)=-\sup_{v\in S_1}\langle p,v\rangle, \quad p\in V^*.$$

Определение 4. Конус называется *острым*, если не содержит ненулевых подпространств.

Лемма 1. *Пусть конус $\mathcal{C}$ острый. Тогда если $p\in\mathrm{ri}(\mathcal{C}^\vee)$, то $p|_{\mathcal{C}\setminus 0}<0$.*

Доказательство. От противного предположим, что найдётся ненулевое $u\in\mathcal{C}$ такое, что $\langle p,u\rangle=0$. Так как $p\in\mathrm{ri}(\mathcal{C}^\vee)$, то по определению 1 для любого $q\in\mathcal{C}^\vee$ существуют $r\in\mathcal{C}^\vee$ и

$\lambda \in (0,1)$ такие, что $p=\lambda q+(1-\lambda)r$. В частности, $\lambda\langle q,u\rangle+(1-\lambda)\langle r,u\rangle=\langle p,u\rangle=0$. Следовательно, $\langle q,u\rangle=0$. Таким образом, $\operatorname{span}\{u\}\subset\mathcal{C}^{\vee\vee}=\mathcal{C}$. Это противоречие остроте конуса $\mathcal{C}$ доказывает лемму.

Лемма 2. *Пусть конус $\mathcal{C}$ острый, а антинорма α непрерывна. Функция $\alpha^\vee$ является антинормой, ассоциированной с конусом $\mathcal{C}^\vee$, тогда и только тогда, когда $\alpha^\vee|_{\partial_{\mathrm{r}}(\mathcal{C}^\vee)}=0$.*

Доказательство. Ясно, что функция $\alpha^\vee$ однородна и вогнута. Кроме того, $\alpha^\vee|_{\mathcal{C}^\vee}\geqslant 0$ и $\alpha^\vee|_{V^*\setminus\mathcal{C}^\vee}=-\infty$. Покажем, что $\alpha^\vee|_{\mathrm{ri}(\mathcal{C}^\vee)}>0$. Действительно, если $p\in\mathrm{ri}(\mathcal{C}^\vee)$, то по лемме 1 $p|_{\mathcal{C}\setminus 0}<0$. Антисфера S_1 отделена от гиперплоскости $\{u\in V\colon\ \langle p,u\rangle=0\}$ замкнутой поверхностью конуса $\mathcal{C}$, поэтому $\alpha^\vee(p)>0$. Действительно, если $\alpha^\vee(p)=0$, то для последовательности $\varepsilon_n>0$, $\varepsilon_n\to 0$, существует последовательность $u_n\in S_1$ такая, что $-\varepsilon_n<\langle p,u_n\rangle\leqslant 0$. Последовательность u_n отделена от нуля, так как антинорма α непрерывна. Тогда последовательность $1/|u_n|$ ограничена, где $|\cdot|$ — евклидова норма в пространстве V. Значит, $\langle p,u_n/|u_n|\rangle\to 0$. Так как конус $\mathcal{C}$ замкнут, то, переходя к подпоследовательности, имеем $u_n/|u_n|\to u\in\mathcal{C}\setminus 0$ и $\langle p,u\rangle=0$, получили противоречие. Для выполнения всех требований определения 2 должно быть выполнено условие $\alpha^\vee|_{\partial_{\mathrm{r}}(\mathcal{C}^\vee)}=0$. Лемма доказана.

Сформулируем определение экстремальной траектории задачи (1).

Определение 5. Зададим семейство функций $H_u^\nu\colon T^*G\to\mathbb{R}$ на кокасательном расслоении группы G, зависящее от параметров $u\in\mathcal{C}\setminus 0$ и $\nu\in\{0,1\}$, как

$$H_u^\nu(\lambda)=\langle L_{\pi(\lambda)}^*\lambda,u\rangle+\nu\alpha(u),\qquad \lambda\in T^*G.$$

Липшицева кривая $\lambda\colon[0,t_1]\to T^*G$ называется *экстремалью*, если $t_1>0$ и существуют допустимое управление $\hat u\in L^\infty([0,t_1],\mathcal{C}\setminus 0)$ и число $\nu\in\{0,1\}$ такие, что $(\lambda,\nu)\neq 0$ и для почти всех $t\in[0,t_1]$ выполнено

$$\dot\lambda(t)=\vec H_{\hat u(t)}^\nu(\lambda(t)),\qquad H_{\hat u(t)}^\nu(\lambda(t))=\max_{u\in\mathcal{C}\setminus 0}H_u^\nu(\lambda(t)),\qquad H_{\hat u(t)}^\nu(\lambda(t))=0, \tag{2}$$

через $\vec H_{\hat u(t)}^\nu$ обозначено гамильтоново векторное поле, соответствующее гамильтониану $H_{\hat u(t)}^\nu$ относительно канонической симплектической структуры на кокасательном расслоении T^*G.

Если $\nu=1$, то кривая λ называется *нормальной экстремалью*, а если $\nu=0$, то *анормальной экстремалью.* Пусть $\pi: T^*G\to G$ — естественная проекция. Кривая $\pi\circ\lambda:[0,t_1]\to G$ называется *нормальной/анормальной экстремальной траекторией.* Анормальная экстремальная траектория *строго анормальна*, если она не является проекцией нормальной экстремали.

Замечание 3. Если $(\hat g,\hat u)$ — оптимальный процесс для задачи (1), то в соответствии с принципом максимума Понтрягина (см. [15, § 3] или [16, гл. 12]) кривая $\hat g$ является экстремальной траекторией, соответствующей управлению $\hat u$. Условия принципа максимума Понтрягина (см., например, [16, § 10.1]) в нашей ситуации выполняются автоматически, а именно: левоинвариантность задачи (1) на группе Ли влечёт гладкость допустимых векторных полей, а непрерывность антинормы α влечёт непрерывность по управлению подынтегральной функции функционала качества.

Кроме того, отметим, что в случае произвольной непрерывной антинормы α максимизированный гамильтониан, вообще говоря, негладок, поэтому уравнения $\dot\lambda(t)=\vec H_{\hat u(t)}^\nu(\lambda(t))$ следует понимать как семейство гамильтоновых векторных полей. Иными словами, гамильтонова система неавтономна и зависит от управления.

Замечание 4. Так как гамильтонианы $H_{\hat u(t)}^\nu$ левоинвариантны, то гамильтоновы векторные поля $\vec H_{\hat u(t)}^\nu$ определяются своими вертикальными составляющими. Более точно можно считать [16, § 18.3], что функции $H_{\hat u(t)}^\nu$ определены на двойственном пространстве алгебры Ли $\mathfrak{g}^*=T_{\mathrm{id}}^*G$ с координатами $h_1=\langle\,\cdot\,,e_1\rangle,\ \ldots,\ h_n=\langle\,\cdot\,,e_n\rangle$, где $e_1,\ldots,e_n$ — некоторый базис пространства $\mathfrak{g}$. Тогда экстремаль $\lambda(t)$ определяется сопряжённой подсистемой (гамильтоновой системы) $\dot{h}_i(t)=\{H^{\nu}_{\hat{u}(t)},h_i(t)\}$ на пространстве $\mathfrak{g}^*$, где $h(t)=(h_1(t),\ldots,h_n(t))=L^*_{\pi(\lambda(t))}\lambda(t)$, $\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}$ — стандартная пуассонова структура на пространстве $\mathfrak{g}^*$.

Для ковектора $p\in\mathfrak{g}^*$ введём обозначение $u_p=\arg\max_{u\in\mathcal{C}\setminus 0}H^{\nu}_u(p)$. Вообще говоря, u_p определено неоднозначно. Ковектор $h(0)\in\mathfrak{g}^*$ и выбор значений управления $u(t)=u_{h(t)}$ однозначно определяют экстремаль $\lambda(t)$ с начальным условием $\lambda(0)=h(0)$.

Определение 6. Будем называть касательный вектор в точке $g\in G$ *времениподобным* (соответственно, *светоподобным*), если он лежит в $L_{g*}\operatorname{ri}\mathcal{C}$ (соответственно, в $L_{g*}\partial_{\mathrm{r}}\mathcal{C}$). Траектория называется *времениподобной/светоподобной*, если каждый её касательный вектор времениподобен/светоподобен. Эти термины происходят из геометрии Минковского и специальной теории относительности.

Теорема. *Рассмотрим задачу оптимального управления (1), заданную замкнутым выпуклым острым конусом $\mathcal{C}$ и ассоциированной с ним непрерывной антинормой α такой, что функция $\alpha^\vee$ является антинормой, ассоциированной с конусом $\mathcal{C}^\vee$. Тогда всякая экстремальная траектория $g(\cdot)$ является решением уравнения $\dot{g}(t)=L_{g(t)*}u_{h(t)}$, где $\dot{h}_i(t)=\{H_{u_{h(t)}},h_i(t)\}$ и $H_{u_{h(t)}}=\langle h(t),u_{h(t)}\rangle$.*

1. Если траектория нормальна, то выполнено одно из двух условий:

а) $h(t)\in S_1^\vee=\{p\in\mathfrak{g}^*\colon\ \alpha^\vee(p)=1\}$ для всех t и траектория времениподобна,

б) $h(t)\in S_0^\vee=\{p\in\mathfrak{g}^*\colon\ \alpha^\vee(p)=0\}$ для всех t и траектория светоподобна.

2. Касательные векторы анормальных экстремальных траекторий либо светоподобны, либо являются касательными векторами субримановых анормальных траекторий, которые определяются распределением подпространств $L_{g*}\operatorname{span}\mathcal{C}\subset T_gG$. В частности, светоподобные дуги нестрого анормальны.

Для доказательства теоремы потребуются несколько дополнительных лемм.

Для ковектора $p\in V^*$ определим множества

$$p_r^\vee=\Big\{v=\arg\max_{u\in S_r}\langle p,u\rangle\Big\},\quad p^\vee=\bigcup_{r\geqslant 0}p_r^\vee. \tag{3}$$

Лемма 3. *Пусть конус $\mathcal{C}$ острый. Тогда если $p\in\operatorname{ri}(\mathcal{C}^\vee)$, то $p_0^\vee=0$.*

Доказательство. Если $p_0^\vee\neq 0$, то существует ненулевое $u\in\partial_{\mathrm{r}}\mathcal{C}$ такое, что $\langle p,u\rangle=0$. Это противоречит лемме 1.

Лемма 4. *Если антинорма α непрерывна, то для любого $p\in\mathcal{C}^\vee$ множество $p^\vee$ является замкнутым выпуклым конусом.*

Доказательство. Ясно, что в силу однородности антинормы α множество $p^\vee$ является конусом, более того, $p_r^\vee=rp_1^\vee$ для $r>0$.

Пусть $M=\sup_{u\in S_1}\langle p,u\rangle$. Тогда $M\leqslant 0$, а функция $F(u)=\langle p,u\rangle-M\alpha(u)$ непрерывна, однородна и вогнута на конусе $\mathcal{C}$. Очевидно, что $F|_{S_1}\leqslant 0$, следовательно, в силу однородности, $F|_{\operatorname{ri}\mathcal{C}}\leqslant 0$, а так как функция F непрерывна, то $F|_{\mathcal{C}}\leqslant 0$. Функция F вогнута, поэтому множество $D=\{u\in V\colon\ F(u)\geqslant 0\}$ выпукло и замкнуто. Кроме того, функция $F|_{\mathcal{C}}$ обращается в нуль в точности на множестве $p^\vee$, поэтому множество $p^\vee=\mathcal{C}\cap D$ выпукло и замкнуто как пересечение выпуклых и замкнутых множеств.

Лемма 5. *Если $p\in\mathcal{C}^\vee$ и $p|_{\mathcal{C}}\neq 0$, то $p|_{\operatorname{ri}\mathcal{C}}<0$.*

Доказательство. Предположим от противного, что существует $v\in\operatorname{ri}\mathcal{C}$ такое, что $\langle p,v\rangle=0$. Тогда в силу определения 1 для $w_1\in\mathcal{C}$, $\langle p,w_1\rangle\neq 0$, существует $w_2\in\mathcal{C}$ такое, что v лежит внутри отрезка, соединяющего точки w_1 и w_2. Значит, линейная функция p принимает значения разных знаков в точках $w_1,w_2\in\mathcal{C}$, что противоречит условию $p\in\mathcal{C}^\vee$.

Лемма 6. *Если антинорма α непрерывна, $p\in\mathcal{C}^\vee$ и $p|_{\mathcal{C}}\neq 0$, то антинорма α линейна на конусе $p^\vee$.*

Доказательство. Так как антинорма α однородна, то достаточно показать, что $\alpha(u+v)=$ $=\alpha(u)+\alpha(v)$ для любых $u,v\in p^\vee$. Если $u,v\in p_0^\vee$, то это очевидно. Если $u,v\notin p_0^\vee$, то

$$\alpha(u+v)=\alpha(\alpha(u)\bar u+\alpha(v)\bar v)=(\alpha(u)+\alpha(v))\alpha(\lambda\bar u+\mu\bar v),$$
$$\bar u=\frac{u}{\alpha(u)},\quad \bar v=\frac{v}{\alpha(v)},\quad \lambda=\frac{\alpha(u)}{\alpha(u)+\alpha(v)},\quad \mu=\frac{\alpha(u)}{\alpha(u)+\alpha(v)}.$$

По лемме 4 $\lambda\bar u+\mu\bar v\in p_1^\vee$, откуда следует требуемое равенство.

Остаётся рассмотреть случай $\alpha(u)\neq 0$, $\alpha(v)=0$. В силу леммы 4 можно считать, что $\alpha(u)=1$. Кроме того, по лемме 5 $\langle p,u\rangle<0$. Заметим, что $\langle p,v\rangle=0$. В самом деле, в противном случае для $\lambda\in(0,1)$ имеем $\langle p,\lambda v\rangle>\langle p,v\rangle$ и $\alpha(\lambda v)=0$, но тогда $v\notin p_0^\vee$.

В силу вогнутости антинормы $\alpha(u+v)\geqslant\alpha(u)+\alpha(v)=1$. Предположим, что $\alpha(u+v)>1$, тогда существует число $\lambda\in(0,1)$ такое, что $\alpha(\lambda(u+v))=1$. Кроме того, $\langle p,\lambda(u+v)\rangle=\lambda\langle p,u\rangle>$ $>\langle p,u\rangle$, а это противоречит тому, что $u\in p_1^\vee$. Значит, $\alpha(u+v)=1$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Если $p\in\partial_{\mathrm r}(\mathcal C^\vee)$ и $p|_{\mathcal C}\neq 0$, то $p|_{\mathrm{ri}\,\mathcal C}<0$ и существует ненулевой элемент $u\in\partial_{\mathrm r}\mathcal C$ такой, что $\langle p,u\rangle=0$.*

Доказательство. Из леммы 5 следует, что $p|_{\mathrm{ri}\,\mathcal C}<0$. Пусть от противного $p|_{\partial_{\mathrm r}\mathcal C\setminus 0}<0$, тогда $p|_{\mathcal C\setminus 0}<0$. Выберем произвольное $q\in\mathcal C^\vee$. Предположим, что для любого $\varepsilon>0$ существует $v\in\mathcal C$ такое, что $\langle p+\varepsilon(p-q),v\rangle>0$. Значит, для последовательности $\varepsilon_n>0$, $\varepsilon_n\to 0$, существует последовательность $v_n\in\mathcal C\setminus 0$ такая, что

$$\langle p,v_n\rangle>\frac{\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n}\langle q,v_n\rangle. \tag{4}$$

Так как функции p и q линейны, то можно считать, что последовательность v_n ограничена и отделена от нуля. В силу замкнутости конуса $\mathcal C$ из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторому $v\in\mathcal C\setminus 0$. Тогда из неравенства (4) следует, что $\langle p,v\rangle\geqslant 0$. Но $p|_{\mathcal C\setminus 0}<0$, поэтому для $q\in\mathcal C^\vee$ существует $\varepsilon>0$ такое, что $(p+\varepsilon(p-q))|_{\mathcal C}\leqslant 0$, т.е. $p+\varepsilon(p-q)\in\mathcal C^\vee$. Тогда по определению 1 $p\in\mathrm{ri}\,\mathcal C$, это противоречие завершает доказательство леммы.

Доказательство теоремы.

Докажем п. 1. Пусть $\nu=1$. Покажем, что по ковектору $p\in\mathfrak g^*$ можно определить соответствующее ему управление u_p тогда и только тогда, когда $p\in S_1^\vee$ или $p\in S_0^\vee$, $p|_{\mathcal C}\neq 0$, причём тогда u_p времениподобно или светоподобно соответственно.

Рассмотрим случай $p\in\mathrm{ri}(\mathcal C^\vee)$, тогда по лемме 3 $p_0^\vee=0$. Из равенств (3) следует, что $\arg\max_{u\in S_r}H_u^1=\arg\max_{u\in S_r}\langle p,u\rangle=p_r^\vee$. Значит, в силу лемм 3 и 4 соответствующее управление имеет вид

$$u_p=\arg\max_{u\in p^\vee\setminus 0}(\langle p,u\rangle+\alpha(u))=\bar u\arg\max_{\mu>0}\mu(\langle p,\bar u\rangle+1),\quad \bar u\in p_1^\vee. \tag{5}$$

Если $\langle p,\bar u\rangle+1\neq 0$, то максимума по $\mu>0$ не существует. Если $\langle p,\bar u\rangle+1=0$, то из определения 3 следует, что $p\in S_1^\vee$. Тогда μ может быть любым положительным числом и $u_p\in p^\vee\setminus 0\subset\mathrm{ri}\,\mathcal C$. Таким образом, $p\in S_1^\vee$, а соответствующее управление u_p времениподобно.

Рассмотрим теперь случай $p\in\partial_{\mathrm r}(\mathcal C^\vee)$ и $p|_{\mathcal C}\neq 0$. Из леммы 7 следует, что $p_0^\vee\neq 0$. Покажем, что $p^\vee=p_0^\vee$. Если $p^\vee\neq p_0^\vee$, то из леммы 4 вытекает, что $p_1^\vee\neq\varnothing$. Тогда $\alpha^\vee(p)\neq 0$. Но по условию теоремы $\alpha^\vee$ является антинормой, значит, по лемме 2 $\alpha^\vee(p)=0$, получили противоречие. Следовательно, $p^\vee=p_0^\vee$ и управление u_p светоподобно.

Остаётся заметить, что в случае $p\notin\mathcal C^\vee$ или $p|_{\mathcal C}=0$ максимума по переменной $u\in\mathcal C\setminus 0$ выражения H_u^1 не существует.

Таким образом, траектория сопряжённой подсистемы $h(\cdot)$ должна лежать в $S_1^\vee \cup S_0^\vee$, причём если $h(t)\in S_1^\vee$, то касательный вектор экстремальной траектории времениподобен, а если $h(t)\in S_0^\vee$, то светоподобен.

Антинорма $\alpha^\vee$ полунепрерывна сверху, в частности, множество $S_{\geqslant 1}^\vee=\{p\in\mathfrak{g}^*\colon\ \alpha^\vee(p)\geqslant 1\}$ замкнуто. Непрерывная кривая $h(t)$ лежит в одном из двух замкнутых множеств — $S_{\geqslant 1}^\vee$ или $S_0^\vee$, а значит, она лежит либо в $S_1^\vee$, либо в $S_0^\vee$. Отсюда в силу $\alpha^\vee(h(t))=\mathrm{const}$ следует альтернатива а) или б) из условия теоремы.

Остаётся заметить, что гамильтониан $\langle h(t),u_{h(t)}\rangle+\alpha(u_{h(t)})$ можно заменить на $H_{u_{h(t)}}=$ $=\langle h(t),u_{h(t)}\rangle$.

Докажем п. 2. Если $\nu=0$, то гамильтониан равен $H_u^0(p)=\langle p,u\rangle$, а максимум по $u\in\mathcal{C}\setminus 0$ этого выражения существует тогда и только тогда, когда $p\in\partial_{\mathrm{r}}(\mathcal{C}^\vee)$. Если $p\in\partial_{\mathrm{r}}(\mathcal{C}^\vee)$ и $p|_{\mathcal{C}}\neq 0$, то этот максимум равен нулю и по лемме 7 достигается только в точках множества $p_0^\vee\setminus 0$. Если $p|_{\mathcal{C}}=0$, то он достигается в любой точке множества $\mathcal{C}\setminus 0$. В первом случае касательный вектор экстремальной траектории светоподобен, а во втором совпадает с касательным вектором субримановой анормальной траектории. Кроме того, $\alpha^\vee(h(t))\equiv 0$, откуда следует, что каждый касательный вектор анормальной траектории либо светоподобен, либо совпадает с касательным вектором субримановой анормальной траектории. Теорема доказана.

3. СЛЕДСТВИЯ И ПРИМЕРЫ

Приведём некоторые примеры, показывающие существенность условий сформулированной теоремы.

Замечание 5. Если в условиях задачи (1) допустить равное нулю управление, то в условиях теоремы нормальная экстремальная траектория будет времениподобной с точностью до параметризации тогда и только тогда, когда для траектории $h(\cdot)$ сопряжённой подсистемы выполнено условие $\alpha^\vee(h(t))\geqslant 1$ для всех t. Это легко следует из замкнутости множества $S_{\geqslant 1}^\vee$ и из случая $p\in\mathrm{ri}(\mathcal{C}^\vee)$ доказательства п. 1 теоремы, а именно: при $\langle p,\bar u\rangle+1<0$ максимум выражения (5) на множестве $\mu\geqslant 0$ достигается при $\mu=0$.

Замечание 6. Условие остроты конуса $\mathcal{C}$ существенно для теоремы. Действительно, если конус $\mathcal{C}$ содержит некоторое подпространство W, то для любого $p\in\mathcal{C}^\vee$ имеем $p|_W=0$, иначе существует $w\in W$ такое, что $\langle p,w\rangle<0$, тогда $\langle p,-w\rangle>0$, но $-w\in\mathcal{C}$, получили противоречие. Значит, $p_0^\vee\supset W$. Тогда экстремальная траектория с начальным ковектором p может иметь как времениподобные касательные векторы, так и светоподобные.

Определение 7. Назовём ассоциированную с замкнутым выпуклым конусом $\mathcal{C}$ непрерывную антинорму α *линейной на подконусе, примыкающем к границе*, если существует $p\in\partial_{\mathrm{r}}(\mathcal{C}^\vee)$ такое, что $p|_{\mathcal{C}}\neq 0$ и $\mathrm{ri}(p^\vee)\subset\mathrm{ri}\,\mathcal{C}$ (по лемме 6 функция $\alpha|_{p^\vee}$ линейна).

Пример 1. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^2$ конус $\mathcal{C}=\{(x,y)\colon\ y\geqslant|x|\}$ и ассоциированную с ним антинорму

$$\alpha(x,y)=\begin{cases} y-x, & \text{если } x\geqslant 0,\ \ y\geqslant|x|,\\ \sqrt{y^2-x^2}, & \text{если } x<0,\ \ y\geqslant|x|,\\ -\infty, & \text{если } y<|x|.\end{cases}$$

Эта антинорма линейна на подконусе $p^\vee=\{(x,y)\colon\ y\geqslant x,\ \ x\geqslant 0\}$ для $p=(1,-1)$.

Лемма 8. *Если антинорма α линейна на подконусе, примыкающем к границе конуса $\mathcal{C}$, то существует $p\in\partial_{\mathrm{r}}(\mathcal{C}^\vee)$ такое, что $p|_{\mathcal{C}}\neq 0$, $p_1^\vee\neq\varnothing$ и $\alpha^\vee(p)>0$.*

Доказательство. Если $p\in\partial_{\mathrm{r}}(\mathcal{C}^\vee)$ и $p|_{\mathcal{C}}\neq 0$, то в силу леммы 7 существует $u\in\partial_{\mathrm{r}}(\mathcal{C}^\vee)\setminus 0$ такое, что $\langle p,u\rangle=0$, значит, $0\neq u\in p_0^\vee\subset p^\vee$, причём по лемме 4 $p^\vee$ — замкнутый выпуклый конус. Так как замыкание относительной внутренности замкнутого выпуклого множества совпадает с самим множеством [17, § 6], существует ненулевое $v\in\mathrm{ri}(p^\vee)$ (действительно, в противном случае $p^\vee = 0$). Если при этом $\mathrm{ri}(p^\vee) \subset \mathrm{ri}\,\mathcal{C}$, то $v \in \mathrm{ri}\,\mathcal{C}$, откуда автоматически следует условие $\alpha(v) > 0$. В силу леммы 4 $\bar v = v/\alpha(v) \in p^\vee$ и $\alpha(\bar v) = 1$, т.е. $v \in p_1^\vee \neq \varnothing$. Тогда по определению двойственной функции антинормы $\alpha^\vee(p) = -\langle p, \bar v\rangle$, что больше нуля по лемме 7.

Замечание 7. Если антинорма α линейна на подконусе, примыкающем к границе, то нарушается условие теоремы $\alpha^\vee|_{\partial_{\mathrm{r}}(\mathcal{C}^\vee)} \neq 0$. В самом деле, по лемме 8 существует $p \in \partial_{\mathrm{r}}(\mathcal{C}^\vee)$ такое, что $\alpha^\vee(p) > 0$.

Предложение. *Если непрерывная антинорма α линейна на подконусе, примыкающем к границе конуса $\mathcal{C}$, то существует нормальная экстремальная траектория задачи (1), имеющая как времениподобные, так и светоподобные касательные векторы.*

Доказательство. По лемме 8 существует $p \in \partial_{\mathrm{r}}(\mathcal{C}^\vee)$ такое, что $p_1^\vee \neq \varnothing$. Тогда в силу леммы 6

$$\max_{u \in p^\vee \setminus 0} (\langle p, u\rangle + \alpha(u)) = \max_{\mu \geqslant 0} \mu(\langle p, \bar u\rangle + 1), \qquad \bar u \in p_1^\vee.$$

Если $\langle p, \bar u\rangle + 1 < 0$, то максимум достигается при $\mu = 0$ и управление u_p светоподобно. Если $\langle p, \bar u\rangle + 1 = 0$, то μ может быть любым неотрицательным числом, а управление u_p может быть светоподобно или времениподобно. Если $\langle p, \bar u\rangle + 1 > 0$, то максимума не существует.

Рассмотрим траекторию сопряжённой подсистемы, проходящую через точку p. Если $u(0)$ времениподобно/светоподобно, то при выборе u_p светоподобным/времениподобным соответствующая экстремальная траектория имеет как времениподобные, так и светоподобные касательные векторы. Предложение доказано.

В следующем примере $\alpha^\vee$ также не является антинормой, но в отличие от ситуации предложения каузальный тип управления определяется однозначно.

Пример 2. Рассмотрим группу Гейзенберга, т.е. пространство $\mathbb{R}^3$ с координатами a, b, c и законом умножения

$$(a_1, b_1, c_1) \cdot (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2 + a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Её алгебра Ли — пространство $\mathbb{R}^3$ с координатами x, y, z. Рассмотрим левоинвариантную сублоренцеву структуру, заданную следующими конусом и антинормой на нём:

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z)\colon\ x, y \geqslant 0,\ \ z = 0\}, \quad \alpha(x, y) = \frac{xy}{x + y}, \quad x^2 + y^2 \neq 0.$$

Тогда функция $\alpha^\vee$ на двойственном конусе имеет вид

$$\mathcal{C}^\vee = \{(h_1, h_2, h_3) \in (\mathbb{R}^3)^*\colon\ h_1, h_2 \leqslant 0\}, \quad \alpha^\vee(h_1, h_2, h_3) = \left(\sqrt{|h_1|} + \sqrt{|h_2|}\right)^2.$$

Заметим, что $\alpha^\vee|_{\partial_{\mathrm{r}}(\mathcal{C}^\vee)} \neq 0$, следовательно, по лемме 2 условие теоремы не выполняется. Можно проверить, что сопряжённая подсистема нормальной гамильтоновой системы задаётся формулой

$$\begin{cases} \dot h_1 = -h_3 u_2, \\ \dot h_2 = h_3 u_1, \\ \dot h_3 = 0, \end{cases} \qquad u_h = (u_1, u_2) = \begin{cases} \left(\sqrt{h_2/h_1} + 1, \sqrt{h_1/h_2} + 1\right), & \text{если } h_1 h_2 \neq 0, \\ (a, 0), & \text{если } h_1 = 0, \\ (0, b), & \text{если } h_2 = 0, \end{cases}$$

где u_h — управление, соответствующее ковектору $h = (h_1, h_2, h_3) \neq 0$, числа $a, b > 0$. Легко показать, что на любой нормальной экстремальной траектории имеется не более двух переключений между времениподобным и светоподобным управлениями. Например, экстремальная траектория с начальным ковектором $(0, -2, 1)$ состоит из объединения светоподобной, времениподобной и светоподобной дуг.

Следующее следствие теоремы позволяет в сублоренцевых задачах, где антинорма определяется квадратичной формой, переходить к “энергии” для вывода уравнений экстремальных траекторий. Будем говорить, что траектории *геометрически совпадают*, если совпадают их образы как функций времени.

Следствие 1. *Пусть антинорма α задаётся квадратичной формой q сигнатуры $(1, r)$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, т.е. $\alpha(u) = \sqrt{q(u)}$, где в некотором базисе $e_0, e_1, \ldots, e_r, \ldots, e_n$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеем $q(u) = u_0^2 - u_1^2 - \ldots - u_r^2$. Тогда нормальные экстремальные траектории задачи (1) геометрически совпадают с нормальными времениподобными или светоподобными экстремальными траекториями той же управляемой системы с квадратичным функционалом*

$$\frac{1}{2} \int\limits_0^{t_1} \left(u_0^2(t) - u_1^2(t) - \ldots - u_r^2(t)\right) \, dt \to \max$$

с фиксированным терминальным временем t_1 и управлением $u \in L^\infty([0, t_1], \mathfrak{g} \setminus 0)$.

Доказательство. Обозначим через $h_i = \langle \cdot\,, e_i \rangle$, $i = \overline{0, r}$, линейные на $\mathfrak{g}^*$ гамильтонианы. Применив сформулированную теорему к задаче (1), получим

$$\mathcal{C}^\vee = \{h = (h_0, h_1, \ldots, h_n) \in \mathfrak{g}^* \colon\ h_0^2 \geqslant h_1^2 + \ldots + h_r^2,\ \ h_0 \leqslant 0\},$$

$$\alpha^\vee(h) = \sqrt{h_0^2 - h_1^2 - \ldots - h_r^2}, \quad u_h = \mu(-h_0 e_0 + h_1 e_1 + \ldots + h_r e_r), \quad \mu > 0,$$

$$\dot{h}_i(t) = u_0(t)\{h_0(t), h_i(t)\} + u_1(t)\{h_1(t), h_i(t)\} + \ldots + u_r(t)\{h_r(t), h_i(t)\}.$$

Во времениподобном случае с точностью до параметризации кривой можно положить $\mu = 1$, так как функция $\alpha(u_{h(t)})$ отделена от нуля на отрезке $[0, t_1]$.

С другой стороны, экстремали $\lambda(\cdot)$ рассматриваемой управляемой системы с квадратичным функционалом задаются первыми двумя условиями из (2), где

$$H_u^\nu(\lambda(t)) = u_0(t)h_0(t) + u_1(t)h_1(t) + \ldots + u_r(t)h_r(t) + \frac{\nu}{2}\left(u_0^2(t) - u_1^2(t) - \ldots - u_r^2(t)\right).$$

Из условия максимума при $\nu = 1$ следует, что $u_0(t) = -h_0(t)$, $u_1(t) = h_1(t)$, $\ldots$, $u_r(t) = h_r(t)$, а максимизированный гамильтониан равен

$$H = -\frac{1}{2}\left(h_0^2 - h_1^2 - \ldots - h_r^2\right).$$

Соответствующая сопряжённая подсистема имеет вид

$$\dot{h}_i(t) = \{H, h_i(t)\} = -h_0(t)\{h_0(t), h_i(t)\} + h_1(t)\{h_1(t), h_i(t)\} + \ldots + h_r(t)\{h_r(t), h_i(t)\}.$$

Таким образом, правые части сопряжённых подсистем в обеих задачах совпадают. Для гладкого гамильтониана решение задачи Коши для гамильтоновой системы единственно, поэтому экстремальная траектория определяется своим начальным ковектором, т.е. точкой пространства $\mathfrak{g}^* = T_{\mathrm{id}}^* G$. Остается заметить, что гамильтониан H является первым интегралом сопряжённой подсистемы и ковекторы нормальных натурально параметризованных времениподобных экстремальных траекторий (т.е. таких, что $q(u(t)) = 1$) лежат на поверхности уровня гамильтониана $H = -1/2$, $h_0 < 0$, которая совпадает с множеством $S_1^\vee$. Нормальные светоподобные экстремальные траектории имеют ковекторы, лежащие на поверхности уровня гамильтониана $H = 0$, $h_0 < 0$, которая совпадает с множеством $S_0^\vee$. Следствие доказано.

Замечание 8. В условиях следствия 1 иногда удобно рассматривать базис, в котором квадратичная форма имеет вид

$$q(u)=c_0u_0^2-c_1u_1^2-\ldots-c_ru_r^2,\quad c_0,c_1,\ldots,c_r>0.$$

Выбор такого базиса объясняется его согласованностью с другой квадратичной формой, например, с формой Киллинга. В таком случае

$$H=-\frac{1}{2}\left(\frac{h_0^2}{c_0}-\frac{h_1^2}{c_1}-\ldots-\frac{h_r^2}{c_r}\right),$$

причём начальные ковекторы нормальных времениподобных (с натуральной параметризацией) и светоподобных экстремальных траекторий лежат на поверхностях уровня $H=-1/2$ и $H=0$ (при условии $h_0<0$) соответственно.

Вообще говоря, поведение анормальных траекторий может быть сложным. Соответствующие траектории сопряжённой подсистемы лежат на относительной границе двойственного конуса $\partial_{\mathrm{r}}(\mathcal{C}^\vee)$ и характер их пересечения с аннулятором пространства $\operatorname{span}\mathcal{C}$ априори не ясен. Однако в некоторых случаях анормальные траектории могут быть описаны.

Следствие 2. *В лоренцевом случае, т.е. при* $\operatorname{span}\mathcal{C}=\mathfrak{g}$, *анормальные экстремальные траектории светоподобны, в частности, нестрого анормальны.*

Таким образом, анормальные траектории всегда возникают в лоренцевой геометрии, в отличие от римановой геометрии, где нет анормальных траекторий.

Определение 8. Распределение плоскостей Δ на трёхмерном гладком многообразии M называется *контактным*, если существует 1-форма ω такая, что $\Delta_m=\operatorname{Ker}\omega_m$ для любой точки $m\in M$ и $\omega\wedge d\omega\neq 0$.

Следствие 3. *Если распределение плоскостей* $L_{g*}\operatorname{span}\mathcal{C}$ *контактно, то все анормальные траектории сублоренцевой задачи (1) светоподобны и, в частности, нестрого анормальны.*

Доказательство следствий 2, 3. Понятно, что субримановы анормали лежат в аннуляторе распределения Δ. В лоренцевом случае распределение Δ совпадает с касательным расслоением, что доказывает следствие 2.

Известно [8, § 4.3], что для распределения вида $\Delta=\operatorname{Ker}\omega$ субримановы анормали лежат в множестве Мартине $\{m\in M\colon (\omega\wedge d\omega)_m=0\}$, которое в нашем случае пусто. Это доказывает следствие 3.

Приведём пример неконтактной сублоренцевой структуры глубины, большей двух.

Пример 3. Рассмотрим сублоренцеву структуру на свободной группе Карно G ранга 2 глубины 4. Это связная и односвязная группа Ли, алгебра Ли которой линейно порождена элементами

$$X_1,\quad X_2,\quad X_3=[X_1,X_2],\quad X_4=[X_1,X_3],\quad X_5=[X_2,X_3],$$

$$X_6=[X_1,X_4],\quad X_7=[X_1,X_5]=[X_2,X_4],\quad X_8=[X_2,X_5],$$

остальные коммутаторы этих векторов равны нулю. Пусть $\Delta_g=L_{g*}\operatorname{span}\{X_1,X_2\}\subset T_gG$ — двумерное распределение, множество управлений $U=\{(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2\colon u_1^2-u_2^2\geqslant 0,\ u_1>0\}$, а динамика задаётся неавтономным дифференциальным уравнением $\dot g(t)=L_{g(t)*}(u_1X_1+u_2X_2)$.

Анормальные кривые распределения Δ на группе G описаны в работе [18], причём это простейшая свободная группа Карно, в которой имеются строго анормальные траектории для распределения, порождённого первым слоем соответствующей алгебры Ли.

Имеем следующую гамильтонову систему в координатах $h_i=\langle\,\cdot\,,X_i\rangle$, $i=\overline{1,8}$:

$$\dot h_1=-u_2h_3,\quad \dot h_3=u_1h_4+u_2h_5,\quad \dot h_4=u_1h_6+u_2h_7,$$

$$\dot h_2=u_1h_3,\quad \dot h_6=\dot h_7=\dot h_8=0,\quad \dot h_5=u_1h_7+u_2h_8.$$

Рассмотрим случай $h_4 = h_5 = h_6 = h_7 = h_8 = 0$, тогда $\dot{h}_1 = -u_2 h_3$, $\dot{h}_2 = u_1 h_3$, $\dot{h}_3 = 0$, следовательно, соответствующие светоподобные экстремальные траектории имеют вид (пусть для определённости $h_3 \leqslant 0$)

$$g(t) = \begin{cases} \exp\bigl\{t\alpha(t)(X_1 + X_2)\bigr\} & \text{при } t \leqslant \bar{t}, \\ \exp\bigl\{\bar{t}(X_1 + X_2)\bigr\} \exp\bigl\{(t - \bar{t})k(t)(X_1 - X_2)\bigr\} & \text{при } t > \bar{t}, \end{cases} \tag{6}$$

где $\bar{t} \in [0, T]$ и функция $k \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}_+)$ произвольны. Проекции таких экстремальных траекторий на плоскость $\mathrm{span}\{X_1, X_2\}$, вообще говоря, выглядят как углы. Эти нормальные светоподобные экстремальные траектории в то же время анормальны и, следовательно, нестрого анормальны.

Более того, существуют анормальные сублоренцевы экстремальные траектории, являющиеся анормальными кривыми распределения Δ, иначе говоря, субримановыми анормальными траекториями. Конечно, не любые дуги анормальных кривых распределения Δ являются дугами анормальных сублоренцевых экстремальных траекторий, так как скорости таких кривых должны быть допустимы в сублоренцевом смысле. Как показано в [18], субримановы анормальные траектории проектируются в прямые, углы или кривые второго порядка на плоскости $\mathrm{span}\{X_1, X_2\}$. В частности, субримановы анормальные траектории, проектирующиеся в эллипсы или параболы, не могут быть допустимыми в сублоренцевом смысле.

С другой стороны, даже если строго анормальная субриманова траектория является сублоренцевой анормальной траекторией, она может быть нестрого анормальной в сублоренцевом смысле. Например, углы (6) строго анормальны для распределения (см. [18]), но в то же время являются светоподобными нормальными сублоренцевыми экстремальными траекториями.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены экстремальные траектории для левоинвариантных сублоренцевых задач, определяемых произвольной непрерывной антинормой на остром конусе. Получены условия, при которых нормальные экстремальные траектории сохраняют свой каузальный тип. Установлено, что касательные векторы анормальных экстремальных траекторий, вообще говоря, либо светоподобны, либо являются касательными векторами некоторых субримановых анормальных траекторий. Если антинорма задаётся квадратичной формой своей сигнатуры, то для вывода уравнений экстремальных траекторий можно избавиться от квадратного корня в функционале сублоренцевой длины и использовать квадратичный гамильтониан.

Автор благодарен рецензенту за ценные замечания.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00877).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grochowski, M. On the Heisenberg sub-Lorentzian metric on $\mathbb{R}^3$ / M. Grochowski // Geometric Singularity Theory. Banach Center Publications. — Warszawa : Institute of Mathematics. Polish Academy of Sciences, 2004. — V. 65. — P. 57–65.

2. Grochowski, M. Reachable sets for the Heisenberg sub-Lorentzian structure on $\mathbb{R}^3$. An estimate for the distance function / M. Grochowski // J. Dyn. Control Syst. — 2006. — V. 12, № 2. — P. 145–160.
3. Сачков, Ю.Л. Сублоренцева задача на группе Гейзенберга / Ю.Л. Сачков, Е.Ф. Сачкова // Мат. заметки. — 2023. — Т. 113, № 1. — С. 154–157.
4. Sachkov, Yu.L. Sub-Lorentzian distance and spheres on the Heisenberg group / Yu.L. Sachkov, E.F. Sachkova // J. Dyn. Control Syst. — 2023. — V. 29. — P. 1129–1159.
5. Grong, E. Sub-Riemannian and sub-Lorentzian geometry on $SU(1,1)$ and on its universal cover / E. Grong, A. Vasil'ev // J. Geom. Mech. — 2011. — V. 3, № 2. — P. 225–260.
6. Сачков, Ю.Л. Лоренцева геометрия на плоскости Лобачевского / Ю.Л. Сачков // Мат. заметки. — 2023. — Т. 114, № 1. — С. 154–157.
7. Sachkov, Yu.L. Lorentzian distance on the Lobachevsky plane / Yu.L. Sachkov // arXiv:2307.07706. — 2023.
8. Agrachev, A. A Comprehensive Introduction to Sub-Riemannian Geometry / A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain. — Cambridge; New York : Cambridge University Press, 2019. — 745 p.
9. Сачков, Ю.Л. Введение в геометрическую теорию управления / Ю.Л. Сачков. — М. : Ленанд, 2021. — 160 с.
10. Локуциевский, Л.В. Выпуклая тригонометрия с приложениями к субфинслеровой геометрии / Л.В. Локуциевский // Мат. сборник. — 2019. – Т. 210, № 8. — С. 120–148.
11. Ардентов, А.А. Решение серии задач оптимального управления с 2-мерным управлением на основе выпуклой тригонометрии / А.А. Ардентов, Л.В. Локуциевский, Ю.Л. Сачков // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2020. — Т. 494. — С. 86–92.
12. Ardentov, A.A. Extremals for a series of sub-Finsler problems with 2-dimensional control via convex trigonometry / A.A. Ardentov, L.V. Lokutsievskiy, Yu.L. Sachkov // ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations. — 2021. — V. 27, № 32. — P. 32–52.
13. Lokutsievskiy, L.V. Explicit formulae for geodesics in left-invariant sub-Finsler problems on Heisenberg groups via convex trigonometry / L.V. Lokutsievskiy // J. Dyn. Control Syst. — 2021. — V. 27. — P. 661–681.
14. Protasov, V.Yu. Antinorms on cones: duality and applications / V.Yu. Protasov // Linear and Multilinear Algebra. — 2021. — V. 70, № 22. — P. 7387–7413.
15. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. — 4-е изд., стереотип. — М. : Наука, 1983. — 393 с.
16. Аграчев, А.А. Геометрическая теория управления / А.А. Аграчев, Ю.Л. Сачков. — М. : Физматлит, 2004. — 392 с.
17. Рокафеллар, Р. Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар ; пер. с англ. А.Д. Иоффе и В.М. Тихомирова. — М. : Мир, 1973. — 469 с.
18. Сачков, Ю.Л. Структура анормальных экстремалей в субримановой задаче с вектором роста $(2,3,5,8)$ / Ю.Л. Сачков, Е.Ф. Сачкова // Мат. сб. — 2020. — Т. 211, № 10. — С. 112–138.

SUB-LORETZIAN EXTREMALS DEFINED BY AN ANTINORM

A. V. Podobryaev

A.K. Ailamazyan Program Systems Institute of RAS, Pereslavl-Zalesskiy, Russia
e-mail: alex@alex.botik.ru

We consider a left-invariant sub-Lorentzian structure on a Lie group. We assume that this structure is defined by a closed convex salient cone in the corresponding Lie algebra and a continuous antinorm associated with this cone. We derive the Hamiltonian system for sub-Lorentzian extremals and give conditions under that normal extremal trajectories keep their causal type. Tangent vectors of abnormal extremal trajectories are either light-like or tangent vectors of sub-Riemannian extremal trajectories for the sub-Riemannian distribution spanned by the cone.

Keywords: Lorentzian manifold, sub-Lorentzian manifold, antinorm, extremal, extremal, extremal trajectory, causal type.

FUNDING

The work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00877).

REFERENCES

1. Grochowski, M., On the Heisenberg sub-Lorentzian metric on $\mathbb{R}^3$, in *Geometric singularity theory. Banach Center publications*, Warszawa: Institute of Mathematics. Polish Academy of Sciences, 2004, vol. 65, pp. 57–65.
2. Grochowski, M., Reachable sets for the Heisenberg sub-Lorentzian structure on $\mathbb{R}^3$. An estimate for the distance function, *J. Dyn. Control Syst.*, 2006, vol. 12, no. 2, pp. 145–160.
3. Sachkov, Yu.L. and Sachkova, E.F., Sub-Lorentzian problem on the Heisenberg group, *Math. Notes*, 2023, vol. 113, pp. 159–162.
4. Sachkov, Yu.L. and Sachkova, E.F., Sub-Lorentzian distance and spheres on the Heisenberg group, *J. Dyn. Control Syst.*, 2023, vol. 29, pp. 1129–1159.
5. Grong, E. and Vasil'ev, A., Sub-Riemannian and sub-Lorentzian geometry on $SU(1,1)$ and on its universal cover, *J. Geom. Mech.*, 2011, vol. 3, no. 2, pp. 225–260.
6. Sachkov, Yu.L., Lorentzian geometry on the Lobachevsky plane, *Math. Notes*, 2023, vol. 114, pp. 127–130.
7. Sachkov, Yu.L., Lorentzian distance on the Lobachevsky plane, 2023, arXiv:2307.07706.
8. Agrachev, A., Barilari, D., and Boscain, U., *A Comprehensive Introduction to Sub-Riemannian Geometry*, Cambridge–New York: Cambridge University Press, 2019.
9. Sachkov, Yu.L., *Introduction to Geometric Control*, Cham: Springer, 2021.
10. Lokutsievskiy, L.V., Convex trigonometry with applications to sub-Finsler geometry, *Sb. Math.*, 2019, vol. 210, no. 8, pp. 1179–1205.
11. Ardentov, A.A., Lokutsievskiy, L.V., and Sachkov, Y.L., Explicit solutions for a series of optimization problems with 2-dimensional control via convex trigonometry, *Dokl. Math.*, 2020, vol. 210, pp. 427–432.
12. Ardentov, A.A., Lokutsievskiy, L.V., and Sachkov, Yu.L., Extremals for a series of sub-Finsler problems with 2-dimensional control via convex trigonometry, *ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations*, 2021, vol. 27, no. 32, pp. 32–52.
13. Lokutsievskiy, L.V., Explicit formulae for geodesics in left-invariant sub-Finsler problems on Heisenberg groups via convex trigonometry, *J. Dyn. Control Syst.*, 2021, vol. 27, pp. 661–681.
14. Protasov, V.Yu., Antinorms on cones: duality and applications, *Linear and Multilinear Algebra*, 2021, vol. 70, no. 22, pp. 7387–7413.
15. Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V., and Mishchenko E.F., *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Oxford: Pergamon Press, 1964.
16. Agrachev, A.A. and Sachkov, Yu.L., *Control Theory from the Geometric Viewpoint*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 2004.
17. Rockafellar, R., *Convex Analysis*, Princeton: Princeton University Press, 1970.
18. Sachkov, Yu.L. and Sachkova, E.F., The structure of abnormal extremals in a sub-Riemannian problem with growth vector $(2,3,5,8)$, *Sb. Math.*, 2020, vol. 211, no. 10, pp. 1460–1485.