ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 1, с. 64–75

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956

СТРУКТУРА ВНУТРЕННЕГО ПЕРЕХОДНОГО СЛОЯ В ЗАДАЧЕ РЕАКЦИЯ–ДИФФУЗИЯ В СЛУЧАЕ СБАЛАНСИРОВАННОЙ РЕАКЦИИ СО СЛАБЫМ РАЗРЫВОМ

 Е. И. Никулин, В. Т. Волков, Д. А. Карманов

Для сингулярно возмущённого уравнения типа реакция–диффузия исследована структура внутреннего переходного слоя в случае сбалансированной реакции со слабым разрывом. Доказано существование решений с внутренним переходным слоем (контрастных структур), исследован вопрос об их устойчивости, получены асимптотические приближения решений указанного типа. Показано, что в случае баланса реакции наличие даже слабого (асимптотически малого) разрыва реакции может приводить к образованию контрастных структур конечного размера, как устойчивых, так и неустойчивых.

Ключевые слова: сингулярно возмущённые параболические уравнения, уравнения реакция–диффузия, контрастные структуры, внутренние слои, метод дифференциальных неравенств, асимптотические методы, асимптотическая устойчивость по Ляпунову.

DOI: 10.31857/S0374064124010068, EDN: RSQLCN

Введение. Одной из актуальных задач теории сингулярных возмущений в настоящее время является исследование нелинейных сингулярно возмущённых уравнений в частных производных, решения которых имеют пограничные и внутренние слои. Такие уравнения представляют большой интерес как в качественной теории дифференциальных уравнений, так и во многих прикладных задачах, в частности, в математических моделях химической кинетики, синергетики, нелинейной теории волн, биофизики и других областях физики [1], где исследуемые процессы описываются нелинейными параболическими уравнениями с малыми параметрами при производных. Решения таких задач могут содержать узкие области быстрого изменения параметров: пограничные или внутренние переходные слои (контрастные структуры) различных типов — стационарные или движущиеся фронты (см. [2, 3] и библиографию в них).

Уравнения типа реакция–диффузия и реакция–диффузия–адвекция интенсивно изучаются также в связи с тем, что они выступают в качестве математических моделей, выявляющих основные механизмы, определяющие поведение и более сложных физических систем. В частности, к рассматриваемой в статье задаче может быть сведена хорошо известная система ФитцХью–Нагумо [4–6] в стационарном случае. Также к этой задаче сводится система уравнений дрейфо-диффузионной модели полупроводника, обладающего N-образной зависимостью скорости дрейфа от напряжённости электрического поля [7–10].

Причиной образования переходных слоев (контрастных структур) в сингулярно возмущённых моделях типа реакция–диффузия–адвекция может служить выполнение условия баланса реакции в некоторой точке или на некоторой кривой, лежащей в области рассмотрения [3, 11] или баланса адвекции [12], адвекции и реакции [13], а также разрыв коэффициентов по пространственной координате [14, 15].

В статьях [16–18] в случае непрерывных коэффициентов был рассмотрен так называемый *критический случай*, когда условие баланса реакции выполняется тождественно, т.е. в любой точке области. В настоящей работе рассматривается краевая задача для нелинейного сингулярно возмущённого уравнения реакция–диффузия в критическом случае при наличии слабого разрыва реактивного слагаемого. Под *слабым разрывом* понимается разрыв первого рода в некоторой точке, который претерпевает функция источников в первом порядке по малому параметру. Показано, что в этом случае даже асимптотически малое воздействие на систему в виде разрыва реакции в первом порядке по малому параметру может вызвать конечное изменение решения задачи: образуется переходный слой конечной амплитуды. Сформулированы условия, при которых существует решение типа контрастной структуры, имеющее внутренний переходный слой, локализованный в окрестности точки разрыва реакции, и построено асимптотическое приближение этого решения по малому параметру. Изучена тонкая структура переходного слоя и показана возможность существования различных типов таких решений, как устойчивых, так и неустойчивых. Сформулированы достаточные условия, определяющие либо асимптотическую устойчивость по Ляпунову, либо неустойчивость каждого такого решения.

Асимптотическое приближение решения строится по методике, изложенной в работе [2]; для обоснования существования решения применяется асимптотический метод дифференциальных неравенств [19–21], а также асимптотический метод дифференциальных неравенств, развитый для задач с разрывными нелинейностями [22–26]; исследование устойчивости проводится методом сжимающих барьеров [18].

Статья содержит шесть пунктов. В п. 1 сформулирована постановка задачи и основные условия, обеспечивающие существование решения с внутренним переходным слоем. В п. 2 и 3 описывается алгоритм построения асимптотического приближения и нахождения асимптотики уровня перехода. Обоснованию существования решения и исследованию его устойчивости посвящены п. 4 и 5. В п. 6 приведены примеры асимптотического расчёта и численного моделирования для конкретных входных параметров задачи.

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующую сингулярно возмущённую краевую задачу:

$$N_\varepsilon u := \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(u,x) - \varepsilon f_1(u,x) = 0, \quad -1 < x < 1,$$

$$f_1(u,x) := \begin{cases} f_1^{(+)}(u,x), & u \in I_u, \quad x_p < x \leqslant 1; \\ f_1^{(-)}(u,x), & u \in I_u, \quad -1 \leqslant x < x_p, \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-1,\varepsilon) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,\varepsilon) = 0\,. \tag{1}$$

Здесь ε — малый параметр, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \ll 1$; $x_p \in (-1;1)$; I_u — отрезок изменения функции $u(x,\varepsilon)$.

Будем рассматривать задачу (1) при следующих условиях.

Условие 1. Пусть функции f, $f_1^{(\pm)}$ являются достаточно гладкими и пусть для любого $u \in I_u$ выполняется

$$\lim_{x\to x_p+0} f_1^{(+)}(u,x) \neq \lim_{x\to x_p-0} f_1^{(-)}(u,x).$$

Условие 1 означает, что функция $f_1(u,x)$ имеет разрыв первого рода по переменной x в точке x_p.

Условие 2. Пусть вырожденное уравнение $f(u,x) = 0$ имеет три корня $\varphi^{(-)}(x) < \varphi^{(0)}(x) < \varphi^{(+)}(x)$, удовлетворяющих неравенствам

$$f_u(\varphi^{(\pm)}(x),x) > 0, \quad f_u(\varphi^{(0)}(x),x) < 0, \quad x \in [-1,1].$$

Условие 2 гарантирует существование точек покоя $(\varphi^{(\pm)}(x),0)$ типа седла на фазовой плоскости $(\tilde u,\tilde v)$ присоединённой системы, соответствующей задаче (1):

$$\frac{\partial \tilde u}{\partial \xi} = \tilde v, \quad \frac{\partial \tilde v}{\partial \xi} = f(\tilde u, x)\,. \tag{2}$$

Условие 3. Пусть

$$\int\limits_{\varphi^{(-)}(x)}^{\varphi^{(+)}(x)} f(u,x)\,du \equiv 0, \qquad x \in [-1,1].$$

Условие 3 означает наличие баланса реакции и выделяет так называемый *критический* случай. Данное условие позволяет утверждать, что сепаратриса на фазовой плоскости $(\tilde{u},\tilde{v})$ присоединённой системы, выходящая из седла $(\varphi^{(-)}(x),0)$, при любом $x\in[-1,1]$ попадает в седло $(\varphi^{(+)}(x),0)$.

Основной целью данной статьи является доказательство существования решения $u(x,\varepsilon)$ задачи (1) в виде контрастной структуры типа "ступенька", т.е. решения, которое при достаточно малых ε вне некоторой окрестности точки x_p близко к функциям $\varphi^{(-)}(x)$ и $\varphi^{(+)}(x)$ и имеет резкий переходный слой между этими уровнями вблизи точки x_p. Методика исследования основана на применении асимптотического метода дифференциальных неравенств, а именно: для доказательства существования решения использованы идеи работ [27–29], а построение верхнего и нижнего решений с нужными свойствами проводится путём модификации членов формального асимптотического приближения.

2. Построение формального асимптотического приближения. Введём функцию $p(\varepsilon)$, определяющую уровень переходного слоя в точке x_p: положим $u(x_p,\varepsilon)=p(\varepsilon)$. Функция $p(\varepsilon)$ заранее неизвестна и определяется в процессе построения асимптотического приближения.

Асимптотическое приближение решения получается путём построения асимптотик погранслойного типа слева и справа от точки x_p:

$$U^{(-)}(x,\varepsilon)=\bar{u}^{(-)}(x,\varepsilon)+Q^{(-)}(\xi,p,\varepsilon)+R^{(-)}(\sigma_-,\varepsilon),\quad x\in[-1,x_p],$$
$$U^{(+)}(x,\varepsilon)=\bar{u}^{(+)}(x,\varepsilon)+Q^{(+)}(\xi,p,\varepsilon)+R^{(+)}(\sigma_+,\varepsilon),\quad x\in[x_p,1], \tag{3}$$

и их дальнейшего C^1-сшивания в точке x_p на уровне $u=p(\varepsilon)$. Здесь $\overline{u}^{(\pm)}(x,\varepsilon)$ — регулярная часть асимптотики, описывающая решение вне окрестности точки x_p; функции $Q^{(\pm)}(\xi,p,\varepsilon)$, где $\xi=(x-x_p)/\varepsilon$, описывают решение вблизи точки $x=x_p$ (внутренний переходный слой).

Пограничные функции $R^{(\pm)}(\sigma_\pm,\varepsilon)$, описывающие поведение решения вблизи точек $x=1$ и $x=-1$, строятся известными стандартными методами [2] и являются экспоненциально убывающими по переменным $\sigma_\pm=(1\mp x)/\varepsilon$ при удалении от границ $x=1$ и $x=-1$, поэтому они не влияют на поведение решения вблизи внутреннего переходного слоя в точке $x=x_p$ и не рассматриваются в настоящей работе. Заметим, что в силу условий второго рода на границах $x=1$ и $x=-1$ пограничные функции в нулевом порядке по ε отсутствуют.

Каждое слагаемое в (3) ищется в виде рядов по степеням ε:

$$\bar{u}^{(\pm)}(x,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\overline{u}_k^{(\pm)}(x)\varepsilon^k,\quad Q^{(\pm)}(\xi,p,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}Q_k^{(\pm)}(\xi,p)\varepsilon^k,$$

коэффициенты которых определяются стандартным образом по алгоритму, изложенному в [2].

Функции регулярной части нулевого и первого порядков имеют вид

$$\bar{u}_0^{(\pm)}(x)=\varphi^{(\pm)}(x)\quad\text{и}\quad\bar{u}_1^{(\pm)}(x)=-\frac{f_1^{(\pm)}(\varphi^{(\pm)}(x),x)}{f_u(\varphi^{(\pm)}(x),x)}$$

соответственно.

Для определения функций $Q_0^{(\pm)}$ получаем следующие задачи:

$$\varepsilon^0:\quad\begin{cases}\dfrac{\partial^2 Q_0{}^{(\pm)}}{\partial\xi^2}=f(\bar{u}_0^{(\pm)}(x_p)+Q_0{}^{(\pm)},x_p),\\ Q_0{}^{(\pm)}(0,p)=p-\bar{u}_0{}^{(\pm)}(x_p),\\ Q_0{}^{(\pm)}(\pm\infty,p)=0\,.\end{cases} \tag{4}$$

Зависимость функции Q_0 от переменной p объясняется наличием этой переменной в начальном условии.

Хорошо известно (см., например, [2]), что при выполнении условия 2 каждая из задач (4) имеет единственное монотонное решение, экспоненциально убывающее при $\xi \to \pm\infty$.

Функции $Q_1^{(\pm)}$ находятся как решения задач

$$\varepsilon^1 : \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 {Q_1}^{(\pm)}}{\partial \xi^2} = \dfrac{\partial \tilde{f}^{(\pm)}}{\partial u}\, Q_1^{(\pm)} + r_1^{(\pm)}, \\ {Q_1}^{(\pm)}(0,p) + {\bar{u}_1}^{(\pm)}(x_p) = 0, \\ {Q_1}^{(\pm)}(\pm\infty, p) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

где

$$r_1^{(\pm)}(\xi,p) = \xi\left(\frac{\partial \tilde{f}^{(\pm)}}{\partial u}\,\frac{\partial \varphi^{(\pm)}}{\partial x}(x_p) + \frac{\partial \tilde{f}^{(\pm)}}{\partial x}\right) + \frac{\partial \tilde{f}^{(\pm)}}{\partial u}\,\bar{u}_1^{(\pm)}(x_p) + \tilde{f}_1^{(\pm)},$$

а символ $\sim$ означает, что функция берётся при аргументе $(\bar{u}_0^{(\pm)}(x_p) + Q_0^{(\pm)}, x_p)$.

Решения задач (5) можно получить в явном виде:

$$Q_1^{(\pm)}(\xi,p) = -\bar{u}_1^{(\pm)}(x_p)\,\frac{v^{(\pm)}(\xi,p)}{v^{(\pm)}(0,p)} + v^{(\pm)}(\xi,p)\int\limits_0^{\xi} \frac{\mathrm{d}s}{(v^{(\pm)}(s,p))^2} \int\limits_{\pm\infty}^{s} v^{(\pm)}(\eta,p)\, r_1^{(\pm)}(\eta,p)d\eta, \tag{6}$$

где введено обозначение $v^{(\pm)}(\xi,p) := \partial Q_0^{(\pm)}(\xi,p)/\partial\xi$.

Задачи для определения функций внутреннего переходного слоя следующих порядков по ε аналогичны (5), а их решения находятся в явном виде по формулам вида (6).

3. Определение уровня перехода $p(\varepsilon)$. Подробнее остановимся на определении коэффициентов асимптотического приближения уровня перехода

$$p(\varepsilon) = p_0 + \varepsilon p_1 + \ldots \tag{7}$$

Из условия C^1-сшивания разложений (3) в точке x_p получим

$$\varepsilon\left(\frac{\partial U^{(+)}}{\partial x}\bigg|_{x=x_p} - \frac{\partial U^{(-)}}{\partial x}\bigg|_{x=x_p}\right) = \left[\frac{\partial Q_0}{\partial \xi}(0,p)\right]_-^+ + \varepsilon\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_p) + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi}(0,p)\right]_-^+ + \ldots, \tag{8}$$

где $[A]_-^+ := A^{(+)} - A^{(-)}$.

Главный член в правой части (8) $[\partial Q_0(0,p)/\partial\xi]_-^+ \equiv 0$, $p \in (\varphi^{(-)}(x_p), \varphi^{(+)}(x_p))$, откуда следует тождество $v^{(+)}(0,p) \equiv v^{(-)}(0,p) =: v_0(p)$ в силу условия 3.

Введём обозначение

$$\varepsilon\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_p) + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi}(0,p)\right]_-^+ + \ldots =: \frac{\varepsilon}{v_0(p(\varepsilon))}[K_1(p(\varepsilon)) + \varepsilon K_2(p(\varepsilon)) + \ldots] \tag{9}$$

и каждое слагаемое в правой части (9) представим в виде рядов по степеням ε, используя (7):

$$\varepsilon\left(\frac{\partial U^{(+)}}{\partial x}\bigg|_{x=x_p} - \frac{\partial U^{(-)}}{\partial x}\bigg|_{x=x_p}\right) = \frac{\varepsilon}{v_0(p_0)}\left[K_1(p_0) + \varepsilon\frac{\partial K_1}{\partial p}\bigg|_{p=p_0} p_1 + \varepsilon\, K_2(p_0)\right] + \ldots = 0. \tag{10}$$

Можно показать, что $K_1(p)$ приводится к виду

$$K_1(p) = -\int\limits_p^{\varphi^{(+)}} \left[\frac{\partial f^{(+)}}{\partial x}(u,x_p)\,\xi(u,p) + f_1^{(+)}(u,x_p)\right]du + \int\limits_p^{\varphi^{(-)}} \left[\frac{\partial f^{(-)}}{\partial x}(u,x_p)\,\xi(u,p) + f_1^{(-)}(u,x_p)\right]du.$$

Следующее условие обеспечивает выполнение равенства (10) в первом порядке по ε.

Условие 4. Пусть уравнение

$$K_1(p) = 0 \tag{11}$$

имеет корень $p = p_0 \in (\varphi^{(-)}(x_p), \varphi^{(+)}(x_p))$.

Равенство (10) во втором порядке ε приводит к уравнению для определения p_1:

$$\left.\frac{dK_1(p)}{dp}\right|_{p=p_0} p_1 + K_2(p_0) = 0. \tag{12}$$

Условие 5. Пусть выполняется неравенство

$$\left.\frac{dK_1(p)}{dp}\right|_{p=p_0} < 0.$$

Это условие обеспечивает разрешимость уравнения (12) и, как будет показано ниже, устойчивость контрастной структуры.

Отметим, что корень p_0 уравнения (11) может быть неединственным на указанном промежутке (см. пример 2). Далее будет показано, что каждому корню p_i уравнения (11), удовлетворяющему условию 5, отвечает асимптотически устойчивое по Ляпунову решение уравнения (1) с переходным слоем на уровне p_i.

Преобразуем последнее неравенство к виду

$$\frac{dK_1(p)}{dp} = -\int\limits_p^{\varphi^{(+)}} \left[\frac{\partial f^{(+)}}{\partial x}(u, x_p)\ \frac{\partial \xi(u,p)}{\partial p}\right] du + \int\limits_p^{\varphi^{(-)}} \left[\frac{\partial f^{(-)}}{\partial x}(u, x_p)\frac{\partial \xi(u,p)}{\partial p}\right] du +$$
$$+ \frac{\partial f^{(+)}}{\partial x}(p, x_p)\ \xi(p,p) + f_1^{(+)}(p, x_p) - \frac{\partial f^{(-)}}{\partial x}(p, x_p)\ \xi(p,p) - f_1^{(-)}(p, x_p).$$

Для $\xi(u,p)$ и $\partial\xi/\partial p$ получаем

$$\xi(u,p) = \int\limits_p^u \left(2\int\limits_{\varphi^{(\pm)}}^{u^*} \tilde f^{(\pm)}(\tilde u, x_p) d\tilde u\right)^{-1/2} du^*,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial p} = -\frac{\partial}{\partial p}\left(\int\limits_u^p \left(2\int\limits_{\varphi^{(\pm)}}^{u^*} \tilde f^{(\pm)}(\tilde u, x_p) d\tilde u\right)^{-1/2} du^*\right) = -\left(2\int\limits_{\varphi^{(\pm)}}^{p} \tilde f^{(\pm)}(\tilde u, x_p) d\tilde u\right) = -\frac{1}{v_0(p)}.$$

После подстановки приходим к равенству

$$\frac{dK_1(p)}{dp} = \frac{1}{v_0(p)} \int\limits_{\varphi^{(-)}}^{\varphi^{(+)}} \frac{\partial f(u, x_p)}{\partial x} du + f_1^{(+)}(p, x_p) - f_1^{(-)}(p, x_p).$$

В силу условия 3 (критический случай) первое слагаемое в правой части последнего равенства обращается в нуль, поэтому

$$\frac{dK_1(p)}{dp} = f_1^{(+)}(p, x_p) - f_1^{(-)}(p, x_p).$$

Таким образом, знак производной функции $K_1(p)$ (а следовательно, и устойчивость или неустойчивость контрастной структуры) в критическом случае определяется только разностью предельных значений $f_1^{(+)}(p, x_p)$ и $f_1^{(-)}(p, x_p)$ в точке x_p.

4. Существование и устойчивость решения. *Решением задачи* (1) назовём функцию $u(x,\varepsilon)\in C^1([-1,1])\cap C^2((-1,x_p)\cup(x_p,1))$ по переменной x, удовлетворяющую уравнению (1) при $x\in(-1,x_p)\cup(x_p,1)$, а также граничным условиям этой задачи.

Определение. Функции $\beta(x,\varepsilon)$ и $\alpha(x,\varepsilon)$ называются, соответственно, *верхним* и *нижним решениями задачи* (1), если $\beta(x,\varepsilon)$ удовлетворяет неравенствам

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}-f(\beta,x)-\varepsilon f_1(\beta,x)\leqslant 0,\quad -1<x<1, \tag{13}$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}(-1,\varepsilon)\leqslant 0,\quad \frac{\partial\beta}{\partial x}(1,\varepsilon)\geqslant 0, \tag{14}$$

а $\alpha(x,\varepsilon)$ — аналогичным неравенствам с противоположными знаками. Функции $\alpha(x,\varepsilon)$ и $\beta(x,\varepsilon)$ могут иметь в некоторой точке $x^*\in(-1,1)$ скачок производных допустимого знака, а именно:

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}(x^*+0,\varepsilon)-\frac{\partial\beta}{\partial x}(x^*-0,\varepsilon)\leqslant 0,\quad \frac{\partial\alpha}{\partial x}(x^*+0,\varepsilon)-\frac{\partial\alpha}{\partial x}(x^*-0,\varepsilon)\geqslant 0.$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (1)–(5). Тогда при достаточно малом ε существует решение $u(x,\varepsilon)$ задачи (1), для которого имеет место оценка*

$$|u(x,\varepsilon)-U_n(x,\varepsilon)|<C\varepsilon^{n+1}.$$

Здесь $U_n(x,\varepsilon)$ — частичные суммы порядка n асимптотических рядов (3), где положено $p=\hat p_n:=p_0+\varepsilon p_1+...+\varepsilon^n p_n$.

Доказательство. Воспользуемся следующим утверждением.

Утверждение [28, 29]. *Пусть существуют верхнее $\beta(x,\varepsilon)$ и нижнее $\alpha(x,\varepsilon)$ решения задачи (1), причём $\beta(x,\varepsilon)\geqslant\alpha(x,\varepsilon)$ при $x\in[-1,1]$. Тогда при достаточной гладкости функций $f(u,x)$ и $f_1^{(\pm)}(u,x)$ существует решение $u(x,\varepsilon)$ задачи (1), удовлетворяющее неравенствам $\alpha(x,\varepsilon)\leqslant u(x,\varepsilon)\leqslant\beta(x,\varepsilon)$.*

Поэтому достаточно построить верхнее и нижнее решения задачи (1), обладающие нужными свойствами. Это построение будем проводить путём модификации членов асимптотического ряда (3):

$$\begin{gathered}\beta_{n+2}(x,p_\delta,\varepsilon)=\bar u_0^{(\pm)}(x)+\varepsilon\bar u_1^{(\pm)}(x)+\ldots+\varepsilon^{n+2}\bar u_{n+2}^{(\pm)}(x)+\\ +Q_0^{(\pm)}(\xi,p_\delta)+\varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi,p_\delta)+\varepsilon^2Q_2^{(\pm)}(\xi,\hat p_{n+1})+\ldots+\xi^{n+2}Q_{n+2}^{(\pm)}(\xi,\hat p_{n+1})+\\ +R_\beta^{(\pm)}(\sigma_\pm,\varepsilon)+\varepsilon^{n+2}(\gamma+q_\beta^{(\pm)}(\xi,\hat p_{n+1})),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\alpha_{n+2}(x,p_{-\delta},\varepsilon)=\bar u_0^{(\pm)}(x)+\varepsilon\bar u_1^{(\pm)}(x)+\ldots+\varepsilon^{n+2}\bar u_{n+2}^{(\pm)}(x)+\\ +Q_0^{(\pm)}(\xi,p_{-\delta})+\varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi,p_{-\delta})+\varepsilon^2Q_2^{(\pm)}(\xi,\hat p_{n+1})+\ldots+\xi^{n+2}Q_{n+2}^{(\pm)}(\xi,\hat p_{n+1})+\\ +R_\alpha^{(\pm)}(\sigma_\pm,\varepsilon)+\varepsilon^{n+2}(-\gamma+q_\alpha^{(\pm)}(\xi,\hat p_{n+1})).\end{gathered}$$

Здесь $\gamma>0$ — постоянная, обеспечивающая выполнение неравенств (13), $p_\delta(\varepsilon)=p_0+\varepsilon p_1+\ldots$ $\ldots+\varepsilon^{n+1}(p_{n+1}+\delta)$, $\delta>0$ — некоторая постоянная величина.

Функции $q_{\alpha,\beta}$ нужны для устранения невязок в уравнениях для $Q_{n+2}^{(\pm)}$, вносимых постоянной γ. Функции q_β определяются как решение задачи

$$\frac{\partial^2 q_\beta^{(\pm)}(\xi,p)}{\partial\xi^2}-\frac{\partial f}{\partial u}(\bar u_0^{(\pm)}(x_p)+Q_0^{(\pm)}(\xi,p),x_p)q_\beta^{(\pm)}(\xi,p)=r_\beta^{(\pm)}(\xi,\varepsilon),$$
$$q_\beta^{(\pm)}(0,\varepsilon)+\gamma=0,$$
$$q_\beta^{(\pm)}(\pm\infty,\varepsilon)=0,$$

где $r_\beta(\xi,\varepsilon)=\gamma(\partial f(\bar u_0^{(\pm)}(x_p)+Q_0^{(\pm)}(\xi,p),x_p)/\partial u-\partial f(\varphi^{(\pm)}(x_p),x_p)/\partial u)$.

Нижнее решение $\alpha_{n+2}(x,p_{-\delta},\varepsilon)$ имеет аналогичную структуру.

Прямая подстановка показывает, что

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2\beta_{n+2}}{\partial x^2}-f(\beta_{n+2},x)-\varepsilon f_1(\beta_{n+2},x)=-\varepsilon^{n+2}\,\gamma\,\frac{\partial f}{\partial u}(\varphi^{(\pm)}(x),x)+O(\varepsilon^{n+3}).$$

Таким образом, в силу условия 3 при достаточно малых ε последнее выражение отрицательно. Неравенства (14), в свою очередь, выполняются за счёт аналогичной модификации пограничных функций $R^{(\pm)}(\sigma_\pm,\varepsilon)$.

Рассмотрим разность верхнего и нижнего решений

$$\beta_{n+2}(x,p_\delta,\varepsilon)-\alpha_{n+2}(x,p_{-\delta},\varepsilon)\geqslant 2\delta\varepsilon^{n+1}(C_0e^{-k_0|\xi|}-\varepsilon C_1e^{-k_1|\xi|})+2\gamma\varepsilon^{n+2}+O(\varepsilon^{n+3})\,, \tag{15}$$

где $C_{0,1}$ и $k_{0,1}$ — некоторые положительные константы.

Заметим, что неравенство $C_0e^{-k_0|\xi|}-\varepsilon C_1e^{-k_1|\xi|}>0$ выполнено для любых ξ, если $k_1>k_0$. В случае $k_1<k_0$ неравенство верно для $\xi<\ln(C_0/(\varepsilon C_1))^{1/(k_0-k_1)}$.

При $\xi=\ln(C_0/(\varepsilon C_1))^{1/(k_0-k_1)}$ слагаемые в неравенстве равны и имеют значения $C_0e^{-k_0\ln(C_0/(\varepsilon C_1))^{1/(k_0-k_1)}}=C_0(\varepsilon C_1/C_0)^{k_0/(k_0-k_1)}$. Степень при ε, равная $k_0/(k_0-k_1)$, больше единицы, так как $k_0>k_1$. Тогда при $\xi>\ln(C_0/(\varepsilon C_1))^{1/(k_0-k_1)}$ разность $C_0e^{-k_0|\xi|}-$ $-\varepsilon C_1e^{-k_1|\xi|}$ отрицательна и имеет порядок не меньше $\varepsilon^{k_0/(k_0-k_1)}$. Следовательно, слагаемое $2\delta\varepsilon^{n+1}(C_0e^{-k_0|\xi|}-\varepsilon C_1e^{-k_1|\xi|})<0$, но имеет порядок выше $O(\varepsilon^{n+2})$. В этом случае неравенство (15) достигается за счёт положительного слагаемого $2\gamma\varepsilon^{n+2}$.

Таким образом, упорядоченность решений $\alpha_{n+2}(x,p_{-\delta}(\varepsilon),\varepsilon)$ и $\beta_{n+2}(x,p_\delta(\varepsilon),\varepsilon)$ доказана.

Остаётся проверить условие на скачок производной верхнего и нижнего решений:

$$\frac{\partial\beta_{n+2}^{(+)}}{\partial x}(x_p,p_\delta,\varepsilon)-\frac{\partial\beta_{n+2}^{(-)}}{\partial x}(x_p,p_\delta,\varepsilon)\leqslant 0,\quad \frac{\partial\alpha_{n+2}^{(+)}}{\partial x}(x_p,p_{-\delta},\varepsilon)-\frac{\partial\alpha_{n+2}^{(-)}}{\partial x}(x_p,p_{-\delta},\varepsilon)\geqslant 0.$$

Легко видеть, что

$$\varepsilon\bigg(\frac{\partial\beta_{n+2}^{(+)}}{\partial x}(x_p,p_\delta,\varepsilon)-\frac{\partial\beta_{n+2}^{(-)}}{\partial x}(x_p,p_\delta,\varepsilon)\bigg)=$$
$$=\varepsilon^{n+2}\frac{1}{v_0(p_0)}\bigg(\delta\,\frac{dK(p_0)}{dp}-\gamma\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\tilde f_u-\bar f_u)v^{(\pm)}(\xi,p_0)d\xi\bigg)+O(\varepsilon^{n+3}),$$

где $\tilde f_u=\partial f(\varphi^{(\pm)}(x_p)+Q_0^{(\pm)}(\xi,p_0),x_p)/\partial u$, $\bar f_u=\partial f(\varphi^{(\pm)}(x_p),x_p)/\partial u$.

В силу условия 5 выбором достаточно большого значения $\delta>0$ обеспечивается необходимый знак скачка производной.

Аналогичным образом проверяются неравенства для нижнего решения $\alpha_{n+2}(x,p,\varepsilon)$.

Таким образом, из сформулированного ранее утверждения следует существование решения $u(x,\varepsilon)$ задачи (1), причём $\beta_{n+2}(x,p_\delta,\varepsilon)\geqslant u(x,\varepsilon)\geqslant\alpha_{n+2}(x,p_{-\delta},\varepsilon)$. Кроме того, из (15) получаем, что $\beta_{n+2}(x,p_\delta,\varepsilon)-\alpha_{n+2}(x,p_{-\delta},\varepsilon)=O(\varepsilon^{n+1})$, откуда вытекает оценка, сформулированная в теореме 1.

5. Асимптотическая устойчивость решения. Рассмотрим нестационарную задачу

$$\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial v}{\partial t}\right)=f(v,x)+\varepsilon f_1(v,x),\quad -1<x<1,\quad 0<t<\infty,$$

$$f_1(v,x):=\begin{cases}f_1^{(+)}(v,x), & u\in I_v,\quad x_p<x\leqslant 1;\\ f_1^{(-)}(v,x), & u\in I_v,\quad -1\leqslant x<x_p,\end{cases}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(-1,t,\varepsilon)=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}(1,t,\varepsilon)=0,\quad 0<t<\infty,$$

$$v(x,0,\varepsilon)=v^0(x,\varepsilon),\quad x\in[-1,1]. \tag{16}$$

Очевидно, что если $v^0(x,\varepsilon)=u(x,\varepsilon)$, где $u(x,\varepsilon)$ — решение задачи (1), то задача (16) имеет стационарное решение $v=u(x,\varepsilon)$.

Для доказательства асимптотической устойчивости по Ляпунову решения $u(x,\varepsilon)$ как решения задачи (16) используем метод сжимающих барьеров [18]. Будем искать нижнее и верхнее решения в виде

$$\alpha(x,t,\varepsilon)=u(x,\varepsilon)+e^{-\lambda(\varepsilon)t}(\alpha_{n+2}(x,\varepsilon)-u(x,\varepsilon)),$$

$$\beta(x,t,\varepsilon)=u(x,\varepsilon)+e^{-\lambda(\varepsilon)t}(\beta_{n+2}(x,\varepsilon)-u(x,\varepsilon)).$$

Легко видеть, что $\alpha(x,t,\varepsilon)<\beta(x,t,\varepsilon)$, поэтому остаётся проверить выполнение неравенств $N_\varepsilon\beta<0$ и $N_\varepsilon\alpha>0$. Для $N_\varepsilon\beta$ получаем

$$N_\varepsilon\beta=e^{-\lambda(\varepsilon)t}\Bigg[\Bigg(\varepsilon^2\Bigg(-\frac{\partial\beta_{n+2}}{\partial t}+\frac{\partial^2\beta_{n+2}}{\partial x^2}\Bigg)-f(\beta_{n+2},x)-\varepsilon f_1(\beta_{n+2},x)\Bigg)+$$
$$+\varepsilon^2\Bigg(-\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Bigg)-f(u,x)-\varepsilon f_1(u,x)+f(\beta_{n+2},x)+\varepsilon f_1(\beta_{n+2},x)-$$
$$-f(u,x)-\varepsilon f_1(u,x)-(f_u^*+\varepsilon f_{1u}^*)(\beta_{n+2}-u)+\varepsilon^2\lambda(\varepsilon)(\beta_{n+2}-u)\Bigg],$$

где символ $*$ означает, что значение функции берётся при аргументе

$$u(x,t,\varepsilon)+\theta e^{-\lambda(\varepsilon)t}(\beta_{n+2}(x,\varepsilon)-u(x,\varepsilon)),\quad 0<\theta<1.$$

Используя доказанные ранее оценки, а также учитывая, что $f(\beta_{n+2},x)+\varepsilon f_1(\beta_{n+2},x)-$ $-f(u,x)-\varepsilon f_1(u,x)-(f_u^*+\varepsilon f_{1u}^*)(\beta_{n+2}-u)=O(\varepsilon^{2n+2})$, получаем

$$N_\varepsilon\beta=e^{-\lambda(\varepsilon)t}\bigg(-\gamma\frac{\partial f}{\partial u}(\varphi^{(\pm)}(x),x)\varepsilon^{n+2}+O(\varepsilon^{n+3})+O(\varepsilon^{2n+2})+\varepsilon^2\lambda(\varepsilon)(\beta_{n+2}-u)\bigg).$$

Выбирая $\gamma>0$ достаточно большим, а $\lambda>0$ произвольной постоянной, получаем $N_\varepsilon\beta<0$ при $n\geqslant 0$. Аналогично можно показать, что $N_\varepsilon\alpha>0$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. *Если выполнены условия (1)–(5), то при достаточно малом ε стационарное решение $v=u(x,\varepsilon)$ задачи (16) асимптотически устойчиво по Ляпунову с областью устойчивости по крайней мере $\big[\alpha_2,\beta_2\big]$ и, следовательно, $u(x,\varepsilon)$ — единственное решение задачи (1) в указанной области.*

Для каждого корня p_i уравнения (11), удовлетворяющего условию 5, справедливы теоремы 1 и 2, обеспечивающие существование локально единственного асимптотически устойчивого по Ляпунову решения $u(x,\varepsilon)$ задачи (1) с уровнем перехода $p(0)=p_i$. Можно показать, как это было сделано в работе [30], что каждому корню p_i уравнения (11), удовлетворяющему неравенству $dK_1(p_0)/dp>0$, отвечает неустойчивое решение задачи (1) с уровнем перехода $p(0)=p_i$.

Таким образом, внутренний переходный слой в ε-окрестности точки x_p имеет структуру, которая полностью определяется расположением корней уравнения (11).

6. Примеры.

Пример 1. Рассмотрим следующую задачу:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u(u^2-1) + \varepsilon f_1(u,x), \quad -1 < x < 1,$$

$$f_1(u,x) := \begin{cases} f_1^{(+)}, & u \in I_u, \quad x_p < x \leqslant 1; \\ f_1^{(-)}, & u \in I_u, \quad -1 < x \leqslant x_p, \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-1,\varepsilon) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,\varepsilon) = 0, \tag{17}$$

где $f_1^{(\pm)} = \mathrm{const}$.

Очевидно, что условие 1 выполнено. Кроме того, выполнено и условие 2, где

$$\varphi^{(\pm)}(x) = \pm 1, \quad \varphi^0(x) = 0.$$

Легко проверить, что выполняется и условие 3.

Остановимся подробнее на проверке условий 4 и 5. В рамках поставленной задачи $K_1(p)$ определяется как

$$K_1(p) = -\int\limits_p^{\varphi^{(+)}} \left[\frac{\partial f^{(+)}}{\partial x}(u,x_p)\xi(u,p) + f_1^{(+)}(u,x_p)\right]du + \int\limits_p^{\varphi^{(-)}} \left[\frac{\partial f^{(-)}}{\partial x}(u,x_p)\xi(u,p) + f_1^{(-)}(u,x_p)\right]du =$$

$$= -\int\limits_p^{1} f_1^{(+)} du + \int\limits_p^{-1} f_1^{(-)} du = -(1-p)f_1^{(+)} + (-1-p)f_1^{(-)},$$

откуда имеем $p_0 = (f_1^{(+)} + f_1^{(-)})/(f_1^{(+)} - f_1^{(-)})$.

Легко видеть, что

$$\left.\frac{dK_1(p)}{dp}\right|_{p=p_0} = f_1^{(+)} - f_1^{(-)} < 0.$$

Учитывая, что $p_0 \in (-1,1)$, получаем следующие ограничения на $f_1^{(\pm)}$: $f_1^{(+)} < 0$, $f_1^{(-)} >$ > 0. При таких $f_1^{(\pm)}$ задача удовлетворяет условиям 4 и 5. Например, при $f_1^{(+)} = -1$ и $f_1^{(-)} = 0.5$ уровень перехода $p_0 = 1/3$. Следовательно, существует асимптотически устойчивое по Ляпунову решение $u(x,\varepsilon)$ задачи (17), для которого справедлива оценка

$$|u(x,\varepsilon) - U_0(x,\varepsilon)| < O(\varepsilon).$$

Пример 2. Рассмотрим задачу

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u(u^2-1) + \varepsilon f_1(u,x), \quad -1 < x < 1,$$

$$f_1(u,x) := \begin{cases} -7.5u^2 + 5u, & u \in I_u, \quad 0 < x \leqslant 1; \\ 0.15, & u \in I_u, \quad -1 \leqslant x < 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-1,\varepsilon) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,\varepsilon) = 0. \tag{18}$$

Все условия, сформулированные ранее, для поставленной задачи выполнены. Выражение для $K_1(p)$ принимает следующий вид:

$$K_1(p) = -\int\limits_p^{\varphi^{(+)}} \left[\frac{\partial f^{(+)}}{\partial x}(u,x_p)\xi(u,p) + f_1^{(+)}(u,x_p)\right]du + \int\limits_p^{\varphi^{(-)}} \left[\frac{\partial f^{(-)}}{\partial x}(u,x_p)\xi(u,p) + f_1^{(-)}(u,x_p)\right]du =$$

$$= -\int\limits_p^{1} f_1^{(+)}(u)du + \int\limits_p^{-1} f_1^{(-)}(u)du = -2.5p^3 + 2.5p^2 - 0.15p - 0.15 = 0.$$

На сегменте $[-1,1]$ уравнение имеет три корня, наибольший и наименьший из которых отвечают устойчивым решениям задачи (18) (рис. 1). Можно показать, что третий корень, находящийся между ними, соответствует неустойчивому решению задачи (18).

На рис. 2 показано поведение решения нестационарной задачи для различных начальных значений. Видно, что фронт движется к устойчивым решениям стационарной задачи.

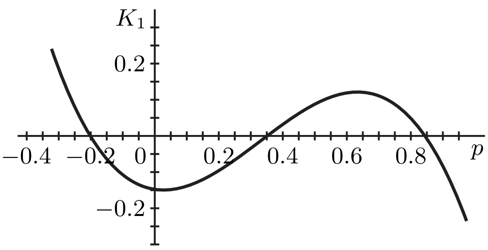

Рис. 1. Зависимость K_1 от p.

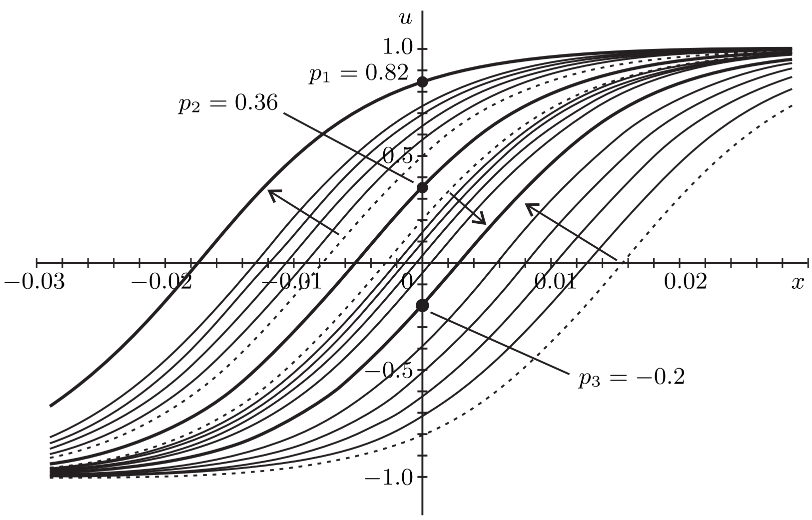

Рис. 2. Численное решение задачи (18): штриховые линии — начальные положения, жирные сплошные — решения стационарной задачи; тонкие сплошные — решения задачи для различных значений t, взятых с постоянным шагом. $x_p = 0$, $\varepsilon = 0.01$.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-11-00069).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Автоволновые процессы в системах с диффузией / Под ред. М.Т. Греховой и др. Горький, 1981.
2. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.* Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Фундам. и прикл. математика. 1998. Т. 4. С. 799–851.
3. *Нефедов Н.Н.* Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакция–диффузия–адвекция: теория и применение // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2021. Т. 61. № 12. С. 2074–2094.
4. *FitzHugh R.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophys. J. 1961. V. 1. P. 445–466.
5. *Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S.* An active pulse transmission line simulating nerve axon // Proc. Inst. Radio Engrs. 1962. V. 50. P. 2061–2070.
6. *McKean H.P.* Nagumo's equation // Adv. Math. 1970. V. 4. P. 209–223.
7. *Левинштейн М.Е., Пожела Ю.К., Шур М.С.* Эффект Ганна. М., 1975.
8. *Orlov A.O., Levashova N.T., Burbaev T.M.* The use of asymptotic methods for modelling of the carriers wave functions in the si/sige heterostructures with quantum-confined layers // J. of Phys.: Conf. Ser. 2015. V. 586. Art. 012003.
9. *Белянин М.П., Васильева А.Б.* О внутреннем переходном слое в одной задаче теории полупроводниковых плёнок // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1988. Т. 28. № 2. С. 224–236.
10. *Белянин М.П., Васильева А.Б., Воронов А.В., Тихонравов А.В.* Об асимптотическом подходе к задаче синтеза полупроводникового прибора // Мат. моделирование. 1989. Т. 1. № 9. С. 43–63.
11. *Nefedov N.N., Nikulin E.I.* Existence and stability of periodic contrast structures in the reaction–advection–diffusion problem // Rus. J. of Math. Phys. 2015. V. 22. P. 215–226.
12. *Nefedov N.N., Recke L., Schneider K.R.* Existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of reaction-advection-diffusion equations // J. of Math. Anal. and Appl. 2013. V. 405. P. 90–103.
13. *Нефедов Н.Н., Никулин Е.И.* Существование и асимптотическая устойчивость периодических двумерных контрастных структур в задаче со слабой линейной адвекцией // Мат. заметки. 2019. Т. 106. № 5. С. 708–722.
14. *Nefedov N.N., Nikulin E.I., Orlov A.O.* Existence of contrast structures in a problem with discontinuous reaction and advection // Rus. J. of Math. Phys. 2022. V. 29. № 2. P. 214–224.
15. *Nefedov N.N., Nikulin E.I., Orlov A.O.* Contrast structures in the reaction–diffusion–advection problem in the case of a weak reaction discontinuity // Rus. J. of Math. Phys. 2022. V. 29. № 1. P. 81–90.
16. *Нефедов Н.Н., Никулин Е.И.* Существование и устойчивость периодических контрастных структур в задаче реакция–адвекция–диффузия в случае сбалансированной нелинейности // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 524–537.
17. *Nefedov N., Sakamoto K.* Multi-dimensional stationary internal layers for spatially inhomogeneous reaction–diffusion equations with balanced nonlinearity // Hiroshima Math. J. 2003. V. 33. № 3. P. 391–432.
18. *Волков В.Т., Нефедов Н.Н.* Развитие асимптотического метода дифференциальных неравенств для исследования периодических контрастных структур в уравнениях реакция–диффузия // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2006. Т. 46. № 4. С. 615–623.
19. *Нефедов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 7. С. 1132–1139.
20. *Нефедов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов сингулярно возмущенных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 4. С. 719–723.
21. *Nefedov N.N.* Comparison principle for reaction–diffusion–advection problems with boundary and internal layers // Lect. Not. in Computer Sci. 2013. V. 8236. P. 62–72.
22. *Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н., Орлов А.О.* Стационарное уравнение реакция–диффузия с разрывным реактивным членом // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2017. Т. 57. № 5. С. 854–866.
23. *Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н., Орлов А.О.* Асимптотическая устойчивость стационарного решения многомерного уравнения реакция–диффузия с разрывным реактивным членом // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2019. Т. 59. № 4. С. 611–620.
24. *Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н., Николаева О.А.* Решение с внутренним переходным слоем двумерной краевой задачи реакция–диффузия–адвекция с разрывными реактивным и адвективным слагаемыми // Теор. и мат. физика. 2021. Т. 207. № 2. С. 293–309.

25. *Levashova N., Nefedov N., Nikolaeva O. et al.* The solution with internal transition layer of the reaction–diffusion equation in case of discontinuous reactive and diffusive terms // Math. Methods in the Appl. Sci. 2018. V. 41. № 18. P. 9203–9217.
26. *Нефедов Н.Н., Никулин Е.И., Орлов А.О.* О периодическом внутреннем слое в задаче реакция–диффузия с источником модульно-кубичного типа // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2020. Т. 60. № 9. С. 1513–1532.
27. *Pao C.V.* Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. New York; London, 1993.
28. *Павленко В.Н., Ульянова О.В.* Метод верхних и нижних решений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Изв. вузов. Сер. мат. 1998. Т. 42. № 11. С. 65–72.
29. *Лепчинский М.Г., Павленко В.Н.* Правильные решения эллиптических краевых задач с разрывными нелинейностями // Алгебра и анализ. 2005. Т. 17. № 3. С. 124–138.
30. *Никулин Е.И.* Контрастные структуры в задаче реакция–адвекция–диффузия, возникающей в дрейфо-диффузионной модели полупроводника, в случае негладкой реакции // Теор. и мат. физика. 2023. Т. 215. № 3. С. 360–376.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 14.06.2023 г.
После доработки 05.10.2023 г.
Принята к публикации 11.10.2023 г.