ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 10, с. 1433–1437

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.958

СУЩЕСТВОВАНИЕ ДВУХ РЕШЕНИЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ СОРБЦИИ

© 2023 г. А. М. Денисов, Чжу Дунцинь

Рассмотрена обратная задача для нелинейной математической модели динамики сорбции с неизвестным переменным кинетическим коэффициентом. Доказана теорема существования двух решений обратной задачи и обоснован итерационный метод её решения. Приведён пример применения предложенного метода для численного решения обратной задачи.

DOI: 10.31857/S0374064123100102, EDN: OQCIPL

Рассмотрим следующую задачу для функций $u(x,t)$ и $a(x,t)$:

$$u_x + a_t = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$a_t = \gamma(t)(u - \psi(a)), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{2}$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

$$a(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

где $\mu(t)$, $\gamma(t)$, $\psi(s)$ – заданные функции, а $Q_\tau = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant \tau\}$.

Задачу (1)–(4) можно интерпретировать как математическую модель процесса динамики сорбции [1, с. 174] с изменяющимся во времени кинетическим коэффициентом $\gamma(t)$.

Определение 1. *Решением задачи* (1)–(4) будем называть пару функций $u(x,t)$, $a(x,t)$ таких, что $u, a, u_x, a_t \in C(Q_T)$ и $u(x,t)$, $a(x,t)$ удовлетворяют (1)–(4).

В работе [2] была доказана следующая лемма о существовании, единственности и свойствах решения задачи (1)–(4).

Лемма 1. *Пусть функции $\gamma(t)$, $\mu(t)$ и $\psi(s)$ удовлетворяют следующим условиям:*

$$\gamma, \mu \in C[0,T], \quad \gamma(t) > 0, \quad \mu(t) > 0, \quad t \in [0,T],$$

$$\psi \in C^1(\mathbb{R}), \quad \psi(0) = 0, \quad 0 < \psi'(s) \leqslant \psi_1, \quad s \in \mathbb{R}, \quad \psi_1 = \text{const}.$$

Тогда существует единственная пара функций $u(x,t)$, $a(x,t)$, являющихся решением задачи (1)–(4). Кроме того, $u(x,t) > 0$, $a(x,t) \geqslant 0$, $(x,t) \in Q_T$.

Далее, чтобы подчеркнуть зависимость решения задачи (1)–(4) от функции $\gamma(t)$, будем обозначать его $u(x,t;\gamma)$, $a(x,t;\gamma)$.

Легко видеть, что задача (1)–(4) имеет эволюционный характер и её решение на множестве Q_τ, $\tau \in (0,T]$, однозначно определяется значениями функций $\mu(t)$, $\gamma(t)$ на отрезке $[0,\tau]$.

Сформулируем обратную задачу. Пусть функции $\psi(s)$ и $\mu(t)$ заданы, а $\gamma(t)$ неизвестна. Требуется определить функцию $\gamma(t)$ по следующей дополнительной информации о решении задачи (1)–(4):

$$u_x(l,t;\gamma) = h(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$

где $h(t)$ – заданная функция.

Пусть $t_0 \in (0,T]$. Дадим определение решения обратной задачи на отрезке $[0,t_0]$.

Определение 2. Функция $\gamma(t)$ называется *решением обратной задачи на отрезке* $[0,t_0]$, если $\gamma \in C[0,t_0]$, $\gamma(t) > 0$, $t \in [0,t_0]$, $u(x,t;\gamma)$ и $a(x,t;\gamma)$ удовлетворяют (1)–(5) для $(x,t) \in Q_{t_0}$.

В статье [2] была доказана теорема существования решения обратной задачи, в которой неизвестный коэффициент $\gamma(t)$ в задаче (1)–(4) определялся по дополнительной информации $u(l,t;\gamma)=g(t)$. Исследованию различных обратных задач для математических моделей динамики сорбции посвящены работы [3–12] и ряд других.

Перейдём к исследованию сформулированной обратной задачи. Было показано [2], что существование и единственность решения задачи (1)–(4) на множестве Q_{t_0} эквивалентно существованию и единственности непрерывного решения $u(x,t;\gamma)$, $a(x,t;\gamma)$ системы интегральных уравнений

$$u(x,t;\gamma)=\mu(t)e^{-\gamma(t)x}+\gamma(t)\int\limits_0^x e^{-\gamma(t)(x-s)}\psi(a(s,t;\gamma))\,ds,\quad (x,t)\in Q_{t_0},\tag{6}$$

$$a(x,t;\gamma)=\int\limits_0^t \mu(\tau)\gamma(\tau)e^{-\gamma(\tau)x}\,d\tau-\int\limits_0^t \gamma(\tau)\psi(a(x,\tau;\gamma))\,d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t(\gamma(\tau))^2\int\limits_0^x e^{-\gamma(\tau)(x-s)}\psi(a(s,\tau;\gamma))\,ds\,d\tau,\quad (x,t)\in Q_{t_0}.\tag{7}$$

Пусть функция $\gamma(t)$ является решением обратной задачи на отрезке $[0,t_0]$. Продифференцировав уравнение (6) по x, положив $x=l$ и использовав условие (5), имеем

$$\gamma(t)e^{-\gamma(t)l}=-\frac{h(t)}{\mu(t)}+\frac{\gamma(t)}{\mu(t)}\psi(a(l,t;\gamma))-\frac{(\gamma(t))^2}{\mu(t)}\int\limits_0^l e^{-\gamma(t)(l-s)}\psi(a(s,t;\gamma))\,ds,\quad 0\leqslant t\leqslant t_0.\tag{8}$$

Уравнения (7) и (8) определяют нелинейное уравнение для функции $\gamma(t)$.

Рассмотрим функцию $F(z)=z\exp(-zl)$ при $z>0$. Она достигает максимального значения e^{-1}/l при $z=1/l$. На интервале $(0,1/l)$ $F'(z)>0$, а на множестве $(1/l,+\infty)$ $F'(z)<0$.

Для любого отрезка $[a_1,a_2]\subset(0,1/l)$ на отрезке $[F(a_1),F(a_2)]$ существует обратная к $F(z)$ функция $G_1(s)$, отображающая $[F(a_1),F(a_2)]$ на $[a_1,a_2]$. Аналогично, для любого отрезка $[b_1,b_2]\subset(1/l,+\infty)$ на отрезке $[F(b_2),F(b_1)]$ существует обратная к $F(z)$ функция $G_2(s)$, отображающая $[F(b_2),F(b_1)]$ на $[b_1,b_2]$.

Полагая в уравнении (8) $t=0$, с учётом условия (4) и равенства $\psi(0)=0$ будем иметь

$$\gamma(0)\exp(-\gamma(0)l)=-h(0)/\mu(0).\tag{9}$$

Из этого равенства следует необходимое условие разрешимости обратной задачи:

$$0<-h(0)/\mu(0)<e^{-1}/l.\tag{10}$$

Очевидно, что если это условие выполнено, то уравнение (9) имеет два решения: первое

$$\gamma(0)=\gamma_{01}=G_1(-h(0)/\mu(0))\in(0,1/l)$$

и второе

$$\gamma(0)=\gamma_{02}=G_2(-h(0)/\mu(0))\in(1/l,+\infty).$$

Пусть d_1 и d_2 – положительные постоянные, $d_1<d_2$. Рассмотрим множество

$$\Gamma=\{\gamma(t)\in C[0,t_0],\quad d_1\leqslant\gamma(t)\leqslant d_2,\quad t\in[0,t_0]\}.$$

Лемма 2 [2]. *Пусть функции $\mu(t)$ и $\psi(s)$ удовлетворяют следующим условиям:*

$$\mu\in C[0,T],\quad \mu(t)>0,\quad t\in[0,T],$$

$$\psi \in C^1(\mathbb{R}), \quad \psi(0) = 0, \quad 0 < \psi'(s) \leqslant \psi_1, \quad s \in \mathbb{R}, \quad \psi_1 = \text{const}.$$

Тогда для любых функций $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, $t_0 \in (0, T]$, *справедлива оценка*

$$\max_{Q_{t_0}} |a(x, t, \gamma_1) - a(x, t, \gamma_2)| \leqslant c_1 t_0 \|\gamma_1 - \gamma_2\|_{C[0, t_0]},$$

где c_1 *– постоянная, не зависящая от* $t_0 \in (0, T]$ *и* $\gamma \in \Gamma$.

Пусть a и b – положительные постоянные такие, что

$$[\gamma_{01} - a, \gamma_{01} + a] \subset (0, 1/l), \quad [\gamma_{02} - b, \gamma_{02} + b] \subset (1/l, +\infty),$$

а $t_1, t_2 \in (0, T]$.

Определим множества

$$\Gamma_1 = \{\gamma(t) \in C[0, t_1], \quad \gamma_{01} - a \leqslant \gamma(t) \leqslant \gamma_{01} + a, \quad t \in [0, t_1]\}, \tag{11}$$

$$\Gamma_2 = \{\gamma(t) \in C[0, t_2], \quad \gamma_{02} - b \leqslant \gamma(t) \leqslant \gamma_{02} + b, \quad t \in [0, t_2]\}.$$

Рассмотрим на множестве Γ_1 оператор

$$(A_1\gamma)(t) = G_1\biggl(-\frac{h(t)}{\mu(t)} + \frac{\gamma(t)}{\mu(t)}\psi(a(l, t; \gamma)) - \frac{(\gamma(t))^2}{\mu(t)} \int\limits_0^l e^{-\gamma(t)(l-s)}\psi(a(s, t; \gamma))\, ds\biggr), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{12}$$

а на множестве Γ_2 – оператор

$$(A_2\gamma)(t) = G_2\biggl(-\frac{h(t)}{\mu(t)} + \frac{\gamma(t)}{\mu(t)}\psi(a(l, t; \gamma)) - \frac{(\gamma(t))^2}{\mu(t)} \int\limits_0^l e^{-\gamma(t)(l-s)}\psi(a(s, t; \gamma))\, ds\biggr), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_2.$$

Сформулируем и докажем теорему о существовании двух решений обратной задачи.

Теорема. *Предположим, что функции* $\mu(t)$, $h(t)$ *и* $\psi(s)$ *таковы, что* $\mu, h \in C[0, T]$, $\mu(t) > 0$, $h(t) < 0$ *для* $t \in [0, T]$ *и выполнено условие (10);* $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, $\psi(0) = 0$, $0 < \psi'(s) \leqslant \psi_1$, $s \in \mathbb{R}$, $\psi_1 = \text{const}$. *Тогда найдётся число* $t_0 \in (0, T]$ *такое, что на отрезке* $[0, t_0]$ *существуют два решения обратной задачи* $\bar\gamma_1(t)$ *и* $\bar\gamma_2(t)$.

Доказательство. Из уравнения (8) и определений (11) и (12) следует, что существование решения обратной задачи $\bar\gamma_1 \in \Gamma_1$ на отрезке $[0, t_1]$ эквивалентно существованию решения операторного уравнения

$$\gamma(t) = (A_1\gamma)(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{13}$$

на множестве Γ_1. Докажем существование решения уравнения (13) на множестве Γ_1, используя принцип сжимающих отображений.

Найдём условия, при которых оператор A_1 отображает множество Γ_1 в себя.

Из леммы 1 и уравнения (7) следует, что для всех $\gamma \in \Gamma_1$ справедлива оценка

$$0 \leqslant a(x, t; \gamma) \leqslant c_2 t_1, \quad (x, t) \in Q_{t_1}, \tag{14}$$

где $c_2 = (\gamma_{01} + a)\|\mu\|_{C[0,T]} \exp((\gamma_{01} + a)\psi_1 T)$.

Обозначим через m минимальное значение функции $\mu(t)$ на отрезке $[0, T]$. Из определения множества Γ_1 и оценки (14) следует, что

$$\max_{[0, t_1]} \biggl|\frac{\gamma(t)}{\mu(t)}\psi(a(l, t; \gamma)) - \frac{(\gamma(t))^2}{\mu(t)} \int\limits_0^l e^{-\gamma(t)(l-s)}\psi(a(s, t; \gamma))\, ds\biggr| \leqslant c_3 t_1, \tag{15}$$

где $c_3 = m^{-1} 2(\gamma_{01} + a)\psi_1 c_2$.

Обозначим через $\omega(\delta)$ модуль непрерывности функции $-h(t)/\mu(t)$ на отрезке $[0,T]$. Выберем число t_1 так, что

$$F(\gamma_{01}-a) < F(\gamma_{01}) - \omega(t_1) - c_3 t_1 < F(\gamma_{01}) + \omega(t_1) + c_3 t_1 < F(\gamma_{01}+a). \tag{16}$$

Из определений оператора A_1, множества Γ_1 и оценки (15) следует, что при t_1, удовлетворяющем условию (16), оператор A_1 отображает множество Γ_1 в себя.

Найдём условие, при выполнении которого оператор A_1 является сжимающим на множестве Γ_1. Пусть $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_1$. С учётом оценки (14) и леммы 2 имеем

$$\left| \frac{\gamma_1(t)}{\mu(t)} \psi(a(l,t;\gamma_1)) - \frac{(\gamma_1(t))^2}{\mu(t)} \int_0^l e^{-\gamma_1(t)(l-s)} \psi(a(s,t;\gamma_1))\, ds - \right.$$

$$\left. - \frac{\gamma_2(t)}{\mu(t)} \psi(a(l,t;\gamma_2)) + \frac{(\gamma_2(t))^2}{\mu(t)} \int_0^l e^{-\gamma_2(t)(l-s)} \psi(a(s,t;\gamma_2))\, ds \right| \leqslant c_4 t_1 \|\gamma_1 - \gamma_2\|_{C[0,t_1]}, \tag{17}$$

где $c_4 = m^{-1}\psi_1[c_2 + (\gamma_{01}+a)(c_1 + 2lc_2) + (\gamma_{01}+a)^2(l^2 c_2 + lc_1)]$.

Обозначим через g_m максимум производной функции $G_1(s)$ на $[F(\gamma_{01}-a), F(\gamma_{01}+a)]$. Из определения оператора A_1 и оценки (17) следует, что

$$\|A_1\gamma_1 - A_1\gamma_2\|_{C[0,t_1]} \leqslant g_m c_4 t_1 \|\gamma_1 - \gamma_2\|_{C[0,t_1]}.$$

Учитывая это неравенство, получаем, что если t_1 удовлетворяет неравенству

$$g_m c_4 t_1 < 1, \tag{18}$$

то оператор A_1 является сжимающим на множестве Γ_1.

Так как существует $t_1 \in (0,T]$ такое, что для него выполнены неравенства (16) и (18), то при этом t_1 оператор A_1 отображает множество Γ_1 в себя и является сжимающим на этом множестве. Следовательно, на Γ_1 существует единственное решение обратной задачи $\bar\gamma_1(t)$.

Совершенно аналогично доказывается, что существует $t_2 \in (0,T]$ такое, что для него оператор A_2 отображает множество Γ_2 в себя и является сжимающим на этом множестве. Следовательно, на Γ_2 существует единственное решение обратной задачи $\bar\gamma_2(t)$. Выбрав $t_0 = \min\{t_1, t_2\}$, получим, что на отрезке $[0,t_0]$ существуют два решения обратной задачи $\bar\gamma_1(t)$ и $\bar\gamma_2(t)$. Теорема доказана.

Приведём численный пример, иллюстрирующий существование двух решений обратной задачи. Схема расчётов была следующей. На множестве Γ_1 задавалась функция $\bar\gamma_1(t)$, с которой решалась задача (1)–(4) и вычислялась функция $h(t) = u_x(l,t;\bar\gamma_1)$. Очевидно, что функция $\bar\gamma_1(t)$ является решением обратной задачи для этой функции $h(t)$. Другое решение обратной задачи $\bar\gamma_2(t)$ с этой функцией $h(t)$ находилось в результате применения итерационного метода для решения уравнения $\gamma(t) = (A_2\gamma)(t)$ на множестве Γ_2. Приближённые значения решений обратной задачи $\bar\gamma_{1ap}(t)$ и $\bar\gamma_{2ap}(t)$ определялись в результате применения итерационных методов:

$$\gamma_{n+1}(t) = (A_1\gamma_n)(t), \quad \gamma_0(t) = \gamma_{01}, \quad \gamma_{n+1}(t) = (A_2\gamma_n)(t), \quad \gamma_0(t) = \gamma_{02}, \quad n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}.$$

Расчёты проводились при $l = 1$, $T = 1$, $\mu(t) = t + 0.2$, $\psi(s) = s(3-s)^{-1}$. Число итераций N определялось из условия $\max\limits_{[0,T]} |\gamma_N(t) - \gamma_{N-1}(t)| \leqslant 0.001$.

На рис. 1 приведены функция $\bar\gamma_1(t) = 0.6t^2 + 0.2$ (сплошная кривая) и найденное в результате применения первого итерационного метода приближённое решение $\bar\gamma_{1ap}(t)$ (точки), а на рис. 2 – приближённое решение обратной задачи $\bar\gamma_{2ap}(t)$ (точки), полученное в результате применения второго итерационного метода; штриховыми линиями показаны значения γ_{01} и γ_{02} соответственно.

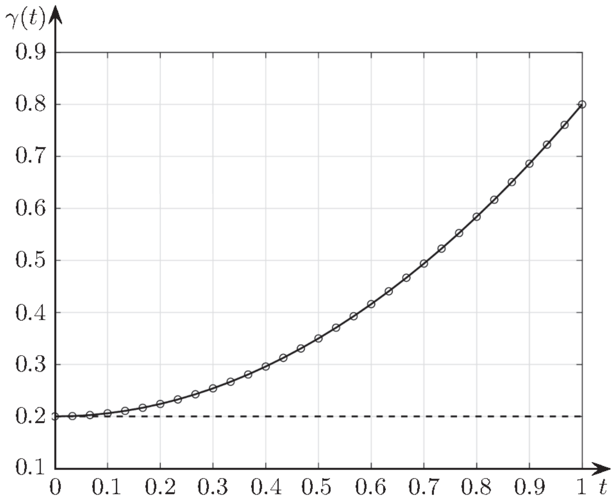

Рис. 1. Приближённое решение обратной задачи $\bar{\gamma}_{1ap}(t)$.

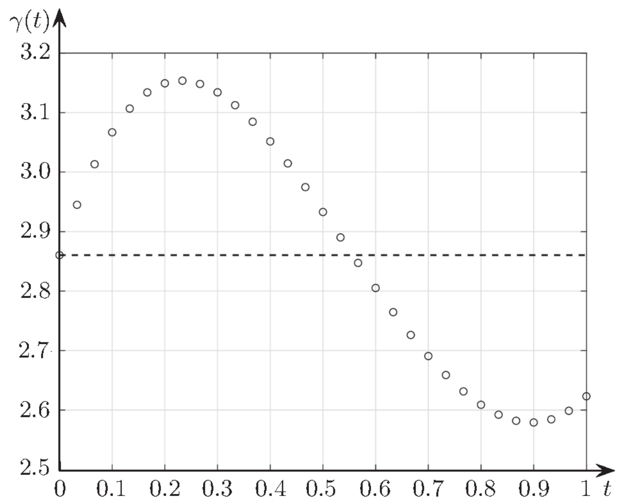

Рис. 2. Приближённое решение обратной задачи $\bar{\gamma}_{2ap}(t)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1999.
2. *Денисов А.М., Чжу Дунцинь.* Обратная задача для математической модели динамики сорбции с переменным кинетическим коэффициентом // Вестн. Московского ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. 2022. № 4. С. 5–13.
3. *Денисов А.М., Туйкина С.Р.* О некоторых обратных задачах неравновесной динамики сорбции // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276. № 1. С. 100–102.
4. *Lorenzi A., Paparoni E.* An inverse problem arising in the theory of absorption // Appl. Anal. 1990. V. 36. № 3. P. 249–263.
5. *Muraviev D.N., Chanov A.V., Denisov A.M., Omarova F., Tuikina S.R.* A numerical method for calculating isotherms of ion exchange on impregnated sulfonate ion-exchangers based on data of dynamic experiments // Reactive Polymers. 1992. V. 17. № 1. P. 29–38.
6. *Denisov A.M., Lamos H.* An inverse problem for a nonlinear mathematical model of sorption dynamics with mixed-diffusional kinetics // J. Inverse and Ill Posed Problems. 1996. V. 4. № 3. P. 191–202.
7. *Щеглов А.Ю.* Метод решения обратной граничной задачи динамики сорбции с учётом диффузии внутри зерна // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2002. Т. 42. № 4. С. 580–590.
8. *Denisov A.M., Lorenzi A.* Recovering an unknown coefficient in an absorption model with diffusion // J. Inverse and Ill Posed Problems. 2007. V. 15. № 6. P. 599–610.
9. *Tuikina S.R., Solov'eva S.I.* Numerical solution of an inverse problem for a two-dimensional model of sorption dynamics // Comput. Math. and Model. 2012. V. 23. № 1. P. 34–41.
10. *Tuikina S.R.* A numerical method for the solution of two inverse problems in the mathematical model of redox sorption // Comput. Math. and Model. 2020. V. 31. № 1. P. 96–103.
11. *Денисов А.М., Ефимов А.А.* Итерационный метод численного решения обратной коэффициентной задачи для системы уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 7. С. 900–909.
12. *Денисов А.М.* Существование и единственность решения одной системы нелинейных интегральных уравнений // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 9. С. 1174–1181.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 14.06.2023 г.
После доработки 24.08.2023 г.
Принята к публикации 25.08.2023 г.