ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 10, с. 1397–1411

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958

ОДНОМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

© 2023 г. В. Г. Романов

Для системы нелинейных уравнений электродинамики рассматривается задача об определении коэффициента проводимости среды, стоящего при нелинейности. Предполагается, что коэффициенты электрической и магнитной проницаемостей постоянны, а проводимость зависит лишь от одной пространственной переменной x, причём эта проводимость равна нулю на полуоси $x<0$. Для моды, в которой участвуют только две компоненты электромагнитного поля, рассматривается процесс распространения волн, вызванный падением плоской волны с постоянной амплитудой из области $x<0$ на неоднородность, локализованную на полупрямой $x\geqslant 0$. Изучаются условия разрешимости прямой задачи при заданном коэффициенте проводимости и свойства её решения. Для решения обратной задачи задаётся след электрической компоненты решения прямой задачи на конечном отрезке оси $x=0$. Устанавливается теорема о локальном существовании и единственности решения обратной задачи и находится глобальная оценка условной устойчивости её решений.

DOI: 10.31857/S0374064123100072, EDN: ONVPZC

Введение. Рассмотрим систему уравнений электродинамики с нелинейным поглощением

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\varepsilon\mathbf{E}_t+\sigma(\mathbf{x})|\mathbf{E}|^2\mathbf{E},\quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\mu\mathbf{H},\quad (\mathbf{x},t)\in\mathbb{R}^4, \tag{1}$$

в которой ε и μ – вещественные положительные числа, характеризующие электрическую и магнитную проницаемости, $\sigma(\mathbf{x})\geqslant 0$ – проводимость среды, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ – векторы напряжённости электрического и магнитного полей. В частном случае, когда функция $\sigma(\mathbf{x})$ зависит лишь от одной пространственной переменной x, существуют решения системы уравнений (1) вида $\mathbf{E}=(0,E_2(x,t),0)$, $\mathbf{H}=(0,0,H_3(x,t))$, при этом компоненты $E_2(x,t)$ и $H_3(x,t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\varepsilon(E_2)_t+\sigma(x)(E_2)^3+(H_3)_x=0,\quad \mu(H_3)_t+(E_2)_x=0,\quad (x,t)\in\mathbb{R}^2. \tag{2}$$

В дальнейшем система уравнений (2) будет рассматриваться в области $\Omega(T)=\{(x,t): x\in\mathbb{R}, t\leqslant T\}$, $T>0$.

Обозначим через $c=1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ скорость распространения электромагнитных волн и через $\theta_0(t)$ – функцию Хевисайда: $\theta_0(t)=1$ для $t\geqslant 0$ и $\theta_0(t)=0$ для $t<0$.

Предположим, что $\sigma(x)\equiv 0$ для $x<0$ и $\sigma\in C[0,cT/2]$. Для уравнений (2) при известной функции $\sigma(x)$ поставим задачу Коши с данными при $t\leqslant 0$:

$$E_2|_{t\leqslant 0}=\frac{a}{2\sqrt{\varepsilon}}\theta_0(t-x/c),\quad H_3|_{t\leqslant 0}=\frac{a}{2\sqrt{\mu}}\theta_0(t-x/c), \tag{3}$$

где $a>0$ – некоторое фиксированное число.

Задачу (2), (3) назовём *прямой задачей.* Поставим по отношению к ней *обратную задачу* об определении коэффициента $\sigma(x)$, а именно: требуется найти $\sigma(x)$ по следу компоненты E_2 решения прямой задачи на отрезке $[0,T]$ оси $x=0$:

$$E_2|_{x=0}=f(t),\quad t\in[0,T]. \tag{4}$$

Прямые и обратные задачи для нелинейных гиперболических уравнений и систем активно изучаются в последнее десятилетие. Прямые задачи обычно посвящены вопросам существования или несуществования решений на бесконечном интервале по времени (см., например, статьи [1–3] и литературу в них). Обратные задачи заключаются в определении переменных коэффициентов, входящих в уравнения. В частности, в работах [4–9] для полулинейных уравнений на лоренцевом многообразии рассмотрены вопросы реконструкции этого многообразия по данным о решении прямых задач (например, по заданному отображению Дирихле–Неймана). Обратные задачи об определении коэффициентов в различных полулинейных уравнениях изучены в работах [10–14]. В статьях [15–18] ряд обратных задач исследован для полулинейного волнового уравнения. Их анализ основан на асимптотических разложениях решения прямой задачи по особенностям вблизи характеристических поверхностей. Это позволило свести рассматриваемые задачи к задачам интегральной геометрии (или томографии). В работе [19] подобный метод использован для исследования трёхмерной обратной задачи для нелинейной системы уравнений электродинамики.

Рассматриваемая в настоящей статье постановка одномерной (по числу пространственных переменных) обратной задачи для нелинейной системы (1) является новой. В п. 1 анализируются свойства решения прямой задачи (2), (3) для заданного множества функций $\sigma(x)$. Результаты представлены теоремой об однозначной разрешимости прямой задачи. В п. 2 установлена теорема о локальном существовании и единственности решения обратной задачи. В п. 3 дана глобальная оценка условной устойчивости решения обратной задачи.

1. Исследование прямой задачи. Преобразуем задачу (2), (3) к более удобному для исследований виду. С этой целью введём римановы инварианты $u(x,t)$ и $v(x,t)$, определив их следующим образом:

$$u=\sqrt{\varepsilon}E_2+\sqrt{\mu}H_3,\quad v=\sqrt{\varepsilon}E_2-\sqrt{\mu}H_3.$$

Тогда уравнения (2) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\right)u+\hat{\sigma}(x)(u+v)^3=0,\quad \left(\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\partial}{\partial x}\right)v+\hat{\sigma}(x)(u+v)^3=0,\quad (x,t)\in\Omega(T), \tag{5}$$

где $\hat{\sigma}(x)=\sigma(x)/(8\varepsilon^2)$. Условия (3) для функций $u(x,t)$, $v(x,t)$ принимают вид

$$u|_{t\leqslant 0}=a\theta_0(t-x/c),\quad v|_{t\leqslant 0}=0. \tag{6}$$

В обратной задаче условие (4) должно быть заменено на следующее:

$$(u+v)|_{x=0}=2\sqrt{\varepsilon}f(t),\quad t\in[0,T]. \tag{7}$$

Введём в рассмотрение области

$$D_T^+=\{(x,t):x\geqslant 0,\ \ x/c<t\leqslant T-x/c\},\quad (D_T')^+=\{(x,t):x\geqslant 0,\ \ 0\leqslant t\leqslant x/c\leqslant T/2\},$$

$$D_T^-=\{(x,t):x<0,\ \ -x/c<t\leqslant T+x/c\},\quad (D_T')^-=\{(x,t):x<0,\ \ 0\leqslant t\leqslant -x/c\leqslant T/2\}.$$

Так как $\hat{\sigma}(x)=0$ для $x<0$, то в области $D_T^-\bigcup(D_T')^-$ функция $u(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению $u_t+cu_x=0$ и начальному условию $u|_{t=0}=a$, поэтому $u(x,t)=a$ для $(x,t)\in D_T^-\bigcup(D_T')^-$. Кроме того, из уравнения $v_t-cv_x=0$ и начального условия $v|_{t=0}=0$ следует, что $v(x,t)=0$ для $(x,t)\in(D_T')^-$. Проинтегрировав уравнение $v_t-cv_x=0$, находим, что

$$v(x,t)=v(0,t+x/c),\quad (x,t)\in D_T^-.$$

Таким образом, функции $u(x,t)$, $v(x,t)$ полностью определяются в области $D_T^-\bigcup(D_T')^-$ граничными значениями функции $v|_{x=0}$. В связи с этим в дальнейшем будем рассматривать прямую задачу только в области $D_T^+\bigcup(D_T')^+$. Из изложенного выше следует граничное условие

$$u(0,t)=a,\quad t\in[0,T]. \tag{8}$$

В области $(D'_T)^+$ система уравнений (5) однородна и удовлетворяет нулевым начальным условиям $u|_{t=0} = 0$, $v|_{t=0} = 0$, поэтому

$$u(x,t) = 0, \quad 0 < t < x/c < T/2; \quad v(x,t) = 0, \quad 0 \leqslant t < x/c \leqslant T/2.$$

В частности, отсюда и из второго уравнения (5) следует условие

$$v(x, x/c) = 0, \quad x \in [0, cT/2]. \tag{9}$$

Задача (5) с граничными условиями (8) и (9) корректна в области D_T^+. Заменим её системой интегральных уравнений. Интегрируя второе уравнение (5) на плоскости переменных ξ, τ вдоль характеристики $c\tau + \xi = ct + x$ и используя условие (9), получаем

$$v(x,t) = -\int\limits_{(t+x/c)/2}^{t} \hat\sigma(\xi)(u(\xi,\tau) + v(\xi,\tau))^3|_{\xi = x + c(t-\tau)}\,d\tau, \quad (x,t) \in D_T^+. \tag{10}$$

Интегрируя первое уравнение (5) вдоль характеристики $c\tau - \xi = ct - x$ от точки (x,t) до точки $(0, t - x/c)$ и используя условие (8), находим второе интегральное уравнение

$$u(x,t) = a - \int\limits_{t-x/c}^{t} \hat\sigma(\xi)(u(\xi,\tau) + v(\xi,\tau))^3|_{\xi = x - c(t-\tau)}\,d\tau, \quad (x,t) \in D_T^+. \tag{11}$$

При исследовании системы интегральных уравнений (10), (11) удобно использовать новую функцию

$$w(x,t) = u(x,t) + v(x,t).$$

Интегральное уравнение для этой функции образуется в результате сложения уравнений (10) и (11) и имеет вид

$$w(x,t) = a - \int\limits_{t-x/c}^{t} \hat\sigma(\xi) w^3(\xi,\tau)|_{\xi = x - c(t-\tau)}\,d\tau -$$

$$- \int\limits_{(t+x/c)/2}^{t} \hat\sigma(\xi) w^3(\xi,\tau)|_{\xi = x + c(t-\tau)}\,d\tau, \quad (x,t) \in D_T^+. \tag{12}$$

Определение 1. Будем говорить, что $\hat\sigma \in \mathcal{Q}(\sigma_0, \sigma_1, T)$, если

$$\sigma \in C([0, cT/2]), \quad 0 < \sigma_0 \leqslant \hat\sigma(x) \leqslant \sigma_1, \quad x \in [0, cT/2]. \tag{13}$$

Лемма 1. *Пусть $\hat\sigma \in \mathcal{Q}(\sigma_1, T)$ и выполнено условие*

$$a^2 \sigma_1 T \leqslant 1. \tag{14}$$

Тогда уравнение (12) имеет единственное решение, принадлежащее пространству $C(D_T^+)$, и для него выполнены неравенства

$$a/2 \leqslant w(x,t) \leqslant a, \quad (x,t) \in D_T^+. \tag{15}$$

Замечание 1. Условие (14) при фиксированных T и σ_1 является условием на выбор положительного числа a в прямой задаче.

Доказательство леммы 1. Определим для уравнения (12) последовательные приближения $w_n(x,t)$ по формулам

$$w_0(x,t) = a,$$

$$w_n(x,t)=a-\int\limits_{t-x/c}^{t}\hat\sigma(\xi)w_{n-1}^3(\xi,\tau)|_{\xi=x-c(t-\tau)}\,d\tau-$$

$$-\int\limits_{(t+x/c)/2}^{t}\hat\sigma(\xi)w_{n-1}^3(\xi,\tau)|_{\xi=x+c(t-\tau)}\,d\tau,\quad n\in\mathbb{N},\quad (x,t)\in D_T^+.$$

Из равенства $w_0(x,t)=a$ и условий (13), (14) следует, что $w_1\in C(D_T^+)$, и для этой функции выполнены соотношения

$$\frac{a}{2}\leqslant a-\sigma_1a^3\frac{T}{2}\leqslant w_1(x,t)\leqslant a,\quad (x,t)\in D_T^+.$$

Так как $w_1\in C(D_T^+)$, отсюда следует, что $w_2\in C(D_T^+)$. Кроме того, из неравенства $w_1(x,t)\leqslant a$ вытекают соотношения

$$\frac{a}{2}\leqslant a-\sigma_1a^3\frac{T}{2}\leqslant w_2(x,t)\leqslant a,\quad (x,t)\in D_T^+.$$

Аналогичные рассуждения приводят к выводу, что при любом n справедливо утверждение $w_n\in C(D_T^+)$, и все последовательные приближения ограничены сверху и снизу положительными числами:

$$\frac{a}{2}\leqslant w_n(x,t)\leqslant a,\quad n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\},\quad (x,t)\in D_T^+. \tag{16}$$

Покажем равномерную сходимость последовательности $w_n(x,t)$ в области D_T^+. Вычислив разность $w_{k+1}(x,t)-w_k(x,t)=\widetilde w_{k+1}(x,t)$, $k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, получим

$$|\widetilde w_1(x,t)|\leqslant\sigma_1\biggl(\int\limits_{t-x/c}^{t}a^3\,d\tau+\int\limits_{(t+x/c)/2}^{t}a^3\,d\tau\biggr),$$

$$|\widetilde w_{k+1}(x,t)|\leqslant\sigma_1\int\limits_{t-x/c}^{t}[(w_k^2(\xi,\tau)+w_k(\xi,\tau)w_{k-1}(\xi,\tau)+w_{k-1}^2(\xi,\tau))|\widetilde w_k(\xi,\tau)|]_{\xi=x-c(t-\tau)}\,d\tau+$$

$$+\sigma_1\int\limits_{(t+x/c)/2}^{t}[(w_k^2(\xi,\tau)+w_k(\xi,\tau)w_{k-1}(\xi,\tau)+w_{k-1}^2(\xi,\tau))\times$$

$$\times|\widetilde w_k(\xi,\tau)|]_{\xi=x+c(t-\tau)}\,d\tau,\quad k\in\mathbb{N},\quad (x,t)\in D_T^+. \tag{17}$$

Так как $w_{k-1}(x,t)\leqslant a$, $w_k(x,t)\leqslant a$, то из формулы (17) вытекают неравенства

$$|\widetilde w_1(x,t)|\leqslant\frac{1}{2}a^3\sigma_1t,$$

$$|\widetilde w_{k+1}(x,t)|\leqslant 3a^2\sigma_1\Biggl[\int\limits_{t-x/c}^{t}|\widetilde w_k(\xi,\tau)|_{\xi=x-c(t-\tau)}\,d\tau+$$

$$+\int\limits_{(t+x/c)/2}^{t}|\widetilde w_k(\xi,\tau)|_{\xi=x+c(t-\tau)}\,d\tau\Biggr],\quad k\in\mathbb{N},\quad (x,t)\in D_T^+. \tag{18}$$

Из неравенств (18) находим последовательно:

$$|\widetilde{w}_1(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\sigma_1 a^3 t, \quad |\widetilde{w}_2(x,t)| \leqslant \frac{1}{3}a(6\sigma_1 a^2)^2\frac{t^2}{2!},$$

$$|\widetilde{w}_n(x,t)| \leqslant \frac{1}{3}a(6\sigma_1 a^2)^n\frac{t^n}{n!} \leqslant \frac{1}{3}a(6\sigma_1 a^2)^n\frac{T^n}{n!}, \quad n=3,4,\ldots, \quad (x,t)\in D_T.$$

Отсюда следует равномерная сходимость последовательности $w_n(x,t)$ в области D_T^+. Предельная функция $w(x,t)$ этой последовательности является функцией класса $C(D_T^+)$. Из неравенств (16) вытекает, что для неё справедливы оценки (15).

Установим единственность непрерывного решения уравнения (12). Допустим, что уравнение имеет два таких решения: $w_1(x,t)$ и $w_2(x,t)$. Обозначим $\overline{w}(x,t)=w_1(x,t)-w_2(x,t)$. Тогда

$$|\overline{w}(x,t)| \leqslant \sigma_1 \int\limits_{t-x/c}^{t} [(w_1^2(\xi,\tau)+w_1(\xi,\tau)w_2(\xi,\tau)+w_2^2(\xi,\tau))|\overline{w}(\xi,\tau)|]_{\xi=x-c(t-\tau)}\,d\tau +$$

$$+\sigma_1 \int\limits_{(t+x/c)/2}^{t} [(w_1^2(\xi,\tau)+w_1(\xi,\tau)w_2(\xi,\tau)+w_2^2(\xi,\tau))|\overline{w}(\xi,\tau)|]_{\xi=x+c(t-\tau)}\,d\tau, \quad (x,t)\in D_T^+. \quad (19)$$

С учётом того, что $w_1(x,t)$ и $w_2(x,t)$ не превосходят числа a, из неравенства (19) выводим оценку

$$|\overline{w}(x,t)| \leqslant 3a^2\sigma_1\Bigg(\int\limits_{t-x/c}^{t}|\overline{w}(\xi,\tau)|_{\xi=x-c(t-\tau)}\,d\tau + \int\limits_{(t+x/c)/2}^{t}|\overline{w}(\xi,\tau)|_{\xi=x+c(t-\tau)}\,d\tau\Bigg), \quad (x,t)\in D_T^+. \quad (20)$$

Пусть

$$z(t)=\begin{cases}\max\limits_{x\in[0,ct]}|\overline{w}(x,t)|, & t\in[0,T/2],\\ \max\limits_{x\in[0,T-ct]}|\overline{w}(x,t)|, & t\in[T/2,T].\end{cases}$$

Тогда из (20) следует неравенство

$$z(t)\leqslant 6a^2\sigma_1\int\limits_0^t z(\tau)\,d\tau, \quad t\in[0,T],$$

из которого вытекает, что $z(t)=0$ для всех $t\in[0,T]$, и, значит, $\overline{w}(x,t)=0$ в области D_T^+. Поэтому $w_1(x,t)=w_2(x,t)$ для $(x,t)\in D_T^+$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда решение уравнения (12) принадлежит классу $C^1(D_T^+)$. Кроме того, если выполнено условие*

$$48a^2\sigma_1^2 T\leqslant\sigma_0, \quad (21)$$

то имеет место оценка

$$\frac{\sigma_0 a^3}{32}\leqslant -w_t(x,t)\leqslant\frac{\sigma_1 a^3}{2}, \quad (x,t)\in D_T^+. \quad (22)$$

Замечание 2. Как и в случае леммы 1, условие (21) является условием на выбор числа a.

Доказательство леммы 2. Чтобы показать, что функция $w(x,t)$ обладает в области D_T^+ непрерывными частными производными по переменным x и t, запишем уравнения (10)–(12), заменив в них переменную интегрирования τ на ξ. После этой замены представим уравнения для функций $v(x,t)$ и $u(x,t)$ в виде

$$v(x,t) = -\frac{1}{c}\int\limits_x^{(x+ct)/2} \hat\sigma(\xi)w^3(\xi,\tau)|_{\tau=t+(x-\xi)/c}\,d\xi, \quad (x,t)\in D_T^+, \tag{23}$$

$$u(x,t) = a - \frac{1}{c}\int\limits_0^x \hat\sigma(\xi)w^3(\xi,\tau)|_{\tau=t-(x-\xi)/c}\,d\xi, \quad (x,t)\in D_T^+. \tag{24}$$

Уравнение для $w(x,t)$ имеет вид

$$w(x,t) = -\frac{1}{c}\int\limits_0^x \hat\sigma(\xi)w^3(\xi,\tau)|_{\tau=t-(x-\xi)/c}\,d\xi -$$

$$-\frac{1}{c}\int\limits_x^{(x+ct)/2} \hat\sigma(\xi)w^3(\xi,\tau)|_{\tau=t+(x-\xi)/c}\,d\xi, \quad (x,t)\in D_T^+. \tag{25}$$

Продифференцтровав равенство (25) по переменной t, получим

$$w_t(x,t) = -\frac{3}{c}\int\limits_0^x \hat\sigma(\xi)w^2(\xi,\tau)w_\tau(\xi,\tau)|_{\tau=t-(x-\xi)/c}\,d\xi - \frac{3}{c}\int\limits_x^{(x+ct)/2} \hat\sigma(\xi)w^2(\xi,\tau)w_\tau(\xi,\tau)|_{\tau=t+(x-\xi)/c}\,d\xi -$$

$$-\frac{1}{2}\hat\sigma((x+ct)/2)w^3((x+ct)/2,(t+x/c)/2), \quad (x,t)\in D_T^+. \tag{26}$$

Аналогично, продифференцировав уравнение (25) по переменной x, будем иметь

$$w_x(x,t) = \frac{3}{c^2}\int\limits_0^x \hat\sigma(\xi)w^2(\xi,\tau)w_\tau(\xi,\tau)|_{\tau=t-(x-\xi)/c}\,d\xi - \frac{3}{c^2}\int\limits_x^{(x+ct)/2} \hat\sigma(\xi)w^2(\xi,\tau)w_\tau(\xi,\tau)|_{\tau=t+(x-\xi)/c}\,d\xi -$$

$$-\frac{1}{2c}\hat\sigma((x+ct)/2)w^3((x+ct)/2,(t+x/c)/2), \quad (x,t)\in D_T^+. \tag{27}$$

Рассмотрим уравнение (26). Для удобства дальнейших вычислений введём функцию

$$\varphi(x,t) = -w_t(x,t)$$

и вернёмся в (26) к переменной интегрирования τ. Тогда получим уравнение

$$\varphi(x,t) = \varphi_0(x,t) - 3\int\limits_{t-x/c}^{t} \hat\sigma(\xi)w^2(\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)|_{\xi=x-c(t-\tau)}\,d\tau -$$

$$-3\int\limits_{(t+x/c)/2}^{t} \hat\sigma(\xi)w^2(\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)|_{\xi=x+c(t-\tau)}\,d\tau, \quad (x,t)\in D_T^+, \tag{28}$$

в котором

$$\varphi_0(x,t) = \frac{1}{2}\hat{\sigma}((x+ct)/2)w^3((x+ct)/2,(t+x/c)/2). \tag{29}$$

Так как функция w^2, входящая в (28), известна, то это уравнение является линейным интегральным уравнением относительно функции $\varphi(x,t)$. Оно принадлежит к уравнениям типа Вольтерры с непрерывным ядром. Его решение можно найти методом последовательных приближений. Действительно, определим $\varphi_n(x,t)$ формулой

$$\varphi_n(x,t) = \varphi_0(x,t) - 3\int\limits_{t-x/c}^{t} \hat{\sigma}(\xi)w^2(\xi,\tau)\varphi_{n-1}(\xi,\tau)|_{\xi=x-c(t-\tau)}\,d\tau -$$

$$-3\int\limits_{(t+x/c)/2}^{t} \hat{\sigma}(\xi)w^2(\xi,\tau)\varphi_{n-1}(\xi,\tau)|_{\xi=x+c(t-\tau)}\,d\tau, \quad n\in\mathbb{N}, \quad (x,t)\in D_T^+. \tag{30}$$

Покажем, что последовательность $\varphi_n(x,t)$ сходится равномерно в области D_T^+. Для функции $\varphi_0(x,t)$ из равенства (29) следует оценка

$$0 < \varphi_0(x,t) \leqslant \frac{\sigma_1 a^3}{2}, \quad (x,t)\in D_T^+.$$

Из формулы (30) находим последовательно, что

$$|\varphi_1(x,t)-\varphi_0(x,t)| \leqslant \frac{\sigma_1 a^3}{2}(6\sigma_1 a^2)t, \quad |\varphi_2(x,t)-\varphi_1(x,t)| \leqslant \frac{\sigma_1 a^3}{2}(6\sigma_1 a^2)^2\frac{t^2}{2!},$$

$$|\varphi_n(x,t)-\varphi_{n-1}(x,t)| \leqslant \frac{\sigma_1 a^2}{2}(6\sigma_1 a^3)^n\frac{t^n}{n!} \leqslant \frac{\sigma_1 a^3}{2}(6\sigma_1 a^2)^n\frac{T^n}{n!}, \quad n=3,4,\ldots, \quad (x,t)\in D_T^+.$$

Из этих оценок следует равномерная сходимость последовательности $\varphi_n(x,t)$ в области D_T^+. Следовательно, предельная функция $\varphi(x,t)$ последовательности $\varphi_n(x,t)$ является непрерывной в D_T^+. Единственность решения уравнения (28) устанавливается стандартным способом.

Так как функция $\varphi(x,t)$ непрерывна в области D_T^+, то из уравнения (27) следует непрерывность в той же области производной $w_x(x,t)$. Таким образом, установлена принадлежность функции $w(x,t)$ классу $C^1(D_T^+)$.

Установим теперь оценку (22) при выполнении условия (21). В этом случае последовательные приближения могут быть оценены более точно. Учитывая, что $a/2 \leqslant w(x,t) \leqslant a$ (согласно лемме 1), из формулы (29) получаем соотношения

$$\frac{\sigma_0 a^3}{16} \leqslant \varphi_0(x,t) \leqslant \frac{\sigma_1 a^3}{2}, \quad (x,t)\in D_T^+.$$

Далее из (30), используя условие (21), находим оценки

$$\frac{\sigma_0 a^3}{32} \leqslant \frac{\sigma_0 a^3}{16} - \frac{3\sigma_1^2 a^5 T}{2} \leqslant \varphi_1(x,t) \leqslant \frac{\sigma_1 a^3}{2},$$

$$\frac{\sigma_0 a^3}{32} \leqslant \frac{\sigma_0 a^3}{16} - \frac{3\sigma_1^2 a^5 T}{2} \leqslant \varphi_n(x,t) \leqslant \frac{\sigma_1 a^3}{2}, \quad n=2,3,\ldots, \quad (x,t)\in D_T^+,$$

из которых следует, что предельная функция $\varphi(x,t)$ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{\sigma_0 a^3}{32} \leqslant \varphi(x,t) \leqslant \frac{\sigma_1 a^3}{2}, \quad n=2,3,\ldots, \quad (x,t)\in D_T^+. \tag{31}$$

Из (31) следует (22).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда система уравнений (10), (11) имеет в области* D_T^+ *единственное решение и оно принадлежит классу* $C^1(D_T^+)$.

Доказательство. Из леммы 1 следуют существование, единственность и непрерывность в области D_T^+ функций $u(x,t)$ и $v_2(x,t)$. Чтобы показать, что эти функции обладают в области D_T^+ непрерывными производными по переменным x и t, достаточно продифференцировать уравнения (23), (24) по этим переменным. Выполним это, как пример, для функции $v(x,t)$. Продифференцировав уравнение (23), получим равенства

$$v_t(x,t) = -\frac{3}{c}\int\limits_x^{(x+ct)/2} \hat\sigma(\xi)w^2(\xi,\tau)w_\tau(\xi,\tau)|_{\tau=t+(x-\xi)/c}\,d\xi -$$

$$-\frac{1}{2}\hat\sigma((x+ct)/2)w^3((x+ct)/2,(t+x/c)/2), \quad (x,t)\in D_T^+, \tag{32}$$

$$v_x(x,t) = -\frac{3}{c^2}\int\limits_x^{(x+ct)/2} \hat\sigma(\xi)w^2(\xi,\tau)w_\tau(\xi,\tau)|_{\tau=t+(x-\xi)/c}\,d\xi -$$

$$-\frac{1}{2c}\hat\sigma((x+ct)/2)w^3((x+ct)/2,(t+x/c)/2)+\frac{1}{c}\hat\sigma(x)w^3(x,t), \quad (x,t)\in D_T^+. \tag{33}$$

Из равенств (32), (33) вытекает непрерывность производных функции $v(x,t)$ в области D_T^+. Следовательно, $v\in C^1(D_T^+)$. Аналогично доказывается, что $u\in C^1(D_T^+)$.

2. Теорема о существовании и единственности локального решения обратной задачи. Рассмотрим обратную задачу (2)–(4), полагая, что функция $f(t)$ задана. Принимая введённые далее обозначения, заменим её эквивалентной задачей (5)–(7). Проведённое выше исследование прямой задачи показывает, что функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$ должны удовлетворять на границе области D_T^+ условиям (8), (9). Поэтому обратную задачу можно переформулировать в следующем виде: найти функции $\hat\sigma(x)$, $u(x,t)$ и $v(x,t)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\right)u+\hat\sigma(x)w^3=0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\partial}{\partial x}\right)v+\hat\sigma(x)w^3=0, \quad (x,t)\in D_T^+, \tag{34}$$

в которых $w=u+v$, и условиям

$$u(0,t)=a, \quad v(0,t)=2\sqrt{\varepsilon}f(t)-a, \quad t\in[0,T], \quad v(x,x/c)=0, \quad x\in cT/2. \tag{35}$$

Если предположить, что условия лемм 1 и 2 выполнены, то из этих лемм следует, что функция $f(t)$ должна удовлетворять следующим условиям:

$$f\in C^1[0,T], \quad f(t)>0, \quad f'(t)<0, \quad t\in[0,T], \quad f(0)=a. \tag{36}$$

Последнее из этих равенств следует из уравнения (12) для функции $w(x,t)$. Однако при рассмотрении вопроса о разрешимости обратной задачи мы не в праве предполагать выполнения условий лемм 1 и 2. Но отмеченное выше даёт основание предположить выполнение условий (36). Покажем, что при выполнении этих условий существует локально единственное решение обратной задачи (34), (35).

Теорема 2. *Пусть выполнены уравнения (34) и соотношения (35), а функция* $f(t)$ *удовлетворяет условиям (36). Тогда найдётся* $T^*\in(0,T]$ *такое, что на отрезке* $[0,T^*]$ *существует единственное непрерывное и положительное решение обратной задачи.*

Доказательство. Согласно (35) функция $v(0,t)$ задана на отрезке $[0,T]$. Поэтому запишем для неё новое интегральное соотношение, более удобное здесь, чем (10). Проинтегрировав второе уравнение (34) вдоль характеристики $\xi + c\tau = x + ct$ от точки $(x,t) \in D_T^+$ до точки $(0, t + x/c)$, получим уравнение

$$v(x,t) = 2\sqrt{\varepsilon} f(t + x/c) - a - \frac{1}{c}\int\limits_0^x \hat{\sigma}(\xi) w^3(\xi, t + (x-\xi)/c)\, d\xi, \quad (x,t) \in D_T^+.$$

Складывая его с уравнением (24), находим уравнение для функции $w(x,t)$:

$$w(x,t) = w_0(x,t) - \frac{1}{c}\int\limits_0^x \hat{\sigma}(\xi) w^3(\xi, t + (x-\xi)/c)\, d\xi -$$

$$- \frac{1}{c}\int\limits_0^x \hat{\sigma}(\xi) w^3(\xi, t - (x-\xi)/c)\, d\xi, \quad (x,t) \in D_T^+, \tag{37}$$

в котором

$$w_0(x,t) = 2\sqrt{\varepsilon} f(t + x/c).$$

Продифференцировав это уравнение по переменной t и сохранив ранее введённое обозначение $\varphi(x,t) = -w_t(x,t)$, получим уравнение

$$\varphi(x,t) = \varphi_0(x,t) - \frac{3}{c}\int\limits_0^x \hat{\sigma}(\xi) w^2(\xi, t + (x-\xi)/c) \varphi(\xi, t + (x-\xi)/c)\, d\xi -$$

$$- \frac{3}{c}\int\limits_0^x \hat{\sigma}(\xi) w^2(\xi, t - (x-\xi)/c) \varphi(\xi, t - (x-\xi)/c)\, d\xi, \quad (x,t) \in D_T^+, \tag{38}$$

где

$$\varphi_0(x,t) = -2\sqrt{\varepsilon} f'(t + x/c).$$

Положим $x = 0$ в (32) и используем вторую формулу из (35). Тогда придём к уравнению

$$2\sqrt{\varepsilon} f'(t) = \frac{3}{c}\int\limits_0^{ct/2} \hat{\sigma}(\xi) w^2(\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)|_{\tau = t - \xi/c}\, d\xi - \frac{1}{2}\hat{\sigma}(ct/2) w^3(ct/2, t/2), \quad t \in [0,T],$$

которое преобразуем к виду

$$\hat{\sigma}(x) = \hat{\sigma}_0(x) + \hat{\sigma}_0(x)\left(\frac{w_0^3(x,x/c)}{w^3(x,x/c)} - 1\right) +$$

$$+ \frac{6}{cw^3(x,x/c)}\int\limits_0^x \hat{\sigma}(\xi) w^2(\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)|_{\tau = (2x-\xi)/c}\, d\xi, \quad x \in [0, cT/2], \tag{39}$$

здесь

$$\hat{\sigma}_0(x) = -\frac{4\sqrt{\varepsilon} f'(2x/c)}{w_0^3(x,x/c)}.$$

Соотношения (37)–(39) образуют в области D_T^+ замкнутую систему уравнений относительно функций $w(x,t)$, $\varphi(x,t)$ и $\hat{\sigma}(x)$. Из условий теоремы 2 следует, что функции $w_0(x,t)$, $\varphi_0(x,t)$

и $\hat\sigma_0(x)$ непрерывны и положительны в D_T^+. Поэтому найдутся положительные числа α и β такие, что

$$\alpha \leqslant w_0(x) \leqslant \beta, \quad \alpha \leqslant \varphi_0(x) \leqslant \beta, \quad (x,t) \in D_T^+, \quad \alpha \leqslant \hat\sigma_0(x) \leqslant \beta, \quad x \in [0, cT/2]. \tag{40}$$

Введём вектор-функции

$$\psi(x,t) = (w(x,t), \varphi(x,t), \hat\sigma(x)) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3),$$

$$\psi^0(x,t) = (w_0(x,t), \varphi_0(x,t), \hat\sigma_0(x)) = (\psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0).$$

Пусть $\mathcal{M}(T)$ – множество функций $\psi(x,t)$, непрерывных в D_T^+ и таких, что

$$\|\psi - \psi^0\| = \max_{k=1,2,3} \max_{(x,t)\in D_T^+} |\psi_k(x,t) - \psi_k^0(x,t)| \leqslant \frac{\alpha}{2}. \tag{41}$$

Запишем систему уравнений (37)–(39) в операторном виде

$$\psi = \mathcal{A}(\psi), \tag{42}$$

где $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3)$ – нелинейный векторный оператор, а его компоненты определены правыми частями уравнений (37)–(39) соответственно. Покажем, что оператор $\mathcal{A}$ является сжимающим на множестве $\mathcal{M}(T^*)$ при подходящем выборе T^*.

Докажем сначала, что для некоторого $T_1 \in (0, T]$ оператор $\mathcal{A}$ переводит множество $\mathcal{M}(T_1)$ в себя. Пусть $\psi \in \mathcal{M}(T)$. Тогда из неравенств (40), (41) следуют априорные оценки для компонент функции $\psi(x,t)$:

$$\frac{\alpha}{2} \leqslant \psi_k(x,t) \leqslant \beta + \frac{\alpha}{2}, \quad k = 1,2,3, \quad (x,t) \in D_T^+. \tag{43}$$

Из уравнения (37), оценивая первую компоненту вектора $\mathcal{A}(\psi) - \psi^0$ с помощью неравенств (43), находим, что

$$|\mathcal{A}_1(\psi) - w_0(x,t)| \leqslant C_1 T, \quad C_1 = \left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)^4, \quad (x,t) \in D_T^+. \tag{44}$$

Действуя аналогично, из уравнения (38) получаем оценку

$$|\mathcal{A}_2(\psi) - \varphi_0(x,t)| \leqslant C_2 T, \quad C_2 = 3\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)^4, \quad (x,t) \in D_T^+. \tag{45}$$

Чтобы оценить разность $|\mathcal{A}_3(\psi) - \hat\sigma_0(x)|$, используем неравенство (44) для оценки второго слагаемого правой части уравнения (39). При этом

$$\left|\frac{w_0^3(x,x/c)}{w^3(x,x/c)} - 1\right| = \frac{|w(x,x/c) - w_0(x,x/c)|}{w^3(x,x/c)}(w^2(x,x/c) + w(x,x/c)w_0(x,x/c) + w_0^2(x,x/c)) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{24}{\alpha^3}\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)^6 T, \quad x \in [0, cT/2].$$

Из уравнения (39) имеем оценку

$$|\mathcal{A}_3(\psi) - \hat\sigma_0(x)| \leqslant C_3 T, \quad C_3 = \frac{24}{\alpha^3}\left[\beta\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)^6 + \left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)^4\right], \quad x \in [0, cT/2]. \tag{46}$$

Выберем T_1 из условия

$$T_1 = \min\left(T, \frac{\alpha}{2C_1}, \frac{\alpha}{2C_2}, \frac{\alpha}{2C_3}\right).$$

Тогда из оценок (44)–(46) следует, что выполнено неравенство (41), если в нём положить $T = T_1$. Следовательно, оператор $\mathcal{A}(\psi)$ отображает множество $\mathcal{M}(T_1)$ на себя.

Покажем теперь, что оператор $\mathcal{A}(\psi)$ сжимает расстояние между любыми элементами множества $\mathcal{M}(T^*)$ при некотором $T^* \in (0, T_1]$. Пусть $\psi^k = (w_k, \varphi_k, \hat\sigma_k)$, $k = 1, 2,$ – два произвольных элемента множества $\mathcal{M}(T)$. Запишем равенство (37) для $k = 1$ и $k = 2$ и вычтем одно из другого. Тогда из полученного равенства следует оценка

$$|\mathcal{A}_1(\psi^1) - \mathcal{A}_1(\psi^2)| = |w_1(x,t) - w_2(x,t)| \leqslant \frac{1}{c}\int\limits_0^x |\hat\sigma_1(\xi) - \hat\sigma_2(\xi)| w_1^3(\xi,\tau)|_{\tau=t+(x-\xi)/c}\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{c}\int\limits_0^x \hat\sigma_2(\xi)(w_1^2(\xi,\tau) + w_1(\xi,\tau)w_2(\xi,\tau) + w_2^2(\xi,\tau))|w_1(\xi,\tau) - w_2(\xi,\tau)|_{\tau=t+(x-\xi)/c}\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{c}\int\limits_0^x |\hat\sigma_1(\xi) - \hat\sigma_2(\xi)| w_1^3(\xi,\tau)|_{\tau=t-(x-\xi)/c}\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{c}\int\limits_0^x \hat\sigma_2(\xi)(w_1^2(\xi,\tau) + w^1(\xi,\tau)w_2(\xi,\tau) + w_2^2(\xi,\tau))|w_1(\xi,\tau) - w_2(\xi,\tau)|_{\tau=t-(x-\xi)/c}\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C_4 T\|\psi^1 - \psi^2\|, \quad (x,t) \in D_T^+, \tag{47}$$

в которой $C_4 = 4(\beta + \alpha/2)^3$. Аналогично из равенства (38) имеем оценку

$$|\mathcal{A}_2(\psi^1) - \mathcal{A}_2(\psi^2)| = |\varphi_1(x,t) - \varphi_2(x,t)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{c}\int\limits_0^x [|\sigma_1(\xi) - \sigma_2(\xi)| w_1^2(\xi,\tau)\varphi_1(\xi,\tau) + \sigma_2(\xi)(w_1(\xi,\tau) + w_2(\xi,\tau))|w_1(\xi,\tau) - w_2(\xi,\tau)|\varphi_1(\xi,\tau) +$$

$$+ \sigma_2(\xi) w_2^2(\xi,\tau)|\varphi_1(\xi,\tau) - \varphi_2(\xi,\tau)|]_{\tau=t+(x-\xi)/c}\, d\xi +$$

$$+ \frac{3}{c}\int\limits_0^x [|\sigma_1(\xi) - \sigma_2(\xi)| w_1^2(\xi,\tau)\varphi_1(\xi,\tau) + \sigma_2(\xi)(w_1(\xi,\tau) + w_2(\xi,\tau))|w_1(\xi,\tau) - w_2(\xi,\tau)|\varphi_1(\xi,\tau) +$$

$$+ \sigma_2(\xi) w_2^2(\xi,\tau)|\varphi_1(\xi,\tau) - \varphi_2(\xi,\tau)|]_{\tau=t-(x-\xi)/c}\, d\xi \leqslant C_5\|\psi^1 - \psi^2\| T, \quad (x,t) \in D_T^+, \tag{48}$$

в которой $C_5 = 12(\beta + \alpha/2)^3$.

Из уравнения (39) находим, что

$$|\mathcal{A}_3(\psi^1) - \mathcal{A}_3(\psi^2)| = |\hat\sigma_1(x) - \hat\sigma_2(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|w_1(x,x/c) - w_2(x,x/c)|}{w_1^3(x,x/c) w_2^3(x,x/c)} (w_1^2(x,x/c) + w_1(x,x/c)w_2(x,x/c) + w_2^2(x,x/c)) \times$$

$$\times \left(\hat\sigma_0(x) w_0^3(x,x/c) + \frac{6}{c}\int\limits_0^x \hat\sigma_1(\xi) w_1^2(\xi,\tau)\varphi_1(\xi,\tau)|_{\tau=(2x-\xi)/c}\, d\xi\right) +$$

$$+ \frac{6}{c w_2^3(x,x/c)} \int\limits_0^x [|\hat\sigma_1(\xi) - \hat\sigma_2(\xi)| w_1^2(\xi,\tau)\varphi_1(\xi,\tau) + \hat\sigma_2(\xi)(w_1(\xi,\tau) + w_2(\xi,\tau)) \times$$

$$\times |w_1(\xi,\tau) - w_2(\xi,\tau)|\varphi_1(\xi,\tau) + \hat\sigma_2(\xi) w_2^2(\xi,\tau)|\varphi_1(\xi,\tau) - \varphi_2(\xi,\tau)|]_{\tau=(2x-\xi)/c}\, d\xi, \quad x \in [0, cT/2].$$

Используем для оценки разности $w_1(x,x/c)-w_2(x,x/c)$ соотношения (44) и неравенства (40), (43) для остальных слагаемых. Тогда вычисления приводят к оценке

$$|\mathcal{A}_3(\psi^1)-\mathcal{A}_3(\psi^2)|\leqslant(C_6T+C_7T^2)\|\psi^1-\psi^2\|,\quad x\in[0,cT/2], \tag{49}$$

где постоянные C_6 и C_7 вычисляются по формулам

$$C_6=3\frac{8^2\beta^4}{\alpha^6}\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)^6+24\frac{8}{c\alpha^3}\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)^3,\quad C_7=9\frac{8^2}{\alpha^6}\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)^{10}.$$

Пусть $\rho\in(0,1)$. Учитывая, что $C_5>C_4$, выберем T^* из условия

$$T^*=\min\left(T_1,\frac{\rho}{C_5},\frac{-C_6+\sqrt{C_6^2+4\rho C_7}}{2C_7}\right).$$

Тогда из оценок (47)–(49) следует, что

$$\|\mathcal{A}(\psi^1)-\mathcal{A}(\psi^2)\|\leqslant\rho\|\psi^1-\psi^2\|,\quad (x,t)\in D^+_{T^*}.$$

Так как $\rho<1$, то это означает, что оператор $\mathcal{A}$ сжимает расстояние между элементами множества $\mathcal{M}(T^*)$. Из теоремы о сжимающих отображениях заключаем, что уравнение (42) имеет решение на множестве $\mathcal{M}(T^*)$, и притом только одно. Отсюда следует утверждение теоремы 2.

3. Глобальная оценка условной устойчивости решений обратной задачи. Из установленного выше факта, что оператор $\mathcal{A}$ является сжимающим на множестве $\mathcal{M}(T^*)$, нетрудно вывести оценку устойчивости решения обратной задачи на отрезке $[0,cT^*/2]$. Однако это будет локальная оценка, так как, вообще говоря, $T^*<T$. При априорном условии, что решения обратной задачи принадлежат заданному множеству $\mathcal{Q}(\sigma_0,\sigma_1,T)$, можно получить оценку устойчивости решения обратной задачи при любом конечном T. Эта оценка имеет условный характер, но она является глобальной и поэтому зачастую полезна при конструировании вычислительных алгоритмов. Далее выводится оценка условной устойчивости решений рассматриваемой обратной задачи.

Определение 2. Будем говорить, что функция $f\in\mathcal{F}(T)$, если $f\in C^1([0,T])$ и для неё выполнены условия (36).

Обозначим

$$\|f\|_{C^1([0,T])}=\max\left(\max_{t\in[0,T]}|f(t)|,\max_{t\in[0,T]}|f'(t)|\right).$$

Теорема 3. *Пусть для $k=1,2$ существуют решения $\hat\sigma_k\in\mathcal{Q}(\sigma_0,\sigma_1,T)$ обратной задачи с данными $f=f_k\in\mathcal{F}(T)$ в (7). Пусть, кроме того, для числа $a>0$ выполнены условия (14) и (21). Тогда найдётся положительная постоянная $C=C(\varepsilon,a,\sigma_0,\sigma_1,T)$ такая, что*

$$|\hat\sigma_1(x)-\hat\sigma_2(x)|\leqslant C\|f_1-f_2\|_{C^1([0,T])},\quad x\in[0,cT/2]. \tag{50}$$

Доказательство. Обозначим через $u_k(x,t)$, $v_k(x,t)$, $k=1,2$, функции, соответствующие решению прямой задачи (5)–(7) при $\hat\sigma=\hat\sigma_k(x)$, и пусть $w_k(x,t)=u_k(x,t)+v_k(x,t)$.

Тогда функции $w_k(x,t)$, $k=1,2$, положительны в D^+_T (как следует из леммы 1) и для них верны оценки

$$0<a/2\leqslant w_k(x,t)\leqslant a,\quad (x,t)\in D^+_T,\quad k=1,2. \tag{51}$$

Кроме того, из леммы 2 следует положительность функций $\varphi_k(x,t)=-(w_k)_t(x,t)$ и справедливость неравенств

$$\frac{\sigma_0a^3}{32}\leqslant\varphi_k(x,t)\leqslant\frac{\sigma_1a^3}{2},\quad (x,t)\in D^+_T,\quad k=1,2. \tag{52}$$

Это означает также, что функции $f_k(t) = w_k(0,t)$ должны удовлетворять условиям

$$\frac{\sigma_0 a^3}{32} \leqslant -f_k'(t) \leqslant \frac{\sigma_1 a^3}{2}, \quad t \in [0,T], \quad k = 1,2. \tag{53}$$

Введём обозначения

$$w_1(x,t) - w_2(x,t) = \overline{w}(x,t), \quad \varphi_1(x,t) - \varphi_2(x,t) = \overline{\varphi}(x,t), \quad \hat{\sigma}_1(x) - \hat{\sigma}_2(x) = \overline{\sigma}(x),$$

$$f_1(t) - f_2(t) = \bar{f}(t), \quad Z(x) = \max\Big(\max_{t\in[x/c,T-x/c]} |\overline{w}(x,t)|, \max_{t\in[x,T-x]} |\overline{\varphi}(x,t)|, |\overline{\sigma}(x)|\Big). \tag{54}$$

Воспользуемся равенствами (37)–(39). Заменим в них функции w, φ, $\hat{\sigma}$ на w_k, φ_k, $\hat{\sigma}_k$, $k = 1,2$, и w_0, φ_0, $\hat{\sigma}_0$ – на w_{0k}, φ_{0k}, $\hat{\sigma}_{0k}$. При этом нужно заменить f на f_k. Вычтем из получившихся равенств при $k = 1$ соответствующие равенства при $k = 2$ и последовательно оценим $\overline{w}(x,t)$, $\overline{\varphi}(x,t)$ и $\overline{\sigma}(x)$.

Из (37) выводим равенство

$$\overline{w}(x,t) = 2\sqrt{\varepsilon}\bar{f}(t + x/c) - \frac{1}{c}\int_0^x [\overline{\sigma}(\xi)w_1^3(\xi,\tau) +$$

$$+ \sigma_2(\xi)\overline{w}(\xi,\tau)(w_1^2(\xi,\tau) + w_1(\xi,\tau)w_2(\xi,\tau) + w_2^2(\xi,\tau))]_{\tau=t+(x-\xi)/c}\, d\xi -$$

$$-\frac{1}{c}\int_0^x [\overline{\sigma}(\xi)w_1^3(\xi,\tau)+\sigma_2(\xi)\overline{w}(\xi,\tau)(w_1^2(\xi,\tau)+w_1(\xi,\tau)w_2(\xi,\tau)+w_2^2(\xi,\tau))]_{\tau=t-(x-\xi)/c}\, d\xi, \quad (x,t)\in D_T^+,$$

из которого, используя неравенства (51) и априорное условие $\hat{\sigma}_k \in \mathcal{Q}(\sigma_0,\sigma_1,T)$, находим оценку

$$|\overline{w}(x,t)| \leqslant 2\sqrt{\varepsilon}\,\|\bar{f}\|_{C[0,T]} + C_8\int_0^x Z(\xi)\,d\xi, \quad C_8 = \frac{2a^2}{c}(a + 3\sigma_1), \quad (x,t) \in D_T. \tag{55}$$

Аналогично, используя уравнение (38), получаем

$$\overline{\varphi}(x,t) = 2\sqrt{\varepsilon}\,\bar{f}'(t + x/c) - \frac{3}{c}\int_0^x [\overline{\sigma}(\xi)w_1^2(\xi,\tau)\varphi_1(\xi,\tau) +$$

$$+ \sigma_2(\xi)\overline{w}(\xi,\tau)(w_1(\xi,\tau) + w_2(\xi,\tau))\varphi_1(\xi,\tau) + \hat{\sigma}_2(\xi)w_2^2(\xi,\tau)\overline{\varphi}(\xi,\tau)]_{\tau=t+(x-\xi)/c}\, d\xi -$$

$$-\frac{3}{c}\int_0^x [\overline{\sigma}(\xi)w_1^2(\xi,\tau)\varphi_1(\xi,\tau) + \sigma_2(\xi)\overline{w}(\xi,\tau)(w_1(\xi,\tau) + w_2(\xi,\tau))\varphi_1(\xi,\tau) +$$

$$+ \hat{\sigma}_2(\xi)w_2^2(\xi,\tau)\overline{\varphi}(\xi,\tau)]_{\tau=t-(x-\xi)/c}\, d\xi, \quad (x,t) \in D_T^+.$$

Из этого равенства и неравенств (51), (52) следует оценка

$$|\overline{\varphi}(x,t)| \leqslant 2\sqrt{\varepsilon}\|\bar{f}'\|_{C[0,T]} + C_9\int_9^x Z(\xi)\,d\xi, \quad C_9 = \frac{3a^2\sigma_1}{c}(a^2(a + 2\sigma_1) + 2), \quad (x,t) \in D_T^+. \tag{56}$$

Наконец, используя равенство (39), приходим к соотношению

$$\overline{\sigma}(x) = -4\sqrt{\varepsilon}\,\bar{f}_1'(2x/c) + \frac{\overline{w}(x,x/c)}{w_1^3(x,x/c)w_2^3(x,x/c)}[w_1^2(x,x/c) + w_1(x,x/c)w_2(x,x/c) + w_2^2(x,x/c)] \times$$

$$\times\left(4\sqrt{\varepsilon}\,f_2'(2x/c)-\frac{6}{c}\int\limits_0^x \hat\sigma_1(\xi)w_1^2(\xi,\tau)\varphi_1(\xi,\tau)|_{\tau=(2x-\xi)/c}\,d\xi\right)+\frac{6}{cw_2^3(x,x/c)}\int\limits_0^x [|\overline{\sigma}(\xi)|w_1^2(\xi,\tau)\varphi_1(\xi,\tau)+$$

$$+\hat\sigma_2(\xi)|\overline{w}(\xi,\tau)|(w_1(\xi,\tau)+w_2(\xi,\tau))\varphi_1(\xi,\tau)+\hat\sigma_2(\xi)w_2^2(\xi,\tau)|\overline{\varphi}(\xi,\tau)|]_{\tau=(2x-\xi)/c}\,d\xi,\quad x\in[0,cT/2].$$

При оценке слагаемых правой части этого равенства воспользуемся для $\overline{w}(x,x/c)$ неравенством (55), а для оценки $\varphi_k(x,t)$ и $f_2'(2x/c)$ – неравенствами (52) и (53) соответственно. Тогда будем иметь

$$|\overline{\sigma}(x)|\leqslant 4\sqrt{\varepsilon}\|\bar f'\|_{C[0,T]}+C_{10}\int\limits_0^x Z(\xi)\,d\xi,\quad x\in[0,cT/2],$$

$$C_{10}=3\frac{8^2a^5\sigma_1C_8}{2\alpha^6}[4\sqrt{\varepsilon}+3T\sigma_1a^2]+\frac{24\sigma_1}{c\alpha^3}[a^4(a+2\sigma_1)+2a^2]. \tag{57}$$

Из оценок (55)–(57) следует итоговое неравенство

$$Z(x)\leqslant 4\sqrt{\varepsilon}\|\bar f\|_{C^1[0,T]}+K\int\limits_0^x Z(\xi)\,d\xi,\quad x\in[0,cT/2], \tag{58}$$

в котором $K=\max(C_8,C_9,C_{10})$. Применив к интегральному соотношению (58) неравенство Гронуолла–Беллмана (см., например, [20]), получим

$$Z(x)\leqslant 4\sqrt{\varepsilon}\|\bar f\|_{C^1[0,T]}\exp(Kx)\leqslant 4\sqrt{\varepsilon}\|\bar f\|_{C^1[0,T]}\exp(KcT/2),\quad x\in[0,cT/2].$$

Из этой оценки, с учётом обозначений (54), следует неравенство (50).

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики имени С.Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0009).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Piskin E.* On the decay and blow up of solutions for a quasilinear hyperbolic equations with nonlinear damping and source terms // Boundary Value Problems. 2015. Art. 127.
2. *Messaoudi S.A., Talahmeh A.A.* On wave equation: review and recent results // Arab. J. Math. 2018. V. 7. P. 113–145.
3. *Ogbiyele P.A., Arawomo P.O.* Existence and blow up time estimate for a negative initial energy solution of a nonlinear Cauchy problem // Acta Appl. Math. 2020. V. 170. P. 443–458.
4. *Kurylev Y., Lassas M., Uhlmann G.* Inverse problems for Lorentzian manifolds and non-linear hyperbolic equations // Invent. Math. 2018. V. 212. P. 781–857.
5. *Lassas M., Uhlmann G., Wang Y.* Inverse problems for semilinear wave equations on Lorentzian manifolds // Commun. Math. Phys. 2018. V. 360. P. 555–609.
6. *Lassas M.* Inverse problems for linear and non-linear hyperbolic equations // Proc. Intern. Congress Math. 2018. V. 3. P. 3739–3760.
7. *Hintz P., Uhlmann G.* Reconstruction of Lorentzian manifolds from boundary light observation sets // Int. Math. Res. Notices. 2019. V. 22. P. 6949–6987.
8. *Hintz P., Uhlmann G., Zhai J.* An inverse boundary value problem for a semilinear wave equation on Lorentzian manifolds // Int. Math. Res. Notices. 2022. V. 17. P. 13181–13211.
9. *Hintz P., Uhlmann G., Zhai J.* The Dirichlet-to-Neumann map for a semilinear wave equation on Lorentzian manifolds // arXiv:2103.08110v1 [math.AP]. 15 Mar. 2021.
10. *Barreto A.S.* Interactions of semilinear progressing waves in two or more space dimensions // Inverse Probl. Imaging. 2020. V. 14. № 6. P. 1057–1105.
11. *Barreto A.S., Stefanov P.* Recovery of a general nonlinearity in the semilinear wave equation // arXiv:2107.08513v1 [math.AP]. 18 Jul. 2021.
12. *Wang Y., Zhou T.* Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations // Commun. Partial Differ. Equat. 2019. V. 44. № 11. P. 1140–1158.

13. *Barreto A.S., Stefanov P.* Recovery of a cubic non-linearity in the wave equation in the weakly nonlinear regime // Commun. Math. Phys. 2022. V. 392. P. 25–53.
14. *Uhlmann G., Zhai J.* On an inverse boundary value problem for a nonlinear elastic wave equation // J. Math. Pure Appl. 2021. V. 153. P. 114–136.
15. *Романов В.Г., Бугуева Т.В.* Обратная задача для нелинейного волнового уравнения // Сиб. журн. индустр. математики. 2022. Т. 25. № 2. С. 83–100.
16. *Романов В.Г., Бугуева Т.В.* Задача об определении коэффициента при нелинейном члене квазилинейного волнового уравнения // Сиб. журн. индустр. математики. 2022. Т. 25. № 3. С. 154–169.
17. *Романов В.Г., Бугуева Т.В.* Обратная задача для волнового уравнения с полиномиальной нелинейностью // Сиб. журн. индустр. математики. 2023. Т. 26. № 1. С. 142–149.
18. *Романов В.Г.* Обратная задача для полулинейного волнового уравнения // Докл. РАН. 2022. Т. 504. № 1. С. 36–41.
19. *Романов В.Г.* Обратная задача для уравнений электродинамики с нелинейной проводимостью // Докл. РАН. 2023. Т. 509. № 1. С. 65–68.
20. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. М., 1965.

Институт математики
имени С.Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск

Поступила в редакцию 14.07.2023 г.
После доработки 14.07.2023 г.
Принята к публикации 25.08.2023 г.