ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 11, с. 1500–1514

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.48

О РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЁРТКИ НА ВСЕЙ ЧИСЛОВОЙ ПРЯМОЙ

© 2023 г. А. А. Давыдов, Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян

Для специальной системы интегральных уравнений свёрточного типа с монотонной и выпуклой нелинейностью, естественно возникающей при поиске стационарных или предельных состояний в различных динамических моделях прикладного характера, например в моделях распространения эпидемий, доказаны теоремы существования либо отсутствия нетривиального ограниченного решения с пределами на $\pm\infty$ в зависимости от этих значений и структуры матричного ядра исследуемой системы. Также изучен вопрос единственности такого решения при его наличии. Приведены конкретные примеры систем, параметры которых удовлетворяют ограничениям сформулированных теорем.

DOI: 10.31857/S0374064123110055, EDN: PDZECG

Введение. В настоящей работе изучается существование нетривиального решения системы нелинейных интегральных уравнений типа свёртки

$$f_i(x)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(x)\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_{ij}(x-t)G_j(f_j(t))\,dt,\quad i=\overline{1,n},\quad x\in\mathbb{R},\tag{1}$$

относительно искомой ограниченной на числовой прямой вектор-функции $f=(f_1,\ldots,f_n)^{\mathrm{т}}$, имеющего конечные пределы на $\pm\infty$, где $^{\mathrm{т}}$ – знак транспонирования. При этом предполагается, что матричное ядро $K:=K(x)=(K_{ij}(x))_{i,j=1}^{n}$ (здесь и далее, если не оговорено противное, индексы i и j изменяются от 1 до n) обладает следующими свойствами:

a) симметрично $K=K^{\mathrm{т}}$ и чётно $K(-x)=K(x)$;

b) элементы ядра положительны, непрерывны, ограничены и интегрируемы на всей прямой, при этом спектральный радиус матрицы $A=(a_{ij})$, $a_{ij}=\int_{-\infty}^{\infty}K_{ij}(x)\,dx$, равен единице;

c) элементы ядра монотонно убывают при удалении от нуля, а $\int_{-\infty}^{\infty}|x|K_{ij}(x)\,dx<+\infty$.

В силу свойств a), b) и теоремы Перрона (см. [1, с. 260]) у матрицы A существует положительный собственный вектор с собственным числом единица – спектральным радиусом этой матрицы. Зафиксируем такой вектор и обозначим его через η.

Понятно, что разрешимость системы (1) может зависеть и от функций G_j и λ_j на прямой. Относительно первых будем предполагать, что каждая из них:

A) непрерывная и монотонно возрастающая на всей прямой;

B) строго выпуклая вверх на положительной полуоси, $G_i(\eta_i)=\eta_i$;

C) нечётная.

И пусть каждая из функций λ_i:

I) непрерывна, положительна, не превосходит единицы и отделена от нуля;

II) имеет единичные пределы на $\pm\infty$ и интегрируема на прямой разностью $1-\lambda_i$.

Положим $\epsilon_i=\inf\limits_{x\in\mathbb{R}}\lambda_i(x)$. В силу I) имеем $\epsilon_i>0$.

При различных значениях параметров K, G_j и λ_j система (1) естественно возникает в различных разделах математической физики, в эконометрике, в математической биологии. Например, скалярные и векторные интегральные уравнения такого типа встречаются в кинетической теории газов (при изучении нелинейного интегро-дифференциального уравнения

Больцмана в рамках модифицированной модели Бхатнагара–Гросса–Крука), в теории нелинейного переноса излучения (в неоднородных средах и в спектральных линиях), в динамической теории p-адических открытых, замкнутых и открыто-замкнутых струн (для скалярного поля тахионов), в математической теории распределения дохода (в рамках модифицированной нелинейной модели Саргана) и в математической теории распространения эпидемических заболеваний (в рамках модели Дикмана–Капера) (см. [2–12]). При единичных λ_i существование и единственность ограниченного монотонно возрастающего нечётного непрерывного решения системы (1) с граничными условиями $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_i(x)=\pm\eta_i$ обсуждались в работах [13] и [14], а при $\lambda_i(x)\geqslant 1$ аналогичные вопросы изучались в [15]. Отметим также, что скалярные аналоги системы (1) достаточно подробно исследованы в статьях [16–20] при различных ограничениях на параметры системы.

Как отмечено выше, мы ищем решение системы (1) с конечными пределами на бесконечности. Обозначим

$$\gamma_i := \lim_{x\to-\infty} f_i(x), \quad \beta_i := \lim_{x\to+\infty} f_i(x).$$

Сначала вопрос существования или отсутствия нетривиального решения этой системы будет исследован при единичных значениях λ_j в следующих случаях:

$p_1)$ $\gamma_i\geqslant 0,$ $\beta_i\geqslant 0;$
$p_2)$ $\gamma_i\leqslant 0,$ $\beta_i\leqslant 0;$
$p_3)$ $\gamma_i<0,$ $\beta_i>0;$
$p_4)$ $\gamma_i>0,$ $\beta_i<0.$

Покажем, что у системы (1) нет нетривиальных ограниченных решений в первых двух случаях (и при единичных λ_i), есть монотонное решение в последних двух (где применим результаты из [13] и [14])). Затем, при $\lambda_i(x)\not\equiv 1,$ докажем существование и единственность непрерывного положительного решения системы (1) с предельными условиями

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_i(x)=\eta_i$$

и интегрируемыми разностями η_i-f_i.

Далее будут приведены параметры системы (1), имеющие прикладной характер и удовлетворяющие всем условиям доказанных теорем.

1. Обозначения и вспомогательные факты.

1.1. Существование решения при $\boldsymbol{\lambda_j\equiv 1}$. Наряду с системой (1), при единичных λ_j рассмотрим следующую систему интегральных уравнений с суммарно-разностным ядром на полупрямой $\mathbb{R}^+=[0,+\infty)$:

$$Q_i(\varphi_i(x))=\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^\infty (K_{ij}(x-t)-K_{ij}(x+t))\varphi_j(t)\,dt, \tag{2}$$

относительно неотрицательной ограниченной вектор-функции $\varphi(x)=(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))^{\text{т}},$ где Q_i – обратная функция к G_i на $\mathbb{R}^+$. Согласно [13] система (2) имеет нетривиальное непрерывное неубывающее решение с нулевым значением в нуле, положительным вне нуля и предельным значением η на бесконечности и, кроме того, с интегрируемой разностью $\eta-\varphi$.

Прямые вычисления показывают, что функции

$$f_i(x)=\begin{cases} Q_i(\varphi_i(x)), & \text{если } x\geqslant 0,\\ -Q_i(\varphi_i(-x)), & \text{если } x<0,\end{cases}$$

являются решением исходной системы (1) при единичных λ_i. Это решение непрерывное, нечётное, неубывающее с предельными значениями $\pm\eta$ и интегрируемыми разностями $\pm\eta-f$ на $\pm\infty$ соответственно.

В силу нечётности функций G_j решением системы (1) является и вектор-функция $-f$, а также сдвиги $f^c(x) = f(x+c)$, $c \in \mathbb{R}$, найденного решения, в чем легко убедиться прямой проверкой (напомним, что рассматривается случай единичных параметров λ_j).

1.2. Априорная оценка ограниченного решения системы (1). Пусть f^* – ограниченное решение системы (1) на всей прямой. Положим

$$\alpha_i := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_i^*(x)|.$$

Имеет место

Лемма 1. *При условиях a), b), A)–C) и I) имеет место следующая оценка сверху:*

$$\alpha_i \leqslant \eta_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Доказательство. В силу $K_{ij} > 0$, нечётности и монотонности функций G_j из (1) имеем

$$|f_i^*(x)| \leqslant \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t)|G_j(f_j^*(t))|\,dt = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t)G_j(|f_j^*(t)|)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^n G_j(\alpha_j) \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(y)\,dy = \sum_{j=1}^n a_{ij}\eta_j \frac{G_j(\alpha_j)}{\eta_j} \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{G_j(\alpha_j)}{\eta_j}\right) \sum_{j=1}^n a_{ij}\eta_j,$$

откуда в силу определения супремума и равенства $A\eta = \eta$ получим

$$\alpha_i \leqslant M\eta_i \quad \text{с} \quad M = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{G_j(\alpha_j)}{\eta_j}\right). \tag{3}$$

Взяв в (3) вместо индекса i индекс j_0, при котором достигается максимум M, имеем

$$\alpha_{j_0} \leqslant G_{j_0}(\alpha_{j_0}).$$

Так как $\alpha_{j_0} \geqslant 0$, то в силу непрерывности и строгой выпуклости функции G_{j_0} вверх на $\mathbb{R}^+$ из соотношения $G_{j_0}(\eta_{j_0}) = \eta_{j_0}$ получаем, что последнее неравенство возможно только при $\alpha_{j_0} \leqslant \eta_{j_0}$. Отсюда, с учётом монотонности функции G_{j_0} и (3), находим

$$\alpha_i \leqslant \eta_i \frac{G_{j_0}(\eta_{j_0})}{\eta_{j_0}} = \eta_i.$$

Лемма доказана.

1.3. Разрешимость вспомогательной системы уравнений. Рассмотрим вспомогательную систему уравнений

$$\xi_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}\varepsilon_j G_j(\xi_j) \tag{4}$$

относительно неизвестного вектора ξ с неотрицательными компонентами, где

$$\varepsilon_j := \inf_{x\in\mathbb{R}} \lambda_j(x) \in (0,1), \tag{5}$$

а матрица $A = (a_{ij})$ описана выше. Имеет место

Лемма 2. *Пусть матрица A симметрична, имеет положительные компоненты и единичный спектральный радиус. Тогда система уравнений (4) имеет не более одного неотрицательного ненулевого решения, если выполнены условия A), B) и (5).*

Доказательство. Допустим противное, т.е. что система (4) имеет два различных таких решения ξ и $\tilde{\xi}$, и пусть $\xi_{i^*} \neq \tilde{\xi}_{i^*}$. Отметим, что все компоненты этих решений положительны, поскольку все слагаемые в правой части системы неотрицательны в силу наложенных условий, при этом слагаемое для положительной компоненты решения положительно. В силу положительности чисел ε_j и a_{ij} из (4) имеем

$$|\xi_i - \tilde{\xi}_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_j |G_j(\xi_j) - G_j(\tilde{\xi}_j)|. \tag{6}$$

Используя симметричность матрицы A, из (6) найдём

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i G_i(\tilde{\xi}_i)|\xi_i - \tilde{\xi}_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i G_i(\tilde{\xi}_i) \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_j |G_j(\xi_j) - G_j(\tilde{\xi}_j)| =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j |G_j(\xi_j) - G_j(\tilde{\xi}_j)| \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\varepsilon_i G_i(\tilde{\xi}_i) = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \tilde{\xi}_j |G_j(\xi_j) - G_j(\tilde{\xi}_j)|$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (G_i(\tilde{\xi}_i)|\xi_i - \tilde{\xi}_i| - \tilde{\xi}_i |G_i(\xi_i) - G_i(\tilde{\xi}_i)|) \leqslant 0.$$

Обозначим $\Pi := \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} : \xi_i \neq \tilde{\xi}_i\}$. Очевидно, что $\Pi \neq \varnothing$, так как $i^* \in \Pi$. Для индексов, не лежащих в Π, слагаемые в последней сумме равны нулю, а для оставшихся слагаемых эту сумму можно записать в виде

$$\sum_{i\in\Pi} \varepsilon_i \tilde{\xi}_i |\xi_i - \tilde{\xi}_i| \left(\frac{G_i(\tilde{\xi}_i)}{\tilde{\xi}_i} - \frac{|G_i(\xi_i) - G_i(\tilde{\xi}_i)|}{|\xi_i - \tilde{\xi}_i|} \right) \leqslant 0.$$

Но последнее неравенство невозможно, поскольку в силу строгой выпуклости функций G_i на положительной полуоси и равенстве нулю в нуле для всех $i \in \Pi$ имеем строгое неравенство (рис. 1 и 2)

$$\frac{G_i(\tilde{\xi}_i)}{\tilde{\xi}_i} > \frac{|G_i(\xi_i) - G_i(\tilde{\xi}_i)|}{|\xi_i - \tilde{\xi}_i|}.$$

Следовательно, $\Pi = \varnothing$ и $\xi = \tilde{\xi}$. Лемма доказана.

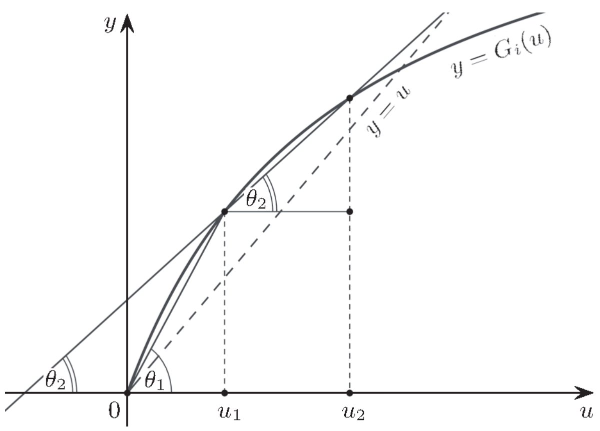

Рис. 1. Пересечение графика функции $y = G_i(u)$ с прямой, проходящей через точки $(0, 0)$ и $(u_1, G_i(u_1))$.

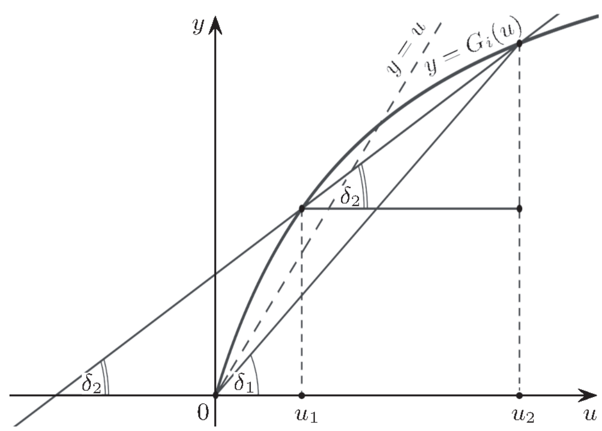

Рис. 2. Пересечение графика функции $y = G_i(u)$ с прямой, проходящей через точки $(0, 0)$ и $(u_2, G_i(u_2))$.

Теперь исследуем вопрос существования положительного решения системы (4). Справедлива

Лемма 3. *В условиях леммы 2 система уравнений (4) имеет положительное решение* ξ, *компоненты которого отделены от нуля и меньше соответствующих компонент* η, *если либо для некоторого* $k \in \{1, 2 \ldots, n\}$

$$\frac{G_k(u)}{u} \to +\infty \quad \text{при} \quad u \to +0, \tag{7}$$

либо для всех этих индексов последний предел конечен (и равен $G_k'(0)$*), а*

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_{kj} \eta_j G_j'(0) > \eta_k, \tag{8}$$

Замечание 1. В частности, компоненты искомого решения удовлетворяют двойному неравенству

$$c^* \eta_i \leqslant \xi_i < \eta_i \tag{9}$$

с некоторой положительной константой c^*.

Доказательство. В качестве нулевого приближения к такому решению возьмём $\xi^{(0)} = \eta$, а за последующие приближения возьмём итерации по системе (4):

$$\xi_i^{(p+1)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \varepsilon_j G_j(\xi_j^{(p)}), \quad p \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}. \tag{10}$$

Эти последовательные приближения монотонно убывают, что легко проверить индукцией по p, поэтому для доказательства существования предела этих приближений (и тем самым нужного решения) достаточно показать, что они ограничены снизу положительной константой.

С этой целью рассмотрим следующие функции χ_i на промежутке $(0, 1]$:

$$\chi_i(v) := \frac{1}{\eta_i} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_{ij} \eta_j \frac{G_j(v\eta_j)}{v\eta_j} - 1, \quad v \in (0, 1].$$

Они непрерывны на $(0, 1]$ в силу непрерывности функций G_i; монотонно убывают на $(0, 1]$, поскольку из-за строгой выпуклости вверх функций G_i на положительной полуоси отношение $G_j(u)/u$ монотонно убывает на луче $(0, +\infty)$; имеют отрицательные значения в единице:

$$\chi_i(1) = \frac{1}{\eta_i} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_{ij} \eta_j - 1 < \frac{1}{\eta_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \eta_j - 1 = 0,$$

поскольку $G_j(\eta_j) = \eta_j$, $\varepsilon_j \in (0, 1)$, а $A\eta = \eta$.

Далее, предел $\lim\limits_{v \to 0+} \chi_i(v)$ существует. Он равен $+\infty$ при выполнении условия (7) и положителен при выполнении условия (8). В обоих случаях в силу монотонного убывания функции χ_i на $(0, 1]$ и отрицательности её значений в единице существует единственное значение $c_i \in$ $\in (0, 1)$ такое, что $\chi_i(c_i) = 0$. Положим

$$c^* := \min_{1 \leqslant i \leqslant n} c_i$$

и покажем, что итерации $\xi_i^{(p)}$ из (10) удовлетворяют двойному неравенству (9). Для этого воспользуемся индукцией по номеру итерации. При $p = 0$ это верно в силу выбора первого приближения $\xi^{(0)} = \eta$. Пусть эта оценка верна для некоторого номера итерации p.

Отсюда, учитывая монотонность функций G_i и χ_i, имеем соотношения

$$\xi_i^{(p+1)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_j G_j(\xi_j^{(p)}) \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_j G_j(c^*\eta_j) = (\chi_i(c^*)+1)c^*\eta_i \geqslant (\chi_i(c_i)+1)c^*\eta_i = c^*\eta_i.$$

Следовательно, оценка (9) справедлива для итераций (10). Учитывая монотонное убывание этих итераций, получаем, что они имеют предел при $p \to \infty$ и предельный вектор является положительным решением системы (4). Лемма доказана.

1.4. Возможные значения $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$ и $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ в случаях $p_1)$–$p_4)$. Покажем, что в случаях $p_1)$–$p_4)$ величины γ_i и β_i могут принимать только значения 0 и $\pm\eta_i$. Точнее, справедлива следующая

Лемма 4. *При выполнении условий a), b), A)–C) и II) величины γ_i и β_i могут принимать только значения:*

1) или нулевые, или η_i в любом сочетании в случае $p_1)$;

2) или нулевые, или $-\eta_i$ в любом сочетании в случае $p_2)$;

3) $\gamma_i = -\eta_i$, $\beta_i = \eta_i$ в случае $p_3)$;

4) $\gamma_i = \eta_i$, $\beta_i = -\eta_i$ в случае $p_4)$.

Всюду $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Доказательство. Если функция $F \in L_\infty(\mathbb{R})$ и существуют конечные пределы на $\pm\infty$, то для функции $T \in L_1(\mathbb{R})$ верно равенство

$$\lim_{x\to\pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T(x-t)F(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} T(y)\,dy \lim_{x\to\pm\infty} F(x)$$

(см. [21]). Отсюда, а также в силу условий $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \lambda_j(x) = 1$ и $A)$, получаем, что величины $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$ и $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ удовлетворяют системе уравнений

$$\tau_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} G_j(\tau_j), \tag{11}$$

которая имеет единственное решение $\tau_i = \eta_i$ в классе неотрицательных ненулевых решений (см. лемму 2.1 в [14]).

Следовательно, справедливо утверждение 1) леммы 4. В силу нечётности функций G_i система (11) имеет и решение противоположного знака $\tau^* = -\eta$, и, аналогично, оно единственно в классе неположительных ненулевых решений. Отсюда получаем справедливость оставшихся утверждений леммы 4. Лемма доказана.

2. О знакопостоянных ограниченных решениях (1). Изучим существование нетривиальных ограниченных решений системы (1) при единичных λ_i. Возможные значения $\{\gamma_i\}$ и $\{\beta_i\}$, при которых могут существовать такие решения, указаны в лемме 4.

2.1. Отсутствие нетривиальных знакопостоянных решений. Имеет место

Теорема 1. *При единичных λ_i, выполнении условий a)–c), A)–C) и $G_j'(+0) < +\infty$ система (1) в классе знакопостоянных ограниченных функций имеет только нулевое решение, если $\gamma_i = \beta_i = 0$, $i = \overline{1,n}$.*

Доказательство. Докажем для случая неотрицательных решений (для неположительных рассуждения аналогичны). Рассмотрим произвольное ограниченное неотрицательное непрерывное решение f системы (1) с нулевыми пределами на бесконечности. В силу его непрерывности и этих пределов существует число $\delta > 0$ такое, что при $|x| \geqslant \delta$ справедливы неравенства

$$0 \leqslant f_i(x) \leqslant \eta_i/2.$$

Покажем, что компоненты решения f интегрируемы. Это достаточно сделать на любом полуинтервале, примыкающем к бесконечности, возьмём $[\delta,+\infty)$ и произвольное R, $R>\delta$. В силу условий A)–C) для функции G_i справедливы оценки

$$G_i(u)\geqslant \frac{G_i(\eta_i/2)}{\eta_i/2}u \quad \text{при} \quad u\in[0,\eta_i/2], \quad d_i:=\frac{G_i(\eta_i/2)}{\eta_i/2}>1. \tag{12}$$

Используя их, оценку из леммы 1, условия a)–c), A)–C) и теорему Фубини (см. [22, с. 317]), из (1) будем иметь

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n \eta_i\int_\delta^R(\eta_i-f_i(x))\,dx=\sum_{i=1}^n\eta_i\int_\delta^R\sum_{j=1}^n\int_{-\infty}^{\infty}K_{ij}(x-t)(\eta_j-G_j(f_j(t)))\,dt\,dx\leqslant\\
&\leqslant\sum_{j=1}^n\eta_j\sum_{i=1}^n\eta_i\int_\delta^R\int_{-\infty}^0K_{ij}(x-t)\,dt\,dx+\sum_{j=1}^n\eta_j\sum_{i=1}^n\eta_i\int_\delta^R\int_0^\delta K_{ij}(x-t)\,dt\,dx+\\
&+\sum_{j=1}^n\eta_j\sum_{i=1}^n\eta_i\int_\delta^R\int_R^\infty K_{ij}(x-t)\,dt\,dx+\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\eta_i\int_\delta^R\int_\delta^R K_{ij}(x-t)(\eta_j-G_j(f_j(t)))\,dt\,dx\leqslant\\
&\leqslant\sum_{j=1}^n\eta_j\sum_{i=1}^n\eta_i\int_0^R\int_x^\infty K_{ij}(y)\,dy\,dx+\sum_{j=1}^n\eta_j\sum_{i=1}^n\eta_i\int_\delta^R\int_0^\delta K_{ij}(x-t)\,dt\,dx+\\
&+\sum_{j=1}^n\eta_j\sum_{i=1}^n\eta_i\int_0^R\int_R^\infty K_{ij}(t-x)\,dt\,dx+\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\eta_i a_{ij}\int_\delta^R(\eta_j-G_j(f_j(t)))\,dt\,dx\leqslant\\
&\leqslant\sum_{j=1}^n\eta_j\sum_{i=1}^n\eta_i\int_0^\infty yK_{ij}(y)\,dy+\sum_{j=1}^n\eta_j\sum_{i=1}^n\eta_i\int_\delta^R\int_{x-\delta}^x K_{ij}(y)\,dy\,dx+\\
&+\sum_{j=1}^n\eta_j\sum_{i=1}^n\eta_i\int_0^R\int_{R-x}^\infty K_{ij}(y)\,dy\,dx+\sum_{j=1}^n\eta_j\int_\delta^R(\eta_j-G_j(f_j(t)))\,dt\leqslant\\
&\leqslant\sum_{j=1}^n\eta_j\sum_{i=1}^n\eta_i\int_0^\infty yK_{ij}(y)\,dy+\sum_{j=1}^n\eta_j\sum_{i=1}^n\eta_i\int_\delta^R\int_{x-\delta}^\infty K_{ij}(y)\,dy\,dx+\\
&+\sum_{j=1}^n\eta_j\sum_{i=1}^n\eta_i\int_0^R\int_t^\infty K_{ij}(y)\,dy\,dt+\sum_{j=1}^n\eta_j\int_\delta^R(\eta_j-d_jf_j(t))\,dt\leqslant\\
&\leqslant 3\sum_{j=1}^n\eta_j\sum_{i=1}^n\eta_i\int_0^\infty yK_{ij}(y)\,dy+\sum_{j=1}^n\eta_j\int_\delta^R(\eta_j-d_jf_j(x))\,dx,
\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\sum_{i=1}^n\eta_i(d_i-1)\int_\delta^R f_i(x)\,dx\leqslant 3\sum_{j=1}^n\eta_j\sum_{i=1}^n\eta_i\int_0^\infty yK_{ij}(y)\,dy.$$

(Аналогично можно доказать, что $f_i\in L_1(-\infty,0)$.)

Отсюда при $R \to +\infty$ получаем интегрируемость компонент решения на луче $(\delta, +\infty)$, что и требовалось, а также неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i (d_i - 1) \int_{\delta}^{\infty} f_i(x)\, dx \leqslant 3 \sum_{j=1}^{n} \eta_j \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{0}^{\infty} y K_{ij}(y)\, dy.$$

Тогда в силу непрерывности и интегрируемости ядер K_{ij} и ограниченности и интегрируемости f_i из (1) в силу условия $A)$, а также непрерывности свёртки суммируемых и ограниченных функций (см. [23]) заключаем, что компоненты f_i непрерывны.

Далее в силу $G_j'(+0) < +\infty$, $A\eta = \eta$, условия $a)$ и теоремы Фубини имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t) G_j(f_j(t))\, dt\, dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \eta_i \int_{-\infty}^{\infty} G_j(f_j(t))\, dt = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \int_{-\infty}^{\infty} G_j(f_j(t))\, dt.$$

Приравнивая крайние выражения в этой цепочке равенств, находим

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{-\infty}^{\infty} (G_i(f_i(x)) - f_i(x))\, dx = 0.$$

Подынтегральные выражения в последнем равенстве неотрицательны (поскольку $G_i(u) \geqslant u$ при $u \in [0, \eta_i]$ и $0 \leqslant f_i \leqslant \eta_i$) и непрерывны. Следовательно, это равенство возможно лишь при выполнении тождества

$$G_i(f_i(x)) \equiv f_i(x)$$

на всей прямой. Отсюда, учитывая $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_i(x) = 0$ и выполнение равенства $G_i(u) = u$ лишь при $u = 0, \pm\eta_i$, находим $f_i \equiv 0$. Теорема доказана.

Справедлива также

Теорема 2. *При единичных λ_i и выполнении условий a)–c), A)–C) система (1) в классе знакопостоянных ограниченных функций имеет только постоянное решение $f = \pm\eta$, если соответственно $\gamma_i = \beta_i = \pm\eta_i$, $i = \overline{1, n}$.*

Доказательство. Для определённости рассмотрим случай неотрицательных решений. Пусть f – любое решение системы (1) с предельным значением η на $\pm\infty$. Существует число $\Delta > 0$ такое, что при $|x| \geqslant \Delta$ справедливы неравенства $f_i(x) \geqslant \eta_i/2$. Отсюда и из леммы 1 при $|x| \geqslant \Delta$ имеем соотношения

$$\eta_i/2 \leqslant f_i(x) \leqslant \eta_i.$$

Далее в силу выпуклости вверх функций G_i на $\mathbb{R}^+$, их нечётности и условия $A)$ при $|x| \geqslant \Delta$ справедливы следующие неравенства (рис. 3):

$$\eta_i - G_i(f_i(x)) \leqslant q_i(\eta_i - f_i(x)), \quad q_i := \frac{\eta_i - G_i(\eta_i/2)}{\eta_i/2} \in (0,1), \tag{13}$$

что легко проверить. Используя эти неравенства и рассуждая по аналогии с доказательством предыдущей теоремы, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i (1 - q_i) \int_{\Delta}^{\infty} (\eta_i - f_i(x))\, dx \leqslant 3 \sum_{j=1}^{n} \eta_j \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{0}^{\infty} y K_{ij}(y)\, dy.$$

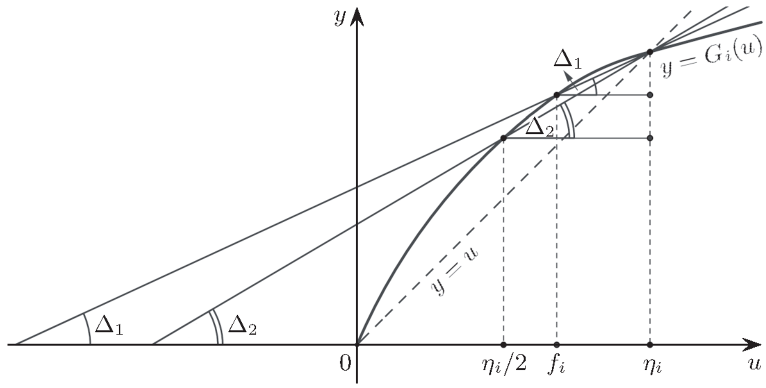

Рис. 3. Пересечение графика функции $y = G_i(u)$ с прямой, проходящей через точки $(\eta_i/2, G_i(\eta_i/2))$ и (η_i, η_i).

Аналогично верно

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i (1 - q_i) \int_{-\infty}^{-\Delta} (\eta_i - f_i(x))\, dx \leqslant 3 \sum_{j=1}^{n} \eta_j \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{-\infty}^{0} K_{ij}(y)(-y)\, dy.$$

Отсюда вытекает, что функции $\eta_i - f_i$ интегрируемы на прямой.

Далее в силу системы (1) и условия $A\eta = \eta$ имеем равенство

$$\eta_i - f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x - t)(\eta_j - G_j(f_j(t)))\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Умножим обе его части на η_i, проинтегрируем результат по прямой и просуммируем по i. В результате, учитывая определение матрицы A, условие $A\eta = \eta$ и применяя теорему Фубини, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{-\infty}^{\infty} (\eta_i - f_i(x))\, dx = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \int_{-\infty}^{\infty} (\eta_j - G_j(f_j(t)))\, dt$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{-\infty}^{\infty} (G_i(f_i(x)) - f_i(x))\, dx = 0.$$

Заключительные рассуждения те же, что и в доказательстве предыдущей теоремы, только теперь будем иметь $f_i(x) \equiv \eta_i$. Теорема доказана.

2.2. Об отсутствии знакопостоянных решений системы. Справедлива

Теорема 3. *При единичных λ_j и выполнении условий a)–c) и A)–C) система (1) не имеет знакопостоянных ограниченных решений, если $\gamma_i = 0$, $\beta_i = \eta_i$ (либо $\gamma_i = 0$, $\beta_i = -\eta_i$, либо $\gamma_i = \eta_i$, $\beta_i = 0$, либо $\gamma_i = -\eta_i$, $\beta_i = 0$), $i = \overline{1, n}$.*

Доказательство. Доказательство проведём лишь для первого случая, поскольку для остальных рассуждения аналогичны. Допустим противное, что при $\gamma_i = 0$, $\beta_i = \eta_i$ в условиях последней теоремы существует знакопостоянное ограниченное решение f системы (1), тогда оно неотрицательно и по условию

$$\lim_{x \to -\infty} f_i(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} f_i(x) = \eta_i.$$

Отсюда получаем, что существует положительное число r такое, что

$$0 \leqslant f_i(x) \leqslant \frac{\eta_i}{2} \quad \text{при} \quad x < -r, \quad \frac{\eta_i}{2} \leqslant f_i(x) \leqslant \eta_i \quad \text{при} \quad x > r. \tag{14}$$

Теперь проведём рассуждения аналогично как в доказательстве теоремы 2 и получим, что

$$\eta_i - f_i \in L_1(0, +\infty). \tag{15}$$

Докажем, что $f_i \in L_1(-\infty, 0)$. Возьмём отрицательное число R. Учитывая $A\eta = \eta$, (12), (14), условия $a)$–$c)$ и $A)$–$C)$, из системы (1) будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{R}^{-r} (\eta_i - f_i(x))\,dx \leqslant \sum_{j=1}^{n} \eta_j \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{R}^{-r} \int_{-\infty}^{R} K_{ij}(x-t)\,dt\,dx +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{R}^{-r} \int_{R}^{-r} K_{ij}(x-t)(\eta_j - G_j(f_j(t)))\,dt\,dx +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \eta_j \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{R}^{-r} \int_{-r}^{0} K_{ij}(x-t)\,dt\,dx + \sum_{j=1}^{n} \eta_j \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{R}^{-r} \int_{0}^{\infty} K_{ij}(x-t)\,dt\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} \eta_j \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{R}^{-r} \int_{-\infty}^{R} K_{ij}(t-x)\,dt\,dx + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \eta_i a_{ij} \int_{R}^{-r} (\eta_j - G_j(f_j(t)))\,dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \eta_j \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{-\infty}^{-r} \int_{x}^{x+r} K_{ij}(y)\,dy\,dx + \sum_{j=1}^{n} \eta_j \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{x} K_{ij}(y)\,dy\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} \eta_j \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{R}^{0} \int_{-\infty}^{R-x} K_{ij}(y)\,dy\,dx + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \eta_i a_{ji} \int_{R}^{-r} (\eta_j - G_j(f_j(t)))\,dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \eta_j \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{-\infty}^{-r_1} \int_{-\infty}^{x+r} K_{ij}(y)\,dy\,dx + \sum_{j=1}^{n} \eta_j \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{-\infty}^{0} K_{ij}(y)(-y)\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} \eta_j \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{R}^{0} \int_{-\infty}^{z} K_{ij}(y)\,dy dz + \sum_{j=1}^{n} \eta_j \int_{R}^{-r} (\eta_j - d_j f_j(t))\,dt + 2 \sum_{j=1}^{n} \eta_j \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{-\infty}^{0} K_{ij}(y)(-y)\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} \eta_j \int_{R}^{-r} (\eta_j - d_j f_j(t))\,dt + 3 \sum_{j=1}^{n} \eta_j \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{-\infty}^{0} K_{ij}(y)(-y)\,dy,$$

откуда получим

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i (d_i - 1) \int_{R}^{-r} f_i(x)\,dx \leqslant 3 \sum_{j=1}^{n} \eta_j \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{-\infty}^{0} K_{ij}(y)(-y)\,dy = 3 \sum_{j=1}^{n} \eta_j \sum_{i=1}^{n} \eta_i \int_{0}^{\infty} K_{ij}(y) y\,dy. \tag{16}$$

Устремив в (16) число $R \to -\infty$, придём к включению $f_i \in L_1(-\infty, -r)$. Следовательно, в силу непрерывности f_i получаем нужное включение $f_i \in L_1(-\infty, 0)$. Отсюда и из (15) следует, что

$$f_j(x)(\eta_j - f_j(x)) \in L_1(\mathbb{R}).$$

Из последнего включения, учитывая, что $f_j(x) \leqslant \eta_j$ на прямой и, следовательно, $f_j(x) \leqslant G_j(f_j(x))$ на прямой, получаем, что

$$f_j(x)(\eta_j - G_j(f_j(x))) \in L_1(\mathbb{R}).$$

Умножим теперь обе части (1) на $(\eta_i - G_i(f_i(x)))$, проинтегрируем по прямой и просуммируем по всем i. Применяя к результату теорему Фубини с учётом условий $A\eta = \eta$ и a)–c), A)–C), будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}(\eta_i - G_i(f_i(x)))f_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}(\eta_i - G_i(f_i(x)))\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}K_{ij}(x-t)G_j(f_j(t))\,dt\,dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}G_j(f_j(t))\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}K_{ij}(x-t)(\eta_i - G_i(f_i(x)))\,dx\,dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}G_j(f_j(t))\biggl(\sum_{i=1}^{n}a_{ji}\eta_i - \sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}K_{ji}(t-x)G_i(f_i(x))\,dx\biggr)dt = \sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}(\eta_j - f_j(t))G_j(f_j(t))\,dt.$$

Оставив крайние выражения в последней цепочке равенств, найдём

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}[(\eta_i - G_i(f_i(x)))f_i(x) - (\eta_i - f_i(x))G_i(f_i(x))]\,dx = 0. \tag{17}$$

В силу непрерывности компоненты f_i и её пределов (0 и η_i на $-\infty$ и $+\infty$ соответственно), существуют $x_i \in \mathbb{R}$ и $\delta_i > 0$ такие, что $0 < f_i(x_i) < \eta_i$ при $x \in I_i := (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i)$. Определим множества

$$\mathrm{W}_i := \{x \in \mathbb{R} : f_i(x) \neq 0, \quad f_i(x) \neq \eta_i\}.$$

Эти множества непусты, так как $I_i \subset \mathrm{W}_i$, и имеют положительную меру (возможно, бесконечную). В силу леммы 1 имеем $0 \leqslant f_i \leqslant \eta_i$, поэтому на этом множестве

$$0 < f_i(x) < \eta_i.$$

Нетрудно видеть, что (17) равносильно равенству

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathrm{W}_i} f_i(x)(\eta_i - f_i(x))\biggl(\frac{\eta_i - G_i(f_i(x))}{\eta_i - f_i(x)} - \frac{G_i(f_i(x))}{f_i(x)}\biggr)dx = 0. \tag{18}$$

Из строгой выпуклости вверх функции G_i на $\mathbb{R}^+$ имеем

$$\frac{G_i(f_i(x))}{f_i(x)} > \frac{\eta_i - G_i(f_i(x))}{\eta_i - f_i(x)}, \quad x \in \mathrm{W}_i.$$

Отсюда получаем, что неотрицательное подынтегральное выражение в равенстве (18) положительно на I_i, поэтому левая часть этого равенства положительна. Получили противоречие. Следовательно, наше допущение неверно и теорема доказана.

Замечание 2. Как известно, в одномерном случае система (1) при положительном первом моменте ядра и достаточно сильных ограничениях на нелинейность и ядро может иметь монотонно возрастающее положительное непрерывное и ограниченное на $\mathbb{R}$ решение f с $f(-\infty) = 0$ и $f(+\infty) = \eta > 0$ (см., например, [11, 12]). Отсутствие такого решения для системы (1) обусловлено свойством чётности ядра K, при которой этот момент равен нулю.

Замечание 3. Вопрос существования или отсутствия знакопеременных и ограниченных на $\mathbb{R}$ решений для случаев: 1) $\gamma_i = 0$, $\beta_i = \eta_i$; 2) $\gamma_i = \eta_i$, $\beta_i = 0$; 3) $\gamma_i = 0$, $\beta_i = -\eta_i$; 4) $\gamma_i = -\eta_i$, $\beta_i = 0$ остаётся открытым.

Замечание 4. Как было отмечено выше, в случаях $p_3)$ и $p_4)$ система (1) при единичных λ_i имеет знакопеременное нечётное и ограниченное решение.

3. Разрешимость системы при $\boldsymbol{\lambda_j \not\equiv 1}$.

3.1. Построение знакопостоянного ограниченного решения.

Теорема 4. *При выполнении условий a)–c), A)–C), I), II) и $\lambda_j(x) \not\equiv 1$ система (1) имеет положительное непрерывное и ограниченное на $\mathbb{R}$ решение f с предельным значением η на $\pm\infty$ и интегрируемыми на прямой разностями $\eta_i - f_i$, $i = \overline{1,n}$.*

Доказательство. Для поиска решения рассмотрим последовательность итераций по системе (1):

$$f_i^{(p+1)}(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t) G_j(f_j^{(p)}(t))\, dt, \quad f_i^{(0)}(x) \equiv \eta_i, \tag{19}$$

где $p \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$. Индукцией по p легко показать, что это убывающая последовательность, в частности, на прямой $f_i^{(p)}(x) \not\equiv \eta_i$ при $p \geqslant 1$. Покажем, что эта последовательность ограничена снизу, а именно всюду

$$f_i^{(p)}(x) \geqslant \xi_i \tag{20}$$

при всех p, где ξ – единственное неотрицательное ненулевое решение системы уравнений (4) (см. леммы 2 и 3). Для этого воспользуемся индукцией по номеру итерации.

При $p = 0$ неравенство (20) справедливо в силу (9). Предположим, что оно имеет место при некотором возможном p. Отсюда и из (19) в силу условий I), A), B), a), b) с учётом (4) имеем

$$f_i^{(p+1)}(x) \geqslant \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x) G_j(\xi_j) \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t)\, dt \geqslant \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_{ij} G_j(\xi_j) = \xi_i, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Следовательно, наша последовательность итераций ограничена снизу и, таким образом, имеет предел f_i при $p \to +\infty$. Этот предел положителен, поскольку ограничения ξ_i снизу положительны, и ввиду предельной теоремы Б. Леви [22, с. 303] удовлетворяет системе (1). И итерации, и этот предел являются непрерывными функциями на прямой, так как таковыми являются функции λ_i, K_{ij} и G_i, есть условие $I)$ и непрерывность свёртки суммируемых и ограниченных на прямой функций.

Покажем интегрируемость разности $\eta_i - f_i$. Имеем оценку

$$0 \leqslant \eta_i - f_i^{(p+1)}(x) = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t)(\eta_j - \lambda_j(x) G_j(f_j^{(p)}(t)))\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \eta_j (1 - \lambda_j(x)) + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t)(\eta_j - G_j(f_j^{(p)}(t)))\, dt,$$

из которой и из условий a)–c), A)–C), I) и II) индукцией по p получаем

$$\eta_i - f_i^{(p)} \in L_1(\mathbb{R}), \quad p \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}.$$

Из (4) в силу $\varepsilon_i \in (0,1)$ имеем

$$0 < \xi_i < \sum_{j=1}^{n} a_{ij} G_j(\xi_j) \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij} G_j(\eta_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \eta_j = \eta_i,$$

поэтому по аналогии с доказательствами теорем 1 и 3 находим

$$\sum_{i=1}^{n}\eta_i(1-l_i)\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\eta_i-f_i^{(p+1)}(x))\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}\eta_j^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1-\lambda_j(x))\,dx+6\sum_{j=1}^{n}\eta_j\sum_{i=1}^{n}\eta_i\int\limits_{0}^{\infty}yK_{ij}(y)\,dy<+\infty,$$

где $l_i:=(\eta_i-G_i(\xi_i))/(\eta_i-\xi_i)\in(0,1)$.

Теперь, устремив $p\to\infty$ в последних неравенствах (в их левой части), получаем их с f_i на месте $f_i^{(p+1)}$. Следовательно, интегрируемость η_i-f_i на прямой имеет место.

Осталось показать, что η_i – предельное значение f_i на бесконечности. Для этого сначала систему (1) запишем в следующем виде:

$$\eta_i-f_i(x)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\eta_j(1-\lambda_j(x))+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(x)\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_{ij}(x-t)(\eta_j-G_j(f_j(t)))\,dt. \tag{21}$$

Первое слагаемое в правой части стремится к нулю при $x\to\pm\infty$, так как все λ_i имеют единичный предел на бесконечности в силу условия II). В интеграле оба сомножителя ограничены и интегрируемы на прямой: первый – по условию b), а второй – в силу неравенств

$$0\leqslant\eta_j-G_j(f_j(x))\leqslant\eta_j-f_j(x),$$

ограниченности и интегрируемости η_j-f_j. Следовательно, сам интеграл как свёртка этих функций стремится к нулю при $x\to\pm\infty$ (см. [24]). Отсюда, учитывая ограниченность λ_i, получаем, что правая часть в (21) стремится к нулю при $x\to\pm\infty$ и, следовательно, $f(x)\to\eta$ при $x\to\pm\infty$. Теорема доказана.

Замечание 5. Единственность решения системы (1) в классе неотрицательных ограниченных функций с отделёнными от нуля значениями вблизи бесконечности доказывается методами работы [14].

Замечание 6. В силу нечётности функций G_i система (1) имеет также отрицательное решение f^*, $f^*(x):=-f(x)$.

4. Примеры. Приведём примеры функций $\{G_j(u)\}_{i=1}^n$, $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ и $\{\lambda_j(x)\}_{i=1}^n$, удовлетворяющих соответствующим условиям доказанных теорем.

Примеры нелинейностей $\boldsymbol{G_j(u)}$:

g_1) $G_j(u)=\eta_j\sqrt[p_j]{u/\eta_j}$, $u\in\mathbb{R}$, где $p_j>1$ – нечётные числа, $\eta_j>0$, и удовлетворяют соотношениям $\sum_{j=1}^n a_{ij}\eta_j=\eta_i$;

g_2) $G_j(u)=\begin{cases}\gamma_j(1-e^{-u}), & \text{если } u\geqslant 0,\\ \gamma_j(e^u-1), & \text{если } u<0,\end{cases}$ $u\in\mathbb{R}$, где $\gamma_j:=\eta_j/(1-e^{-\eta_j})>1$;

g_3) $G_j(u)=(u+\eta_j\sqrt[p_j]{u/\eta_j})/2$, $u\in\mathbb{R}$.

Подробно остановимся на примере g_2). Сначала заметим, что

$$G_j(0)=0,\quad G_j(\eta_j)=\eta_j. \tag{22}$$

Так как функция

$$G_j'(u)=\begin{cases}\gamma_je^{-u}, & \text{если } u\geqslant 0,\\ \gamma_je^{u}, & \text{если } u<0,\end{cases}$$

непрерывна на всей числовой прямой и $G_j'(u)>0$, $u\in\mathbb{R}$, то условие A) выполняется. Поскольку $G_j''(u)=-\gamma_je^{-u}<0$ при $u\in\mathbb{R}^+$, то в силу (22) заключаем, что условие B) также справедливо. Выполнение условия C) сразу следует из структуры примера g_2). Заметим также, что $G_j'(+0) = G_j'(-0) = \gamma_j > 1$.

Примеры ядра $K(x) = \{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$:

k_1) $K_{ij}(x) = a_{ij} e^{-x^2}/\sqrt{\pi}$, $x \in \mathbb{R}$, где $a_{ij} = a_{ji} > 0$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ и $r(A) = 1$;

k_2) $K_{ij}(x) = \int_a^b e^{-|x|s}\, d\sigma_{ij}(s)$, $x \in \mathbb{R}$, где $\sigma_{ij}(s) = \sigma_{ji}(s)$ – монотонно возрастающие на $[a, b)$ функции, $0 < a < b \leqslant +\infty$, причём спектральный радиус матрицы

$$A = \left(2 \int\limits_a^b \frac{1}{s}\, d\sigma_{ij}(s)\right)_{i,j=1}^n$$

равен единице.

Примеры функций $\lambda_j(x)$:

Λ_1) $\lambda_j(x) = 1 - (1 - \varepsilon_j)e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_j \in (0, 1)$;

Λ_2) $\lambda_j(x) = 1 - (1 - \varepsilon_j)e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_j \in (0, 1)$.

Отметим, что примеры g_1)–g_3), k_1), k_2), Λ_1), Λ_2) удовлетворяют условиям теорем 3, 4, а примеры g_2), k_1), k_2), Λ_1), Λ_2) – теорем 1 и 2.

Следует также отметить, что примеры g_1), g_2), k_1), k_2) и Λ_2) встречаются в теории p-адических струн, в эпидемиологии и в кинетической теории газов (см. [2, 3, 6, 7, 11, 12]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00223).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ланкастер П.* Теория матриц. М., 1973.
2. *Cercignani C.* The Boltzmann equation and applications // Appl. Math. Sci. V. 67. New York, 1988.
3. *Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А.* О разрешимости нелинейного модельного уравнения Больцмана в задаче плоской ударной волны // Журн. теор. и мат. физики. 2016. Т. 189. № 2. С. 239–255.
4. *Соболев В.В.* Проблема Милна для неоднородной атмосферы // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239. № 3. С. 558–561.
5. *Енгибарян Н.Б.* Об одной задаче нелинейного переноса излучения // Астрофизика. 1966. Т. 2. № 1. С. 31–36.
6. *Владимиров В.С., Волович Я.И.* О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны // Журн. теор. и мат. физики. 2004. Т. 138. № 3. С. 355–368.
7. *Arefeva I.Ya., Dragovic B.G., Volovich I. V.* Open and closed p-adic strings and quadratic extensions of number fields // Phys. Lett. B. 1988. V. 212. № 3. P. 283–291.
8. *Хачатрян Х.А.* О разрешимости некоторых классов нелинейных сингулярных краевых задач, возникающих в теории p-адических открыто-замкнутых струн // Журн. теор. и мат. физики. 2019. Т. 200. № 1. С. 106–117.
9. *Sargan J.D.* The distribution of wealth // Econometrica. 1957. V. 25. № 4. P. 568–590.
10. *Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А.* О разрешимости одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения, возникающего в задаче о распределении дохода // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2010. Т. 50. № 10. С. 1793–1802.
11. *Diekmann O.* Threshold and travelling waves for the geographical spread of infection // J. of Math. Biology. 1978. V. 6. P. 109–130.
12. *Diekmann O., Kaper H.G.* On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation // Nonlin. Anal. Theory Math. Appl. 1978. V. 2. № 6. P. 721–737.
13. *Хачатрян Х.А.* О разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на прямой // Изв. Саратовского ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19. № 2. С. 164–181.
14. *Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А.* Об одной системе интегральных уравнений на всей прямой с выпуклой и монотонной нелинейностью // Изв. НАН Армении. Математика. 2022. Т. 57. № 5. С. 25–40.
15. *Хачатрян Х.А., Петросян А.С.* О разрешимости одной системы сингулярных интегральных уравнений с выпуклой нелинейностью на положительной полупрямой // Изв. вузов. Математика. 2021. Т. 1. С. 31–51.

16. *Арабаджян Л.Г.* Решения одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна // Изв. НАН Армении. Математика. 1997. Т. 32. № 1. С. 21–28.
17. *Banas J.* Integrable solutions of Hammerstein and Urysohn integral equations // J. of Austral. Math. Soc. Ser. A. 1989. V. 46. № 1. P. 61–68.
18. *Хачатрян Х.А., Петросян А.С.* Асимптотическое поведение решения для одного класса нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на всей прямой // Соврем. математика. Фунд. направления. 2022. Т. 68. № 2. С. 376–391.
19. *Хачатрян Х.А.* Существование и единственность решения одной граничной задачи для интегрального уравнения свёртки с монотонной нелинейностью // Изв. РАН. Сер. мат. 2020. Т. 84. № 4. С. 198–207.
20. *Петросян А.С., Хачатрян Х.А.* О единственности решения одного класса интегральных уравнений с суммарно-разностным ядром и с выпуклой нелинейностью на положительной полупрямой // Мат. заметки. 2023. Т. 113. № 4. С. 529–543.
21. *Енгибарян Н.Б.* Уравнения восстановления на полуоси // Изв. РАН. Сер. мат. 1999. Т. 63. № 1. С. 61–76.
22. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976.
23. *Рудин У.* Функциональный анализ. М., 1975.
24. *Арабаджян Л.Г., Хачатрян А.С.* Об одном классе интегральных уравнений типа свёртки // Мат. сб. 2007. Т. 198. № 7. С. 45–62.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Ереванский государственный университет,
Армения,
Национальный аграрный университет Армении,
г. Ереван

Поступила в редакцию 13.08.2023 г.
После доработки 13.08.2023 г.
Принята к публикации 20.09.2023 г.