

О ВЛИЯНИИ НЕИЗОЛИРОВАННЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ В МЛАДШЕМ КОЭФФИЦИЕНТЕ УРАВНЕНИЯ БИЦАДЗЕ НА ПОСТАНОВКУ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

© 2023 г. А. Б. Расулов

Изучено влияние неизоллированных особенностей в младших коэффициентах (т.е. когда младшие коэффициенты имеют особенности по замкнутым линиям, лежащим внутри области) уравнения Бицадзе на постановку краевых задач. Обнаружено, что условия в задаче Римана–Гильберта на границе области недостаточно для её решения, поэтому рассмотрена задача, объединяющая элементы задач Римана–Гильберта на границе области и линейного сопряжения на окружностях-носителях сингулярностей коэффициентов, лежащих внутри области. С помощью надлежащего уточнения теоремы Келлога о конформном отображении этой области на круг исследован вопрос разрешимости этой задачи.

DOI: 10.31857/S0374064123100060, EDN: ONKXZI

*Статья посвящается юбилеям моих учителей:
75-летию Александра Павловича Солдатова
и 85-летию Нусрата Раджабовича Раджабова*

1. История вопроса. Классическая теорема Коши–Ковалевской гарантирует локальную аналитичность решения линейного дифференциального уравнения, представленного в нормальной форме, если его коэффициенты, правая часть и начальные данные аналитичны (в случае вещественных переменных разлагаются в сходящиеся степенные ряды) или если коэффициенты и правая часть эллиптического уравнения порядка m удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $0 < \alpha < 1$ (тогда производные порядка m любого решения этого уравнения также удовлетворяют условию Гёльдера с тем же показателем).

Исследования вырождающихся эллиптических уравнений показали, что аналитичность коэффициентов уравнения наследуется его решением. Фундаментальная система состоит из функций, представляющих собой произведение голоморфной в окрестности точки (плоскости) вырождения функции на функцию, которая может иметь особенность на указанном множестве. Эта особенность либо степенная, при этом показатель находится по коэффициентам уравнения, либо логарифмическая, степенная и логарифмическая или экспоненциальная. Для обоснования существования решения краевой задачи для вырождающихся уравнений, как правило, используют неявные методы построения решения (например, метод барьеров). При этом затруднительно выяснить структуру решения и проследить, как аналитичность коэффициентов и правой части уравнения отражается на решении задачи (см. работы [1–8]).

Как следует из исследований, посвящённых вырождающимся дифференциальным уравнениям, на решения краевых задач может влиять особенность коэффициентов, содержащихся в рассматриваемой области. Например, в статье [9] изучена разрешимость задачи Римана–Гильберта для обобщённого уравнения Коши–Римана

$$w_{\bar{z}} = \frac{Q(z)}{P(z)} w(z) + a(z)w + b(z)\bar{w}, \quad |z| < 1,$$

где $Q(z)$, $P(z)$ – полиномы, причём $P(z)$ внутри круга $|z| \leq 1$ имеет простые корни, $a(z), b(z) \in L^p(D)$ (здесь и дальше $p > 2$). Здесь и ниже используются стандартные обозначения $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$, $2\partial_z = \partial_x - i\partial_y$. Показано, что число непрерывных решений задачи зависит не только от индекса, но и от места расположения и типа особенностей коэффициентов уравнения.

В работе [10] для обобщённой системы Коши–Римана с сингулярной линией выявлено, что для корректной постановки краевой задачи необходимо рассматривать задачу, объединяющую элементы задач Римана–Гильберта (на границе области) и линейного сопряжения (на сингулярном отрезке, содержащемся внутри области).

В теории эллиптических уравнений важное место занимает система уравнений Бицадзе [1, с. 134]

$$u_{1xx} - u_{1yy} - 2u_{2xy} = 0, \quad 2u_{1xy} + u_{2xx} - u_{2yy} = 0.$$

Как известно, любая эллиптическая система уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и двумя неизвестными функциями от двух переменных приводится к одному из уравнений [11]:

$$u_{z\bar{z}} = 0 \quad \text{или} \quad u_{\bar{z}\bar{z}} = 0,$$

где $u = u_1 + iu_2$.

Класс задач для первого уравнения (уравнения Лапласа) хорошо изучен, в отличие от задач для второго уравнения (уравнения Бицадзе).

С другой стороны, как следует из работ [12, 13], уравнение Бицадзе непосредственно связано с уравнением Стокса. Согласно [12] в плоском случае уравнение Стокса базируется на функции потока $u_1(x, y)$ и функции напряжения $u_2(x, y)$ и имеет вид

$$u_{1xx} - u_{1yy} = -4\eta u_{2xy}, \quad -u_{1xy} = \eta(u_{2yy} - u_{2xx}),$$

где η – материальная постоянная. Подстановка $2\eta u_2 \rightarrow u_2$ переводит эту систему в систему уравнений Бицадзе, поэтому исследование системы уравнений Бицадзе с младшими членами представляет особый интерес.

Уравнение Бицадзе с младшими регулярными коэффициентами было исследовано в работах [1, 14–18] и др. Важность изучения уравнения с главной частью $u_{\bar{z}\bar{z}}$ и с особенностями в младших коэффициентах была подчеркнута ещё в 80-х годах прошлого века А.В. Бицадзе. Но эти исследования были связаны с некоторыми трудностями принципиального характера, особенно когда коэффициенты сингулярны во внутренней точке рассматриваемой области. Понятие сверхсингулярных особенностей было введено Н.Р. Раджабовым [4]. В статье [19] для уравнения Бицадзе с младшими коэффициентами, имеющими в одной внутренней точке рассматриваемой области сильную особенность, найдено интегральное представление обобщённого решения из класса непрерывных функций. В [20] для уравнения Бицадзе с младшими коэффициентами, имеющими в конечном числе точек рассматриваемой области сильные особенности и интегрируемую особенность в начале координат, найдено обобщённое решение из класса непрерывных функций задачи типа Римана–Гильберта.

В настоящей работе исследовано влияние неизолированных особенностей в младших коэффициентах уравнения Бицадзе на постановку краевых задач.

2. Интегральное представление решений в явной форме. Пусть область D содержит окружности $\gamma_j = \{z : |\delta_j| = r_j\}$, где $\delta_j \equiv z - z_j$, $j = \overline{1, n}$, и ограничена простым ляпуновским контуром Γ , ориентированным против часовой стрелки, и пусть для краткости

$$\rho = \rho_1 \dots \rho_n, \quad \rho_j(z) = \delta_j^{-1} |\delta_j| |z - z_j| - r_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

В открытом множестве $D_0 = D \setminus \gamma$, $\gamma = \sum_{j=1}^n \gamma_j$, рассмотрим уравнение Бицадзе с сингулярными младшими коэффициентами следующего вида:

$$u_{\bar{z}\bar{z}} + \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{\rho_j} u_{\bar{z}} + \frac{a_0}{\rho} u = f, \quad (1)$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n \in C(\overline{D})$, $a_0 = -\rho(ab + b^2)$, $a = -\sum_{j=1}^n a_j \rho_j^{-1}$ и функция $b(z) \in C(\overline{D})$ аналитична в области D . Относительно правой части f уравнения предполагаем, что она принадлежит пространству $L^p(G_0)$, $p > 2$, в каждой подобласти $G_0 \subseteq D_0$.

В работе для уравнения Бицадзе (1) построено представление общего решения. Далее для уравнения (1), коэффициенты которого допускают особенность первого порядка на окружности γ_j , исследована краевая задача, объединяющая элементы задач Римана–Гильберта на Γ и линейного сопряжения на γ_j , $j = \overline{1, n}$.

Выбор таких коэффициентов уравнения объясняется тем, что левую часть (1) можно представить в виде

$$u_{\bar{z}\bar{z}} + \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{\rho_j} u_{\bar{z}} + \frac{a_0}{\rho} u = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + a + b \right) (u_{\bar{z}} - bu) \quad (2)$$

и свести исследование к интегрированию уравнений первого порядка

$$U_{\bar{z}} - (a + b)U = f, \quad u_{\bar{z}} + bu = U \quad (3)$$

с сингулярным коэффициентом

$$a = \frac{a_1}{\rho_1} + \dots + \frac{a_n}{\rho_n} \quad (4)$$

и регулярным коэффициентом b .

Заметим, что функция f принадлежит соболевскому пространству $W^{1,p}(D_0)$, если в любой подобласти $G_0 \in D_0$ её обобщённая производная $f_{\bar{z}} \in L^p_{\text{loc}}(G_0)$, $p > 2$.

Напомним некоторые известные факты из теории эллиптических систем, изложенные в монографии [21] и в книге [8].

Пусть в некотором открытом множестве G на плоскости задана линейная эллиптическая система первого порядка с постоянными старшими коэффициентами, младшие коэффициенты и правая часть которой принадлежат $L^p_{\text{loc}}(G)$, т.е. принадлежат $W^{1,p}(G_0)$ в любой ограниченной области G_0 , лежащей в множестве G вместе со своей границей. Тогда на основании внутренней регулярности (см. [21]) любое слабое решение u уравнения регулярно в том смысле, что оно принадлежит классу $W^{1,p}_{\text{loc}}(G)$ и удовлетворяет рассматриваемой системе. В силу теоремы вложения функция u в действительности принадлежит классу $C^\mu(\overline{G_0})$ с показателем $\mu \leq (p-2)/p$. В соответствии с внутренней регулярностью решений и согласно свойству левой части уравнения (2) в дальнейшем решение уравнения (1) предполагается регулярным в открытом множестве D_0 .

Более точно, под *регулярным решением* уравнения (1) в рассматриваемой области D_0 понимается функция u , которая в любой замкнутой подобласти $\overline{G_0} \subseteq D_0$ имеет первую обобщённую производную по $\bar{z}$, принадлежащую классу $L^p(\overline{G_0})$, и удовлетворяет этому уравнению.

Уравнение (1), согласно (2), (3), сводится к интегрированию двух уравнений первого порядка вида

$$U_{\bar{z}} - CU = f. \quad (5)$$

Хорошо известно, что в его исследовании существенную роль играет интегральный оператор Помпейу–Векуа [21, с. 31]

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{f(\zeta) d_2\zeta}{\zeta - z}, \quad (6)$$

здесь и ниже $d_2\zeta$ означает элемент площади. Если $f \in L^p(D)$, $p > 2$, то функция $U = Tf$ принадлежит соболевскому пространству $W^{1,p}(D)$ и удовлетворяет уравнению $U_{\bar{z}} = f$, причём оператор (6) ограничен. Напомним, что имеет место следующее вложение [21, с. 39] данных пространств в класс Гёльдера:

$$W^{1,p}(D) \subseteq C^\mu(\overline{D}), \quad \mu = 1 - \frac{2}{p},$$

в частности, оператор T компактен в пространствах $L^p(D)$ и $C(\overline{D})$. Всюду в дальнейшем предполагается, что $p > 2$. Когда точное значение показателя Гёльдера μ несущественно, вместо $C^\mu(\overline{D})$ используем обозначение $H(\overline{D})$ [22, с. 31].

Пусть в уравнении (5) коэффициент C и правая часть f принадлежат классу $L^p(D)$. Очевидно, что в этом случае для функции $V = e^{-TC}U$ справедливо соотношение $V_{\bar{z}} = e^{-TC}U_{\bar{z}} - Ce^{-TC}U = e^{-TC}f$. Следовательно, общее решение этого уравнения определяется формулой

$$U = e^{TC}\phi + (e^{TC}Te^{-TC})f \quad (7)$$

с произвольной аналитической в области D функцией ϕ . Функции $e^{\pm TC}$ рассматриваются здесь как операторы умножения.

Теперь рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - (a + b)u = f \quad (8)$$

с коэффициентом (4), который запишем в виде

$$a(z) = \sum_{j=1}^n \frac{a_j^*(z - z_j)}{|z - z_j|(|z - z_j| - r_j)} + a_0(z), \quad a_0(z) \in L^p(D),$$

где $a_j^* \in \mathbb{C}$ и функция $b(z) \in C(\bar{D})$ аналитична в области D . В этом случае коэффициент a имеет особенность на окружностях γ_j , $j = \overline{1, n}$, и решение уравнения предполагается регулярным в множестве D_0 .

Лемма 1. Пусть $a_0(z) \in L^p(D)$, функция $b(z) \in C(\bar{D})$ аналитична в области D и $\omega_* = 2 \sum_{j=1}^n a_j^* \ln ||z - z_j| - r_j|$. Тогда функция

$$\Omega(z) = \omega_*(z) + (T(a_0 + b))(z), \quad z \in D_0, \quad (9)$$

удовлетворяет уравнению $\Omega_{\bar{z}} = a + b$.

Доказательство проводится проверкой, что функция $\Omega(z) = 2 \sum_{j=1}^n a_j^* \ln ||z - z_j| - r_j| + (T(a_0 + b))(z)$ удовлетворяет уравнению $\Omega_{\bar{z}}(z) = a + b$ с функцией

$$a(z) = - \sum_{j=1}^n \frac{a_j^*(z - z_j)}{|z - z_j|(|z - z_j| - r_j)} + a_0(z).$$

С другой стороны, как было отмечено выше, для $(a_0 + b) \in L^p$ функция $T(a_0 + b)$ является решением уравнения $(T(a_0 + b))_{\bar{z}} = a_0 + b$. Отсюда следует, что функция $\Omega(z)$ в (9) удовлетворяет уравнению $\Omega_{\bar{z}} = a + b$.

Теорема 1. Пусть функция $\Omega(z)$ определена формулой (9) и $e^{-\Omega}f \in L^p(D)$. Тогда общее решение уравнения (8) в классе $C(\bar{D} \setminus \gamma)$ определяется формулой

$$u = e^{\Omega}[\phi + T(e^{-\Omega}f)],$$

где $\phi \in C(\bar{D} \setminus \gamma)$ аналитична в открытом множестве $D \setminus \gamma$.

Из леммы 1 следует, что у функции

$$e^{\Omega(z)} = C_0(z) ||z - z_1| - r_1|^{2a_1^*} \dots ||z - z_n| - r_n|^{2a_n^*}$$

$C_0(z)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$ и всюду отлична от нуля. Поэтому, согласно теореме 1, решение $u(z)$ уравнения (9) ведет себя как

$$u(z) = O(1)(||z - z_j| - r_j|^{2a_j^*}) \quad \text{при} \quad |z - z_j| \rightarrow r_j.$$

Заметим, что функция $e^{\Omega(z)}$ при $\operatorname{Re} a_j^* < 0$, $j = \overline{1, n}$ ($\operatorname{Re} a_j^* > 0$, $j = \overline{1, n}$), допускает в окружности $\delta_j = r_j$ особенность (нуль) степенного порядка. При $\operatorname{Re} a_j^* \geq 0$, $j = \overline{1, k}$, эти функции, очевидно, ограничены. Если $\operatorname{Re} a_j^* = 0$, $j = \overline{1, n}$, т.е. $a = a_0 \in L^p(D)$, то получим обычное равенство $Ta = Ta_0 \in W^{1,p}(D)$.

Обратимся к уравнению (5). Пусть коэффициент $C \in L^p(D_0)$, причём функция TC существует, принадлежит $W^{1,p}(D_0)$ и удовлетворяет уравнению $(TC)_{\bar{z}} = C$. Тогда в предположении $e^{-TC}f \in L^p(D)$ представление (7) сохраняет свою силу по отношению к области D_0 . В частности, согласно теореме 1 оно справедливо для соответствующего уравнения с коэффициентом $a = \sum_{j=1}^n a_j^* \rho_j^{-1}$, удовлетворяющим условию $a_0(z) \in L^p(D)$. Совместно с разложением (3) это обстоятельство позволяет описать общее решение уравнения (1).

Итак, на основании теоремы 1, приведённых выше рассуждений и при обозначениях

$$\omega_* = \sum_{j=1}^n a_j^* \omega_j, \quad \phi \equiv \phi_2$$

доказана следующая

Теорема 2. Пусть $a_0(z) \in L^p(D)$ и $\operatorname{Re} a_j^* \leq 0$, $j = \overline{1, n}$. Тогда при $e^{\omega_*} f \in L^p(D)$ любое решение уравнения (1) в области D_0 определяется формулой

$$u = e^{-Tb} \phi_1 + (e^{-Tb} T e^{\omega_* + T(a_0 + 2b)}) \phi_2 + (e^{-Tb} T e^{\omega_* + T(a_0 + 2b)} T e^{-\omega_* - T(a_0 + b)}) f, \quad (10)$$

где функции ϕ_1 , ϕ_2 аналитичны в области D_0 , причём $e^{-\omega_*} \phi_2 \in L^p(D)$, и определяются однозначно по u .

Заметим, что согласно известному свойству интегралов типа Коши [22, с. 22] функция $h_k \in H(\overline{D})$, $k = 0, 1, 2$, где $h_0 = -Tb$, $h_1 = T(a_0 + 2b)$, $h_2 = T(a_0 + b)$.

В действительности можно утверждать больше, что показывает

Лемма 2. В условиях теоремы 2 функция $h_k \in W^{1,p}(D)$, $k = 0, 1, 2$.

Доказательство этой леммы содержится в статье [19].

Представление (10) после переобозначения с учётом леммы 2 можем записать в виде

$$u = e^{h_0} \phi_1 + (e^{h_0} T e^{\omega_* + h_1}) \phi_2 + (e^{h_0} T e^{\omega_* + h_1} T e^{-\omega_* - h_2}) f$$

с некоторыми $h_j \in W^{1,p}(D)$, $j = 0, 1, 2$, или кратко

$$u = e^{h_0} \phi_1 + T_0 \phi_2 + T_1 f, \quad (11)$$

с соответствующими интегральными операторами T_0 , T_1 . Эти операторы действуют по формулам

$$(T_0 \varphi)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{k_0(z, \zeta)}{\zeta - z} e^{\omega_*(\zeta)} \varphi(\zeta) d_2 \zeta, \quad z \in D,$$

где $k_0(z, \zeta) = e^{h_0(z) - h_1(\zeta)}$, и

$$(T_1 \varphi)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{k_1(z, \zeta)}{\zeta - z} e^{-\omega_*(\zeta)} \varphi(\zeta) d_2 \zeta, \quad z \in D,$$

где $k_1(z, \zeta) = e^{h_0(z) - h_1(\zeta)} [h(z) - h(\zeta)]$ и $h = T e^{h_1 + \omega_*} \in W^{1,p}(D)$.

Из (10) или (11) видно, что аналитические функции ϕ_1 , ϕ_2 определяются по u однозначно и восстанавливаются по формулам

$$\phi_2 = e^{-\omega_* + h_0 + h} (u_{\bar{z}} - bu) + T e^{-\omega_* + h_0 + h} f, \quad \phi_1 = e^{-h_0} (u - T_0 \phi_2 - T_1 f). \quad (12)$$

3. Постановка краевой задачи. Полученное интегральное представление (10) позволяет для уравнения (1) исследовать краевую задачу, объединяющую элементы задач Римана–Гильберта на границе Γ и линейного сопряжения на окружностях γ_j , $j = \overline{1, n}$.

Задача R. Найти регулярное решение уравнения (1) в классе

$$u, e^{-\omega_*} (u_{\bar{z}} - bu) \in C^\mu(\overline{D_j}), \quad j = \overline{1, n}, \quad 0 < \mu < 1 - 2/p, \quad (13)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\operatorname{Re} G_1 u|_{\Gamma} = g_1, \quad \operatorname{Re} G_2 e^{-\omega*}(u_{\bar{z}} - bu)|_{\Gamma} = g_2, \quad t \in \Gamma, \quad (14)$$

$$(e^{-\Omega} u)^+(t) - G_j(t)(e^{-\Omega} u)^-(t) = g_j(t), \quad t \in \gamma_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (15)$$

$$(e^{-\Omega} u)^+(t) - (e^{-\Omega} u)^-(t) = 0, \quad t \in \gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n, \\ e^{-\omega*}(u_{\bar{z}} - bu)^+(t) = e^{-\omega*}(u_{\bar{z}} - bu)^-(t), \quad t \in \gamma_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (16)$$

где знаки “+” и “−” указывают на граничные значения со стороны D_j^+ и D_j^- .

Эту задачу рассматриваем при следующих требованиях на её данные:

- 1) $e^{-\omega*} f \in L^p(D)$;
- 2) функции $G_k, g_k \in C^\nu(\Gamma)$, $k = 1, 2, j$, причём G_1 и G_2 всюду отличны от нуля, $G_j(t) \in H(\gamma_j)$ также всюду отличны от нуля, причём $\ln G_j \in H(\gamma_j)$;
- 3) $g(t) \in H(\Gamma)$, $g_j(t) \in H(\gamma_j)$, $j = \overline{1, n}$.

Как следует из условий задачи, одна из окружностей γ_j , лежащих внутри Γ , является носителем условий задачи линейного сопряжения (15), а остальные окружности, лежащие внутри Γ , являются носителями условий сопряжения (16).

Замечание. Из постановки задачи R видно, что окружности γ_j , $j = \overline{1, n}$, являющиеся носителями сингулярностей, разбивают область на части, на границах которых необходимо дополнительно задавать граничные условия типа (15) и (16).

4. Классическая задача Римана–Гильберта. Напомним постановку классической задачи Римана–Гильберта [22, 23]: найти аналитическую в области D функцию $\phi(z) \in H(\overline{D})$, удовлетворяющую на границе $\Gamma = \partial D$ условию

$$\operatorname{Re} G\phi|_{\Gamma} = g, \quad (17)$$

где функция $G = G_1 + iG_2 \in H(\Gamma)$ всюду отлична от нуля, H – класс функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с некоторым показателем [22, с. 18, 145].

Далее воспользуемся компактным изложением А.П. Солдатова о решении задачи Римана–Гильберта и приведём некоторые факты о разрешимости классической задачи Римана–Гильберта (17) в случае единичного круга $\mathbb{D}$ с границей $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$. С этой целью функцию ϕ продолжим в область $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D} = \{z : |z| > 1\}$, положив, что она удовлетворяет условию $\phi = \phi_*$, где ϕ_* определяется с помощью инверсии $\phi_*(z) = \overline{\phi(1/\bar{z})}$. Операция $\phi \rightarrow \phi_*$, являющаяся линейной, инволютивна над полем $\mathbb{R}$, т.е. $(\phi_*)_* = \phi$. Видно, что $\phi_*^\pm(t) = \overline{\phi^\mp}$, $t \in \mathbb{T}$. Задачу (17) с коэффициентом G можем представить в виде

$$\phi^+ - \tilde{G}\phi^- = \tilde{g}, \quad (18)$$

где $\tilde{G} = -\overline{G}/G$ и $\tilde{g} = 2g/G$.

Последняя задача с коэффициентом $\tilde{G}$ исследуется с помощью так называемой $\tilde{G}$ -канонической функции. По определению под ней понимается функция $X(z)$, которая аналитична в каждой связной компоненте $\mathbb{D}$, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ и продолжается по непрерывности на её замыкание $\overline{\mathbb{D}}$, $\overline{\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}}$; всюду отлична от нуля, включая её граничные значения $X^\pm$; вместе с $X^{-1}(z)$ имеет конечный порядок на бесконечности и удовлетворяет соотношению

$$X^+ = \tilde{G}X^-.$$

Определим индекс Коши [22, с. 125]

$$\varkappa = \operatorname{Ind}_\Gamma G = \frac{1}{2\pi} \arg G(t)|_\Gamma.$$

Лемма 3. Пусть $\varkappa = \text{Ind}_\Gamma G$, так что функция $\theta(t) = \arg G(t) - \varkappa \arg t \in H(\mathbb{T})$, и пусть

$$R(z) = \begin{cases} 1, & |z| < 1, \\ z^{2\varkappa}, & |z| > 1, \end{cases} \quad \Theta(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\pi - 2\theta(t)}{t - z} dt.$$

Тогда функция $X(z) = R(z)e^{\Theta(z) - \Theta(0)/2}$ является $\tilde{G}$ -канонической и обладает свойством

$$X_*(z) = X(z)z^{-2\varkappa}.$$

Теорема 3. В условиях леммы 3 все решения задачи (17) в классе $H(\overline{\mathbb{D}})$ описываются формулой

$$\phi(z) = \text{Ig}(z) + X(z)p(z), \quad p \in P_{-2\varkappa}^0, \quad (19)$$

где

$$\text{Ig}(z) \equiv \frac{X(z)}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)} \frac{dt}{t - z},$$

а функция g удовлетворяет условиям ортогональности

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)} q(t) dt = 0, \quad q \in P_{2\varkappa-2}^0, \quad (20)$$

где P_k^0 – класс многочленов степени k .

Доказательство. Как уже отмечалось, при дополнительном условии $\phi = \phi_*$ задача (17) эквивалентна задаче (18). Последняя представляет собой задачу линейного сопряжения по отношению к $\tilde{G} = -\overline{G}/G$ и $g = f/G$.

Очевидно, что при $\varkappa \leq 0$ размерность пространства $P_{-2\varkappa}^0$ над полем $\mathbb{R}$ равна $-2\varkappa + 1$, а при $\varkappa \geq 0$ размерность пространства $P_{2\varkappa-2}^0$ равна $2\varkappa - 1$. Во всех случаях индекс задачи (17) равен $-2\varkappa + 1$ и, в частности, всегда отличен от нуля.

Рассмотрим функцию

$$A(z) = \Theta(z) - \Theta(0)/2, \quad z \in \mathbb{D},$$

фигурирующую в представлении канонической функции $X(z)$. В явном виде запишем

$$A(z) = \frac{\pi i}{2} - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\theta(t) dt}{t - z} + \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \theta(t) d_1 t, \quad A(0) = \frac{\pi i}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \theta(t) d_1 t.$$

По формуле Сохоцкого–Племеля отсюда имеем

$$A^+(t_0) = \frac{\pi i}{2} - ia(t_0) - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\theta(t) dt}{t - t_0} + \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \theta(t) d_1 t.$$

Полагая $e^{2i\beta} = t_0/t$, можем записать равенства

$$\frac{dt}{t - t_0} = \frac{i d_1 t}{1 - e^{2i\beta}} = \frac{i - \text{ctg } \beta}{2} d_1 t,$$

так что

$$A^+(t_0) = \frac{\pi i}{2} - ia(t_0) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \theta(t) \text{ctg } \beta d_1 t.$$

Следовательно, функцию $A(z)$ можем однозначно определить по условиям

$$\text{Im } A^+ = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad \text{Re } A(0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \theta(t) d_1 t. \quad (21)$$

Теорема доказана.

Обратимся к общему случаю односвязной области D . Пусть простой контур $\Gamma = \partial D$ принадлежит классу $C^{1,\mu}$, тогда по теореме Келлога конформное отображение $w = \omega(z)$ этой области на единичный круг $\mathbb{D}$ принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{\mathbb{D}})$ или, что равносильно, его производная $\omega' \in H(\overline{\mathbb{D}})$. Зафиксируем точку $z_0 \in D$ из условия $\omega(z_0) = 0$.

Теорема 4. Пусть $\varkappa = \text{Ind}_\Gamma G$, так что функция $\theta(t) = \arg G(t) - \varkappa \arg t \in H(\Gamma)$, и пусть $X(z) = e^{\Theta(z) - \Theta(0)/2}$, где функция $\Theta \in H(\overline{\mathbb{D}})$ определяется как решение задачи Дирихле

$$\text{Im } \Theta^+ = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad \text{Re } \Theta(z_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \theta(t) |\omega'(t)| d_1 t.$$

Тогда все решения задачи (17) в классе $H(\overline{\mathbb{D}})$ описываются формулой

$$\phi(z) = \frac{X(z)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)} \frac{\omega'(t) dt}{\omega(t) - \omega(z)} + X(z)p[\omega(z)], \quad p \in P_{-2\varkappa}^0, \quad (22)$$

где функция g удовлетворяет условиям ортогональности

$$\int_{\Gamma} \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)} q[\omega(t)] \omega'(t) dt = 0, \quad q \in P_{2\varkappa-2}^0. \quad (23)$$

Доказательство почти очевидно. Пусть простой контур $\Gamma = \partial D$ принадлежит классу $C^{1,\mu}$, тогда по теореме Келлога конформное отображение $w = \omega(z)$ этой области на единичный круг $\mathbb{D}$ принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{\mathbb{D}})$. Рассмотрим в области $\mathbb{D}$ задачу

$$\text{Re } G_0 \phi|_{\Gamma} = g_0 \quad (24)$$

с коэффициентом $G_0 = G \circ \omega^{-1}$. Пусть $A_0 \in H(\overline{\mathbb{D}}_0)$ есть решение задачи (21) по отношению к соответствующей функции $\alpha_0 = \arg G_0(t) - \varkappa \arg t \in H(\Gamma)$, которая определяется аналогично лемме 3, и пусть $X_0 = e^{A_0}$. Тогда согласно (21) функция $A = A_0 \circ \omega$ и аналогичным образом связаны функции X и X_0 . Применим теорему 4 к задаче (24), добавив к соответствующим обозначениям в соотношениях (19), (20) индекс нуль. Тогда при подстановке ω они перейдут в соотношения (22), (23), что и завершает доказательство теоремы.

5. Решение задачи R. Из (10) (или из (11)) видно, что аналитические функции ϕ_1, ϕ_2 определяются по u однозначно и восстанавливаются по формулам (12).

В рассматриваемом случае ($p > 2$) пространство $W^{1,p}(D)$ вложено в гёльдерово пространство $H(\overline{D})$ (причём $C^{\mu_0}(\overline{D}) \subseteq H(\overline{D})$ с показателем $\mu_0 = 1 - 2/p$).

Следовательно, при $\mu < \mu_0$ соответствие между решением u по формуле (10) уравнения (1) из класса (13) и парой аналитических в D функций $\phi_1, \phi_2 \in H(\overline{D})$ будет взаимно однозначным.

Положив

$$\tilde{G}_1 = G_1 e^{-h_0 - h}|_{\Gamma}, \quad \tilde{G}_2 = G_2 e^{h_0}|_{\Gamma},$$

условия (14) задачи R с ограниченными операторами $R_j : H(\overline{D}) \rightarrow H(\Gamma)$, действующими по формулам

$$R_0 \varphi = \text{Re } G_1 [T_0 \varphi]|_{\Gamma}, \quad R_1 \varphi = \text{Re } G_1 [T_1 \varphi]|_{\Gamma}, \quad R_2 \varphi = \text{Re } G_2 \varphi|_{\Gamma},$$

примут вид

$$\text{Re } \tilde{G}_2 \phi_2|_{\Gamma} = g_2 - R_2 f \equiv \tilde{g}_2, \quad \text{Re } \tilde{G}_1 \phi_1|_{\Gamma} - R_0 \phi_2 = g_1 - R_1 f \equiv \tilde{g}_1,$$

а условия (15) и (16) задачи R запишутся как

$$(\phi_1^+ - G_j \phi_1^-)|_{\gamma_j} = g_j^*, \quad \phi_2^+(t) = \phi_2^-(t), \quad t \in \gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n,$$

где $g_j^* = g_j - e^{-h_0}(F^+ - G_j F^-)$, $F = T_0 \phi_2 + T_1 f$.

В результате задача R будет сведена к эквивалентной задаче

$$\operatorname{Re} \tilde{G}_2 \phi_2|_{\Gamma} = g_2 - R_2 f \equiv \tilde{g}_2, \quad \operatorname{Re} \tilde{G}_1 \phi_1|_{\Gamma} - R_0 \phi_2 = g_1 - R_1 f \equiv \tilde{g}_1, \quad (\phi_1^+ - G_j \phi_1^-)|_{\gamma_j} = g_j^*,$$

$$\phi_2^+(t) = \phi_2^-(t), \quad t \in \gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n.$$

Таким образом, задача R приводится к последовательному решению двух задач (см. ниже), в результате решения которых определим соответственно значения искомых функций $\phi_1(z)$ и $\phi_2(z)$.

Решение задачи R рассмотрим в двух случаях: когда область $D \equiv \mathbb{D}$ – единичный круг и когда область D – произвольная конечная область, ограниченная гладким замкнутым контуром Γ .

Сперва рассмотрим задачу R в случае единичного круга, т.е. относительно области $\mathbb{D} = \{z : |z| \leq 1\}$. Тогда окружности $\gamma_k = \{z : |z - z_k| = r_k < 1\}$, $k = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n$, являются носителями граничных данных в силу условий (16).

Согласно второму условию (16) и первой формуле обращения для функции ϕ_2 в (12) приходим к эквивалентной задаче

$$\phi_2^+(t) = \phi_2^-(t), \quad t \in \gamma_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (25)$$

где через $\phi_2^+(t)$ и $\phi_2^-(t)$ обозначены предельные значения функций $\phi_2^+(z)$ и $\phi_2^-(z)$ соответственно из внутренних частей областей $\mathbb{D}_k$, $k = \overline{1, n}$, в их внешние части и наоборот. Отметим, что мы воспользовались свойствами функций $f_0 = e^{-\omega_* + h_0 + h} f \in L^p$, $p > 2$, $(Tf_0)^\pm(t) \in H(\mathbb{D})$ и $(h_0 + h)^+ = (h_0 + h)^-$, $(Tf_0)^+(t) = (Tf_0)^-(t)$, $t \in \gamma_j$, $j = \overline{1, n}$.

Следовательно, условия (25) определяют единую аналитическую функцию ϕ_2 во всей области D , включая все окружности γ_j , $j = \overline{1, n}$. Этот факт позволяет нам изучить второе условие в (14) и прийти к краевой задаче Гильберта со следующими данными:

$$\operatorname{Re} \tilde{G}_2 \phi_2|_{\mathbb{T}} = \tilde{g}_2, \quad (26)$$

коэффициент $\tilde{G}_2 = G_2 e^{h_0 + h}|_{\mathbb{T}}$, индекс

$$\kappa_2 = \frac{1}{2\pi} \arg \tilde{G}_2(t)|_{\mathbb{T}} = \frac{1}{2\pi} \arg G_2(t)|_{\mathbb{T}}$$

и правая часть

$$\tilde{g}_2 = g_2 - \operatorname{Re} [G_2 e^{h_0 + h} T f_0|_{\mathbb{T}}],$$

и сформулировать её решение на основе теорем 2 и 3.

Теорема 5. Пусть $\kappa_2 = \operatorname{Ind}_{\Gamma} G_2$, так что функция $\theta_2(t) = \arg G_2(t) - \kappa_2 \arg t \in H(\mathbb{T})$, и пусть $X_2(z) = e^{\Theta_2(z) - \Theta_2(0)/2}$, где функция $\Theta_2 \in H(\overline{D})$ определяется как решение задачи Дирихле

$$\operatorname{Im} \Theta_2^+ = \frac{\pi}{2} - \theta_2, \quad \operatorname{Re} \Theta_2(z_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \theta_2(t) d_1 t.$$

В условиях леммы 3 и теорем 2, 3 все решения задачи (26) в классе $H(\overline{D})$ описываются формулой

$$\phi_2(z) = \operatorname{I} \tilde{g}_2(z) + X_2(z) p(z), \quad p \in P_{-2\kappa_2}^0,$$

где

$$\operatorname{I} \tilde{g}_2(z) \equiv \frac{X_2(z)}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\tilde{g}_2(t)}{\tilde{G}_2(t) X_2^+(t)} \frac{dt}{t - z},$$

а функция $\tilde{g}_2(z)$ удовлетворяет условиям ортогональности

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{\tilde{g}_2(t)}{\tilde{G}_2(t) X_2^+(t)} q(t) dt = 0, \quad q \in P_{2\kappa_2 - 2}^0,$$

где P_k^0 – класс многочленов степени k .

Теперь, используя первое условие в (16), интегральное представление (10), формулу обращения для функции ϕ_1 в (12) и условие (15), получаем для ϕ_1 краевую задачу

$$\operatorname{Re} G_0 \phi_1|_{\Gamma} = g_0, \quad (\phi_1^+ - G_j \phi_1^-)|_l = g_j^*, \quad (27)$$

где $G_0 = G_1(e^{h_0})|_{\Gamma}$, $g_0 = g_1 - \operatorname{Re}[G_1 F|_{\Gamma}]$, $g_j^* = g_j - e^{-h_0}(F^+ - G_j F^-)$, $F = T_0 \phi_2 + T_1 f$.

Теорема 6. При выполнении условий теоремы 1 фредгольмова задача (27) рассматривается в классе (13) и её индекс равен $1 - 2\alpha_1$, где

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\pi} \arg G_1(t)|_{\Gamma}.$$

Более точно, все решения задачи (27) в классе $H(\overline{D})$ описываются формулой

$$\phi_1(z) = \frac{X_1(z)}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{g_1^*(t)}{G_1(t)X_1^+(t)} \frac{dt}{t-z} + X_1(z)p(z), \quad p \in P_{-2\alpha_1}^0,$$

где $X_1(z) = e^{\Theta_1(z) - \Theta_1(0)/2}$ – каноническая функция, функция $\Theta_1 \in H(\overline{D})$ определяется как решение задачи Дирихле

$$\operatorname{Im} \Theta_1^+ = \frac{\pi}{2} - \theta_2, \quad \operatorname{Re} \Theta_1(z_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \theta_1(t) d_1 t,$$

в которой $\theta_1(t) = \arg G_1(t) - \alpha_1 \arg t \in H(\mathbb{T})$ и функция g_1^* удовлетворяют условиям ортогональности

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{g_1^*(t)}{G_1(t)X_1^+(t)} p(t) dt = 0, \quad p \in P_{2\alpha_1-2}^0,$$

причём

$$g_1^* = g_j - \operatorname{Re}[\alpha e^{\Omega}(Tf_0)|_{\mathbb{T}}] - \operatorname{Re}[GX_1\psi]|_{\mathbb{T}}, \quad \psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{g_j^*(t)}{X_j^+(t)(t-z)} dt,$$

$$g_1^* = g_j - e^{-h_0}(F^+ - G_j F^-), \quad F = T_0 \phi_2 + T_1 f.$$

Доказательство. По теореме 2 общее решение u уравнения (1) в классе (13) представимо в виде (10) (или в краткой форме в виде (11)), где функция ϕ принадлежит $H(\overline{D_j^{\pm}})$. Кроме того, в силу леммы 1 функция $\Omega \in H(\Gamma)$. Поэтому подставим данное представление в условия (14), (15) и используем формулу обращения для искомой функции ϕ_1 из (12). Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi} \arg G_0|_{\Gamma} = \frac{1}{2\pi} \arg G_1|_{\Gamma} = \alpha_1. \quad (28)$$

Согласно хорошо известным свойствам интеграла типа Коши [22], функция

$$X_j(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{\ln G_j(t)(t) dt}{t-z}\right), \quad z \in D_j^+ \cup D_j^-, \quad (29)$$

принадлежит классу $H(\overline{D_j^{\pm}})$, $j = 1, 2$, причём её граничное значение $\ln X_j^{\pm} \in H(\gamma_j)$ на окружности γ_j удовлетворяет краевому условию $X_j^+ = G_j X_j^-$. Поэтому второе краевое условие в (27) можно записать в виде

$$\frac{\phi_1^+}{X_j^+} - \frac{\phi_1^-}{X_j^-} = \frac{g_j^*}{X_j^+}.$$

Функция

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{g_j^*(t)}{X_j^+(t)(t-z)} dt$$

принадлежит классу $H(\overline{D_j^\pm})$ и удовлетворяет краевому условию

$$\psi^+(t) - \psi^-(t) = \frac{g_j^*(t)}{X_j^+(t)}.$$

Следовательно, разность

$$\phi_0(z) = \frac{\phi_1(z)}{X_j(z)} - \psi(z) \quad (30)$$

аналитична в области D и принадлежит классу $H(\overline{D})$. Подстановка формул (29) и (30) в (27) приводит к эквивалентной задаче Римана–Гильберта:

$$\operatorname{Re}(\alpha_0 \phi_0)|_{\mathbb{T}} = g_0,$$

где $\alpha_0 = G_1 X_j e^{-h_0-h}|_{\mathbb{T}}$ и $g_0 = g_1 - \operatorname{Re}[G_1 e^{-h_0-h} X_j \psi]|_{\mathbb{T}}$.

Равенство (28) сохраняется и для α_0 , G_j .

Резюмируя результаты исследований, сформулированные для единичного круга в теоремах 5 и 6, используя теорему Келлога, приходим к результату, представляющему решение задачи R для области D_0 . При этом сохраняем обозначения формул как в теоремах 1–6.

Теорема 7. Пусть выполнены условия теоремы 2 и $\alpha_k = \operatorname{Ind}_{\Gamma} G_k$, $k = 1, 2$, так что функция $\theta_k(t) = \arg G_k(t) - \alpha_k \arg t \in H(\Gamma)$, и пусть $X_k(z) = R_k(z) e^{\Theta_k(z) - \Theta_k(0)/2}$, где функция $\Theta_k \in H(\overline{D})$ аналитична в области D и её мнимая часть определяется как решение задачи Дирихле

$$\operatorname{Im} \Theta_k^+ = \frac{\pi}{2} - \theta_k, \quad \operatorname{Re} \Theta_k(z_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \theta_k(t) |\omega'(t)| d_1 t, \quad k = 1, 2.$$

Тогда все решения задачи R в классе $H(\overline{D})$ описываются формулой

$$u = e^{g_0} \phi_2 + T_0 \phi_1 + T_1 f,$$

в которой аналитические функции $\phi_k(z)$, $k = 1, 2$, определяются формулами

$$\phi_k(z) = \frac{X_k(z)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{g}_k(t)}{\tilde{G}_k(t) X_k^+(t)} \frac{\omega'(t) dt}{\omega(t) - \omega(z)} + X_k(z) p_k[\omega(z)], \quad p_k \in P_{-2\alpha_k}^0, \quad k = 1, 2,$$

где функция $\tilde{g}_k$ удовлетворяет условиям ортогональности

$$\int_{\Gamma} \frac{\tilde{g}_k(t)}{\tilde{G}_k(t) X_k^+(t)} q[\omega(t)] \omega'(t) dt = 0, \quad q \in P_{2\alpha_k-2}^0, \quad k = 1, 2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
2. Смирнов М.М. Вырождающиеся гиперболические уравнения. Минск, 1997.
3. Солдатов А.П. Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. М., 1991.
4. Раджабов Н.Р. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. Душанбе, 1992.

5. Ломов С.А., Ломов И.С. Основы математической теории пограничного слоя. М., 2011.
6. Коровина М.В. Дифференциальные уравнения с коническим вырождением в пространствах с асимптотиками // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 9. С. 1249–1258.
7. Ломов И.С. Метод регуляризации сингулярных возмущений и исследование нерегулярно вырождающихся эллиптических задач. Некоторые проблемы теории возмущений и метод регуляризации // Сб. науч. тр., посвящ. 100-летию со дня рождения Сергея Александровича Ломова. М., 2023. С. 105–122.
8. Берс Л., Джонс Ф., Шеппер М. Уравнения с частными производными. М., 1966.
9. Begehr H., Dao-Qing Dai. On continuous solutions of a generalized Cauchy–Riemann system with more than one singularity // J. Differ. Equat. 2004. V. 196. P. 67–90.
10. Расулов А.Б., Солдатов А.П. Краевая задача для обобщённого уравнения Коши–Римана с сингулярными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 5. С. 637–650.
11. Фролов П.С. О компонентах связности вещественных эллиптических систем на плоскости // Докл. АН СССР. 1968. Т. 181. № 6. С. 1350–1353.
12. Bochev P.B. Analysis of least-squares finite element methods Muhammad Tahir, A.R. Davies for the Navier–Stokes equations // Siam J. Numer. Anal. 1997. V. 34. № 5. P. 1817–1844.
13. Tahir M., Davies A.R. Stokes–Bitsadze problem – I // Punjab University J. of Math. 2005. V. 32. P. 77–90.
14. Солдатов А.П. Эллиптические системы второго порядка в полуплоскости // Изв. РАН. 2006. Т. 70. № 6. С. 161–192.
15. Сакс Р.С. Краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1975.
16. Товмасыан Н.Е. Эффективные методы решения задачи Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами в областях, ограниченных эллипсом // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 1. С. 60–71.
17. Tovmasyan N.E. Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics. Singapore, 1994.
18. Бабалян А.О. Об одной краевой задаче для уравнения Бицадзе в единичном круге // Изв. НАН Армении. Математика. 2007. Т. 42. № 4. С. 3–10.
19. Солдатов А.П., Расулов А.Б. Уравнение Бицадзе с сильными особенностями в младших коэффициентах // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 2. С. 238–248.
20. Rasulov A.B., Fedorov Yu.S., Sergeeva A.M. Integral representations of solutions for the Bitsadze equation with the set of supersingular points in the lower coefficients // Proc. Intern. Conf. on Appl. and Eng. Math. (ICAEM). August 27–29, 2019. Taxila, Pakistan. Danvers, 2019. P. 13–17.
21. Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М., 1959.
22. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
23. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М., 1977.

Национальный исследовательский университет
“Московский энергетический институт”

Поступила в редакцию 11.05.2023 г.
После доработки 15.08.2023 г.
Принята к публикации 25.08.2023 г.