

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.9

О ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦЕ РЕШЕНИЙ
ПЛОСКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

© 2023 г. Чан Куанг Вьонг, А. П. Солдатов

Приведено явное выражение (в полярных координатах) фундаментальной матрицы решений системы Ламе плоской анизотропной теории упругости. Показано, что оператор свёртки этой матрицы в конечной области с ляпуновской границей ограничен в пространствах Гёльдера $C^\mu \rightarrow C^{2,\mu}$. Аналогичный результат установлен и для бесконечной области в соответствующих весовых пространствах Гёльдера (со степенным поведением на бесконечности).

DOI: 10.31857/S0374064123050072, EDN: CXSOSU

К 95-летию Владимира Александровича Ильина

Рассмотрим в области D на плоскости неоднородную систему Ламе

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + (a_{12} + a_{21}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = f \quad (1)$$

для вектор-функций $u = (u_1, u_2)$ с постоянными матричными коэффициентами

$$a_{11} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_6 \\ \alpha_6 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad a_{12} = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_4 \\ \alpha_3 & \alpha_5 \end{pmatrix},$$

$$a_{21} = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}, \quad a_{22} = \begin{pmatrix} \alpha_3 & \alpha_5 \\ \alpha_5 & \alpha_2 \end{pmatrix},$$

отвечающую общему анизотропному случаю упругой среды [1, 2]. Последнее означает, что элементы α_j этих матриц, называемые *модулями упругости*, удовлетворяют условию положительной определённости 3×3 -матрицы

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_6 \\ \alpha_4 & \alpha_2 & \alpha_5 \\ \alpha_6 & \alpha_5 & \alpha_3 \end{pmatrix},$$

которое обеспечивает сильную эллиптичность системы Ламе (1).

Рассмотрим матричный трёхчлен $p(z) = a_{11} + a_{33}z + a_{22}z^2$ этой системы, где здесь и ниже для краткости положено $a_{33} = a_{12} + a_{21}$, представляющий собой симметричную матрицу

$$p = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix},$$

$$p_1(z) = \alpha_1 + 2\alpha_6z + \alpha_3z^2, \quad p_2(z) = \alpha_3 + 2\alpha_5z + \alpha_2z^2, \quad p_3(z) = \alpha_6 + (\alpha_3 + \alpha_4)z + \alpha_5z^2. \quad (2)$$

В силу эллиптичности корни характеристического многочлена четвёртой степени $\chi = p_1p_2 - p_3^2$ не лежат на вещественной оси. Обозначив через ν_1, ν_2 эти корни в верхней полуплоскости (возможно кратные), можем записать

$$\chi(z) = (\det a_{22})(z - \nu_1)(z - \bar{\nu}_1)(z - \nu_2)(z - \bar{\nu}_2),$$

где $\bar{\nu}_1$ и $\bar{\nu}_2$ – комплексно-сопряжённые числа к ν_1 и ν_2 соответственно.

Рассмотрим матричную квадратичную форму

$$\sigma(z) = a_{22}x^2 - a_{33}xy + a_{11}y^2, \quad z = x + iy, \quad (3)$$

положительно определённую при $z \neq 0$.

Введём матрицы

$$e_1 = \frac{1}{2\pi} \int_S \sigma^{-1}(\xi) d_1 \xi, \quad e_2 = \frac{1}{2\pi} \int_S [\xi_1 \xi_2 (a_{11} - a_{22}) - \xi_1^2 a_{33}] \sigma^{-1}(\xi) d_1 \xi, \quad (4)$$

где S означает единичную окружность, $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ и $d_1 \xi$ есть элемент длины дуги.

Теорема 1. Матрица-функция

$$h_0(\theta) = \sigma^{-1}(e^{i\theta}) [\cos \theta \sin \theta (a_{11} - a_{22}) e_1 + \sin^2 \theta a_{33} e_1 + \tilde{e}_2], \quad (5)$$

где $\tilde{e}_2 = a_{22}e_2a_{22}^{-1}$, допускает π -периодическую первообразную $h(\theta)$ и формула

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi} [(\ln |z|) e_1 + h(\arg z)] \quad (6)$$

определяет фундаментальную матрицу решений системы Ламе. Другими словами, для любой функции f с компактным носителем, удовлетворяющей условию Гёльдера, интеграл

$$u(z) = \int_{\mathbb{C}} \omega(\zeta - z) f(\zeta) d_2 \zeta \quad (7)$$

доставляет решение неоднородной системы Ламе с правой частью f .

Отметим, что фундаментальная матрица решений системы Ламе по существу была построена в работе [3], однако в ней допущена неточность.

Доказательство. Как и в работе [3], введём блочную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_{22}^{-1}a_{11} & -a_{22}^{-1}a_{33} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

собственные значения которой совпадают с корнями характеристического многочлена χ и, в частности, не лежат на вещественной оси.

Удобно с каждым комплексным числом $z = x + iy$ связать матрицу $z_A = x1 + yA$, которая при $z \neq 0$ обратима (здесь 1 – единичная матрица). Прямая проверка показывает, что обратная к ней матрица определяется равенством

$$z_A^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma^{-1}(z) & 0 \\ 0 & \sigma^{-1}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xa_{22} - ya_{33} & -y \\ ya_{11} & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Рассмотрим интеграл

$$(U)(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} (\zeta - z)_A^{-1} \varphi(\zeta) d_2 \zeta, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (10)$$

с векторной плотностью $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$. Как установлено в [4, лемма 3.5.2], функция (10) непрерывно дифференцируема и её производные вычисляются по формулам

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \alpha_1 \varphi(z) + \frac{1}{2\pi} \int_D (\zeta - z)_A^{-2} \varphi(\zeta) d_2 \zeta, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \alpha_2 \varphi(z) + \frac{1}{2\pi} \int_D A(\zeta - z)_A^{-2} \varphi(\zeta) d_2 \zeta$$

с матричными коэффициентами

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\pi} \int_S \xi_k \xi_A^{-1} d_1 \xi, \quad k = 1, 2,$$

и двумерными сингулярными интегралами.

Таким образом, функция U удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial y} - A \frac{\partial U}{\partial x} = -E\varphi \quad (11)$$

с матрицей

$$E = -\alpha_2 + \alpha_1 A = \frac{1}{2\pi} \int_S (i\xi)_A \xi_A^{-1} d_1 \xi,$$

которую можно записать в форме

$$\frac{1}{2\pi} \int_S (i\xi)_A \xi_A^{-1} d_1 \xi = \frac{1}{2\pi} \int_S \xi_A^{-1} (d\xi_1 + A d\xi_2).$$

Аналогично [5] убеждаемся, что правую часть этого равенства можно рассматривать как значение $\chi(A)$ от матрицы A функции

$$\chi(u) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{d\xi + u d\eta}{\xi + u\eta}, \quad \operatorname{Im} u \neq 0.$$

Поскольку $\chi(u) = \pm i$ в полуплоскости $\pm \operatorname{Im} u > 0$, то $[\chi(A)]^2 = \chi^2(A) = -1$. Таким образом, матрица E обратима и

$$E^2 = -1. \quad (12)$$

Согласно (9) имеем равенство

$$z_A^{-1}(iz)_A = \begin{pmatrix} \sigma^{-1}(z) & 0 \\ 0 & \sigma^{-1}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xa_{22} - ya_{33} & -y \\ ya_{11} & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y & x \\ -xa_{11} & -ya_{22} - xa_{33} \end{pmatrix}.$$

Поэтому в блочном 2×2 -виде матрица E определяется равенством

$$E = \begin{pmatrix} e'_2 & e_1 a_{22} \\ -e_1 a_{11} & e_2 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где в дополнение к (4) положено

$$e'_2 = \frac{1}{2\pi} \int_S \sigma^{-1}(\xi) [\xi_1 \xi_2 (a_{11} - a_{22}) + \xi_2^2 a_{33}] d_1 \xi.$$

Выберем теперь плотность $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ интеграла (10) в форме

$$\varphi = E\tilde{\varphi}, \quad \tilde{\varphi} = (0, a_{22}^{-1}\psi). \quad (14)$$

Тогда в силу (11), (12), (14) имеем

$$\frac{\partial U}{\partial y} - A \frac{\partial U}{\partial x} = \tilde{\varphi}.$$

С учётом (8) в покомпонентной записи вектора $U = (u_1, u_2)$ это уравнение примет вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \quad a_{22} \frac{\partial u_2}{\partial y} + a_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{33} \frac{\partial u_2}{\partial x} = f. \quad (15)$$

В силу (13), (14) вектор $\varphi = (e_1 f, e_2 a_{22}^{-1} f)$. Следовательно, вектор U имеет своими компонентами

$$u_k(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \{[(\zeta - z)_A^{-1}]_{k1} e_1 + [(\zeta - z)_A^{-1}]_{k2} a_{22}^{-1} \tilde{e}_2\} f(\zeta) d_2 \zeta, \quad k = 1, 2,$$

где, напомним, $\tilde{e}_2 = a_{22} e_2 a_{22}^{-1}$. Расписывая элементы матрицы (9), в соответствии с (4) отсюда приходим к выражениям

$$u_k(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \omega_k(\zeta - z) f(\zeta) d_2 \zeta, \quad k = 1, 2, \quad (16)$$

с ядрами $\omega_1(z) = \sigma^{-1}(z)[x a_{22} e_1 - y(a_{33} e_1 + \tilde{e}_2)]$, $\omega_2(z) = \sigma^{-1}(z)(x \tilde{e}_2 + y a_{11} e_1)$.

Первое равенство (15) показывает, что форма $u_1 dx + u_2 dy$ замкнута на всей плоскости и, следовательно, существует функция $u \in C^2$, для которой

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_2. \quad (17)$$

Второе равенство (15) означает, в частности, что u является решением (1).

Очевидно,

$$\int_{\Gamma} du = \int_{\Gamma} u_1 dx + u_2 dy = 0$$

для любого простого контура Γ , ориентированного против часовой стрелки. Подставляя сюда выражения (16) и меняя порядок интегрирования, получаем

$$\int_{\mathbb{C}} f(\zeta) d_2 \zeta \int_{\Gamma} [\omega_1(\zeta - z) dx + \omega_2(\zeta - z) dy] = 0.$$

Поскольку функция f произвольна, отсюда следует, что

$$\int_{\Gamma} [\omega_1(\zeta - z) dx + \omega_2(\zeta - z) dy] = 0, \quad \zeta \notin \Gamma.$$

Следовательно, форма $\omega_1(z) dx + \omega_2(z) dy$ точна в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и существует её первообразная ω_0 , для которой справедливы равенства

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial x} = \omega_1, \quad \frac{\partial \omega_0}{\partial y} = \omega_2.$$

Так как функция u определена с точностью до постоянного слагаемого, в соответствии с (17) можем считать, что

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \omega_0(\zeta - z) f(\zeta) d_2 \zeta. \quad (18)$$

Очевидно, интеграл от формы $d\omega_0 = \omega_1 dx + \omega_2 dy$ по единичной окружности S равен нулю, что можно записать в виде

$$\int_S [-\xi_2 \omega_1(\xi) + \xi_1 \omega_2(\xi)] d_1 \xi = 0. \quad (19)$$

Из (3), (4) и выражения ядер ω_j , $j = 1, 2$, видно, что на единичной окружности $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$ они связаны соотношениями

$$\xi_1 \omega_1(\xi) + \xi_2 \omega_2(\xi) = e_1, \quad -\xi_2 \omega_1(\xi) + \xi_1 \omega_2(\xi) = h_0(\theta) \quad (20)$$

с π -периодической функцией $h_0(\theta)$ из (5). В частности, равенство (19) означает, что

$$2 \int_0^\pi h_0(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} h_0(\theta) d\theta = 0,$$

поэтому первообразная h функции h_0 также является π -периодической.

В полярных координатах $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ имеем равенства

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial r} = \omega_1 \cos \theta + \omega_2 \sin \theta, \quad \frac{\partial \omega_0}{\partial \theta} = r(-\omega_1 \sin \theta + \omega_2 \cos \theta).$$

С учётом (20) и свойства однородности $\omega_j(re^{i\theta}) = r^{-1}\omega_j(e^{i\theta})$ функций ω_j получим

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial r} = \frac{e_1}{r}, \quad \frac{\partial \omega_0}{\partial \theta} = h_0(\theta),$$

поэтому можно положить $\omega_0(re^{i\theta}) = e_1 \ln r + h(\theta)$. Совместно с (18) отсюда приходим к выражению (7) для фундаментальной матрицы решений системы Ламе.

Заметим, что в обозначениях (4), (13) равенство (19) можем записать в виде

$$e'_2 e_1 + e_1 \tilde{e}_2 = 0.$$

Последнее равенство можно вывести и непосредственно, пользуясь свойством (12) матрицы E . В самом деле, согласно (13) имеем

$$0 = (E^2)_{12} = e'_2 e_1 a_{22} + e_1 a_{22} e_2 = (e'_2 e_1 + e_1 \tilde{e}_2) a_{22}.$$

Для изотропной среды, когда $\alpha_5 = \alpha_6 = 0$ и $\alpha_1 - \alpha_3 = \alpha_3 + \alpha_4$, первообразная $h(\theta)$ функции h_0 вычисляется явно, поскольку в этом случае

$$\sigma^{-1}(e^{i\theta}) = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_3} \begin{pmatrix} \alpha_1 \cos^2 \theta + \alpha_3 \sin^2 \theta & (\alpha_1 - \alpha_3) \cos \theta \sin \theta \\ (\alpha_1 - \alpha_3) \cos \theta \sin \theta & \alpha_3 \cos^2 \theta + \alpha_1 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad e_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2\alpha_1 \alpha_3}.$$

В предположении различных корней ν_1 , ν_2 характеристического многочлена χ фундаментальная матрица решений ω была построена в монографии В.Д. Купрадзе [1] путём сведения системы Ламе к одному уравнению четвёртого порядка и применения к последнему метода Е.Е. Леви [6]. В обозначениях (2) эта матрица даётся формулой

$$\omega(x, y) = 2a \operatorname{Im} \sum_{k=1,2} \left[d_k \begin{pmatrix} p_2(\nu_k) & -p_3(\nu_k) \\ -p_3(\nu_k) & p_1(\nu_k) \end{pmatrix} \ln(x + \nu_k y) \right], \quad (21)$$

где $a = \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_5^2$ и d_k есть алгебраическое дополнение элемента ν_k^3 матрицы

$$D = \begin{pmatrix} 1 & \nu_1 & \nu_1^2 & \nu_1^3 \\ 1 & \bar{\nu}_1 & \bar{\nu}_1^2 & \bar{\nu}_1^3 \\ 1 & \nu_2 & \nu_2^2 & \nu_2^3 \\ 1 & \bar{\nu}_2 & \bar{\nu}_2^2 & \bar{\nu}_2^3 \end{pmatrix}.$$

Как показано в [1], имеют место равенства

$$\operatorname{Re}(d_1 \nu_1^i + d_2 \nu_2^i) = 0, \quad i = 0, 1, 2,$$

так что формула (21) даёт однозначную функцию.

Очевидно, интеграл (7) можно рассматривать и для произвольных непрерывных функций $f(\zeta)$ на плоскости с поведением $O(|\zeta|^{\delta-3})$, $0 < \delta < 1$, на бесконечности. Из выражения (6) видно, что для фиксированной точки z_0 разность

$$\omega(\zeta - z) - \omega(\zeta - z_0) = O(|\zeta|^{-1})$$

на бесконечности. Поэтому замена $\omega(\zeta - z)$ на $\omega(\zeta - z) - \omega(\zeta - z_0)$ под знаком интеграла (7) позволяет рассматривать его для функций $f(\zeta)$ с более общим поведением

$$f(\zeta) = O(|\zeta|^{\delta-2}), \quad 0 < \delta < 1, \quad (22)$$

на бесконечности.

Рассмотрим этот интеграл

$$(Tf)(z) = \int_D [\omega(\zeta - z) - \omega(\zeta - z_0)] f(\zeta) d_2\zeta, \quad z \in D,$$

в области D на плоскости, ограниченной гладким контуром Γ . Эта область может быть как конечной (т.е. лежать внутри некоторого круга), так и бесконечной (т.е. содержать внешность круга). В первом случае функция f берётся из класса Гёльдера $C^\mu(\overline{D})$, во втором случае она подчиняется указанному весовому поведению (22) на бесконечности и принадлежит классу C^μ в каждой ограниченной подобласти.

Учитывая весовую функцию $\rho_\lambda(z) = (1 + |z|)^\lambda$ произвольного порядка $\lambda \in \mathbb{R}$, через $C_\lambda^\mu(\overline{D}, \infty)$ обозначим пространство всех функций $u \in C(\overline{D})$, для которых конечна норма

$$\|\varphi\| = \sup_{z \in D} |(\rho_{-\lambda}\varphi)(z)| + \sup_{\substack{z_1 \neq z_2 \\ z_j \in D}} \frac{|(\rho_{\mu-\lambda}\varphi)(z_1) - (\rho_{\mu-\lambda}\varphi)(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\mu}. \quad (23)$$

Это пространство банахово и является частным случаем более общих весовых пространств, подробно изученных в [4]. Опишем кратко его основные свойства. Из определения (23) видно, что при $\lambda = 0$ пространство $C_0^\mu(\overline{D}, \infty)$ состоит из всех ограниченных функций, для которых $\rho_\mu\varphi$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем μ в каждой компоненте составной области D . Легко видеть, что оно является банаховой алгеброй по умножению и $C_\lambda^\mu = \rho_\lambda C_0^\mu$, в частности, операция умножения, как билинейное отображение, ограничена $C_{\lambda_1}^\mu \times C_{\lambda_2}^\mu \rightarrow C_{\lambda_1+\lambda_2}^\mu$. При этом семейство банаховых пространств (C_λ^μ) монотонно убывает по параметру μ (в смысле вложения банаховых пространств) и возрастает по λ (в случае бесконечной области).

Банахово пространство $C_\lambda^{n,\mu}(\overline{D}, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, определяется индуктивно по n и состоит из всех функций $\varphi \in C^n(D)$, для которых

$$\varphi \in C_\lambda^{n-1,\mu}(\overline{D}, \infty), \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in C_{\lambda-1}^{n-1,\mu}(\overline{D}, \infty).$$

Индукцией показывается, что операция умножения, как билинейное отображение, ограничена $C_{\lambda_1}^{n,\mu} \times C_{\lambda_2}^{n,\mu} \rightarrow C_{\lambda_1+\lambda_2}^{n,\mu}$. В частности, пространство $C_0^{n,\mu}$ является банаховой алгеброй по умножению.

Теорема 2. Пусть контур $\Gamma \in C^{1,\nu}$, $0 < \mu < \nu$ и $0 < \delta < 1$.

Тогда оператор T ограничен $C^\mu(\overline{D}) \rightarrow C^{2,\mu}(\overline{D})$, если область D конечна, и $C_{\delta-2}^\mu(\overline{D}, \infty) \rightarrow C_\delta^\mu(\overline{D}, \infty)$, если область D бесконечна.

В обоих случаях функция $u = Tf$ удовлетворяет уравнению (1).

Доказательство. Согласно теореме 1 можем записать равенства

$$\frac{\partial(Tf)}{\partial x} = T_1 f, \quad \frac{\partial(Tf)}{\partial y} = T_2 f \quad (24)$$

с операторами

$$(T_j f)(z) = \int_D \omega_j(\zeta - z) f(\zeta) d_2 \zeta, \quad j = 1, 2, \quad z \in D.$$

Предположим сначала, что область D конечна. Тогда к операторам T_j можно применить теорему 3.5.2 из [4], согласно которой они ограничены $C^\mu(\overline{D}) \rightarrow C^{1,\mu}(\overline{D})$. Поэтому с учётом (24) оператор T ограничен $C^\mu(\overline{D}) \rightarrow C^{2,\mu}(\overline{D})$.

Пусть далее область D бесконечна. В этом случае на основании теоремы 3.11.2 из [4] операторы T_j ограничены $C_{\delta-2}^\mu(\overline{D}, \infty) \rightarrow C_{\delta-1}^\mu(\overline{D}, \infty)$. На основании (24) и теоремы 2.10.1 из [4] отсюда заключаем, что оператор T ограничен $C_{\delta-2}^\mu(\overline{D}, \infty) \rightarrow C_\delta^\mu(\overline{D}, \infty)$. Нужно только учесть, что $(Tf)(z_0) = 0$, так что условием (24) функция Tf определяется однозначно. В рассматриваемом случае теорема 2.10.1 применима, поскольку здесь $F = \{\infty\}$ и условие конуса в граничной точке $\tau = \infty$ очевидным образом выполнено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Купрадзе В.Д.* Методы потенциала в теории упругости. М., 1963.
2. *Солдатов А.П.* К теории анизотропной плоской упругости // *Соврем. математика. Фунд. направления.* 2016. Т. 60. С. 114–166.
3. *Митин С.П., Солдатов А.П.* О решении задачи Дирихле для неоднородной системы Ламе с младшими коэффициентами // *Проблемы мат. анализа.* 2021. Т. 110. С. 51–58.
4. *Солдатов А.П.* Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи // *Соврем. математика. Фунд. направления.* 2017. Т. 63. С. 1–189.
5. *Отелбаев М., Солдатов А.П.* Интегральные представления вектор-функций, основанные на параметрике эллиптических систем первого порядка // *Журн. вычислит. математики и мат. физики.* 2021. Т. 61. № 1. С. 90–99.
6. *Леви Е.Е.* О линейных уравнениях с частными производными эллиптического типа // *Успехи мат. наук.* 1940. Т. 8. С. 249–292.

Университет Далата, Вьетнам,
Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, г. Москва,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики,
Национальный исследовательский университет
“Московский энергетический институт”

Поступила в редакцию 03.03.2023 г.
После доработки 03.03.2023 г.
Принята к публикации 18.04.2023 г.