

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.72+519.642.2

СПЕЦИАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2023 г. Н. С. Габбасов

Исследовано линейное интегро-дифференциальное уравнение с особым дифференциальным оператором в главной части. Для отыскания его приближённого решения в пространстве обобщённых функций предложен и обоснован специальный вариант обобщённого метода коллокации.

DOI: 10.31857/S0374064123040088, EDN: ANOUZQ

Введение. Настоящая работа посвящена приближённому решению линейного интегро-дифференциального уравнения (ИДУ)

$$Ax \equiv x^{(p)}(t) \prod_{j=1}^q (t - t_j)^{m_j} + \int_{-1}^1 K(t, s)x(s) ds = y(t), \quad (1)$$

в котором $t \in I \equiv [-1, 1]$, числа $t_j \in (-1, 1)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, q}$, и $p \in \mathbb{Z}^+$ являются фиксированными; K и y – известные непрерывные функции, обладающие определёнными свойствами “гладкости” точечного характера, а x – искомая функция. Очевидно, что задача об отыскании решения ИДУ (1) в классе обычных гладких функций является некорректно поставленной. Следовательно, важен вопрос о построении основных пространств, обеспечивающих корректность данной задачи. При обсуждении этого вопроса вполне естественно учитывать, что в случае $p = 0$ ИДУ (1) преобразуется в линейное интегральное уравнение третьего рода (УТР) (т.е. в этом смысле эти уравнения являются “родственными”). Хорошо известно, что УТР широко применяются в различных приложениях, в частности, УТР встречаются в ряде задач теорий переноса нейтронов, упругости, рассеяния частиц (см., например, [1; 2, с. 121–129] и приведённую в них библиографию), в теории уравнений с частными производными смешанного типа [3], а также в теории сингулярных интегральных уравнений с вырождающимся символом [4]. При этом, как правило, естественными классами решений УТР являются специальные пространства обобщённых функций типа D или V . Под D (соответственно V) понимается пространство обобщённых функций, построенных при помощи функционала “дельта-функция Дирака” (соответственно функционала “конечная часть интеграла по Адамару”). Подробный обзор полученных результатов и обширную библиографию по УТР можно найти в монографии [5, с. 3–11, 168–173] и в диссертации [6, с. 3–6, 106–114]. На основе упомянутой выше связи между ИДУ (1) и УТР соответствующие идеи и результаты для УТР можно успешно использовать для корректной постановки задачи для уравнения (1), разработки и теоретического обоснования приближённых методов его решения в пространствах обобщённых функций.

ИДУ (1) при $q = 1$, $t_1 = 0$ исследовано в работе [7, с. 25–43], в которой с использованием известных результатов по УТР построена теория Нётера для такого уравнения в классах гладких и обобщённых функций типа D . В статье [8] разработана полная теория разрешимости общего ИДУ (1) в некотором пространстве типа D обобщённых функций (фредгольмовость уравнения, условия разрешимости, алгоритм отыскания точного решения, достаточные условия непрерывной обратимости оператора A). Следует отметить, что исследуемые ИДУ точно решаются лишь в очень редких частных случаях. Поэтому особенно актуальна разработка эффективных методов их приближённого решения в пространствах обобщённых функций с

соответствующим теоретическим обоснованием. Определённые результаты в этой области получены в работах [8, 9], где предложены и обоснованы прямые проекционные методы приближённого решения ИДУ вида (1), основанные на применении стандартных и некоторых специальных полиномов.

В настоящей статье разработан обобщённый вариант метода коллокации, специально приспособленный к приближённому решению ИДУ (1) в пространстве типа D обобщённых функций. Основное внимание уделено обоснованию построенного метода в смысле [10, гл. 1], а именно доказана теорема существования и единственности решения соответствующего приближённого уравнения, установлены оценки погрешности приближённого решения и доказана безусловная сходимость последовательности приближённых решений к точному решению однозначно разрешимого ИДУ (1). Также исследованы вопросы устойчивости и обусловленности аппроксимирующих уравнений.

1. О пространствах основных и обобщённых функций. Пусть $C \equiv C(I)$ – банахово пространство всех непрерывных на отрезке I функций с обычной макс-нормой и $m \in \mathbb{N}$. Обозначим через $C\{m; 0\} \equiv C_0^{\{m\}}(I)$ множество всех функций $f \in C$, имеющих в точке $t = 0$ тейлоровскую производную $f^{\{m\}}(0)$ порядка m (см., например, [11]). Назовём его *классом “точечно-гладких” функций* (естественно считаем, что $C\{0; 0\} \equiv C$). Построим основное в наших исследованиях пространство

$$Y \equiv C\{m, p; 0\} \equiv \{y \in C\{m; 0\} : y^{\{i\}}(0) = 0, \quad i = \overline{0, p-1}\},$$

где число $p \in \mathbb{Z}^+$ удовлетворяет неравенству $p < m$. Снабдим его нормой

$$\|y\|_Y \equiv \|Ty\|_C + \sum_{i=p}^{m-1} |y^{\{i\}}(0)|, \quad (2)$$

где $T : Y \rightarrow C$ – “характеристический” оператор класса Y , определённый следующим образом:

$$(Ty)(t) \equiv \left[y(t) - \sum_{i=p}^{m-1} y^{\{i\}}(0) \frac{t^i}{i!} \right] t^{-m} \equiv H(t) \in C, \quad H(0) \equiv \lim_{t \rightarrow 0} H(t).$$

Лемма 1 [8]. *i) Включение $y \in Y$ равносильно выражению*

$$y(t) = t^m H(t) + \sum_{i=p}^{m-1} \alpha_i t^i, \quad (3)$$

причём $Ty = H \in C$ с точностью до устранимого разрыва в точке $t = 0$, а $y^{\{i\}}(0) = \alpha_i i!$, $i = \overline{p, m-1}$.

ii) Пространство Y по норме (2) полно и нормально вложено в пространство C .

Обозначим через $C^{(p)} \equiv C^{(p)}(I)$ векторное пространство p раз непрерывно дифференцируемых на I функций, в котором введём специальную норму

$$\|z\|_{(p)} \equiv \|Dz\|_C + \sum_{i=0}^{p-1} |z^{(i)}(-1)|, \quad z \in C^{(p)}, \quad (4)$$

где $Dz \equiv z^{(p)}(t) \in C$.

Лемма 2 [8]. *Пространство $C^{(p)}$ с нормой (4) полно и нормально вложено в пространство C .*

Следствие 1. *Обычная норма $\|\cdot\|_{C^{(p)}}$ в $C^{(p)}$ и норма (4) эквивалентны, т.е. существует постоянная $d \geq 1$ такая, что $\|z\|_{(p)} \leq \|z\|_{C^{(p)}} \leq d\|z\|_{(p)}$ для любой функции $z \in C^{(p)}$, где $\|z\|_{C^{(p)}} \equiv \sum_{i=0}^p \|z^{(i)}\|_C$.*

Пусть $C_{-1}^{(p)} \equiv C_{-1}^{(p)}(I) \equiv \{z \in C^{(p)} : z^{(i)}(-1) = 0, \quad i = \overline{0, p-1}\}$ – банахово пространство гладких функций с нормой $\|z\|_{(p)} \equiv \|Dz\|_C$.

Теперь над пространством Y основных функций построим семейство $X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$ обобщённых функций $x(t)$ вида

$$x(t) \equiv z(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} \gamma_i \delta^{\{i\}}(t), \quad (5)$$

где $t \in I$, $z \in C_{-1}^{(p)}$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$ – произвольные постоянные, а δ и $\delta^{\{i\}}$ – соответственно дельта-функция Дирака и её “тейлоровские” производные, действующие на пространстве Y основных функций по следующему правилу:

$$(\delta^{\{i\}}, y) \equiv \int_{-1}^1 \delta^{\{i\}}(t)y(t) dt \equiv (-1)^i y^{\{i\}}(0), \quad y \in Y, \quad i = \overline{0, m-p-1}. \quad (6)$$

Очевидно, что векторное пространство X банахово относительно нормы

$$\|x\|_X \equiv \|z\|_{(p)} + \sum_{i=0}^{m-p-1} |\gamma_i|. \quad (7)$$

2. О полиномиальном приближении “точечно-гладких” функций. Введём следующий класс алгебраических полиномов:

$$\Pi_p^{m+l} \equiv \text{span} \{t^i\}_p^{m+l}, \quad l \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Пусть $\Gamma_n \equiv \Gamma_{4n+m-p} : Y \rightarrow \Pi_p^{m+4n-1}$ – оператор, ставящий в соответствие любой функции $y \in Y$ полином $\Gamma_n y$, однозначно определяемый условиями

$$\begin{aligned} (T\Gamma_n y - Ty)(\nu_j) &= 0, \quad (T\Gamma_n y)^{(k)}(\nu_j) = 0, \quad k = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, n}, \\ (\Gamma_n y - y)^{\{i\}}(0) &= 0, \quad i = \overline{p, m-1}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\{\nu_j\}_1^n$ – система узлов Чебышёва первого рода.

Лемма 3. Оператор Γ_n действует согласно правилу

$$\Gamma_n y \equiv \Gamma_{4n+m-p}(y; t) \equiv t^m (\Phi_n T y)(t) + \sum_{i=p}^{m-1} y^{\{i\}}(0) \frac{t^i}{i!}, \quad y \in Y, \quad (9)$$

где $\Phi_n \equiv \Phi_{4n-1} : C \rightarrow \Pi_0^{4n-1}$ – интерполяционный оператор, который всякой функции $f \in C$ ставит в соответствие полином $\Phi_n f$, однозначно определённый из $4n$ условий

$$(\Phi_n f)(\nu_j) = f(\nu_j), \quad (\Phi_n f)^{(k)}(\nu_j) = 0, \quad k = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Доказательство. Искомый полином $\Gamma_n y \in \Pi_p^{m+4n-1}$ представим в виде

$$\Gamma_n y \equiv \sum_{i=p}^{4n+m-1} \alpha_i t^i = \sum_{i=p}^{m-1} \alpha_i t^i + t^m P_{4n-1}(t), \quad P_{4n-1} \equiv \sum_{i=0}^{4n-1} \alpha_{m+i} t^i. \quad (11)$$

При этом на основании леммы 1 имеем

$$P_{4n-1}(t) = (T\Gamma_n y)(t), \quad \alpha_i = (\Gamma_n y)^{\{i\}}(0)/i!, \quad i = \overline{p, m-1}. \quad (12)$$

Тогда из (11) с учётом равенств (12), (8) и (10) вытекает соотношение (9). Лемма доказана.

Одно из аппроксимативных свойств полиномиального оператора Γ_n в пространстве Y устанавливает

Лемма 4. Для любой функции $y \in Y$ справедлива оценка

$$\|y - \Gamma_n y\|_Y \leq d_1 \omega\left(Ty; \frac{\ln n}{n}\right), \quad (13)$$

где $\omega(f; \Delta)$ – модуль непрерывности функции $f \in C$ с шагом Δ , $0 < \Delta \leq 2$ (здесь и далее d_i , $i = 1, 2$, – некоторые константы, значения которых не зависят от натурального числа n).

Справедливость леммы 4 легко следует из леммы 1, соотношений (9), (2) и оценки [12]:

$$\|f - \Phi_n f\|_C \leq d_1 \omega\left(f; \frac{\ln n}{n}\right), \quad f \in C. \quad (14)$$

Далее введём в рассмотрение множество

$$Q_p^{4n+m-1} \equiv \{y \in \Pi_p^{4n+m-1} : (Ty_n)^{(k)}(\nu_j) = 0, \quad k = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, n}\}.$$

Лемма 5. Оператор $\Gamma_n : Y \rightarrow Q_p^{4n+m-1}$ является проекционным.

Доказательство. Пусть $y_n \in Q_p^{4n+m-1}$ – произвольный полином, $H_{ji}(t)$, $i = \overline{0, 3}$, $j = \overline{1, n}$, – фундаментальные полиномы Эрмита степени $4n - 1$ по узлам $\{\nu_j\}_1^n$ (см., например, [13, с. 63]). Тогда очевидно равенство

$$(Ty_n)(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^3 (Ty_n)^{(i)}(\nu_j) H_{ji}(t) = \sum_{j=1}^n (Ty_n)(\nu_j) H_{j0}(t) \equiv (\Phi_n Ty_n)(t). \quad (15)$$

Теперь из соотношений (9), (15) и леммы 1 следует, что $\Gamma_n y_n = y_n$. Лемма доказана.

3. Обобщённый метод коллокации на основе специального интерполяционного полинома. Пусть задано ИДУ (1). Для сокращения громоздких выкладок и упрощения формулировок, не ограничивая при этом общности идей, методов и результатов, всюду в дальнейшем будем считать, что $q = 1$, $t_1 = 0$, т.е. рассмотрим ИДУ вида

$$(Ax)(t) \equiv (Vx)(t) + (Kx)(t) = y(t), \quad t \in I,$$

$$V \equiv UD, \quad Df \equiv f^{(p)}(t), \quad Ug \equiv t^m g(t), \quad Kx \equiv \int_{-1}^1 K(t, s)x(s)ds, \quad (16)$$

где $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$, $p < m$; $y \in Y \equiv C\{m, p; 0\}$; ядро K обладает следующими свойствами:

$$K(\cdot, s) \in C, K(t, \cdot) \in Y, \quad \psi_i(t) \equiv K_s^{\{i\}}(t, 0) \in Y, \quad i = \overline{0, m-p-1}, \quad (17)$$

а $x \in X$ – искомый элемент.

Приближённое решение ИДУ (16) построим в виде

$$x_n \equiv x_n(t; \{c_j\}) \equiv g_n(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} c_{i+4n} \delta^{\{i\}}(t), \quad (18)$$

$$g_n \equiv (Jz_n)(t), z_n(t) \equiv \sum_{i=0}^{4n-1} c_i t^i, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (19)$$

где

$$Jz \equiv (J_{p-1}z)(t) \equiv ((p-1)!)^{-1} \int_{-1}^t (t-s)^{p-1} z(s) ds,$$

при этом $J : C \rightarrow C^{(p)}$, $(Jz)^{(i)} = J_{p-i-1}z$, $i = \overline{0, p-1}$, $DJz = z$. Неизвестные параметры $c_j = c_j^{(n)}$, $j = \overline{0, 4n+m-p-1}$, найдём согласно нашему методу из квадратной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $(4n+m-p)$ -го порядка:

$$(T\rho_n)(\nu_j) = 0, \quad (TUx_n)^{(k)}(\nu_j) = 0, \quad k = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, n}, \quad \rho_n^{\{i\}}(0) = 0, \quad i = \overline{p, m-1}, \quad (20)$$

где $\rho_n(t) \equiv \rho_n^A(t) \equiv (Ax_n - y)(t)$ – невязка приближённого решения, а $\{\nu_j\}_1^n$ – использованная выше система узлов коллокации.

Следуя работе [14], примем соглашения, полезные при оформлении результатов по обоснованию приближённых методов. Во-первых, стандартное утверждение “при всех $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, СЛАУ (20) имеет единственное решение $\{c_j^*\}$, и последовательность приближённых решений $x_n^* \equiv x_n(t; \{c_j^*\})$ сходится к точному решению $x^* = A^{-1}y$ уравнения (16) по норме пространства X ” заменим простой фразой “метод (18)–(20) обоснованно применим к уравнению (16)”. Во-вторых, для погрешности приближённого решения введём специальное обозначение $\Delta x_n^* \equiv \|x_n^* - x^*\|_X$; оценка этой величины определяет скорость сходимости приближённых решений x_n^* к точному решению x^* уравнения (16).

Для вычислительного алгоритма (16)–(20) справедлива

Теорема 1. Если однородное ИДУ $Ax = 0$ имеет в пространстве X лишь нулевое решение (например, в условиях теоремы 2 из [8]), то прямой метод (18)–(20) обоснованно применим к уравнению (16), причём

$$\Delta x_n^* = O \left\{ \omega_t(h; \Delta_n) + \sum_{i=0}^{m-p-1} \omega(f_i; \Delta_n) + \omega(Ty; \Delta_n) \right\}, \quad (21)$$

где $\omega_t(h; \Delta)$ – частный модуль непрерывности функции $h(t, s)$ по переменной t ; $h \equiv T_t K$, $f_i \equiv T\psi_i$, $i = \overline{0, m-p-1}$, $\Delta_n \equiv n^{-1} \ln n$.

Доказательство. Очевидно, что ИДУ (16) можно представить в виде линейного операторного уравнения

$$Ax \equiv Vx + Kx = y, \quad x \in X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}, \quad y \in Y \equiv C\{m, p; 0\}, \quad (22)$$

в котором оператор $A : X \rightarrow Y$ непрерывно обратим.

Систему (18)–(20) требуется записать также в операторной форме. С этой целью построим соответствующие конечномерные подпространства основных пространств. Именно, через $X_n \subset X$ обозначим $(4n+m-p)$ -мерное подпространство элементов вида (18) таких, что $(TUx_n)^{(k)}(\nu_j) = 0$, $k = \overline{1, 3}$, $j = \overline{1, n}$, а за $Y_n \subset Y$ примем класс Q_p^{4n+m-1} .

Покажем теперь, что система (18)–(20) эквивалентна линейному уравнению

$$A_n x_n \equiv Vx_n + \Gamma_n Kx_n = \Gamma_n y, \quad x_n \in X_n, \quad \Gamma_n y \in Y_n. \quad (23)$$

Пусть $x_n^* \equiv x_n(t; \{c_j^*\})$ – решение уравнения (23), т.е. $Vx_n^* + \Gamma_n \tau_n^* = 0$, $\tau_n^* \equiv Kx_n^* - y$. В силу равенств (18), (19) и (9) последнее означает, что

$$(U(z_n^* + \Phi_n T\tau_n^*))(t) + \sum_{i=p}^{m-1} (\tau_n^*)^{\{i\}}(0) \frac{t^i}{i!} \equiv 0. \quad (24)$$

На основании (3) очевидно, что тождество (24) равносильно системе

$$(z_n^* + \Phi_n T\tau_n^*)(t) \equiv 0, \quad (\tau_n^*)^{\{i\}}(0) = 0, \quad i = \overline{p, m-1}. \quad (25)$$

Подробно изучим первое тождество в (25). С учётом условий (10) и соотношений $\Phi_n z_n^* = z_n^*$, $z_n^* = TUz_n^* = TUx_n^* = TVx_n^*$ рассматриваемое тождество принимает вид

$$(T\rho_n^*)(\nu_j) = 0, \quad (TUx_n^*)^{(k)}(\nu_j) = 0, \quad k = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, n}, \quad \rho_n^* \equiv Ax_n^* - y.$$

Далее, поскольку $Vx_n^* = Uz_n^*$, имеем

$$(\rho_n^*)^{\{i\}}(0) = (Vx_n^* + Kx_n^* - y)^{\{i\}}(0) \equiv (Uz_n^* + \tau_n^*)^{\{i\}}(0) = (\tau_n^*)^{\{i\}}(0), \quad i = \overline{p, m-1}.$$

Следовательно, система (25) принимает вид

$$(T\rho_n^*)(\nu_j) = 0, \quad (TUx_n^*)^{(k)}(\nu_j) = 0, \quad k = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, n},$$

$$(\rho_n^*)^{\{i\}}(0) = 0, \quad i = \overline{p, m-1}.$$

Итак, СЛАУ (20) имеет единственное решение $\{c_j^*\}_{j=0}^{4n+m-p-1}$, т.е. решение уравнения (23) является решением системы (18)–(20).

Для получения обратного утверждения достаточно провести изложенные выше рассуждения в обратном порядке.

Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно установить существование, единственность и сходимость решений уравнения (23).

Покажем теперь “близость” операторов A и A_n на подпространстве X_n в условиях (17). Используя уравнения (16) и (23), представления (3) и (9), норму (2), для произвольного элемента $x_n \in X_n$ находим, что

$$\|Ax_n - A_n x_n\|_Y = \|Kx_n - \Gamma_n Kx_n\|_Y = \|TKx_n - \Phi_n TKx_n\|_C. \quad (26)$$

На основании (16), (5) и (6) имеем

$$(Kx)(t) = (Kz)(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i \gamma_i \psi_i(t).$$

Следовательно,

$$(Kx_n)(t) = (Kg_n)(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i c_{i+4n} \psi_i(t),$$

и тогда справедливо равенство

$$(TKx_n)(t) = \int_{-1}^1 h(t, s) g_n(s) ds + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i c_{i+4n} f_i(t). \quad (27)$$

В силу (27), (14), леммы 2 и определения (7) последовательно выводим промежуточную оценку

$$\begin{aligned} \|TKx_n - \Phi_n TKx_n\|_C &\equiv \max_{t \in I} \left| \int_{-1}^1 (h - \Phi_n^t h)(t, s) g_n(s) ds + \sum_i (-1)^i c_{i+4n} (f_i - \Phi_n f_i)(t) \right| \leq \\ &\leq 2d_1 \|g_n\|_C \omega_t(h; \Delta_n) + d_1 \sum_i |c_{i+4n}| \omega(f_i; \Delta_n) \leq 2d_1 \|g_n\|_{(p)} \omega_t(h; \Delta_n) + d_1 \|x_n\|_X \sum_i \omega(f_i; \Delta_n) \leq \\ &\leq d_2 \left[\omega_t(h; \Delta_n) + \sum_i \omega(f_i; \Delta_n) \right] \|x_n\|_X, \quad d_2 \equiv 2d_1. \end{aligned} \quad (28)$$

Из (26) и (28) следует искомая оценка “близости” операторов A и A_n :

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \rightarrow Y} \leq d_2 \left[\omega_t(h; \Delta_n) + \sum_i \omega(f_i; \Delta_n) \right]. \quad (29)$$

На основании оценок (29) и (13) из теоремы 7 работы [10, с. 19] вытекает утверждение теоремы 1 с оценкой погрешности (21).

Следствие 2. Если h (по t), f_i , $i = \overline{0, m-p-1}$, и Ty принадлежат классу $C^{(1)}$, то в условиях теоремы 1 верна оценка $\Delta x_n^* = O(\Delta_n)$.

4. Об устойчивости и обусловленности предложенного метода. На практике приближённое уравнение (23), в силу неточности задания его элементов, решается, вообще говоря, только приближённо. Например, уравнение (23) заменяется уравнением вида

$$B_n x_n = u_n, \quad x_n \in X_n, \quad u_n \in Y_n,$$

в котором $B_n : X_n \rightarrow Y_n$ – линейный оператор, причём A_n и B_n , а также $y_n \equiv \Gamma_n y$ и u_n , “близки” в определённом смысле. Следовательно, возникает необходимость исследования на устойчивость прямых методов решения уравнения (22).

Далее снова рассмотрим операторное уравнение (22). Величина $\mu \equiv \mu(A) \equiv \|A\| \|A^{-1}\|$ называется *числом обусловленности* оператора A и уравнения (22) (см., например, [10, с. 24]); уравнение (22) называется *хорошо обусловленным*, если μ невелико, и *плохо обусловленным* – в противном случае.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 справедливы следующие утверждения:

i) прямой метод (18)–(20) для ИДУ (16) устойчив относительно малых возмущений исходных данных СЛАУ (20);

ii) при достаточно больших n существуют числа $\mu_n \equiv \mu(A_n)$ для приближённого уравнения (23), причём

$$\mu_n \leq c\mu, \quad 1 \leq c \leq 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad n \geq n_1(\varepsilon), \quad \lim \mu_n = \mu,$$

т.е. если ИДУ (16) хорошо обусловлено, то СЛАУ (20) также хорошо обусловлена.

Доказательство следует из теорем 11–13 работы [10, с. 22–25] с учётом того, что в условиях теоремы 1 при достаточно больших n аппроксимирующие операторы A_n непрерывно обратимы и обратные операторы ограничены по норме в совокупности:

$$\|A_n^{-1}\| = O(1), \quad A_n^{-1} : Y_n \rightarrow X_n, \quad n \geq n_2.$$

5. Замечания.

1. При приближении решений операторных уравнений $Ax = y$ возникает естественный вопрос о скорости сходимости невязки $\rho_n^*(t) \equiv (Ax_n^* - y)(t)$ исследуемого метода. Один из результатов в этом направлении легко получить из теоремы 1, а именно, из неё вытекает простое следствие: если исходные данные (h, f_i, Ty) уравнения (16) принадлежат классу C^1 , то в условиях теоремы 1 справедлива оценка $\|\rho_n^*\|_Y = O(\Delta_n)$.

2. В силу определения нормы в $D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$ нетрудно заметить, что из сходимости последовательности x_n^* приближённых решений к $x^* = A^{-1}y$ в метрике $D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$ следует обычная сходимость в пространстве обобщённых функций, т.е. слабая сходимость.

3. Если $p = m = 0$, то ИДУ (16) преобразуется в интегральное уравнение Фредгольма второго рода в пространстве C , а предложенный вычислительный алгоритм (18)–(20) – в соответствующий вариант метода коллокации для уравнения второго рода, причём $Ty \equiv y$ и $h \equiv K$. Поэтому теорема 1 охватывает соответствующие результаты по обоснованию данного варианта метода коллокации для приближённого решения уравнений второго рода в классе C , при этом погрешность характеризуется оценкой $\|x_n^* - x^*\|_C = O[\omega_t(K; \Delta_n) + \omega(y; \Delta_n)]$.

4. Результат теоремы 2 по устойчивости предложенного метода позволяет найти численное решение исследуемых уравнений с любой наперёд заданной степенью точности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bart G.R., Warnock R.L.* Linear integral equations of the third-kind // *SIAM J. Math. Anal.* 1973. V. 4. № 4. P. 609–622.
2. *Кейз К.М., Цвайфель П.Ф.* Линейная теория переноса. М., 1972.
3. *Бжизатлов Х.Г.* Об одной краевой задаче со смещением // *Дифференц. уравнения.* 1973. Т. 9. № 1. С. 162–165.
4. *Расламбеков С.Н.* Сингулярное интегральное уравнение первого рода в исключительном случае в классах обобщённых функций // *Изв. вузов. Математика.* 1983. № 10. С. 51–56.
5. *Габбасов Н.С.* Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщённых функций. Казань, 2006.
6. *Замалиев Р.Р.* О прямых методах решения интегральных уравнений третьего рода с особенностями в ядре: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Казань, 2012.
7. *Абдурахман.* Интегральное уравнение третьего рода с особым дифференциальным оператором в главной части: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону, 2003.
8. *Габбасов Н.С.* Об одном классе интегро-дифференциальных уравнений в особом случае // *Дифференц. уравнения.* 2021. Т. 57. № 7. С. 889–899.
9. *Габбасов Н.С.* Коллокационные методы для одного класса особых интегро-дифференциальных уравнений // *Дифференц. уравнения.* 2022. Т. 58. № 9. С. 1234–1241.
10. *Габдуллаев Б.Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань, 1980.
11. *Прессдорф З.* Сингулярное интегральное уравнение с символом, обращающимся в нуль в конечном числе точек // *Мат. исследования.* 1972. Т. 7. № 1. С. 116–132.
12. *Olarly F.* Asupra ordinului de aproximatie prin polyinoame de interpolare de tip Hermite-Fejer en noduri cvadrupe // *An. Univ. Timisoara. Ser. Sti. Mat.-Fiz.* 1965. № 3. P. 227–234.
13. *Привалов А.А.* Теория интерполирования функций. Саратов, 1990.
14. *Габбасов Н.С.* Прямые методы решения интегро-дифференциальных уравнений в особом случае // *Дифференц. уравнения.* 2016. Т. 52. № 7. С. 904–916.

Набережночелнинский институт
Казанского (Приволжского) федерального университета

Поступила в редакцию 28.12.2022 г.
После доработки 28.12.2022 г.
Принята к публикации 24.02.2023 г.