ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 4, с. 483–493

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.22

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА С СИНГУЛЯРНЫМ Δ_B-ОПЕРАТОРОМ КИПРИЯНОВА

© 2023 г. Л. Н. Ляхов, Ю. Н. Булатов,

С. А. Рощупкин, Е. Л. Санина

Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа для Δ_B-оператора Киприянова, называются K-гармоническими. В работе приведены и доказаны следующие свойства K-гармонических функций: интегральное представление типа Грина C^2-функций, теорема о сферическом среднем, принцип максимума. В качестве следствия доказана единственность решения внутренней и внешней задач Дирихле.

DOI: 10.31857/S0374064123040052, EDN: ANDKDD

1. Основные обозначения и определения. Через $\mathbb{R}_n$ будем обозначать евклидово пространство точек $x=(x_1,\ldots,x_n)$, а через $\mathbb{R}_n^+$ – n-полупространство, определённое неравенствами $x_i>0$, $i=\overline{1,n}$. Пусть мультииндекс $-\gamma=(-\gamma_1,\ldots,-\gamma_n)$ имеет фиксированные отрицательные параметры: $-1<-\gamma_i<0$. Сингулярный дифференциальный оператор

$$\Delta_{B_{-\gamma}}=\sum_{i=1}^{n}B_{-\gamma_i},\quad B_{-\gamma_i}=\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}=x^{\gamma_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(x^{-\gamma_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right),\quad \gamma_i>0,$$

называется *оператором Киприянова* [1]. Данный оператор целесообразно применять к функциям, чётным по каждой координате своего аргумента, так как в этом случае существует

$$\lim_{x_i\to 0}\frac{1}{x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}=\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}\bigg|_{x_i=0}.$$

Пусть $\Omega^+\subset\mathbb{R}_n^+$. Учитывая особенность операторов Бесселя, будем полагать, что область Ω^+ прилегает к сингулярным координатным гиперплоскостям $x_i=0$, $i=\overline{1,n}$, оператора Δ_B. Тогда граница области Ω^+ состоит из двух частей: $\Gamma^+\in\mathbb{R}_n^+$ и $\Gamma^0\in\overline{\mathbb{R}_n^+}$. Область $\Omega=\Omega^+\bigcup\Omega^-$ получена объединением Ω^+ со своими зеркальными отражениями от координатных гиперплоскостей $x_i=0$. Граница Γ области Ω предполагается гладкой в окрестности $\Gamma\bigcap\Gamma^0$ (условие гладкости границы И.А. Киприянова [2, § 3.1]). Это условие также предполагает, что рассматриваемые функции в области Ω^+ должны иметь гладкое чётное продолжение через границу Γ^0 по отношению к каждой координате x_i. В связи с этим вводим следующее

Определение 1. Функцию $f=f(x)$, определённую в m-полупространстве $\mathbb{R}_m^+\subset\mathbb{R}_n$ $(m\leqslant n)$, будем называть *m-чётной (по Киприянову)*, если она допускает чётное продолжение по каждой из координат $x_i\in\mathbb{R}_m^+$, $i=\overline{1,m}$, своего аргумента с сохранением класса функций своей принадлежности.

В частности, если $u\in C^k(x_i{\in}[0,\infty))$, то u – i-чётная функция, если все её производные по x_i, $i=\overline{1,n}$, нечётного порядка $\ell\leqslant k$ равны нулю при $x_i=+0$. Такое определение чётности введено в монографии [2, с. 21]. Функции, удовлетворяющие определению 1, принято называть *чётными по Киприянову.*

Из определения 1 вытекает, что каждую из областей Ω^+ и Ω^-, как правило, удобно считать частично замкнутыми, т.е. считать границу Γ^0 границей симметрии, и поэтому полагаем $\Omega^+=\Omega^+\bigcup\Gamma^0$ и $\Omega^-=\Omega^-\bigcup\Gamma^0$. Точки, принадлежащие $\Omega^+=\Omega^+\bigcup\Gamma^0$ или $\Omega^-=\Omega^-\bigcup\Gamma^0$, будем называть s-*внутренними.* Аналогично подобласть $\Omega_*^+ = \Omega_*^+ \bigcup \Gamma_*^0$ области Ω^+, имеющую общую границу $\Gamma_*^0 \subset \Gamma^0$, будем называть s-*подобластью* области Ω^+. Это же касается и соответствующей подобласти области Ω^-.

Заметим также, что гладкость границы Γ области $\Omega = \Omega^+ \bigcup \Omega^-$ в окрестности сингулярных гиперплоскостей $x_i = 0$ связана с возможностью корректно ввести локальные координаты с центром в точках пересечения границы Γ с координатной гиперплоскостью $x_i = 0$, $i = \overline{1, n}$.

Определение 2. Функция $u \in C^2(\Omega^+) \bigcap C^1(\overline{\Omega^+})$ называется *K-гармонической функцией* в области Ω^+, если $\Delta_{B_{-\gamma}} u = 0$ в каждой точке Ω^+.

Важную роль в наших рассуждениях играет многомерный $\mathbb{T}$-псевдосдвиг

$$\mathbb{T}^y f(x) = \prod_{i=1}^n \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x), \quad x, y \in \mathbb{R}_n^+,$$

одномерные составляющие которого определены в [3] формулами

$$\mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x) = \frac{\Gamma((\gamma_i+3)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma_i+2)/2)} \int\limits_0^\pi \frac{(x_i y_i)^{\gamma_i+1} f(x_i \overset{\alpha_i}{\to} y_i, x^i)}{(x_i \overset{\alpha_i}{\to} y_i)^{\gamma_+ i+1}} \sin^{\gamma_i+1} \alpha_i \, d\alpha_i, \tag{1}$$

где для сокращения записи положили

$$x^i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n), \quad x_i \overset{\alpha_i}{\to} y_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos\alpha_i}.$$

Конструкция (1) возникла в работе [3] в виде интегрального оператора, связывающего решения $u = \mathbb{J}_\mu$ сингулярного уравнения Бесселя $B_{-\gamma} u(s) + t^2 u(s) = 0$ разных аргументов $(s = x_i$ и $s = y_i)$, в виде теоремы сложения $\mathbb{J}_{\mu_i}$-функций Бесселя

$$\mathbb{J}_{\mu_1}(\xi t)\mathbb{J}_\mu(\eta t) = \mathbb{T}_\xi^\eta \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i t), \quad \mu_i = \frac{\gamma_i+1}{2}.$$

Отметим, что оператор (1) связан с оператором обобщённого сдвига Пуассона [4]

$$T_{x_i}^{y_i} f(x) = \frac{\Gamma((\gamma_i+3)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma_i+2)/2)} \int\limits_0^\pi f(x_i \overset{\alpha_i}{\to} y_i, x^i) \sin^{\gamma_i+1} \alpha_i \, d\alpha_i$$

формулой

$$\mathbb{T}_{x_i}^{y_i} = (x_i y_i)^{\gamma_i+1} T_{x_i}^{y_i} (x_i^{-(\gamma_i+1)} f(x_i, x^i)),$$

которая, по сути, и применяется в статье [3].

Основным свойством $\mathbb{T}$-псевдосдвига, используемым в этой работе, является равенство*)

$$B_{-\gamma_i} \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x) = \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} B_{-\gamma_i} f(x),$$

из которого в многомерном случае вытекает теорема о коммутируемости $\mathbb{T}$-псевдосдвига и оператора Киприянова $\Delta_{B_{-\gamma}}$:

$$\Delta_{B_{-\gamma}} \mathbb{T}^y f(x) = \mathbb{T}^y \Delta_{B_{-\gamma}} f(x), \quad x, y \in \mathbb{R}_n^+.$$

Введём весовую билинейную форму

$$(u, v)_{-\gamma} = \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} u(x) v(x) x^{-\gamma} \, dx, \quad x^{-\gamma} = \prod_{i=1}^n x_i^{-\gamma_i}$$

*) Для обобщённых сдвигов, определяемых формулой Пуассона [4], это свойство доказано в книге [2, формула (1.8.5)] и в общем случае в работе [5].

на функциональном пространстве $L_2^\gamma = \{f(x) : x^{-\gamma} f(x) \in \mathbb{R}_n^+\}$ (обычно называемым *пространством Лебега–Киприянова*).

Операторы $\mathbb{T}$-псевдосдвига и оператор Киприянова $\Delta_{B_{-\gamma}}$ симметричны (см. [3]) в следующем смысле:

$$(\Delta_{B_{-\gamma}} u, v)_{-\gamma} = (u, \Delta_{B_{-\gamma}} v)_{-\gamma}, \quad (\mathbb{T}^y u(x), v(x))_{-\gamma} = (u, \mathbb{T}^y v(x))_{-\gamma}.$$

Более востребованным в этих исследованиях оказался оператор

$$\overset{*}{\mathbb{T}}{}^y = x^{\gamma+1}\mathbb{T}^y, \tag{2}$$

где $x^{\gamma+1} = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i+1}$, $\gamma_i + 1 > 1$, одномерные составляющие которого определены равенством

$$\overset{*}{\mathbb{T}}{}^{y_i}_{x_i} f(x) = \frac{\Gamma((\gamma_i+3)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma_i+2)/2)} \int\limits_0^\pi \frac{y_i^{\gamma_i+1} f(x_i \overset{\alpha_i}{\to} y_i)}{(x_i \overset{\alpha_i}{\to} y_i)^{\gamma_i+1}} \sin^{\gamma_i+1}\alpha_i \, d\alpha_i. \tag{3}$$

Б.М. Левитан ввёл понятие “оператора обобщённого сдвига”, который должен удовлетворять четырём условиям (см. [6, с. 17–18]). Оператор (1) не удовлетворяет условиям 2° и 4° из этой книги*), поэтому называется (как и в [3]) $\mathbb{T}$-*псевдосдвигом.* Но он симметричен: $\mathbb{T}_x^y = \mathbb{T}_y^x$, что важно при исследовании свёрток В.А. Какичева на основе $\mathbb{T}$-псевдосдвига (см. [7, 8]).

Оператор $\overset{*}{\mathbb{T}}{}^{y_i}_{x_i}$, напротив, не симметричен, но удовлетворяет условию 2°, где роль “единичного” элемента играет точка $x_i = 0$, т.е. именно для этой точки выполнено равенство

$$\overset{*}{\mathbb{T}}{}^y f(0) = f(y).$$

Доказательство достаточно просто следует из формулы (1), поскольку

$$(x_i \overset{\alpha_i}{\to} y_i)|_{x_i=0} = \sqrt{y_i^2} = y_i > 0.$$

Условие 4° Б.М. Левитана в определении оператора $\overset{*}{\mathbb{T}}$ в нашей работе заменено более простым в доказательстве условием ограниченности интегрируемой функции: если $f(x_i, x^i) \in C$ $(x_i \in \in [0,\infty))$ и $\max\limits_{x_i\in[0,\infty)} f(x) = M$, то $\max\limits_{x_i\in[0,\infty)} \overset{*}{\mathbb{T}}{}^y f(x) = M$. Это утверждение доказано далее в лемме 3.

Отметим, что в более ранних работах Б.М. Левитана условием 4° было именно условие “ограниченности в лебеговых классах функций” (см., например, работу [9]).

На основе изложенного выше будем называть оператор (2) *обобщённым* $\overset{*}{\mathbb{T}}$*-сдвигом.* По-видимому, $\overset{*}{\mathbb{T}}$-сдвиг принадлежит классу обобщённых сдвигов Б.М. Левитана (т.е. выполняются все условия 1°–4° [6]), но в рамках этих исследований необходимо лишь условие ограниченности $\overset{*}{\mathbb{T}}$-сдвига непрерывной функции.

2. *K*-формулы Грина. Многие свойства K-гармонических функций вытекают из соответствующих аналогов формул Грина, отвечающих оператору $\Delta_{B_{-\gamma}}$ (*K-формулы Грина*).

Пусть u и v – n-чётные функции, принадлежащие классу функций $C^2(\Omega^+) \bigcap C^1(\overline{\Omega^+})$, и $x^{-\gamma} = \prod_{i=1}^n x_i^{-\gamma_i}$, $-i < -\gamma_i < 0$.

Утверждение. *Для $\Delta_{B_{-\gamma}}$ оператора Киприянова справедлива первая K-формула Грина*

$$\int\limits_{\Omega^+} v\Delta_{B_{-\gamma}} u x^{-\gamma}\, dx = -\int\limits_{\Omega^+} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} x^{-\gamma}\, dx + \int\limits_{\Gamma^+} v \frac{\partial u}{\partial \overline{\nu}} x^{-\gamma}\, d\Gamma^+, \tag{4}$$

где $\overline{\nu}$ – направление внешней нормали к границе Γ^+ области Ω^+.

*) **Условие 2°.** Функция $f \in C$ и существует “единичный” элемент s_0 такой, что $T^{s_0} f(t) = f(t)$.
Условие 4°. Функция $f \in C$, тогда $F(s,t) = T^s f(t)$ непрерывна по совокупности точек (s,t).

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_{\Omega^+} v\Delta_{B_{-\gamma}} u x^{-\gamma}\,dx = \int\limits_{\Omega^+} v\biggl(\sum_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}\frac{\partial}{\partial x_i}x_i^{-\gamma_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\biggr)\prod_{k=1}^n x_k^{-\gamma_k}\,dx = \int\limits_{\Omega^+} v\biggl(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}x^{-\gamma_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\biggr)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^n x_k^{-\gamma_k}\,dx.$$

Применив формулу интегрирования по частям, получим

$$\int\limits_{\Omega^+} v\Delta_{B_{-\gamma}} u x^{-\gamma}\,dx = \int\limits_{\Gamma^+} v\biggl(\sum_{i=1}^n x^{-\gamma_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(\nu, x_i)\biggr)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^n x_k^{-\gamma_k}\,d\Gamma^+ -$$

$$-\int\limits_{\Omega^+}\sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_k}x^{\gamma}\,dx = \int\limits_{\Gamma^+} v\frac{\partial u}{\partial \overline{\nu}}\prod_{k=1}^n x_k^{-\gamma_k}\,d\Gamma^+ - \int\limits_{\Omega^+}\sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_k}x^{\gamma}\,dx.$$

Утверждение доказано.

Приведём несколько простых следствий из равенства (4).

Если в (4) $u = v,$ то

$$\int\limits_{\Omega^+} u\Delta_{B_{-\gamma}} u x^{-\gamma}\,dx = -\int\limits_{\Omega^+}\sum_{i=1}^n\biggl(\frac{\partial u}{\partial x_i}\biggr)^2 x^{-\gamma}\,dx + \int\limits_{\Gamma^+} u\frac{\partial u}{\partial\overline{\nu}}x^{-\gamma}\,dx. \tag{5}$$

Если в (4) $v = 1,$ тогда

$$\int\limits_{\Omega^+}\Delta_{B_{-\gamma}} u x^{-\gamma}\,dx = \int\limits_{\Gamma^+}\frac{\partial u}{\partial\overline{\nu}}x^{-\gamma}\,d\Gamma^+. \tag{6}$$

Если в (6) функция u K-гармоническая, то из определения 2 следует равенство

$$\int\limits_{\Gamma^+}\frac{\partial u}{\partial\overline{\nu}}x^{-\gamma}\,d\Gamma^+ = 0. \tag{7}$$

Условие *K*-гармоничности. Если равенство (7) справедливо в любой s-подобласти области $\Omega^+,$ то u – K-гармоническая функция в $\Omega^+.$

Действительно, если функция u K-гармоническая в $\Omega^+,$ то равенство (7) выполнено в любой s-подобласти области $\Omega^+,$ что с очевидностью вытекает из (6).

Наоборот, пусть равенство (7) выполняется в любой s-подобласти области $\Omega^+.$ Тогда из (6) следует, что $\Delta_{B-\gamma}u = 0$ в любой s-внутренней точке области $\Omega^+,$ т.е. выполнено требование определения K-гармоничности функции u в области $\Omega^+.$

Формулы (5)–(7) называют следствиями из первой K-формулы Грина (4) (чаще просто K-формулами Грина). Вторая K-формула Грина получается из (4) после интегрирования по частям в объёмном интеграле и применения обычной формулы Грина:

$$\int\limits_{\Omega^+}(v\Delta_{B_{-\gamma}}u - u\Delta_B v)x^{-\gamma}\,dx = \int\limits_{\Gamma^+}\biggl(v\frac{\partial u}{\partial\overline{\nu}} - u\frac{\partial v}{\partial\overline{\nu}}\biggr)x^{\gamma}\,d\Gamma^+.$$

3. Интегральное представление Грина *n*-чётных функций. В работе [1] получено следующее представление оператора Киприянова в сферических координатах $x = r\theta,$ $|\theta = 1|:$

$$\Delta_{B-\gamma} = B_{n-|\gamma|-1} - \frac{1}{r^2}\Delta_{B_{-\gamma}}(\theta), \tag{8}$$

где

$$B_{n-|\gamma|-1} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-|\gamma|-1}{r}\frac{\partial}{\partial r},$$

а $\Delta_{B_{-\gamma}}(\theta)$ – оператор Киприянова–Бельтрами на сфере.

Используя (8), нетрудно доказать, что функция $v = |x|^{2-n+|\gamma|}$ при $n-|\gamma|>2$ и $|x|\neq 0$ является K-гармонической. Действительно, переходя в выражении $\Delta_{B_{-\gamma}}|x|^{2-n+|\gamma|}$ к сферическим координатам, с учётом (8) получим

$$\Delta_{B_{-\gamma}}|x|^{2-n+|\gamma|} = B_{n-|\gamma|-1}r^{2-n+|\gamma|} = ((2-n+|\gamma|)(1-n+|\gamma|) + (2-n+|\gamma|)(n-|\gamma|-1))r^{-n+|\gamma|} = 0.$$

Функция $|x|^{2-n+|\gamma|}$ при $n-|\gamma|>0$ называется *сингулярным (элементарным) решением* оператора Киприянова $\Delta_{B_{-\gamma}}$. Если же $n-|\gamma|\leqslant 2$, то сингулярным решением будет функция $|x|^{2-n+|\gamma|}\ln|x|$, что проверяется аналогично. Полученные далее результаты справедливы для обоих сингулярных решений. Однако мы приведём доказательство наиболее простого в описании случая, а именно $n-\gamma>2$.

4. Основные леммы о $\mathbb{T}$-сдвиге. Напомним, что многомерный $\mathbb{T}$-сдвиг определён выражением (2), поэтому достаточно рассмотреть одномерный случай $\mathbb{T}$-сдвига.

4.1. Перестановочность $\mathbb{T}$-сдвига.

Лемма 1. *Если f и g – функции, суммируемые с весом $x^{-\gamma}$, то*

$$(\overset{*}{\mathbb{T}}{}^y f(x), g(y))_{-\gamma} = (f(y), \overset{*}{\mathbb{T}}{}^y g(x))_{-\gamma}.$$

Доказательство. Учитывая, что $-\gamma = 1-2\mu$, имеем равенства

$$(f(y), \overset{*}{\mathbb{T}}{}^y g(x))_{-\gamma} = x^{-2\mu}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\pi (xy)^{2\mu} f(y)\frac{g(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha})}{(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha})^{2\mu}}\sin^{2\mu}\alpha\,d\alpha\,y^{1-2\mu}\,dy =$$

$$= x^{-2\mu}(\mathbb{T}^y f(x), g(y))_{-\gamma} = (\overset{*}{\mathbb{T}}{}^y f(x), g(y))_{-\gamma}.$$

Здесь использовалось свойство перестановочности $\mathbb{T}$-псевдосдвига (см. [3]). Лемма доказана.

4.2. Коммутируемость с оператором $B_{-\gamma_i}$. Для удобства введём обозначение $x = (x_i, x^i)$.

Лемма 2. *Пусть f – дважды непрерывно дифференцируемая i-чётная функция, $0<\gamma_i<1$ и $x^{-\gamma}f(x)\in L_2(0,\infty)$. Тогда*

$$(B_{-\gamma_i})_{y_i}\,\overset{*}{\mathbb{T}}{}^{y_i}_{x_i} f(x) = \overset{*}{\mathbb{T}}{}^{y_i}_{x_i} B_{-\gamma_i} f(x).$$

Доказательство. Для $\mathbb{T}$-псевдосдвига равенство

$$(B_{-\gamma_i})_{y_i}\mathbb{T}^{y_i}_{x_i} f(x) = \mathbb{T}^{y_i}_{x_i}(B_{-\gamma})_{x_i} f(x)$$

вытекает из теоремы сложения $\mathbb{J}$-функций Бесселя [3]. Отсюда получаем

$$(B_{-\gamma_i})_{y_i}\,\overset{*}{\mathbb{T}}{}^{y_i x_i} f(x) = x_i^{-2\mu_i}(B_{-\gamma_i})_{y_i}\mathbb{T}^{y_i}_{x_i} f(x) = x_i^{-2\mu_i}\mathbb{T}^{y_i}_{x_i}(B_{-\gamma_i})_{x_i} f(y) = \overset{*}{\mathbb{T}}{}^{y_i}_{x+i} B_{-\gamma_i} f(x).$$

Лемма доказана.

Отметим, что леммы 1 и 2 в многомерном случае $\overset{*}{\mathbb{T}}{}^x = \prod_{i=1}^n \overset{*}{\mathbb{T}}{}^{x_i}$ примут следующий вид.

Лемма 1′. *Если f и g – функции, суммируемые с весом $x^{-\gamma}$, то*

$$(\overset{*}{\mathbb{T}}{}^y f(x), g(y))_{-\gamma} = (f(y), \overset{*}{\mathbb{T}}{}^y g(x))_{-\gamma}, \quad x, y\in\mathbb{R}_n^+.$$

Лемма 2′. *Пусть f – дважды непрерывно дифференцируемая i-чётная функция, $0 < \gamma_i < 1$ и $x^{-\gamma}f(x) \in L_2(0,\infty)$. Тогда*

$$(\Delta_{B_{-\gamma}})_y \overset{*}{\mathbb{T}}{}^y f(x) = \overset{*}{\mathbb{T}}{}^y \Delta_{B_{-\gamma}} f(x), \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

4.3. Ограниченность $\mathbb{T}$-сдвига непрерывной функции.

Лемма 3. *Пусть $f \in C(\overline{\Omega^+})$. Если $\max\limits_{x\in\overline{\Omega^+}} |f(x)| = M$, то $\max\limits_{x\in\overline{\Omega^+}} |\overset{*}{\mathbb{T}}{}^y f(x)| = M$.*

Доказательство. Продолжим функции u и v нулём в область $\Omega_1^+ = \mathbb{R}_n^+ \setminus \overline{\Omega^+}$. Достаточно доказать это утверждение для одномерного $\mathbb{T}$-сдвига. Наибольшее значение выражение (3) принимает при $x_i = y_i$ и $\alpha_i \to 0$. Но при $x_i = y_i$

$$|\overset{*}{\mathbb{T}}{}^{y_i}_{x_i} f(x)| \leqslant \frac{\Gamma((\gamma_i+3)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma_i+2)/2)} \int\limits_0^\pi \frac{y_i^{\gamma_i+1}M}{(x_i \overset{\alpha_i}{\to} y_i)^{\gamma+1}}\bigg|_{x_i=y_i} |\sin\alpha_i|^{\gamma+1}\, d\alpha_i =$$

$$= \frac{\Gamma((\gamma_i+3)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma_i+2)/2)} \int\limits_0^\pi \frac{M}{|2(1-\cos\alpha_i)|^{(\gamma_i+1)/2}} |\sin\alpha_i|^{\gamma_i+1}\, d\alpha_i =$$

$$= M\frac{\Gamma((\gamma_i+3)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma_i+2)/2)} \cdot 2\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{\gamma_i+1}\alpha_i\, d\alpha_i = M,$$

поскольку, согласно определению B-функции Эйлера,

$$2\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{\gamma_i+1}\alpha_i\, d\alpha_i = B\left(\frac{\gamma_i+2}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma_i+2)/2)}{\Gamma((\gamma_i+3)/2)}.$$

Лемма доказана.

5. Представление Грина n-чётных функций. Учитывая симметричность $\mathbb{T}$-сдвига в $\mathbb{R}_n^+$ (лемма 1′) и его коммутируемость с Δ_{B_γ}-оператором Киприянова (лемма 2′), имеем

$$\int\limits_{\Omega^+} \overset{*}{\mathbb{T}}{}^y v(x)\Delta_{B_{-\gamma}} u(y) y^{-\gamma}\, dy = \int\limits_{\Omega^+} v(y)\, \overset{*}{\mathbb{T}}{}^y (\Delta_{B_{-\gamma}} u)(x) y^{-\gamma}\, dy = \int\limits_{\Omega^+} v(y)(\Delta_{B_{-\gamma}})_y\, \overset{*}{\mathbb{T}}{}^y u(x) y^{\gamma}\, dy.$$

В следующей теореме доказывается K-формула Грина представления n-чётных функций, которая в нашем случае будет вытекать из правой части записанного выше равенства.

Теорема 1. *Пусть n-чётная функция $u \in C^2(\Omega^+) \bigcap C^1(\overline{\Omega^+})$, $v = |x|^{2-n+|\gamma|}$, $n - |\gamma| > 2$, и $\mathbb{T}$ – сдвиг, определённый в (2). Имеет место следующая формула Грина:*

$$u(x) = \frac{1}{(n+|\gamma|-2)|S_1^+(n)|_{-\gamma}} \left(\int\limits_{\Gamma^+} \left(v(y)\frac{\partial\, \overset{*}{\mathbb{T}}{}^y u(x)}{\partial \overline{\nu}_y} - \overset{*}{\mathbb{T}}{}^y u(x) \frac{\partial v(y)}{\partial \overline{\nu}} \right) y^{-\gamma}\, d\Gamma^+ - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\Omega^+} v(y)\Delta_{B_{-\gamma}}\, \overset{*}{\mathbb{T}}{}^y u(x) y^{-\gamma}\, dy \right). \qquad (9)$$

Доказательство. Поскольку функция $y^{-\gamma}v = y^{-\gamma}|y|^{2-n+|\gamma|}$ при $n > 2$ имеет особенность в начале координат (считается точкой $\Omega^+ \bigcup \Gamma^0$), то для применения K-формулы Грина (4) необходимо вырезать из области Ω^+ n-полушар $|y|<\varepsilon$. Полученную в результате область обозначим Ω^+_ε. Тогда

$$\int\limits_{\Omega^+_\varepsilon} v(y)(\Delta_{B_{-\gamma}})_y \overset{*}{\mathbb{T}}{}^y u(x) y^{-\gamma}\,dy = \int\limits_{\Gamma^+\bigcup S^+_\varepsilon(n)} v(y)\frac{\partial \overset{*}{\mathbb{T}}{}^y u(x)}{\partial \overline{\nu}_y} y^{-\gamma} \left\{\begin{matrix} d\Gamma^+ \\ dS^+ \end{matrix}\right\} - \int\limits_{\Omega^+_\varepsilon} \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial \overset{*}{\mathbb{T}}{}^y u(x)}{\partial y} y^{-\gamma}\,dy.$$

Интегрирование по частям в последнем слагаемом правой части этого равенства даёт

$$\int\limits_{\Omega^+_\varepsilon} v(y)\Delta_{B_{-\gamma}} \overset{*}{\mathbb{T}}{}^y u(x) y^{-\gamma}\,dy = \int\limits_{\Gamma^+\bigcup S^+_\varepsilon(n)} v(y)\frac{\partial \overset{*}{\mathbb{T}}{}^y u(x)}{\partial \overline{\nu}} \left\{\begin{matrix} d\Gamma^+ \\ dS^+ \end{matrix}\right\} -$$

$$- \int\limits_{\Gamma^+\bigcup S^+_\varepsilon(n)} \left(\frac{\partial v(y)}{\partial \overline{\nu}}\right) \overset{*}{\mathbb{T}}{}^y u(x) y^{\gamma} \left\{\begin{matrix} d\Gamma^+ \\ dS^+ \end{matrix}\right\} = I_1 + I_2. \tag{10}$$

Здесь учитывалось, что $\Delta_{B_{-\gamma}} v = 0$ в области Ω^+_ε.

Теперь в правой части (10) выделим интегрирование по поверхности n-полусферы $S^+_\varepsilon(n)$:

$$\int\limits_{S^+_\varepsilon(n)} v(y)\frac{\partial \overset{*}{\mathbb{T}}{}^y u(x)}{\partial \overline{\nu}} y^{-\gamma}\,dS^+ - \int\limits_{S^+_\varepsilon(n)} \frac{\partial v(y)}{\partial \overline{\nu}} \overset{*}{\mathbb{T}}{}^y u(x) y^{-\gamma}\,dS^+ = I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon). \tag{11}$$

Учитывая, что вектор нормали к сфере направлен вдоль радиуса, получаем

$$I_1(\varepsilon) = \int\limits_{S^+_1(n)} \varepsilon^{2-n-|\gamma|}\left(\frac{\partial \overset{*}{\mathbb{T}}{}^{r\theta} u(x)}{\partial r}\right)\bigg|_{r=\varepsilon} (\varepsilon\theta)^{-\gamma}\varepsilon^{n-1}\,dS_1 = \varepsilon \int\limits_{S^+_1(n)} \frac{\partial \overset{*}{\mathbb{T}}{}^{r\theta} u(x)}{\partial r}\bigg|_{r=\varepsilon} \theta^{-\gamma}\,dS_1.$$

Отсюда, поскольку $\overset{*}{\mathbb{T}}{}^x$-сдвиг – ограниченный оператор в пространстве непрерывно дифференцируемых функций (см. лемму 3), следует

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_1(\varepsilon) = \varepsilon \int\limits_{S^+_1(n)} \frac{\partial \overset{*}{\mathbb{T}}{}^{r\theta} u(x)}{\partial r}\bigg|_{r=\varepsilon} \theta^{-\gamma}\,dS_1 = 0. \tag{12}$$

Рассмотрим интеграл $I_2(\varepsilon)$. Имеем равенства

$$I_2(\varepsilon) = \int\limits_{S^+_\varepsilon(n)} \frac{\partial r^{2-n+|\gamma|}}{\partial r}\bigg|_{r=\varepsilon} \overset{*}{\mathbb{T}}{}^y u(x) y^{-\gamma}\,dS_\varepsilon = (2-n+|\gamma|)\varepsilon^{1-n-|\gamma|} \int\limits_{S^+_1(n)} \overset{*}{\mathbb{T}}{}^{\varepsilon\theta} u(x)\varepsilon^{|\gamma|}\theta^{-\gamma}\varepsilon^{n-1}\,dS_1(n) =$$

$$= (2-n+|\gamma|) \int\limits_{S^+_1(n)} \overset{*}{\mathbb{T}}{}^{\varepsilon\theta} u(x)\theta^{-\gamma}\,dS_1 = (2-n+|\gamma|) \int\limits_{S^+_1(n)} \overset{*}{\mathbb{T}}{}^{\varepsilon\theta} u(x)\theta^{-\gamma}\,dS_1,$$

откуда находим

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_2(\varepsilon) = (2-n+|\gamma|)u(x)\int\limits_{S^+_1} \theta^{-\gamma}\,dS_1 = (2-n-|\gamma|)|S^+_1(n)|_{-\gamma} u(x). \tag{13}$$

Подставляя пределы (12) и (13) в (11), а затем переходя к пределу в (10) при $\varepsilon\to 0$, получаем равенство (9). Теорема доказана.

6. Сферическое среднее *K*-гармонической функции. Из равенства (см. лемму 2)

$$\Delta_{B_{-\gamma}} \overset{*}{\mathbb{T}}{}^y f(x) = \overset{*}{\mathbb{T}}{}^y u(x) \Delta_{B_{-\gamma}} f(x)$$

вытекает, что функции f и $\overset{*}{\mathbb{T}}{}^y f(x)$ одновременно K-гармонические.

Теорема 2. *Пусть функция $u(x)$ является K-гармонической в области $\Omega^+ \subset \mathbb{R}_n^+$ и $S_r^+(n)$ – единичная n-полусфера с центром в начале координат, целиком лежащая в области Ω^+. Тогда*

$$u(x) = \frac{1}{|S_r^+(n)|_\gamma} \int\limits_{S_r^+(n)} \overset{*}{\mathbb{T}}{}^y u(x) y^{-\gamma}\, dS_r(y). \tag{14}$$

Доказательство. Напомним, что по договоренности, принятой при определении области Ω^+, внутренней подобластью этой области является подобласть, возможно(!), прилегающая к границе Γ^0. Вначале предположим, что хотя бы одна из координат центра шара не нулевая, т.е. для некоторого $i \in \overline{1,n}$ выполняется условие $x_i \geqslant 2\delta > 0$. Радиус сферы r выбирается таким, чтобы вся сфера (разумеется, и шар) лежала в области K-гармоничности функции u и начало координат при этом не оказалось на сфере радиуса r с центром в точке x (т.е. выбираемый нами радиус $r < \delta$ или $r > 2\delta$). Тогда $|y| > 0$ и, следовательно, функция $v = |y|^{2-n-|\gamma|}$ бесконечно дифференцируема в любой точке сферы.

Для K-гармонической функции формула (9) примет вид

$$u(x) = \frac{1}{(n-|\gamma|-2)|S_1(n)|_{-\gamma}} \times$$

$$\times \int\limits_{S_1(n)} \left[r^{2-n+|\gamma|} \left(-\frac{\partial}{\partial r} \overset{*}{\mathbb{T}}{}^{r\theta} u(x) \right) - \overset{*}{\mathbb{T}}{}^{r\theta} u(x) \frac{-\partial r^{2-n+|\gamma|}}{\partial r} \right] (r\theta)^{-\gamma} r^{n-1}\, dS_1(\theta).$$

Так как шаг сдвига $y = r\theta$ не выводит функцию $\mathbb{T}^y u(x)$ за пределы области K-гармоничности, то здесь исчезнет первое слагаемое (см. формулу (7)) и

$$u(x) = \frac{1}{|S_{1,x}(n)|_\gamma} \int\limits_{S_{1,x}(n)} \overset{*}{\mathbb{T}}{}^{r\theta} u(x) (\theta)^{-\gamma}\, dS_1(\theta).$$

Отсюда с очевидностью следует (14).

Пусть теперь все координаты центра шара равны нулю. В этом случае в формуле представления функции (9) отсутствует обобщённый сдвиг и нужно доказать формулу

$$u(0) = \frac{1}{|S_{1,0}(n)|_\gamma} \int\limits_{S_{1,0}(n)} u(r\theta)(\theta)^\gamma\, dS_1(\theta),$$

которая на самом деле уже известна. Её доказательство для одной особой переменной приведено в работе [9] (см. также [10, 11]) и без особых затруднений переносится на многомерный обобщённый сдвиг Пуассона. Теорема доказана.

Принципиальной особенностью формулы (14) является то, что интегрирование происходит по n-полусфере с центром в начале координат, а точка интегрирования принадлежит сфере с центром в точке $x \in \Omega^+$, вообще говоря, не совпадающей с началом координат. Эта особенность исчезает, если нет весовой нагрузки на оси координат, т.е. если все $\gamma_i = 0$.

Имеет место теорема о среднем при интегрировании по n-полушару в $\mathbb{R}_n^+$ (ср. [12]).

Теорема 3. *Пусть функция u является K-гармонической в области $\Omega^+ \subset \mathbb{R}_n^+$ и $S_r^+(n)$ – единичная n-полусфера с центром в начале координат, целиком лежащая в Ω^+. Тогда*

$$u(x) = \frac{n+|\gamma|}{|Ш_R(n)|_\gamma} \int\limits_{|x|<R} \overset{*}{\mathbb{T}}{}^{r\theta} u(x) x^\gamma\, dS_r, \tag{15}$$

где $Ш_R(n)=\{x:|x|<R\}^+$ *–* n*-полушар в* $\mathbb{R}_n^+$ *с центром в начале координат и радиуса* R*, весовой объём которого равен*

$$|Ш_R(n)|_\gamma=\frac{R^{n+|\gamma|}}{2^n}|S_1^+(n)|_\gamma.$$

Учитывая, что

$$|S_r^+(n)|_{-\gamma}=\frac{r^{n+|\gamma|-1}}{2^n}|S_1^+(n)|_\gamma,$$

перепишем равенство (14) в виде

$$r^{n+|\gamma|-1}|S_1^+(n)|_{-\gamma}u(x)=\int\limits_{S_r^+(n)}\overset{*}{\mathbb{T}}{}^{r\theta}u(x)x^\gamma\,dS_1.$$

Проинтегрируем это равенство по r на отрезке $[0,R]$ и получим формулу (15). Теорема доказана.

7. Экстремальное свойство *K*-гармонических функций. Для классических гармонических функций экстремальное свойство вытекает из теоремы о среднем гармоники в ограниченной области. В исследуемом случае область Ω^+ прилегает к границе, образованной координатными гиперплоскостями в $\mathbb{R}_n^+$, следовательно, части этих гиперплоскостей тоже оказываются границами области Ω^+, однако они всего лишь границы симметрии.

Теорема 4. K*-гармоническая функция* $u(x)\not\equiv\mathrm{const}$ *в* Ω^+ *принимает экстремальные значения* (sup *и* inf) *на границе* Γ^+ *области* B*-гармоничности:*

$$\min_{x\in\Gamma^+}u(x)<u(x)<\max_{x\in\Gamma^+}u(x).$$

Доказательство. Предположим противное, т.е., например, что $\sup u=u(x_0)$, x_0 – внутренняя точка Ω^+.

Применив формулу среднего значения (14) с центром в точке x_0 и такого радиуса, чтобы сфера целиком лежала в Ω^+, получим

$$u(x_0)=\frac{1}{|S_r(n)|_\gamma}\int\limits_{S_r}\overset{*}{\mathbb{T}}{}^{y}u(x_0)y^\gamma\,dS_1(y). \tag{16}$$

Так как $u(x)\neq\mathrm{const}$, то на сфере должна присутствовать точка y', в которой функция u (среди всех значений на этой сфере) принимает наибольшее значение $u(y')=M'$. Обобщённый $\overset{*}{\mathbb{T}}$-сдвиг действует ограниченно (лемма 3), а тогда из (16) следует, что

$$u(x_0)=M\leqslant\frac{M'}{|S_r(n)|_\gamma}|S_r(n)|_\gamma=M',$$

т.е. $u(x_0)=M\leqslant M'$, что возможно, если $u(x)=\mathrm{const}$ внутри этой сферы. Напомним, что для точек пересечения $\Gamma^0\bigcap\Gamma$ выполнено условие Киприянова, поэтому существует конечное покрытие области Ω^+ шарами, в которых функция u K-гармонична и, значит, постоянна: $u(x)=M$, что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если* $u\in C^1_{\mathrm{ev}}(\overline{\Omega^+})$ *–* K*-гармоническая функция в частично замкнутой области* $\Omega^+=\Omega^+\bigcup\Gamma^O$*, то*

$$|u(x)|\leqslant\max_{x\in\Gamma^+}|u(x)|,\quad x\in\overline{\Omega^+}.$$

В частности, если $u|_{\Gamma^+}=0$*, то* $u\equiv0$ *в* Ω^+*.*

Будем говорить, что n-чётная функция $u = u(x)$ непрерывна на бесконечности и принимает там значение a, если она непрерывна вне некоторого n-полушара в $\overline{\mathbb{R}_n^+}$ и $\lim\limits_{\substack{x\in\overline{\mathbb{R}_n^+}\\ \|x\|\to\infty}} u = a.$

Обозначим через $\Omega_1^+ = \overline{\mathbb{R}_n^+} \setminus \Omega^+$ область, прилегающую к координатным гиперплоскостям по границе Γ^0.

Следствие 2. *Если* $u \in C^1_{\mathrm{ev}}(\overline{\Omega_1^+})$ – *B-гармоническая функция в частично замкнутой области* $\overline{\Omega_1^+} = \Omega_1^+ \bigcup \Gamma^0$ *и* $u(\infty) \equiv \lim\limits_{\substack{x\in\overline{\mathbb{R}_n^+}\\ \|x\|\to\infty}} u = 0,$ *то*

$$|u(x)| \leqslant \max_{x\in\Gamma^+} |u(x)|, \quad x \in \overline{\Omega_1^+}.$$

В частности, если $u|_{\Gamma^+} = 0$ *и* $u(\infty) = 0,$ *то* $u(x) \equiv 0,$ $x \in \Omega_1^+.$

Следствие 3. *Если последовательность K-гармонических функций* $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ *равномерно сходится на границе* Γ^+ *области B-гармоничности* $\Omega^+,$ *то она равномерно сходится на* $\overline{\Omega^+}.$ *Это справедливо для области* $\Omega_1^+,$ *если дополнительно известно, что* $u_k(\infty) = 0.$

Доказательства следствий 1 и 2 отличаются от доказательств классических утверждений для гармонических функций лишь обозначениями (см., например, [13, § 24]).

8. Постановка и единственность решения внутренней и внешней задач Дирихле.

Внутренняя задача Дирихле. Пусть Ω^+ – конечная область в $\mathbb{R}_n^+,$ прилегающая к координатным гиперплоскостям по границе $\Gamma^0,$ и функция φ задана и непрерывна на части границы $\Gamma^+ \in \mathbb{R}_n^+.$ Найти функцию $u \in C^2(\Omega^+) \bigcap C(\overline{\Omega^+}),$ удовлетворяющую в области Ω^+ уравнению Пуассона $\Delta_{B_{-\gamma}} u = f$ и граничным условиям $u|_{\Gamma^+} = \varphi.$

Теорема 5. *Внутренняя задача Дирихле для уравнения Пуассона с оператором Киприянова имеет единственное решение.*

Доказательство. Предположим, что существуют два решения задачи: u_1 и $u_2.$ Тогда функция $u = u_1 - u_2$ является K-гармонической: $\Delta_{B_{-\gamma}} u = 0,$ и поэтому согласно следствию 1 равна нулю, т.е. $u_1 = u_2.$ Теорема доказана.

Внешняя задача Дирихле. Пусть $\Omega_1^+ = \overline{\mathbb{R}_n^+} \setminus \Omega^+$ и функция φ задана и непрерывна на части границы $\Gamma^+ \in \mathbb{R}_n^+.$

Теорема 6. *Внешняя задача Дирихле для уравнения Пуассона с оператором Киприянова имеет единственное решение.*

Доказательство. Поскольку область Ω^+ предполагается ограниченной, то существует сфера достаточно большого радиуса $R,$ включающая в себя эту область. Из условия убывания решения следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $R,$ что на этой сфере S_R выполняется условие $u(x)|_{S_R} < \varepsilon.$ Область $G^+ = \text{Ш}_R \setminus \Omega^+,$ разумеется, конечная. Если u_1 и u_2 – два решения внешней задачи Дирихле, то функция $u = u_1 - u_2$ K-гармоническая в замкнутой области G^+ с граничным условием $|u| < 2\varepsilon$ на границе $\partial G^+.$ Согласно следствию 2 $|u(x)| < 2\varepsilon$ в $\Omega^+,$ а поскольку число ε произвольное, то это возможно только если $u = 0,$ т.е. когда $u_1 = u_2.$ Теорема доказана.

В заключение обратим внимание на одну особенность этих исследований, отмеченную рецензентом: не найдено аналогичных исследований по отношению к B-гармоническим функциям, определяемым равенством $\Delta_{B_\gamma} u = 0,$ $\gamma_i > 0.$ На самом деле аналогичные результаты для B-гармонических функций легко вытекают из схемы доказательств этой работы, если заменить $\mathbb{T}$-сдвиг обобщённым сдвигом Пуассона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляхов Л.Н., Санина Е.Л.* Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью оператора Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B-гармонического уравнения // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1610–1620.
2. *Киприянов И.А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., 1997.

3. *Ляхов Л.Н., Булатов Ю.Н., Рощупкин С.А., Санина Е.Л.* Псевдосдвиг и фундаментальное решение Δ_B-оператора Киприянова // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 12. С. 1654–1665.
4. *Левитан Б.М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. 1951. Т. 6. Вып. 2 (42). С. 102–143.
5. *Ляхов Л.Н.* Построение ядер Дирихле и Валле–Пуссона–Никольского для j-бесселевых интегралов Фурье // Тр. Московского мат. о-ва. 2015. Т. 76. Вып. 1. С. 67–84.
6. *Левитан Б.М.* Теория операторов обобщённого сдвига. М., 1973.
7. *Какичев В.А.* О свёртках для интегральных преобразований // Изв. АН БССР. Сер. физ-мат. наук. 1967. № 2. С. 48–57.
8. *Бритвина Л.Е.* Полисвертки преобразования Ханкеля и дифференциальные операторы // Докл. РАН. 2002. Т. 382. № 3. С. 298–300.
9. *Левитан Б.М.* Применение операторов обобщенного сдвига к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка // Успехи мат. наук. 1949. Т. 4. № 1 (29). С. 3–112.
10. *Киприянова Н.И.* Формула среднего значения для собственных функций сингулярного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 11. С. 1998–2001.
11. *Киприянова Н.И., Ляхова С.Л.* Формула среднего значения для регулярных решений сингулярного дифференциального уравнений Гельмгольца и Шредингера // Докл. РАН. 1999. Т. 364. № 1. С. 14–16.
12. *Киприянова Н.И.* Теорема о среднем для B-полигармонического уравнения // Изв. вузов. 1998. № 5 (432). С. 31–34.
13. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1981.

Воронежский государственный университет,
Елецкий государственный университет
имени И.А. Бунина,
Липецкий государственный педагогический
университет имени П.П. Семёнова-Тян-Шанского

Поступила в редакцию 16.01.2023 г.
После доработки 24.02.2023 г.
Принята к публикации 22.03.2023 г.