

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПО ВРЕМЕНИ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ
С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

© 2023 г. У. Д. Дурдиев

Исследована прямая задача для поперечных колебаний однородной балки конечной длины с нелокальными по времени условиями, получены необходимое и достаточное условия существования её решения. Для прямой задачи изучена обратная задача по определению коэффициентов, зависящих от времени, при младшей производной и правой части уравнения. Доказаны существование и единственность решения обратной задачи. Для решения используется метод разделения переменных, с помощью которого задачи сводятся к интегральному уравнению и к системе интегральных уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064123030068, EDN: QUWSCE

Введение. Большинство задач о колебаниях балок находят широкое применение в строительной механике, в теории устойчивости ходовых валов, а их решения приводят к дифференциальным уравнениям высших порядков [1, с. 143–147]. В статье [2] приведён подробный анализ зарубежных публикаций и результатов в области динамического поведения неоднородных балок. В работах [3–6] исследуется разрешимость начально-краевых задач для уравнения колебания балки с различными краевыми условиями. Аналитическому решению дифференциального уравнения поперечных колебаний кусочно-однородной балки в частотной области для любого вида краевых условий посвящена статья [7].

Задачи определения коэффициентов или правой части дифференциального уравнения по некоторым известным данным от его решения получили название *обратных задач* математической физики. Обратные задачи по определению ядер в интегро-дифференциальных уравнениях из теории вязкоупругости исследованы в [8–10]. В работах [11–13] применён метод решения обратных задач, основанный на представлении решения двумерных обратных задач в виде тригонометрического полинома по одной из пространственных переменных. В статье [14] рассматривается обратная задача по определению зависящего от времени коэффициента в уравнении поперечных колебаний балки, который с физической точки зрения представляет собой её жёсткость. С численными методами решений обратных задач можно ознакомиться в работах [15–20]. В работе [21] рассмотрена обратная задача, связанная с восстановлением второго момента площади поперечного сечения для балки с использованием схемы сдвигающейся равномерно распределённой нагрузки. Эффективность вариационного метода для решения обратной задачи нахождения коэффициентов в уравнении Эйлера–Бернулли продемонстрирована в статье [22].

В данной работе изучены прямая задача с нелокальными по времени условиями и обратная задача с интегральными условиями переопределения для уравнения поперечных колебаний однородной балки.

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующее уравнение поперечных колебаний балки длины l , опирающейся на концы:

$$w_{tt} + a^2 w_{xxxx} + q(t)w = f(x, t), \quad (x, t) \in \Sigma, \quad (1)$$

где $a^2 = EJ/(\rho S)$, $f(x, t)$ – внешняя сила, ρ – плотность балки, S – площадь её поперечного сечения, E – модуль упругости материала, J – момент инерции поперечного сечения балки относительно горизонтальной оси, $\Sigma = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ – прямоугольная область, T – временной интервал. По всей длине балка поддерживается упругим основанием с коэффициентом жёсткости $q(t)$.

Прямая задача. Найти в области Σ решение уравнения (1), удовлетворяющее следующим начальным и краевым условиям:

$$w(x, 0) + \delta_1 w(x, T) = \varphi(x), \quad w_t(x, 0) + \delta_2 w_t(x, T) = \psi(x), \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

$$\varphi(0) = \psi(0) = 0, \quad \varphi(l) = \psi(l) = 0,$$

$$w(0, t) = w_{xx}(0, t) = w(l, t) = w_{xx}(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

Определение. Решением задачи (1)–(3) назовём функцию $w(x, t)$ из класса $C_{x,t}^{4,2}(\Sigma)$, удовлетворяющую условиям (2), (3) и обращающую уравнение (1) в тождество, при положительных числах δ_1, δ_2 и достаточно гладких функциях $q(t), f(x, t), \varphi(x), \psi(x)$.

Обратная задача. Пусть $f(x, t) = g(t)f_0(x)$. Найти функции $q(t)$ и $g(t)$, $t \in [0, T]$, по известным равенствам

$$\int_0^l y_i(x)w(x, t) dx = Y_i(t), \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

где $y_i(x), Y_i(t)$, – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования

$$\int_0^l y_i(x)\varphi(x) dx = Y_i(0) + \delta_1 Y_i(T), \quad \int_0^l y_i(x)\psi(x) dx = Y_i'(0) + \delta_2 Y_i'(T), \quad Y(t) \neq 0. \quad (5)$$

2. Исследование прямой задачи. С помощью обозначения $F(x, t) := f(x, t) - q(t)w(x, t)$ уравнение (1) примет вид $w_{tt} + a^2 w_{xxxx} = F(x, t)$.

Решение задачи (1)–(3) ищется как

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t)X_k(x), \quad (6)$$

где $w_k(t) = \sqrt{(2/l)} \int_0^l w(x, t) \sin(\mu_k x) dx$, $X_k(x) = \sqrt{(2/l)} \sin(\mu_k x)$, $\mu_k = \pi k/l$, $k \in \mathbb{N}$.

Подставив функцию (6) в уравнение (1) и условия (2), после разделения переменных получим задачу

$$w_k''(t) + \lambda_k^2 w_k(t) = F_k(t; q, w), \quad \lambda_k = a\mu_k^2, \quad k \in \mathbb{N}, \quad 0 < t \leq T, \quad (7)$$

$$w_k(0) + \delta_1 w_k(T) = \varphi_k, \quad w_k'(0) + \delta_2 w_k'(T) = \psi_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

где

$$F_k(t; q, w) = f_k(t) - q(t)w_k(t), \quad (9)$$

$$f_k(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f(x, t) \sin(\mu_k x) dx, \quad (10)$$

$$\varphi_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi(x) \sin(\mu_k x) dx, \quad \psi_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi(x) \sin(\mu_k x) dx, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (11)$$

Решение задачи (7), (8) запишем в следующем виде [23]:

$$w_k(t) = \frac{1}{\rho_k(T)} E_k(t) + \int_0^T G_k(t, s) F_k(s; q, w) ds, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned}\rho_k(T) &= 1 + (\delta_1 + \delta_2) \cos(\lambda_k T) + \delta_1 \delta_2, \\ E_k(t) &= \varphi_k(\cos \lambda_k t + \delta_2 \cos(\lambda_k(T-t))) + \frac{\psi_k}{\lambda_k}(\sin(\lambda_k t) - \delta_1 \sin(\lambda_k(T-t))), \\ G_k(t, s) &= \begin{cases} -\frac{1}{\lambda_k \rho_k(T)} [\delta_1 \sin(\lambda_k(T-t)) \cos(\lambda_k s) + \delta_2 \cos(\lambda_k(T-t)) \sin(\lambda_k s) + \\ + \delta_1 \delta_2 \sin(\lambda_k(s-t))], & s \in [0, t], \\ -\frac{1}{\lambda_k \rho_k(T)} [\delta_1 \sin(\lambda_k(T-t)) \cos(\lambda_k s) + \delta_2 \cos(\lambda_k(T-t)) \sin(\lambda_k s) + \\ + \delta_1 \delta_2 \sin(\lambda_k(s-t))] + \frac{1}{\lambda_k} \sin(\lambda_k(s-t)), & s \in [t, T]. \end{cases}\end{aligned}$$

Подставив выражение (12) в (6), получим

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\rho_k(T)} E_k(t) + \int_0^T G_k(t, s) F_k(s; q, w) ds \right\} \sin(\mu_k x). \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что при $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ и условии $1 + \delta_1 \delta_2 > \delta_1 + \delta_2$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{\rho_k(T)} \leq \frac{1}{1 - (\delta_1 + \delta_2) + \delta_1 \delta_2} \equiv \beta > 0. \quad (14)$$

Теорема 1 [24]. Пусть $\alpha, \lambda, \mu > 0$ и $g(t)$ – непрерывно дифференцируемая неотрицательная функция на отрезке $[a, b]$, причём $a < b \leq +\infty$. Кроме того, предположим, что $\omega(t)$ интегрируема и неотрицательна на $[a, b]$ и такая, что выполняется неравенство

$$\omega(t) \leq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\zeta)^{\alpha-1} \omega(\zeta) d\zeta + \mu \int_a^b \omega(\zeta) d\zeta + g(t)$$

для каждой $t \in [a, b]$. Если $0 \leq \mu(b-a)E_{\alpha,2}(\lambda(b-a)^\alpha) < 1$, то

$$\omega(t) \leq E_\alpha(\lambda(t-a)^\alpha) \omega_0 + g(t) - E_\alpha(\lambda(t-a)^\alpha) g(a) + \lambda \int_a^t (t-\zeta)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\zeta)^\alpha) g(\zeta) d\zeta,$$

где

$$\begin{aligned}\omega_0 &\leq \frac{1}{1 - \mu(b-a)E_{\alpha,2}(\lambda(b-a)^\alpha)} \times \\ &\times \left(\mu \int_a^b g(\zeta) d\zeta - \mu(b-a)E_{\alpha,2}(\lambda(b-a)^\alpha) g(a) + \mu \lambda \int_a^b (b-\zeta)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda(b-\zeta)^\alpha) g(\zeta) d\zeta \right).\end{aligned}$$

В теореме 1 используется двухпараметрическая функция Миттаг-Лёффлера

$$E_{\alpha,\gamma} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\gamma + \alpha k)}, \quad \alpha, \gamma > 0, \quad z \in \mathbb{R}, \quad (15)$$

в частности, при $\gamma = 1$ она становится однопараметрической функцией Миттаг-Лёффлера, т.е. $E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z)$ [25, с. 40–49].

Подставив в (12) функцию $F_k(t; q, w)$ (9), имеем

$$w_k(t) = \frac{1}{\rho_k(T)} E_k(t) + \int_0^T f_k(s) G_k(t, s) ds - \int_0^T q(s) w_k(s) G_k(t, s) ds.$$

Оценим эту функцию с учётом вида функции $E_k(t)$ при $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} |w_k(t)| \leq & \beta(1 + \delta_2) |\varphi_k| + \frac{\beta(1 + \delta_1)}{\lambda_k} |\psi_k| + \frac{\beta\delta}{\lambda_k} \int_0^T |f_k(s)| ds + \frac{\beta}{\lambda_k^2} \int_t^T |f_k(s)| ds + \\ & + \frac{\bar{q}\beta\delta}{\lambda_k} \int_0^t |w_k(s)| ds + \frac{\bar{q}\beta}{\lambda_k} \left(\delta + \frac{1}{\lambda_k} \right) \int_0^T |w_k(s)| ds, \end{aligned}$$

где $\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_1\delta_2$, $\bar{q} = \max_{s \in [0, T]} |q(s)|$. Применив теорему 1 при $\alpha = 1$ к последнему неравенству, ввиду (15) получим следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $0 < C_{2k}(e^{C_{1k}T} - 1)/C_{1k} < 1$, тогда справедлива оценка

$$|w_k(t)| \leq \lambda_k \tilde{C} g_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} C_{1k} &= \frac{\bar{q}\beta\delta}{\lambda_k}, \quad C_{2k} = \frac{\bar{q}\beta}{\lambda_k} \left(\delta + \frac{1}{\lambda_k} \right), \quad \tilde{C} = \frac{\delta}{\lambda_1\delta(2 - e^{C_{1k}T}) + e^{C_{1k}T} - 1}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ g_k &= \beta(1 + \delta_2) |\varphi_k| + \frac{\beta(1 + \delta_1)}{\lambda_k} |\psi_k| + \frac{\beta}{\lambda_k} \left(\delta + \frac{1}{\lambda_1} \right) \int_0^T |f_k(s)| ds, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (17)$$

Далее, учитывая (17), из оценки (16) имеем

$$|w_k(t)| \leq \bar{C}_1 (\lambda_k |\varphi_k| + |\psi_k| + \|f_k(t)\|),$$

где $\|f_k\| = \max_{0 \leq t \leq T} |f_k(t)|$. Используя равенство (7) и неравенство (12), получаем оценку

$$|w_k''(t)| \leq \bar{C}_2 (\lambda_k^3 |\varphi_k| + \lambda_k^2 |\psi_k| + \lambda_k^2 \|f_k(t)\| + \bar{q} |w_k|) \leq \bar{C}_2 (\bar{q} + \lambda_k^2) (\lambda_k |\varphi_k| + |\psi_k| + \|f_k(t)\|).$$

Таким образом, доказана следующая

Лемма 2. При любом $t \in [0, T]$ и для достаточно больших k справедливы оценки

$$|w_k(t)| \leq \bar{C}_1 (k^2 |\varphi_k| + |\psi_k| + \|f_k(t)\|_C), \quad |w_k''(t)| \leq \bar{C}_2 (k^6 |\varphi_k| + k^4 |\psi_k| + k^4 \|f_k(t)\|_C),$$

здесь и далее $\bar{C}_i$ – положительные постоянные.

Формально из (6) составим ряды

$$w_{tt} = \sum_{k=1}^{\infty} w_k''(t) \sin(\mu_k x), \quad (18)$$

$$w_{xxxx} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^4 w_k(t) \sin(\mu_k x). \quad (19)$$

Ряды (6), (18) и (19) при любых $(x, t) \in \bar{\Sigma}$ на основании леммы 1 мажорируются рядом

$$\bar{C}_3 \sum_{k=1}^{\infty} (k^6 |\varphi_k| + k^4 |\psi_k| + k^4 \|f_k(t)\|).$$

Имеет место следующая вспомогательная

Лемма 3. Если выполнены условия

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\in C^6[0, l], \quad \varphi^{VII}(x) \in L_2[0, l], \\ \varphi(0) &= \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = \varphi^{IV}(0) = \varphi^{IV}(l) = \varphi^{VI}(0) = \varphi^{VI}(l) = 0, \\ \psi(x) &\in C^4[0, l], \quad \psi^V(x) \in L_2[0, l], \quad \psi(0) = \psi(l) = \psi''(0) = \psi''(l) = \psi^{IV}(0) = \psi^{IV}(l) = 0, \\ f(x, t) &\in C(\bar{\Sigma}) \cap C_x^4(\Sigma), \quad f_{xxxx}(x, t) \in L_2(\Sigma), \\ f(0, t) &= f(l, t) = f''_{xx}(0, t) = f''_{xx}(l, t) = f_{xxxx}^{IV}(0, t) = f_{xxxx}^{IV}(l, t) = 0, \end{aligned}$$

то имеют место равенства

$$\varphi_k = \frac{1}{\mu_k^7} \varphi_k^{VII}, \quad \psi_k = \frac{1}{\mu_k^5} \psi_k^V, \quad f_k(t) = \frac{1}{\mu_k^5} f_k^V(t), \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_k^{VII} &= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi^{VII}(x) \cos(\mu_k x) dx, \quad \psi_k^V = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi^V(x) \cos(\mu_k x) dx, \\ f_k^V(t) &= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f_{xxxx}^V(x, t) \cos(\mu_k x) dx, \end{aligned}$$

и справедливы оценки

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_k^{VII}|^2 \leq \|\varphi^{VII}\|_{L_2[0, l]}^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_k^V|^2 \leq \|\psi^V\|_{L_2[0, l]}^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |f_k^V(t)|^2 \leq \|f^V(t)\|_{L_2[0, l] \times C[0, T]}^2. \quad (21)$$

Применив в интеграле для φ_k метод интегрирования по частям семь раз, а в интегралах для ψ_k и $f_k(t)$ – пять раз (см. (10) и (11)), с учётом условий леммы 3 получим равенства (20). Неравенства (21) представляют собой неравенства Бесселя для коэффициентов разложений Фурье функций φ_k^{VII} и ψ_k^V по системе косинусов $\{\sqrt{(2/l)} \cos(\mu_k x)\}$ на интервале $(0, l)$. Если функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x, t)$ удовлетворяют условиям леммы 2, то в силу представлений (20) и (21) ряды (6), (18) и (19) сходятся равномерно в прямоугольнике $\bar{\Sigma}$, следовательно, функция (13) является решением задачи (1)–(3).

3. Исследования обратной задачи. Пусть $f(x, t) = f_0(x)g(t)$, где $f_0(x)$ – известная функция. Тогда $F_k(t; g, q, w) = f_{0k}g(t) - q(t)w_k(t)$. Умножив обе части уравнения (1) на $y_i(x)$, $i = 1, 2$, и проинтегрировав от 0 до l по переменной x , с учётом условий (4) получим уравнения

$$g(t) \int_0^l f_0(x) y_1(x) dx - q(t) Y_1(t) = Y_1''(t) + a^2 \sqrt{\frac{l}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^4 w_k(t) y_{1k}, \quad (22)$$

$$g(t) \int_0^l f_0(x) y_2(x) dx - q(t) Y_2(t) = Y_2''(t) + a^2 \sqrt{\frac{l}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^4 w_k(t) y_{2k}, \quad (23)$$

где $y_{ik} = \sqrt{(2/l)} \int_0^l y_i(x) \sin(\mu_k x) dx$, $k = 1, 2$.

Введём обозначения

$$\int_0^l f_0(x)y_1(x) dx = \alpha_1, \quad \int_0^l f_0(x)y_2(x) dx = \alpha_2$$

и предположим, что

$$\mathcal{Y}(t) = \alpha_2 Y_1(t) - \alpha_1 Y_2(t) \neq 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (24)$$

Тогда из (22) и (23) находим

$$g(t) = [\mathcal{Y}(t)]^{-1} \left\{ Y_1(t)Y_2''(t) - Y_2(t)Y_1''(t) + a^2 \sqrt{\frac{l}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^4 w_k(t) (Y_1(t)y_{2k} - Y_2(t)y_{1k}) \right\}, \quad (25)$$

$$q(t) = [\mathcal{Y}(t)]^{-1} \left\{ \alpha_1 Y_2''(t) - \alpha_2 Y_1''(t) + a^2 \sqrt{\frac{l}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^4 w_k(t) (\alpha_1 y_{2k} - \alpha_2 y_{1k}) \right\}. \quad (26)$$

После подстановки функции (12) в (25) и (26) получим следующие интегральные уравнения относительно функций $g(t)$ и $q(t)$:

$$g(t) = [\mathcal{Y}(t)]^{-1} \left\{ Y_1(t)Y_2''(t) - Y_2(t)Y_1''(t) + \right. \\ \left. + a^2 \sqrt{\frac{l}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^4 \left\{ \frac{1}{\rho_k(T)} E_k(t) + \int_0^T G_k(t,s) F_k(s; g, q, w) ds \right\} (Y_1(t)y_{2k} - Y_2(t)y_{1k}) \right\}, \quad (27)$$

$$q(t) = [\mathcal{Y}(t)]^{-1} \left\{ \alpha_1 Y_2''(t) - \alpha_2 Y_1''(t) + \right. \\ \left. + a^2 \sqrt{\frac{l}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^4 \left\{ \frac{1}{\rho_k(T)} E_k(t) + \int_0^T G_k(t,s) F_k(s; g, q, w) ds \right\} (\alpha_1 y_{2k} - \alpha_2 y_{1k}) \right\}. \quad (28)$$

Рассмотрим функциональное пространство $B_{2,T}^7$ [23] – множество всех функций вида (6), рассматриваемых в $\bar{\Sigma}$ с нормой $\|w(x,t)\|_{B_{2,T}^7} = J_T(u)$, где $w_k(t) \in C[0,T]$ и

$$J_T(w) \equiv \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^7 \|w_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right\}^{1/2} < +\infty.$$

В дальнейшем будем обозначать через $E_{2,T}^7$ топологическое произведение $B_{2,T}^7 \times C[0,T] \times C[0,T]$, где норма элемента $z = \{w, g, q\}$ определяется по формуле

$$\|z\|_{E_{2,T}^7} = \|w(x,t)\|_{B_{2,T}^7} + \|g(t)\|_{C[0,T]} + \|q(t)\|_{C[0,T]}.$$

Известно, что пространства $B_{2,T}^7$ и $E_{2,T}^7$ являются банаховыми пространствами [26].

Теперь рассмотрим в пространстве $E_{2,T}^7$ оператор

$$\Lambda(w, g, q) = \{\Lambda_1(w, g, q), \Lambda_2(w, g, q), \Lambda_3(w, g, q)\},$$

где

$$\Lambda_1(w, g, q) = \tilde{w}(x, t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{w}_k(t) \sin(\mu_k x), \quad \Lambda_2(w, g, q) = \tilde{g}(t), \quad \Lambda_3(w, g, q) = \tilde{q}(t),$$

а функции $\tilde{w}_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, $\tilde{g}(t)$ и $\tilde{q}(t)$ равны правым частям (12), (27) и (28) соответственно.

Учитывая неравенство (14), имеем

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^7 \|\tilde{w}_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right\}^{1/2} \leq \sqrt{\frac{2}{l}} \beta (1 + \delta_2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^7 |\varphi_k|)^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\frac{2}{l}} \beta (1 + \delta_2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^5 |\psi_k|)^2 \right)^{1/2} + \\ + \sqrt{\frac{2}{l}} \kappa T \|g(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^5 |f_k|)^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\frac{2}{l}} \kappa T \|q(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^7 \|w_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2}, \quad (29)$$

где $\kappa = 1 + 2\beta\delta$,

$$\|\tilde{g}(t)\|_{C[0,T]} \leq \|[\mathcal{Y}(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left\{ \|Y_1(t)Y_2''(t) - Y_2(t)Y_1''(t)\|_{C[0,T]} + a^2 \sqrt{\frac{l}{2}} \left[\|Y_1(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{2k}^2 \right)^{1/2} + \right. \right. \\ \left. + \|Y_2(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{1k}^2 \right)^{1/2} \right] \left[\beta(1 + \delta_2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^7 |\varphi_k|)^2 \right)^{1/2} + \beta(1 + \delta_1) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^5 |\psi_k|)^2 \right)^{1/2} + \right. \\ \left. + \kappa T \|g(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^5 |f_k|)^2 \right)^{1/2} + \kappa T \|q(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^7 \|w_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} \right] \right\}, \quad (30)$$

$$\|\tilde{q}(t)\|_{C[0,T]} \leq \|[\mathcal{Y}(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left\{ \|\alpha_1 Y_2''(t) - \alpha_2 Y_1''(t)\|_{C[0,T]} + a^2 \sqrt{\frac{l}{2}} \left[\alpha_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{2k}^2 \right)^{1/2} + \right. \right. \\ \left. + \alpha_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{1k}^2 \right)^{1/2} \right] \left[\beta(1 + \delta_2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^7 |\varphi_k|)^2 \right)^{1/2} + \beta(1 + \delta_1) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^5 |\psi_k|)^2 \right)^{1/2} + \right. \\ \left. + \kappa T \|g(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^5 |f_k|)^2 \right)^{1/2} + \kappa T \|q(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^7 \|w_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} \right] \right\}. \quad (31)$$

Из (29)–(31) соответственно получим оценки

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^7 \|\tilde{w}_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right\}^{1/2} \leq \frac{2\beta}{l} (1 + \delta_2) \|\varphi^{VII}(x)\|_{L_2[0,l]} + \frac{2\beta}{l} (1 + \delta_1) \|\psi^V(x)\|_{L_2[0,l]} + \\ + \frac{2\beta}{l} \kappa T \|g(t)\|_{C[0,T]} \|f_0^V(x)\|_{L_2[0,l]} + \sqrt{\frac{2}{l}} \kappa T \|q(t)\|_{C[0,T]} \|w(x, t)\|_{B_{2,T}^7(x,t)}, \\ \|\tilde{g}(t)\|_{C[0,T]} \leq \|[\mathcal{Y}(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left\{ \|Y_1(t)Y_2''(t) - Y_2(t)Y_1''(t)\|_{C[0,T]} + \right. \\ \left. + a^2 \left[\|Y_1(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{2k}^2 \right)^{1/2} + \|Y_2(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{1k}^2 \right)^{1/2} \right] \left[\beta(1 + \delta_2) \|\varphi^{VII}(x)\|_{L_2[0,l]} + \right. \right. \\ \left. + \beta(1 + \delta_1) \|\psi^V(x)\|_{L_2[0,l]} + \kappa T \|g(t)\|_{C[0,T]} \|f_0^V(x)\|_{L_2[0,l]} + \sqrt{\frac{l}{2}} \kappa T \|q(t)\|_{C[0,T]} \|w(x, t)\|_{B_{2,T}^7(x,t)} \right] \right\}, \\ \|\tilde{q}(t)\|_{C[0,T]} \leq \|[\mathcal{Y}(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left\{ \|\alpha_1 Y_2''(t) - \alpha_2 Y_1''(t)\|_{C[0,T]} + \right. \\ \left. + a^2 \left[\alpha_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{2k}^2 \right)^{1/2} + \alpha_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{1k}^2 \right)^{1/2} \right] \left[\beta(1 + \delta_2) \|\varphi^{VII}(x)\|_{L_2[0,l]} + \right. \right. \\ \left. + \beta(1 + \delta_1) \|\psi^V(x)\|_{L_2[0,l]} + \kappa T \|g(t)\|_{C[0,T]} \|f_0^V(x)\|_{L_2[0,l]} + \sqrt{\frac{l}{2}} \kappa T \|q(t)\|_{C[0,T]} \|w(x, t)\|_{B_{2,T}^7(x,t)} \right] \right\},$$

$$+ \beta(1 + \delta_1) \|\psi^V(x)\|_{L_2[0,l]} + \kappa T \|g(t)\|_{C[0,T]} \|f_0^V(x)\|_{L_2[0,l]} + \sqrt{\frac{l}{2}} \kappa T \|q(t)\|_{C[0,T]} \|w(x, t)\|_{B_{2,T}^7(x,t)} \Big] \Big\}$$

или

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^7 \|\tilde{w}_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right\}^{1/2} \leq L_1(T) + M_1(T) \|g(t)\|_{C[0,T]} + N_1(T) \|q(t)\|_{C[0,T]} \|w(x, t)\|_{B_{2,T}^7(x,t)}, \quad (32)$$

$$\|\tilde{g}(t)\|_{C[0,T]} \leq L_2(T) + M_2(T) \|g(t)\|_{C[0,T]} + N_2(T) \|q(t)\|_{C[0,T]} \|w(x, t)\|_{B_{2,T}^7(x,t)}, \quad (33)$$

$$\|\tilde{q}(t)\|_{C[0,T]} \leq L_3(T) + M_3(T) \|g(t)\|_{C[0,T]} + N_3(T) \|q(t)\|_{C[0,T]} \|w(x, t)\|_{B_{2,T}^7(x,t)}, \quad (34)$$

где

$$L_1(T) = \frac{2\beta}{l} (1 + \delta_2) \|\varphi^{VII}(x)\|_{L_2[0,l]} + \frac{2\beta}{l} (1 + \delta_1) \|\psi^V(x)\|_{L_2[0,l]},$$

$$M_1(T) = \frac{2\beta}{l} \kappa T \|f_0^V(x)\|_{L_2[0,l]}, \quad N_1(T) = \sqrt{\frac{2}{l}} \kappa T,$$

$$L_2(T) = \|[\mathcal{Y}(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left\{ \|Y_1(t)Y_2''(t) - Y_2(t)Y_1''(t)\|_{C[0,T]} + a^2 \left[\|Y_1(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{2k}^2 \right)^{1/2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \|Y_2(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{1k}^2 \right)^{1/2} \right] \left[\beta(1 + \delta_2) \|\varphi^{VII}(x)\|_{L_2[0,l]} + \beta(1 + \delta_1) \|\psi^V(x)\|_{L_2[0,l]} \right] \right\},$$

$$M_2(T) = a^2 \|[\mathcal{Y}(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left[\|Y_1(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{2k}^2 \right)^{1/2} + \|Y_2(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{1k}^2 \right)^{1/2} \right] \times \\ \times \kappa T \|f_0^V(x)\|_{L_2[0,l]},$$

$$N_2(T) = a^2 \sqrt{\frac{l}{2}} \|[\mathcal{Y}(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left[\|Y_1(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{2k}^2 \right)^{1/2} + \|Y_2(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{1k}^2 \right)^{1/2} \right] \kappa T,$$

$$L_3(T) = \|[\mathcal{Y}(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left\{ \|\alpha_1 Y_2''(t) - \alpha_2 Y_1''(t)\|_{C[0,T]} + \right. \\ \left. + a^2 \left[\alpha_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{2k}^2 \right)^{1/2} + \alpha_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{1k}^2 \right)^{1/2} \right] \left[\beta(1 + \delta_2) \|\varphi^{VII}(x)\|_{L_2[0,l]} + \beta(1 + \delta_1) \|\psi^V(x)\|_{L_2[0,l]} \right] \right\},$$

$$M_3(T) = a^2 \|[\mathcal{Y}(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left[\alpha_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{2k}^2 \right)^{1/2} + \alpha_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{1k}^2 \right)^{1/2} \right] \kappa T \|f_0^V(x)\|_{L_2[0,l]},$$

$$N_3(T) = a^2 \sqrt{\frac{l}{2}} \|[\mathcal{Y}(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left[\alpha_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{2k}^2 \right)^{1/2} + \alpha_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} y_{1k}^2 \right)^{1/2} \right] \kappa T.$$

Из неравенств (32)–(34) следует оценка

$$\|\tilde{w}(x, t)\|_{B_{2,T}^7} + \|\tilde{g}(t)\|_{C[0,T]} + \|\tilde{q}(t)\|_{C[0,T]} \leq \\ \leq L(T) + M(T) \|g(t)\|_{C[0,T]} + N(T) \|q(t)\|_{C[0,T]} \|w(x, t)\|_{B_{2,T}^7(x,t)}, \quad (35)$$

где $L(T) = L_1(T) + L_2(T) + L_3(T)$, $M(T) = M_1(T) + M_2(T) + M_3(T)$, $N(T) = N_1(T) + N_2(T) + N_3(T)$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, леммы 2, (24) и следующее условие:

$$(L(T) + 2)(M(T) + N(T)(L(T) + 2)) < 2. \quad (36)$$

Тогда задача (1)–(4) имеет единственное решение в шаре $B_R = \{z : \|z\|_{E_{2,T}^7} \leq R\}$.

Доказательство. Введём обозначение $z = (w(x, t), g(t), q(t))^*$ и запишем систему уравнений (13), (27), (28) в операторном виде

$$z = Az, \quad (37)$$

где $A = (A_1, A_2, A_3)^*$, $A_1(z)$, $A_2(z)$ и $A_3(z)$ определяются правыми частями (13), (27) и (28), соответственно.

Аналогично из (35) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in B_R$ справедливы оценки

$$\|Az\|_{E_{2,T}^7} \leq L(T) + M(T)\|g(t)\|_{C[0,T]} + N(T)\|q(t)\|_{C[0,T]}\|w(x, t)\|_{B_{2,T}^7}, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \|Az_1 - Az_2\|_{E_{2,T}^7} &\leq M(T)\|g_1(t) - g_2(t)\|_{C[0,T]} + \\ &+ N(T)R(\|q_1(t) - q_2(t)\|_{C[0,T]} + \|w_1(x, t) - w_2(x, t)\|_{B_{2,T}^7}). \end{aligned} \quad (39)$$

Тогда в силу (36) из (38) и (39) следует, что оператор A действует в шаре B_R и удовлетворяет принципу сжимающего отображения. Следовательно, по теореме Банаха оператор A имеет единственную неподвижную точку $\{w, g, q\}$ в шаре B_R , являющуюся решением операторного уравнения (37).

Таким образом, функция $w(x, t)$ как элемент пространства $B_{2,T}^7$ непрерывна и имеет непрерывные производные $w_{tt}(x, t)$ и $w_{xxxx}(x, t)$ в прямоугольнике $\bar{\Sigma}$.

Из (9) легко видеть, что выполняется неравенство

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k \|w_k''(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6}\right)^{1/2} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^7 \|w_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2} + \|f_0'(x)g(t) + q(t)w_x(x, t)\|_{L_2[0,l]}\right], \end{aligned}$$

откуда следует, что $w_{tt}(x, t)$ непрерывна в $\bar{\Sigma}$.

Замечание. Неравенство (36) выполняется при достаточно малых значениях T .

Теорема 3. Пусть выполняются все условия теоремы 2 и условия (5), (24). Тогда задача (1)–(4) имеет единственное классическое решение в шаре B_R пространства $E_{2,T}^7$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-02-2022-890).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1966.
2. Гусев Б.В., Саурин В.В. О колебаниях неоднородных балок // Инж. вестн. Дона. 2017. <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4312>.
3. Baysal O., Hasanov A. Solvability of the clamped Euler–Bernoulli beam equation // Appl. Math. Lett. 2019. V. 93. P. 85–90.
4. Сабитов К.Б. Колебания балки с заделанными концами // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19. № 2. С. 311–324.
5. Сабитов К.Б., Акимов А.А. Начально-граничная задача для нелинейного уравнения колебаний балки // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 5. С. 632–645.
6. Касимов Ш.Г., Мадрахимов У.С. Начально-граничная задача для уравнения колебаний балки в многомерном случае // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 10. С. 1379–1391.

7. *Karchevsky A.L.* Analytical solutions to the differential equation of transverse vibrations of a piecewise homogeneous beam in the frequency domain for the boundary conditions of various types // *J. of Appl. and Industr. Math.* 2020. Т. 14. № 4. С. 648–665.
8. *Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д.* Задача об определении одномерного ядра уравнения электровязкоупругости // *Сиб. мат. журн.* 2017. Т. 58. № 3. С. 553–572.
9. *Дурдиев Д.К., Размонов А.А.* Задача об определении двумерного ядра в системе интегродифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды // *Сиб. журн. индустр. математики.* 2020. Т. 23. № 2. С. 63–80.
10. *Durdiev U.D.* An inverse problem for the system of viscoelasticity equations in homogeneous anisotropic media // *J. of Appl. and Industr. Math.* 2019. V. 13. № 4. P.
11. *Romanov V.G.* A problem of recovering a special two dimension potential in a hyperbolic equation // *Eur. J. Math. Comput. Appl.* 2016. V. 4. № 1. P. 32–46.
12. *Durdiev U.D.* A problem of identification of a special 2D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation // *Eur. J. Math. Comput. Appl.* 2019. V. 7. № 2. P. 4–19.
13. *Durdiev U.D., Totieva Zh.D.* A problem of determining a special spatial part of 3D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation // *Math. Methods Appl. Sci.* 2019. V. 42. № 18. P. 1–12.
14. *Дурдиев У.Д.* Обратная задача по определению неизвестного коэффициента в уравнении колебания балки // *Дифференц. уравнения.* 2022. Т. 58. № 1. С. 37–44.
15. *Карчевский А.Л., Фатьянов А.Г.* Численное решение обратной задачи для системы упругости с последствием для вертикально неоднородной среды // *Сиб. журн. вычислит. математики.* 2001. Т. 4. № 3. С. 259–268.
16. *Карчевский А.Л.* Определение возможности горного удара в угольном пласте // *Сиб. журн. индустр. математики.* 2017. Т. 20. № 4. С. 35–43.
17. *Дурдиев У.Д.* Численное определение зависимости диэлектрической проницаемости слоистой среды от временной частоты // *Сиб. электрон. мат. изв.* 2020. Т. 17. С. 179–189.
18. *Maciag A., Pawinska A.* Solution of the direct and inverse problems for beam // *Comp. Appl. Math.* 2016. V. 35. P. 187–201.
19. *Maciag A., Pawinska A.* Solving direct and inverse problems of plate vibration by using the trefftz functions // *J. of Theor. and Appl. Mech.* 2013. V. 51. № 3. P. 543–552.
20. *Guojin Tan, Jinghui Shan, Chunli Wu, Wensheng Wang.* Direct and inverse problems on free vibration of cracked multiple I-section beam with different boundary conditions // *Adv. in Mech. Engin.* 2017. V. 9. № 11. P. 1–17.
21. *Moaveni S., Hyde R.* Reconstruction of the area-moment-of-inertia of a beam using a shifting load and the end-slope data // *Inverse Problems in Science and Engineering.* 2016. V. 24. № 6. P. 990–1010.
22. *Marinov T.T., Vatsala A.S.* Inverse problem for coefficient identification in the Euler–Bernoulli equation // *Comput. and Math. with Appl.* 2008. V. 56. P. 400–410.
23. *Megraliev Ya.T., Azizbayov E.I.* A time-nonlocal inverse problem for a hyperbolic equation with an integral overdetermination condition // *Electron. J. of Qualitative Theory of Differen. Equat.* 2021. № 28. P. 1–12.
24. *Xiao-Li Ding, Bashir Ahmad.* A generalized Volterra–Fredholm integral inequality and its applications to fractional differential equations // *Adv. in Difference Equat.* 2018. V. 2018. Art. 91.
25. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Application of Fractional Differential Equations. Amsterdam, 2006.
26. *Tekin I., Mehraliyev Y.T., Ismailov M.I.* Existence and uniqueness of an inverse problem for nonlinear Klein–Gordon equation // *Math. Methods Appl. Sci.* 2019. V. 42. № 10. P. 3739–3753.

Бухарский государственный университет,
Узбекистан,
Бухарское отделение Института математики
имени В.И. Романовского, Узбекистан

Поступила в редакцию 15.10.2022 г.
После доработки 07.02.2023 г.
Принята к публикации 14.02.2023 г.