ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 2, с. 270–274

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.984.5

О БИФУРКАЦИИ ПОРОГОВ СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА В ПРИСУТСТВИИ СПЕКТРАЛЬНОЙ СИНГУЛЯРНОСТИ

© 2023 г. Д. И. Борисов, Д. А. Зезюлин

Рассмотрен оператор Шрёдингера на плоскости с ограниченным потенциалом $V_1(x) + V_2(y) + \varepsilon W(x,y)$, где V_1 – вещественный потенциал, V_2 и W – финитные комплексные потенциалы, ε – малый параметр, в предположении, что нижняя часть спектра одномерного оператора Шрёдингера $\mathcal{H}_1 = -d^2/dx^2 + V_1(x)$ состоит из пары изолированных собственных значений, а существенный спектр оператора $\mathcal{H}_2 = -d^2/dy^2 + V_2(y)$ имеет виртуальный уровень на нижнем крае и спектральную сингулярность внутри. Дополнительно считаем, что происходит определённое наложение собственных значений оператора $\mathcal{H}_1$ с виртуальным уровнем и спектральной сингулярностью оператора $\mathcal{H}_2$, приводящее к возникновению особого порога в существенном спектре возмущённого оператора, причём возмущение приводит к бифуркации этого порога в собственные значения и резонансы с удвоением кратности. Сценарий бифуркации, описываемый в настоящей работе, качественно отличается от ранее известных.

DOI: 10.31857/S0374064123020127, EDN: PVRLHB

1. Постановка задачи. Основной объект исследования настоящей работы – двумерный оператор Шрёдингера
$$\mathcal{H}^\varepsilon = -\Delta_{x,y} + V_1(x) + V_2(y) + \varepsilon W(x,y)$$
в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$ на области определения $\mathfrak{D}(\mathcal{H}^\varepsilon) := W_2^2(\mathbb{R}^2)$, где $\Delta_{x,y}$ – оператор Лапласа по декартовым координатам (x,y) на плоскости $\mathbb{R}^2$, потенциалы V_1, V_2, W – равномерно ограниченные измеримые функции своих переменных. Функция V_1 – вещественная, функции V_2 и W – комплекснозначные и финитные. Оператор $\mathcal{H}^\varepsilon$ замкнут и m-секториален.

Определим вспомогательные операторы
$$\mathcal{H}_1 := -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x), \quad \mathcal{H}_2 := -\frac{d^2}{dy^2} + V_2(y)$$
в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ с областями определения $\mathfrak{D}(\mathcal{H}_1) = \mathfrak{D}(\mathcal{H}_2) = W_2^2(\mathbb{R})$. Оператор $\mathcal{H}_1$ самосопряжён, оператор $\mathcal{H}_2$ m-секториален, и, благодаря финитности потенциала V_2, существенный спектр оператора $\mathcal{H}_2$, определяемый в терминах характеристических последовательностей, есть полуось $[0,+\infty)$. На потенциал V_1 налагаем следующее условие: существует константа c_0 такая, что спектр оператора $\mathcal{H}_1$ левее точки c_0 состоит из пары собственных значений Λ_0, Λ_1. Условие на потенциал V_2: существует $\delta > 0$ такое, что полоса $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < 0,\ |\operatorname{Im}\lambda| < \delta\}$ содержится в резольвентном множестве оператора $\mathcal{H}_2$; кроме этого оператор $\mathcal{H}_2$ имеет виртуальный уровень на краю существенного спектра $\lambda = 0$ и спектральную сингулярность во внутренней точке существенного спектра $\lambda = \mu > 0$, и выполняется равенство
$$\Lambda_0 + \mu = \Lambda_1 =: \lambda_0. \tag{1}$$

Поясним понятия виртуального уровня и спектральной сингулярности. Пусть уравнение
$$\left(-\frac{d^2}{dy^2} + V_2\right)\Phi = \lambda\Phi \tag{2}$$
на множестве $\mathbb{R}$ имеет нетривиальное решение со следующим поведением:
$$\Phi(y) = C_\pm e^{i\sqrt{\lambda}|y|}, \quad \pm y > a, \tag{3}$$
где $C_\pm$ – некоторые фиксированные константы, не зависящие от y, ветвь корня выбрана подходящим образом, $a > 0$ – достаточно большое число. Очевидно, что ни одна из констант

C_+ и C_- не равна нулю, так как иначе функция $\Phi(y)$ тождественно обращалась бы в нуль. Если условие (3) выполнено для $\lambda = 0,$ то будем считать, что на краю существенного спектра оператора $\mathcal{H}_2$ имеется виртуальный уровень. Если условие (3) выполнено для некоторого $\lambda = \mu > 0,$ то говорим, что μ – это спектральная сингулярность внутри существенного спектра оператора $\mathcal{H}_2$. Обзор исследований спектральных сингулярностей несамосопряжённых операторов приведён, например, в работе [1].

Повторив выкладки из доказательства леммы 1 в статье [2], несложно показать, что существенный спектр оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ есть полуось $[\Lambda_0, +\infty)$. В него вложено число

$$\lambda_0 = \Lambda_1 = \Lambda_0 + \mu,$$

которое называем *внутренним порогом* спектра. Равенство (1) означает, что при $\varepsilon = 0$ этому порогу соответствуют две обобщённые собственные функции $\Psi_i(x)\Phi_i(y),$ $i = 0, 1,$ оператора $\mathcal{H}^0$.

Изучим бифуркацию порога λ_0 в собственные значения и/или резонансы оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ при возмущении потенциалом εW. Резонансы стандартным образом определим как полюса соответствующих локальных мероморфных продолжений резольвенты через существенный спектр.

Имеется большое число исследований, посвящённых бифуркации порогов в существенном спектре эллиптических операторов под действием локализованных возмущений. Небольшой обзор на эту тему приведён в работах [2–4]. Также отметим статьи [5–7] для дифференциальных операторов и [8, 9] – для разностных операторов. Типичной является ситуация, когда совокупная кратность собственных значений и/или резонансов, возникающих из заданного порога, совпадает с кратностью самого порога, понимаемой в подходящем смысле. Имеются также примеры нарушения сохранения совокупной кратности, а именно, её увеличения под действием возмущения. Для задач на плоскости и в трёхмерных слоях такой эффект связан с логарифмической особенностью фундаментального решения (см. [10, 11]). Известен также эффект возникновения и накопления неограниченного числа резонансов и собственных значений вдоль заданного отрезка в существенном спектре под действием разбегающихся возмущений (см. [12, 13]).

Данная работа посвящена изучению иного механизма увеличения совокупной кратности и является продолжением исследований из статей [2–4], в которых рассматривались операторы более общего вида, чем $\mathcal{H}^\varepsilon$, но в принципиально другой ситуации: предполагалось, что $V_2 \equiv 0$. Было показано, что тогда в существенном спектре присутствуют пороги, соответствующие собственным значениям оператора $\mathcal{H}_1$, и локализованные возмущения приводят к бифуркациям этих порогов в собственные значения и резонансы, причём количество (с учётом кратности) возникающих собственных значений и резонансов до двух раз превосходит кратность порога. Суть такого эффекта связана с наличием двух локальных мероморфных продолжений резольвенты в окрестности порогов из верхней полуплоскости в нижнюю и наоборот, и возникающие собственные значения и резонансы есть полюса этих продолжений. Оба продолжения имеют одинаковое количество полюсов, и для каждого из них были найдены первые члены их асимптотических разложений, а также достаточные условия, определяющие, какому именно спектральному объекту (собственному значению или резонансу) соответствует заданный полюс.

Рассмотрим случай $V_2 \not\equiv 0$ и дополнительно предположим, что оператор $\mathcal{H}_2$ имеет виртуальный уровень на краю существенного спектра и спектральную сингулярность внутри. Дополнительно считаем, что собственные значения оператора $\mathcal{H}_1$ удовлетворяют равенству (1), что можно понимать как “наложение” собственных чисел и спектральной сингулярности во внутреннем пороге λ_0. Основной результат настоящей работы утверждает, что такое наложение качественно меняет бифуркационную картину в окрестности порога λ_0, и при некоторых дополнительных условиях из порога λ_0 возникают четыре спектральных объекта, но при этом соответствующие локальные мероморфные продолжения имеют *разное* число возникающих полюсов. Подчеркнём, что порогу λ_0 соответствуют только две линейно независимые обобщённые собственные функции.

2. Основные результаты. Пусть $\Psi_i = \Psi_i(x)$, $i = 0, 1$, – нормированные в $L_2(\mathbb{R})$ вещественнозначные собственные функции оператора $\mathcal{H}_1$, соответствующие собственным значениям Λ_0, Λ_1. Ввиду одномерности оператора $\mathcal{H}_1$ каждое из этих собственных значений – простое. Через $\Phi_i = \Phi_i(y)$, $i = 0, 1$, обозначим нетривиальные решения уравнения (2) с поведением (3), соответствующие случаям $\lambda = \mu$ $(i = 0)$ и $\lambda = 0$ $(i = 1)$. Считаем, что для $\lambda = \mu$ существует единственное (с точностью до множителя) нетривиальное решение указанного типа. Дополнительно считаем, что решения Φ_i можно нормировать следующим образом:

$$(C_-^{(1)})^2 + (C_+^{(1)})^2 = 1, \quad \int\limits_{-a}^{a} ((\Phi_0')^2 + V_2\Phi_0^2 + \mu\Phi_0^2)\,dy = 2\sqrt{\mu}.$$

Здесь через $C_\pm^{(1)}$ обозначаем константы $C_\pm$ из асимптотики (3), соответствующие решению Φ_1.

Зафиксируем $\theta > 0$ и введём весовые пространства $W_{2,\theta}^2(\mathbb{R})$ и $W_{2,\theta}^2(\mathbb{R}^2)$ как подпространства функций из $W_2^2(\mathbb{R})$ и $W_2^2(\mathbb{R}^2)$ с конечными нормами, определяемыми равенствами

$$\|u\|^2_{W^2_{2,\theta}(\mathbb{R})} := \|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}, e^{-\theta|y|}\,dy)} + \|u'\|^2_{L_2(\mathbb{R}, e^{-\theta|y|}\,dy)} + \|u''\|^2_{L_2(\mathbb{R}, e^{-\theta|y|}\,dy)},$$

$$\|u\|^2_{W^2_{2,\theta}(\mathbb{R}^2)} := \|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2, e^{-\theta|y|}\,dx\,dy)} + \|\partial_{x,y}u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2, e^{-\theta|y|}\,dx\,dy)} + \|\partial^2_{x,y}u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2, e^{-\theta|y|}\,dx\,dy)},$$

где $\partial_{x,y}u$ и $\partial^2_{x,y}u$ обозначают соответственно наборы всех первых и вторых производных функции u. Для заданной ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2$, через $L_{2,\Omega}(\mathbb{R}^n)$ обозначаем подпространство функций из пространства $L_2(\mathbb{R}^n)$ с носителями в замыкании области Ω.

Следующее утверждение описывает локальные мероморфные продолжения резольвенты оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$.

Теорема 1. *Для всех достаточно малых ε существуют два локальных мероморфных продолжения резольвенты оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ в окрестности внутреннего порога λ_0 существенного спектра, а именно: для любой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и каждого $\tau \in \{-1, +1\}$ при достаточно малых ε существуют число $\theta > 0$ и ограниченный оператор $\mathcal{R}^\varepsilon_\tau(k)$, действующий из $L_{2,\Omega}(\mathbb{R}^2)$ в $W^2_{2,\theta}(\mathbb{R}^2)$, и мероморфный по k из некоторой фиксированной малой окрестности нуля в комплексной плоскости. Размер этой окрестности не зависит от ε. При выполнении неравенств $\operatorname{Re} k > 0$ и $\tau \operatorname{Im} k^2 < 0$ оператор $\mathcal{R}^\varepsilon_\tau(k)$ совпадает с резольвентой $(\mathcal{H}^\varepsilon - \lambda_0 + k^2)^{-1}$, суженной на пространство $L_{2,\Omega}(\mathbb{R}^2)$. Если k^ε – полюс оператора $\mathcal{R}^\varepsilon_\tau(k)$, то существует нетривиальное решение ψ^ε_τ уравнения*

$$(-\Delta_{x,y} + V_1(x) + V_2(y) + \varepsilon W(x,y) - \lambda_0 + (k^\varepsilon)^2)\psi^\varepsilon_\tau = 0 \tag{4}$$

в $\mathbb{R}^2$, которое при $\pm y > b$ с некоторым фиксированным b, не зависящим от ε, представляется следующим образом:

$$\psi^\varepsilon_\tau(x,y) = c_\pm^{(\varepsilon,0)}\Psi_0(x)e^{i\tau\sqrt{\mu-(k^\varepsilon)^2}|y|} + c_\pm^{(\varepsilon,1)}\Psi_1(x)e^{-k^\varepsilon|y|} + \psi^{\varepsilon,\perp}_\tau(x,y), \tag{5}$$

где $c_\pm^{(\varepsilon,i)}$, $i = 0, 1$, – некоторые константы, $\psi^{\varepsilon,\perp}_\tau \in W^2_{2,\theta}(\mathbb{R}^2)$ – некоторая функция.

Полюсам мероморфных продолжений $\mathcal{R}^\varepsilon_{\pm 1}(k)$ соответствуют нетривиальные решения задачи (4), (5). Если заданное решение попадает в пространство $W_2^2(\mathbb{R}^2)$, то соответствующий полюс по формуле $\lambda^\varepsilon = \lambda_0 - (k^\varepsilon)^2$ порождает собственное значение оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$. Если же заданное решение не попадает в пространство $W_2^2(\mathbb{R}^2)$, то соответствующий полюс по той же формуле порождает резонанс.

Введём ещё два условия:

$$K_j := \int\limits_{\mathbb{R}^2} W(x,y)\Psi_j(x)\Phi_j(y)\Psi_1(x)\Phi_1(y)\,dx\,dy \neq 0, \quad j = 0, 1. \tag{6}$$

Представим эти числа в виде $K_j = |K_j|e^{i\theta_j}$, $j = 0, 1$, где $\theta_j \in [0, 2\pi)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены неравенства (6). При достаточно малых ε оператор $\mathcal{R}^\varepsilon_{-1}(k)$ имеет ровно один полюс $k_0(\varepsilon)$, а оператор $\mathcal{R}^\varepsilon_{+1}(k)$ – ровно три полюса $k_j(\varepsilon)$, $j = 1, 2, 3$, сходящихся к нулю при $\varepsilon \to +0$. Каждый из этих полюсов простой, и ему соответствует единственное нетривиальное решение задачи (4), удовлетворяющее представлению (5). Асимптотики этих полюсов имеют вид*

$$k_0(\varepsilon) = -\varepsilon K_1 + O(\varepsilon^2), \quad k_j(\varepsilon) = |K_0K_1|^{1/3} e^{i(\theta_0+\theta_1+2\pi j)/3}\varepsilon^{2/3} + O(\varepsilon), \quad j = 1, 2, 3. \tag{7}$$

Полюса $k_j(\varepsilon)$, $j = 0, 1, 2, 3$, порождают собственные значения или резонансы оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ по формуле

$$\lambda_j(\varepsilon) = \lambda_0 - k_j^2(\varepsilon). \tag{8}$$

Если $\theta_1 \in (\pi, 3\pi/2)$, то полюс $k_0(\varepsilon)$ порождает собственное значение, а если $\theta_1 \in (0,\pi) \bigcup (3\pi/2, 2\pi)$, то он порождает резонанс. Если $\theta_0+\theta_1 \in (\pi/2, 2\pi)$, то полюс $k_2(\varepsilon)$ порождает собственное значение, а полюса $k_1(\varepsilon)$, $k_3(\varepsilon)$ – резонансы. Если $\theta_0+\theta_1 \in (5\pi/2, 4\pi)$, то полюс $k_1(\varepsilon)$ порождает собственное значение, а полюса $k_2(\varepsilon)$, $k_3(\varepsilon)$ – резонансы. Если $\theta_0+\theta_1 \in (0,\pi/2) \bigcup (2\pi, 5\pi/2)$, то все три полюса $k_j(\varepsilon)$, $j = 1, 2, 3$, порождают резонансы.

Кратко обсудим основные результаты. Точка λ_0 является внутренним порогом в существенном спектре предельного оператора $\mathcal{H}^0$, который получается из $\mathcal{H}^\varepsilon$ при $\varepsilon = 0$. Этому порогу соответствуют две обобщённые собственные функции, имеющие вид $\Psi_j(x)\Phi_j(y)$, $j = 0, 1$. Возмущение потенциалом εW приводит к бифуркации порога λ_0 в четыре спектральных объекта, соответствующих полюсам $k_j(\varepsilon)$, $j = 0, 1, 2, 3$, операторов $\mathcal{R}^\varepsilon_\pm(k)$, возникающих как локальные мероморфные продолжения резольвенты оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ в окрестности порога λ_0 из верхней полуплоскости в нижнюю и наоборот. Резонансы и собственные значения оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ удобно рассматривать как полюса этих мероморфных продолжений; тип спектрального объекта определяется поведением на бесконечности соответствующего нетривиального решения задачи (4), (5).

Одновременное наличие виртуального уровня и спектральной сингулярности у оператора $\mathcal{H}_2$ и условие (1) приводят к неожиданному эффекту при бифуркации этого порога: помимо ожидаемого удвоения кратности (с двух до четырёх) возникающие четыре полюса образованы одним полюсом оператора $\mathcal{R}^\varepsilon_{-1}(k)$ и тремя полюсами оператора $\mathcal{R}^\varepsilon_{+1}(k)$. Такая несимметричность резко контрастирует с результатами работ [2–4], где аналогичные локальные мероморфные продолжения резольвент всегда имели *одинаковое* количество полюсов. Поэтому можно утверждать, что наложение собственных значений и спектральной сингулярности в смысле равенства (1) качественно меняет структуру полюсов мероморфных продолжений резольвенты.

Обсудим ещё спектральную природу возникающих полюсов. Полюс $k_0(\varepsilon)$ оператора $\mathcal{R}^\varepsilon_{-1}(k)$ может порождать как собственное значение, так и резонанс. Среди полюсов оператора $\mathcal{R}^\varepsilon_{+1}(k)$ только $k_1(\varepsilon)$ и $k_2(\varepsilon)$ могут соответствовать собственным значениям, в то время как остальные два полюса всегда соответствуют резонансам. Реализация конкретной ситуации определяется аргументами θ_0 и θ_1 чисел K_0 и K_1. В результате, в окрестности порога λ_0 реализуется одна из трёх возможных ситуаций: возникают или четыре резонанса, или одно собственное значение и три резонанса, или два собственных значения и два резонанса. Все эти объекты описываются общей формулой (8), и с учётом (7) верны асимптотики

$$\lambda_0(\varepsilon) = \lambda_0 - K_1^2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad \lambda_j(\varepsilon) = \lambda_0 - |K_0K_1|^{2/3} e^{2i(\theta_0+\theta_1+2\pi j)/3}\varepsilon^{4/3} + O(\varepsilon^{5/3}), \quad j = 1, 2, 3.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-19995).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Guseinov G.Sh.* On the concept of spectral singularities // Pramana – J. Phys. 2009. V. 73. № 3. P. 587–603.
2. *Borisov D.I., Zezyulin D.A., Znojil M.* Bifurcations of thresholds in essential spectra of elliptic operators under localized non-Hermitian perturbations // Stud. Appl. Math. 2021. V. 146. № 4. P. 834–880.

3. *Borisov D.I., Zezyulin D.A.* Bifurcations of essential spectra generated by a small non-Hermitian hole. I. Meromorphic continuations // Russ. J. Math. Phys. 2021. V. 28. № 4. P. 416–433.
4. *Borisov D.I., Zezyulin D.A.* Bifurcations of essential spectra generated by a small non-Hermitian small hole. II. Eigenvalues and resonances // Russ. J. Math. Phys. 2022. V. 29. № 3. P. 321–341.
5. *Назаров С.А.* Сохранение пороговых резонансов и отцепление собственных чисел от порога непрерывного спектра квантовых волноводов // Мат. сб. 2021. Т. 212. № 7. С. 84–121.
6. *Назаров С.А.* Пороговые резонансы и виртуальные уровни в спектре цилиндрических и периодических волноводов // Изв. РАН. Сер. мат. 2020. Т. 84. № 6. С. 73–130.
7. *Гатауллин Т.М., Карасёв М.В.* О возмущении квазиуровней оператора Шрёдингера с комплексным потенциалом // Теор. мат. физ. 1971. Т. 9. № 2. С. 252–263.
8. *Лакаев С.Н., Абдухакимов С.Х.* Пороговые эффекты в системе двух фермионов на оптической решётке // Теор. мат. физ. 2020. Т. 203. № 2. С. 251–268.
9. *Лакаев С.Н., Улашов С.С.* Существование и аналитичность связанных состояний двухчастичного оператора Шрёдингера на решётке // Теор. мат. физ. 2012. Т. 170. № 3. С. 393–408.
10. *Gesztesy F., Holden H.* A unified approach to eigenvalues and resonances of Schrödinger operators using Fredholm determinants // J. Math. Anal. Appl. 1987. V. 123. № 1. P. 181–198.
11. *Борисов Д.И.* Возмущение края существенного спектра волновода с окном. I. Убывающие резонансные решения // Пробл. мат. анализа. 2014. Т. 77. С. 19–54.
12. *Borisov D.I., Zezyulin D.A.* Sequences of closely spaced resonances and eigenvalues for bipartite complex potentials // Appl. Math. Lett. 2020. V. 100. ID 106049.
13. *Klopp F.* Resonances for large one-dimensional “ergodic” systems // Analysis and PDE. 2016. V. 9. № 2. P. 259–352.

Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра РАН,
Башкирский государственный педагогический
университет имени М. Акмуллы, г. Уфа,
Университет Градца Кралове, Чехия,
Национальный исследовательский университет ИТМО,
г. Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 22.11.2021 г.
После доработки 21.11.2022 г.
Принята к публикации 22.12.2022 г.