

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВУМЕРНОГО ЯДРА
РЕЛАКСАЦИИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

© 2023 г. Д. К. Дурдиев, Ж. Ш. Сафаров

Рассматривается многомерная обратная задача определения ядра интегрального члена интегро-дифференциального волнового уравнения. В прямой задаче требуется найти функцию смещения из начально-краевой задачи, в обратной – определить ядро интегрального члена, зависящего как от временной, так и от одной пространственной переменных. Доказывается локальная однозначная разрешимость поставленной задачи в классе функций, непрерывных по одной из переменных и аналитических по другой, на основе метода шкал банаховых пространств вещественных аналитических функций.

DOI: 10.31857/S0374064123020073, EDN: PUSIWP

Введение. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$u_{tt} = \Delta u + \int_0^t k(x, \alpha) u(x, z, t - \alpha) d\alpha, \quad x \in \mathbb{R}, \quad z \in (0, l), \quad t > 0, \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad z \in (0, l), \quad (2)$$

и граничными условиями

$$u_z|_{z=0} = \psi(x, t), \quad u_z|_{z=l} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (3)$$

Здесь $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$ – оператор Лапласа, $\psi(x, t)$ – заданная достаточно гладкая функция; $l > 0$ – некоторое фиксированное вещественное число.

Нахождение функции $u(x, t)$ из задачи (1)–(3) при известной $k(x, t)$ называется *прямой задачей*.

Обратная задача заключается в определении ядра $k(x, t)$ интегро-дифференциального уравнения (1), если относительно решения задачи (1)–(3) известно, что

$$u(x, 0, t) = f(x, t), \quad t \geq 0,$$

где $f(x, t)$ – заданная функция.

В обратных задачах для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа, когда ядро интеграла зависит только от одной переменной, во многих случаях имеют место теоремы глобальной однозначной разрешимости [1–4]. Для многомерных обратных задач известны только специальные случаи, для которых установлена разрешимость. Функции, непрерывные по одной из переменных и аналитические по другим переменным, относятся к классу функций, в которых имеет место разрешимость. Идея применения метода шкал банаховых пространств аналитических функций к многомерным обратным задачам, развитая в работах Л.В. Овсянникова [5] и Л. Ниренберга [6], принадлежит В.Г. Романову. В своих работах [7–9] он применил этот метод (с некоторыми модификациями) к вопросам локальной разрешимости многомерных обратных задач. В статьях [10–13] на его основе исследованы многомерные обратные задачи определения свёрточного ядра в гиперболических интегро-дифференциальных

уравнениях второго порядка. Задача, которая исследуется в данной работе, относится к числу многомерных обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений.

Следуя работам [7] и [14, с. 92], введём понятие шкалы банаховых пространств аналитических функций одного вещественного аргумента.

Пусть $h(x)$, $x \in \mathbb{R}$, является вещественной функцией, для которой имеет место следующее соотношение:

$$\|h\|_s(r) := \sup_{|x| \leq r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \left| \frac{d^n}{dx^n} h(x) \right| < \infty,$$

где $r > 0$, $s > 0$ – некоторые параметры. Множество функций $h(x)$, для которых выполнено неравенство $\|h\|_s(r) < \infty$, является *банаховым пространством аналитических функций* и обозначается $A_s(r)$. Далее параметр r будет считаться фиксированным, а s рассматриваться как переменный параметр. Так как параметр r фиксирован, будем в дальнейшем для сокращения записей опускать его и использовать обозначения $\|h\|_s$, A_s вместо $\|h\|_s(r)$, $A_s(r)$. Совокупность пространств A_s для $s \in (0, s_0)$, $s_0 > 0$, образует *шкалу банаховых пространств*. При этом если $h(x) \in A_s$, то $h(x) \in A_{s'}$ для всех $s' \in (0, s)$, следовательно, $A_s \subset A_{s'}$, если $s' < s$ и имеет место неравенство [14, с. 92]

$$\left\| \frac{d^n}{dx^n} h \right\|_{s'} \leq n^n \frac{\|h\|_s}{(s - s')^n} \quad (4)$$

для любого положительного целого числа n .

Будем считать, что векторная функция принадлежит пространству A_s , если все её компоненты являются элементами A_s . Нормой в A_s назовём максимальную из норм в A_s (компонент этой функции).

Ниже рассматриваются функции, которые являются аналитическими по $x \in \mathbb{R}$ и зависят от переменных $(z, t) \in \Omega$, где Ω – некоторая компактная область с кусочно-гладкой границей. В связи с этим нам потребуется

Определение. Функция $\omega = \omega(x, z, t) \in C(A_s, \Omega)$, если $\omega \in A_s$ для всех $(z, t) \in \Omega$, непрерывна в Ω как элемент пространства A_s и, кроме того, удовлетворяет условию

$$\|\omega\|_{C(A_s, \Omega)} := \sup_{(z, t) \in \Omega} \|\omega\|_s(z, t) < \infty.$$

Очевидно, что $C(A_s, \Omega)$ – банахово пространство.

1. Исследование прямой задачи. Рассмотрим задачу (1)–(3) в области $\mathbb{B} = \mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2$, в которой

$$\mathbb{B}_1 = \mathbb{R} \times G_1, \quad G_1 = \{(z, t) : 0 < z < l, \quad 0 < t < z\},$$

$$\mathbb{B}_2 = \mathbb{R} \times G_2, \quad G_2 = \{(z, t) : 0 < z < l, \quad z < t < 2l - z\}.$$

Лемма. Пусть $(k(x, t), \psi(x, t)) \in C(A_s, [0, T])$. Тогда решение $u(x, z, t)$ уравнения (1) при условиях (2), (3):

1) в области $\mathbb{B}_1$ тождественно равно нулю;

2) в области $\mathbb{B}_2$ удовлетворяет следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$u(x, z, t) = - \int_0^{t-z} \psi(x, \tau) d\tau - \int_0^{t-z} \int_0^{\tau/2} \left[u_{xx}(x, \xi, \tau - \xi) + \int_0^{\tau-2\xi} k(x, \alpha) u(x, \xi, -\xi + \tau - \alpha) d\alpha \right] d\xi d\tau -$$

$$- \int_{t-z}^t \int_{\tau-t+z}^{(2\tau-t+z)/2} \left[u_{xx}(x, \xi, -\xi + 2\tau - t + z) + \int_0^{-2\xi+2\tau-t+z} k(x, \alpha) u(x, \xi, -\xi + 2\tau - t + z - \alpha) d\alpha \right] d\xi d\tau, \quad (5)$$

причём справедливы равенства

$$u(x, z, z+0) = 0, \quad u_t(x, z, z+0) = -\psi(x, 0), \quad u_{tt}(x, z, z+0) = -\psi_t(x, 0) - \frac{1}{2}\psi_{xx}(x, 0)z =: g(x, z).$$

Доказательство. В области $\mathbb{B}_0 \subset \mathbb{B}_1$ согласно формуле Даламбера получим интегродифференциальное уравнение

$$u(x, z, t) = \frac{1}{2} \iint_{\Delta(z, t)} \left[u_{xx}(x, \xi, \tau) + \int_0^\tau k(x, \alpha) u(x, \xi, \tau - \alpha) d\alpha \right] d\xi d\tau, \quad (6)$$

где $\Delta(z, t) = \{(\xi, \tau) : z - t + \tau \leq \xi \leq z + t - \tau, \ 0 \leq \tau \leq t\}$, $\mathbb{B}_0 = \mathbb{R} \times G_0$, а $G_0 = \{(z, t) : 0 \leq z \leq l, \ 0 \leq t \leq l/2 - |z - l/2|\}$.

Докажем, что уравнение (6) имеет только нулевое решение в классе функций, принадлежащих пространству $C(A_s, \mathbb{B}_0)$.

Рассмотрим область $\Delta(z_1, t_1)$ с произвольной фиксированной точкой $(z_1, t_1) \in G_0$. Пусть $k(x, t) \in C(A_{s_0}, [0, l])$, $s_0 > 0$. Введём обозначения

$$K := \max_{0 \leq t \leq t_1} \|k(t)\|_{s_0}, \quad U(t) := \max_{z_1 - t_1 + t \leq z \leq z_1 + t_1 - t} \|u(z, t)\|_{s_0}.$$

Тогда, используя формулу (4) при $n = 2$, из (6) получим неравенство

$$U(t) \leq \frac{t_1}{2} \int_0^t \left[\frac{4}{(s(\tau) - s)^2} + t_1 K \right] U(\tau) d\tau, \quad t \in (0, t_1), \quad s \in (0, s_0).$$

Здесь в качестве функции $s(\tau)$ можно взять $s(\tau) = [s + s_0(1 - \tau/t_1)]/2$. Тогда для $(t, s) \in (0, t_1) \times (0, s_0)$ переменная точка $(\tau, s(\tau)) \in (0, t_1) \times (0, s_0)$ при любом $\tau \in (0, t)$. Из (4) следует оценка

$$U(t) \leq \frac{t_1(4 + t_1 s_0 K)}{2} \int_0^t \frac{1}{(s(\tau) - s)^2} U(\tau) d\tau, \quad t \in (0, t_1), \quad s \in (0, s_0).$$

Отсюда, согласно неравенству Гронуолла, имеем, что $U(t) = 0$, $t \in (0, t_1)$. Так как (z_1, t_1) — произвольная точка области G_0 , то $u \equiv 0$ в области $\mathbb{B}_0$. Лемма доказана.

Замечание. Следует отметить, что доказательство тождества $u(x, z, t) \equiv 0$ для $(x, z, t) \in \mathbb{B}_0$ может быть проведено с использованием формулы Пуассона, дающей решение задачи Коши для двумерного волнового уравнения. Применение этой формулы в области $\mathbb{B}_0$ к уравнению (1) с нулевыми начальными данными (2) приведёт к интегральному уравнению вольтеровского типа первого рода относительно функции u , которое имеет только нулевое решение.

Продолжим доказательство первой части леммы. Возьмём произвольную точку $(x, z, t) \in \mathbb{B}_1 \setminus \mathbb{B}_0$. В уравнении (1) перенесём u_{zz} в левую часть и представим волновой оператор $(\partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial z^2)$ в виде $(\partial/\partial t + \partial/\partial z)(\partial/\partial t - \partial/\partial z)$. Проинтегрировав полученное равенство вдоль характеристики $dz/dt = 1$ от точки $(x, z - t, 0)$ до точки (x, z, t) , как и в работе [2] получим

$$(u_t - u_z)(x, z, t) - (u_t - u_z)(x, z - t, 0) = \int_0^t \left[u_{xx}(x, z, \tau) + \int_0^\tau k(x, \tau - \alpha) u(x, \tau - t + x, \alpha) d\alpha \right] d\tau.$$

Используя данные (2), запишем последнее соотношение в виде

$$(u_t - u_x)|_{x=l} = \int_{t/2}^t \left[u_{xx}(x, z, \tau) + \int_0^\tau k(x, \tau - \alpha) u(x, \tau - t + x, \alpha) d\alpha \right] d\tau, \quad t \in (0, l).$$

Далее, с помощью граничного условия (3) при $z = l$ отсюда находим

$$u(x, l, t) = \int_0^t \int_{\tau/2}^{\tau} \left[u_{xx}(x, \tau, \theta) + \int_0^{\theta} k(x, \theta - \alpha) u(x, \theta - \tau + l, \alpha) d\alpha \right] d\theta d\tau.$$

Если сделать замену переменных θ на ξ во внутреннем интеграле по формуле $\theta - \tau + l = \xi$, то последнее уравнение принимает вид

$$u(x, l, t) = \int_0^t \int_{l-\tau/2}^l \left[u_{xx}(x, \tau - l + \xi, \tau) + \int_0^{\tau-l+\xi} k(x, \tau - l + \xi - \alpha) u(x, \xi, \alpha) d\alpha \right] d\xi d\tau. \quad (7)$$

Проинтегрировав уравнение (1) вдоль характеристики $dz/dt = 1$ от точки $(x, z - t, 0)$ до точки (x, z, t) , получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \right) u(x, z, t) = \int_{(l+z-t)/2}^z \left[u_{xx}(x, \xi, t) + \int_0^{\xi+t-z} k(x, \xi + t - z - \alpha) u(x, \xi, \alpha) d\alpha \right] d\xi.$$

Далее, интегрируя это равенство вдоль характеристики $dz/dt = -1$ от точки (x, z, t) до точки $(x, l, t + z - l)$ и используя формулу (7), находим уравнение для $u(x, z, t)$ в области $\mathbb{B}_1 \setminus \mathbb{B}_0$:

$$\begin{aligned} u(x, z, t) = & \int_0^{t+z-l} \int_{l-\tau/2}^l \left[u_{xx}(x, \xi, \tau) + \int_0^{\xi+\tau-l} k(x, \xi + \tau - l - \alpha) u(\xi, \alpha, \tau) d\alpha \right] d\xi d\tau + \\ & + \int_{t+z-l}^t \int_{(l+z-t-2\tau)/2}^{-\tau+z+t} \left[u_{xx}(x, \xi, \tau) + \int_0^{\xi+2\tau-z-t} k(x, \xi + 2\tau - z - t - \alpha) u(\xi, \alpha, \tau) d\alpha \right] d\xi d\tau, \end{aligned}$$

где $(x, z, t) \in \mathbb{B}_1 \setminus \mathbb{B}_0$. Тот факт, что это уравнение имеет только нулевое решение в классе функций, принадлежащих пространству $C(A_s, \mathbb{B}_1 \setminus \mathbb{B}_0)$, доказывается так же, как и для уравнения (6).

В области $\mathbb{B}_2$ проинтегрируем уравнение (1) вдоль характеристики $dz/dt = -1$ и получим равенство

$$(u_t + u_x)(x, 0, t) = - \int_0^{t/2} \left[u_{xx}(x, \xi, t - \xi) + \int_0^{-2\xi+t} k(x, \alpha) u(x, \xi, -\xi + t - \alpha) d\alpha \right] d\xi.$$

С учётом граничного условия (3) из этого соотношения получим

$$u(x, 0, t) = - \int_0^t \psi(x, \tau) d\tau - \int_0^t \int_0^{\tau/2} \left[u_{xx}(x, \xi, \tau - \xi) + \int_0^{\tau-2\xi} k(x, \alpha) u(x, \xi, -\xi + \tau - \alpha) d\alpha \right] d\xi d\tau.$$

Используем этот результат и проинтегрируем уравнение (1) при условиях (2), (3) по характеристикам $dz/dt = -1$ и $dz/dt = 1$. Тогда получим уравнение (5) в области $\mathbb{B}_2$. Первая часть леммы доказана.

Из (5) вытекает равенство

$$u(x, z, t)|_{t=z+0} = 0. \quad (8)$$

Следовательно,

$$f(x, 0) = 0. \quad (9)$$

Заменяем переменную интегрирования τ на β по формуле $t - \tau = \beta$ во внешнем интеграле последнего слагаемого в уравнении (5). Далее, продифференцировав его по переменной t , получим

$$\begin{aligned} u_t(x, z, t) = & -\psi(x, t - z) - \int_0^{(t-z)/2} \left[u_{xx}(x, \xi, t - \xi - z) + \int_0^{t-z-2\xi} k(x, \alpha) u(x, \xi, -\xi + t - z - \alpha) d\alpha \right] d\xi - \\ & - \int_0^z \int_{z-\beta}^{(t-2\beta+z)/2} \left[u_{xxt}(x, \xi, t - \xi - 2\beta + z) + \int_0^{-2\xi+t-2\beta+z} k(x, \alpha) u_t(x, \xi, -\xi + t - 2\beta + z - \alpha) d\alpha \right] d\xi d\beta. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} u_t(x, z, z + 0) = & -\psi(x, 0), \\ u_{tt}(x, z, t) = & -\psi_t(x, t - z) - \frac{1}{2}\psi_{xx}(x, 0)z - \\ & - \int_0^{(t-z)/2} \left[u_{xxt}(x, \xi, t - \xi - z) + \int_0^{t-z-2\xi} k(x, \alpha) u(x, \xi, -\xi + t - z - \alpha) d\alpha \right] d\xi - \\ & - \int_0^z \int_{z-\beta}^{(t-2\beta+z)/2} \left[u_{xxtt}(x, \xi, t - \xi - 2\beta + z) - \psi(x, 0)k(x, t - 2\xi - 2\beta + z) + \right. \\ & \left. + \int_0^{-2\xi+t-2\beta+z} k(x, \alpha) u_t(x, \xi, -\xi + t - 2\beta + z - \alpha) d\alpha \right] d\xi d\beta. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$u_{tt}(x, z, z + 0) = -\psi(x, 0) - \frac{1}{2}\psi_{xx}(x, 0)z.$$

Лемма доказана.

2. Исследование обратной задачи. В области $\mathbb{B}_2$ воспользуемся формулой Даламбера для представления решения уравнения (1) с данными Коши (2) на оси $z = 0$:

$$\begin{aligned} u(x, z, t) = & \frac{1}{2}[f(x, t + z) + f(x, t - z)] + \frac{1}{2} \int_{t-z}^{t+z} \psi(x, \tau) d\tau - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^z \int_{t-z+\xi}^{t+z-\xi} \left[u_{xx}(x, \xi, \tau) + \int_0^{\tau-\xi} k(x, \alpha) u(x, \xi, \tau - \alpha) d\alpha \right] d\tau d\xi. \end{aligned} \quad (10)$$

В уравнении (10) переходим к пределу при $t \rightarrow z + 0$ с учётом условий (8) и (9):

$$f(x, 2z) = - \int_0^{2z} \psi(x, \tau) d\tau + \int_0^z \int_{\xi}^{2z-\xi} \left[u_{xx}(x, \xi, \tau) + \int_0^{\tau-\xi} k(x, \alpha) u(x, \xi, \tau - \alpha) d\alpha \right] d\tau d\xi. \quad (11)$$

Продифференцировав по t уравнение (11), получим равенство

$$\left[f_t(x, t) = -\psi(x, t) + \int_0^{t/2} \left(u_{xx}(x, \xi, t - \xi) + \int_0^{t-2\xi} k(x, \alpha) u(x, \xi, t - \xi - \alpha) d\alpha \right) d\xi \right]_{t=2z},$$

из которого следует, что

$$f_t(x, 0) = -\psi(x, 0),$$

$$\left[f_{tt}(x, t) = -\psi_t(x, t) + \int_0^{t/2} \left(u_{xxt}(x, \xi, t - \xi) + \int_0^{t-2\xi} k(x, \alpha) u_t(x, \xi, t - \xi - \alpha) d\alpha \right) d\xi \right]_{t=2z}. \quad (12)$$

Таким образом,

$$f_{tt}(x, 0) = -\psi_t(x, 0).$$

Продифференцировав ещё два раза по t уравнение (12) и разрешив полученное соотношение относительно $k(x, z)$, получим

$$\begin{aligned} k(x, z) = & \frac{2}{\psi(x, 0)} \left(g_{xx}(x, z) - f_{ttt}(x, z) - \psi_{ttt}(x, z) \right) + \frac{2g(x, z)}{\psi(x, 0)} \int_0^{z/2} k(x, z - 2\xi) d\xi + \\ & + \frac{2}{\psi(x, 0)} \int_0^{z/2} \left[v_{xx}(x, \xi, z - \xi) + \int_0^{z-2\xi} k(x, \alpha) v(x, \xi, z - \xi - \alpha) d\alpha \right] d\xi, \end{aligned} \quad (13)$$

где введено обозначение

$$v(x, t, z) := u_{ttt}(x, t, z). \quad (14)$$

Продифференцировав уравнение (10) три раза по переменной t последовательно, получим равенства

$$\begin{aligned} u_t(x, z, t) = & \frac{1}{2} [f_t(x, t + z) + f_t(x, t - z)] + \frac{1}{2} [\psi(x, t + z) - \psi(x, t - z)] - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^z \left[u_{xx}(x, \xi, t + z - \xi) + \int_0^{t+z-2\xi} k(x, \alpha) u(x, \xi, t + z - \xi - \alpha) d\alpha \right] d\xi + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^z \left[u_{xx}(x, \xi, t - z + \xi) + \int_0^{t-z} k(x, \alpha) u(x, \xi, t - z + \xi - \alpha) d\alpha \right] d\xi, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, z, t) = & \frac{1}{2} [f_{tt}(x, t + z) + f_{tt}(x, t - z)] + \frac{1}{2} [\psi_t(x, t + z) - \psi_t(x, t - z)] - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^z \left[u_{xxt}(x, \xi, t + z - \xi) + \int_0^{t+z-2\xi} k(x, \alpha) u_t(x, \xi, t + z - \xi - \alpha) d\alpha \right] d\xi + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^z \left[u_{xxt}(x, \xi, t - z + \xi) + \int_0^{t-z} k(x, \alpha) u_t(x, \xi, t - z + \xi - \alpha) d\alpha \right] d\xi, \end{aligned} \quad (16)$$

$$u_{ttt}(x, z, t) = \frac{1}{2} [f_{ttt}(x, t + z) + f_{ttt}(x, t - z)] + \frac{1}{2} [\psi_{tt}(x, t + z) - \psi_{tt}(x, t - z)] -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int_0^z \left[u_{xxtt}(x, \xi, t+z-\xi) - \psi(x, 0)k(x, t+z-2\xi) + \int_0^{t+z-2\xi} k(x, \alpha) u_{tt}(x, \xi, t+z-\xi-\alpha) d\alpha \right] d\xi + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^z \left[u_{xxtt}(x, \xi, t-z+\xi) - \psi(x, 0)k(x, t-z) + \int_0^{t-z} k(x, \alpha) u_{tt}(x, \xi, t-z+\xi-\alpha) d\alpha \right] d\xi. \quad (17)
\end{aligned}$$

Уравнения (10), (13), (15)–(17) определяют в области Δ замкнутую систему интегральных уравнений относительно пяти неизвестных функций $u(x, z, t)$, $u_t(x, z, t)$, $u_{tt}(x, z, t)$, $u_{ttt}(x, z, t)$, $k(x, z)$. Если в уравнении (17) выразить функцию $u_{tt}(x, z, t)$ через $u_{ttt}(x, z, t)$ как

$$u_{tt}(x, z, t) = \int_z^t u_{\tau\tau\tau}(x, z, \tau) d\tau + g(x, z) \quad (18)$$

и подставить в уравнение (17), то количество уравнений можно свести к минимуму, т.е. вместо пяти уравнений можно рассмотреть два уравнения, а именно, (17) и (13) относительно двух неизвестных функций $u_{ttt}(x, z, t)$, $k(x, z)$. Далее по $u_{ttt}(x, z, t)$ можно найти функцию $u_{tt}(x, z, t)$ по формуле (18). Функции $u_t(x, z, t)$ и $u(x, z, t)$ находятся аналогичным образом:

$$u_t(x, z, t) = \int_z^t u_{\tau\tau}(x, z, \tau) d\tau - \psi(x, 0), \quad u(x, z, t) = \int_z^t u_\tau(x, z, \tau) d\tau.$$

В дальнейшем будем считать, что в формуле (17) вместо функции $u_{tt}(x, z, t)$ поставлено выражение (18). Таким образом, уравнения (17) и (13) определяют в Δ замкнутую систему интегральных уравнений относительно двух неизвестных функций $u_{ttt}(x, z, t)$, $k(x, z)$.

Воспользовавшись обозначением (14), с учётом (18) запишем уравнение (17) в виде

$$\begin{aligned}
v(x, z, t) = & \frac{1}{2} \left[f_{ttt}(x, t+z) + f_{ttt}(x, t-z) \right] + \frac{1}{2} \left[\psi_{tt}(x, t+z) - \psi_{tt}(x, t-z) \right] + g(x, z)(z-x)z - \\
& - \frac{1}{2} \int_0^z \left[\int_\xi^{t+z-\xi} v_{xx}(x, \xi, \tau) d\tau - \psi(x, 0)k(x, t+z-2\xi) + \int_0^{t+z-2\xi} \left(k(x, \alpha) \int_\xi^{t+z-\xi-\alpha} v(x, \xi, \tau) d\tau \right) d\alpha - \right. \\
& \left. - \int_\xi^{t-z+\xi} v_{xx}(x, \xi, \tau) d\tau + \psi(x, 0)k(x, t-z) - \int_0^{t-z} \left(k(x, \alpha) \int_\xi^{t-z+\xi-\alpha} v(x, \xi, \tau) d\tau \right) d\alpha \right] d\xi. \quad (19)
\end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть $|\psi(x, 0)| \geq \mu_0 > 0$, $(f(x, +0), f_t(x, +0), f_{tt}(x, +0)) \in A_{s_0}$,

$$(f(x, t), f_t(x, t), f_{tt}(x, t), f_{ttt}(x, t), f_{tttt}(x, t)) \in C_t(A_{s_0}, [0, 2l]),$$

$$(\psi(x, t), \psi_t(x, t), \psi_{tt}(x, t), \psi_{ttt}(x, t)) \in C_t(A_{s_0}, [0, 2l]),$$

$$\max\{\|f\|_{s_0}(t), \|f_t\|_{s_0}(t), \|f_{tt}\|_{s_0}(t), \|f_{ttt}\|_{s_0}(t), \|f_{tttt}\|_{s_0}(t)\} \leq R_0, \quad t \in [0, 2l],$$

где μ_0 и $R_0 > 0$ – заданные числа.

Тогда найдётся такое $a \in (0, l)$, что для любого $s \in (0, s_0)$ в области $\Gamma_{sl} = B_2 \cap \{(x, z, t) : 0 \leq z \leq a(s_0 - s)\}$ существует единственное решение системы уравнений (19), (13), для которого $v(x, z, t) \in C(A_{s_0}, F)$, $k(x, z) \in C(A_{s_0}, [0, a(s_0 - s)])$, $F = \{(z, t, s) : (z, t) \in G_2, 0 < z < a(s_0 - s)\}$, причём имеют место оценки

$$\|v - v_0\|_s(z, t) \leq R_0, \quad \|k - k_0\|_s(z) \leq \frac{R_0}{s_0 - s},$$

где

$$v_0 := \frac{1}{2}l[f_{ttt}(x, t+z) + f_{ttt}(x, t-z)] + \frac{1}{2}[\psi_{tt}(x, t+z) - \psi_{tt}(x, t-z)] + g(x, z)(z-x)z,$$

$$k_0 := \frac{2}{\psi(x, 0)}(g_{xx}(x, z) - f_{ttt}(x, z) - \psi_{ttt}(x, z)).$$

Доказательство. Для дальнейших вычислений удобно ввести обозначения

$$\varphi_1(x, z, t) := v(x, z, t), \quad \varphi_2(x, z) := k(x, z),$$

$$\varphi_1^0(x, z, t) := \frac{1}{2}[f_{ttt}(x, t+z) + f_{ttt}(x, t-z)] + \frac{1}{2}[\psi_{tt}(x, t+z) - \psi_{tt}(x, t-z)] + g(x, z)(z-\xi)z,$$

$$\varphi_2^0(x, z) := \frac{2}{\psi(x, 0)}\left(\frac{1}{2}g_{xx}(x, z) - f_{ttt}(x, z) - \psi_{ttt}(x, z)\right).$$

Тогда из уравнений (19) и (13) получим равенства

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, z, t) &= \varphi_1^0(x, z, t) - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^z \left[\int_{\xi}^{t+z-\xi} \varphi_{1xx}(x, \xi, \tau) d\tau - \psi(x, 0) \varphi_2(x, t+z-2\xi) + \int_0^{t+z-2\xi} \left(\varphi_2(x, \alpha) \int_{\xi}^{t+z-\xi-\alpha} \varphi_1(x, \xi, \tau) d\tau \right) d\alpha - \right. \\ &- \left. \int_{\xi}^{t-z+\xi} \varphi_{1xx}(x, \xi, \tau) d\tau + \psi(x, 0) \varphi_2(x, t-z) - \int_0^{t-z} \left(\varphi_2(x, \alpha) \int_{\xi}^{t-z+\xi-\alpha} \varphi_1(x, \xi, \tau) d\tau \right) d\alpha \right] d\xi, \\ \varphi_2(x, z) &= \varphi_2^0(x, z) + \frac{2g(x, z)}{\psi(x, 0)} \int_0^{z/2} \varphi_2(x, z-2\xi) d\xi + \\ &+ \frac{2}{\psi(x, 0)} \int_0^{z/2} \left[\varphi_{1xx}(x, \xi, z-\xi) + \int_0^{z-2\xi} \varphi_2(x, \alpha) \varphi_1(x, \xi, z-\xi-\alpha) d\alpha \right] d\xi. \end{aligned}$$

Пусть числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, определяемые рекуррентными соотношениями

$$a_{n+1} = a_n \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2 + 1},$$

образуют убывающую числовую последовательность, и число a является пределом этой последовательности:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2 + 1}.$$

Положительное число $a_0 < l/s_0$ будет выбрано позже. Построим последовательные приближения следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_1^{n+1}(x, z, t) &= \varphi_1^0(x, z, t) - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^z \left[\int_{\xi}^{t+z-\xi} \varphi_{1xx}^n(x, \xi, \tau) d\tau - \psi(x, 0) \varphi_2^n(x, t+z-2\xi) + \int_0^{t+z-2\xi} \left(\varphi_2^n(x, \alpha) \int_{\xi}^{t+z-\xi-\alpha} \varphi_1^n(x, \xi, \tau) d\tau \right) d\alpha - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\xi}^{t-z+\xi} \varphi_{1xx}^n(x, \xi, \tau) d\tau + \psi(x, 0) \varphi_2^n(x, t-z) - \int_0^{t-z} \left(\varphi_2^n(x, \alpha) \int_{\xi}^{t-z+\xi-\alpha} \varphi_1^n(x, \xi, \tau) d\tau \right) d\alpha \Big] d\xi, \\
& \varphi_2^{n+1}(x, z) = \varphi_2^0(x, z) + \frac{2g(x, z)}{\psi(x, 0)} \int_0^{z/2} \varphi_2^n(x, z-2\xi) d\xi + \\
& + \frac{2}{\psi(x, 0)} \int_0^{z/2} \left[\varphi_{1xx}^n(x, \xi, z-\xi) + \int_0^{z-2\xi} \varphi_2^n(x, \alpha) \varphi_1^n(x, \xi, z-\xi-\alpha) d\alpha \right] d\xi.
\end{aligned}$$

Определим функцию $s'_n(z)$ по формуле

$$s'_n(z) = \frac{s + \nu^n(z)}{2}, \quad \nu^n(z) = s_0 - \frac{z}{a_n}. \quad (20)$$

Введём обозначение $\omega_i^n := \varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n$, $i = 1, 2$. При $n = 0$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
\omega_1^0(x, z, t) &= -\frac{1}{2} \int_0^z \left[\int_{\xi}^{t+z-\xi} \varphi_{1xx}^0(x, \xi, \tau) d\tau - \psi(x, 0) \varphi_2^0(x, t+z-2\xi) + \right. \\
& + \int_0^{t+z-2\xi} \left(\varphi_2^0(x, \alpha) \int_{\xi}^{t+z-\xi-\alpha} \varphi_1^0(x, \xi, \tau) d\tau \right) d\alpha - \\
& \left. - \int_{\xi}^{t-z+\xi} \varphi_{1xx}^0(x, \xi, \tau) d\tau + \psi(x, 0) \varphi_2^0(x, t-z) - \int_0^{t-z} \left(\varphi_2^0(x, \alpha) \int_{\xi}^{t-z+\xi-\alpha} \varphi_1^0(x, \xi, \tau) d\tau \right) d\alpha \right] d\xi, \\
\omega_2^0(x, z) &= \frac{2g(x, z)}{\psi(x, 0)} \int_0^{z/2} \varphi_2^0(x, z-2\xi) d\xi + \\
& + \frac{2}{\psi(x, 0)} \int_0^{z/2} \left[\varphi_{1xx}^0(x, \xi, z-\xi) + \int_0^{z-2\xi} \varphi_2^0(x, \alpha) \varphi_1^0(x, \xi, z-\xi-\alpha) d\alpha \right] d\xi.
\end{aligned}$$

При $n = 1$ имеем

$$\begin{aligned}
\omega_1^1(x, z, t) &= -\frac{1}{2} \int_0^z \left[\int_{\xi}^{t+z-\xi} \omega_{1xx}^0(x, \xi, \tau) d\tau - \psi(x, 0) \omega_2^0(x, t+z-2\xi) + \right. \\
& + \int_0^{t+z-2\xi} \int_{\xi}^{t+z-\xi-\alpha} (\omega_2^0(x, \alpha) \varphi_1^1(x, \xi, \tau) + \varphi_2^0(x, \alpha) \omega_1^0(x, \xi, \tau)) d\tau d\alpha - \int_{\xi}^{t-z+\xi} \omega_{1xx}^0(x, \xi, \tau) d\tau + \\
& \left. + \psi(x, 0) \omega_2^0(x, t-z) - \int_0^{t-z} \int_{\xi}^{t-z+\xi-\alpha} (\omega_2^0(x, \alpha) \varphi_1^1(x, \xi, \tau) + \varphi_2^0(x, \alpha) \omega_1^0(x, \xi, \tau)) d\tau d\alpha \right] d\xi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_2^1(x, z) &= \frac{2g(x, z)}{\psi(x, 0)} \int_0^{z/2} \omega_2^0(x, z - 2\xi) d\xi + \frac{2}{\psi(x, 0)} \int_0^{z/2} \left[\omega_{1xx}^0(x, \xi, z - \xi) + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{z-2\xi} l(\omega_2^0(x, \alpha) \varphi_1^1(x, \xi, z - \xi - \alpha) + \varphi_2^0(x, \alpha) \omega_1^0(x, \xi, z - \xi - \alpha)) d\alpha \right] d\xi.\end{aligned}$$

Таким образом, для любого n получим равенства

$$\begin{aligned}\omega_1^n(x, z, t) &= -\frac{1}{2} \int_0^z \left[\int_\xi^{t+z-\xi} \omega_{1xx}^{n-1}(x, \xi, \tau) d\tau - \psi(x, 0) \omega_2^{n-1}(x, t + z - 2\xi) + \right. \\ &\quad + \int_0^{t+z-2\xi} \int_\xi^{t+z-\xi-\alpha} (\omega_2^{n-1}(x, \alpha) \varphi_1^n(x, \xi, \tau) + \varphi_2^{n-1}(x, \alpha) \omega_1^{n-1}(x, \xi, \tau)) d\tau d\alpha - \int_\xi^{t-z+\xi} \omega_{1xx}^{n-1}(x, \xi, \tau) d\tau + \\ &\quad \left. + \psi(x, 0) \omega_2^{n-1}(x, t - z) - \int_0^{t-z+\xi-\alpha} \int_\xi^{t-z+\xi-\alpha} (\omega_2^{n-1}(x, \alpha) \varphi_1^n(x, \xi, \tau) + \varphi_2^{n-1}(x, \alpha) \omega_1^{n-1}(x, \xi, \tau)) d\tau d\alpha \right] d\xi, \\ \omega_2^n(x, z) &= \frac{2g(x, z)}{\psi(x, 0)} \int_0^{z/2} \omega_2^{n-1}(x, z - 2\xi) d\xi + \frac{2}{\psi(x, 0)} \int_0^{z/2} \left[\omega_{1xx}^{n-1}(x, \xi, z - \xi) + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{z-2\xi} (\omega_2^{n-1}(x, \alpha) \varphi_1^n(x, \xi, z - \xi - \alpha) + \varphi_2^{n-1}(x, \alpha) \omega_1^{n-1}(x, \xi, z - \xi - \alpha)) d\alpha \right] d\xi.\end{aligned}$$

Дальше покажем, что если выбрать $a_0 \in (0, l)$ подходящим образом, то для любого $n \in \mathbb{N}$ имеют места неравенства

$$\lambda_n = \max \left\{ \sup_{(z, t, s) \in F_n} \left[\|\omega_1^n\|_s(z, t) \frac{\nu^n(z) - s}{z} \right], \sup_{(z, t, s) \in F_n} \left[\|\omega_2^n\|_s(z) \frac{(\nu^n(z) - s)^2}{z} \right] \right\} < \infty, \quad (21)$$

$$\|\varphi_1^{n+1} - \varphi_0^{n+1}\|_s(z, t) \leq R_0, \quad \|\varphi_2^{n+1} - \varphi_0^{n+1}\|_s(z) \leq \frac{R_0}{(s_0 - s)^2}, \quad (22)$$

где $F_n = l\{(z, t, s) : (z, t) \in G_2, 0 < z < a_n(s_0 - s), 0 < s < s_0\}$. Пусть $n = 0$, тогда с учётом (4) получим оценку

$$\begin{aligned}\|\omega_1^0\|_s(z, t) &\leq \frac{1}{2} \left| \int_0^z \left[\int_\xi^{t+z-\xi} \|\varphi_{1xx}^0\|_s(\xi, \tau) d\tau + |\psi(x, 0)| \|\varphi_2^0\|_s(t + z - 2\xi) + \right. \right. \\ &\quad + \int_0^{t+z-2\xi} \left(\|\varphi_2^0\|_s(\alpha) \int_\xi^{t+z-\xi-\alpha} \|\varphi_1^0\|_s(\xi, \tau) d\tau \right) d\alpha - \int_\xi^{t-z+\xi} \|\varphi_{1xx}^0\|_s(\xi, \tau) d\tau + |\psi(x, 0)| \|\varphi_2^0\|_s(t - z) - \\ &\quad \left. \left. - \int_0^{t-z} \left(\|\varphi_2^0\|_s(\alpha) \int_\xi^{t-z+\xi-\alpha} \|\varphi_1^0\|_s(\xi, \tau) d\tau \right) d\alpha \right] d\xi \right| \leq\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \leq & \frac{1}{2} \int_0^z \left[\int_{\xi}^{t+z-\xi} \frac{4R_0 d\tau}{(s'(\xi) - s)^2} + 2p_0 R_0 + \int_0^{t+z-2\xi} R_0^2(t+z-2\xi-\alpha) d\alpha + \right. \\ & \left. + \int_{\xi}^{t-z+\xi} \frac{4R_0 d\tau}{(s'(\xi) - s)^2} + \int_0^{t-z} R_0^2(t-z-2-\alpha) d\alpha \right] d\xi, \end{aligned}$$

где $p_0 = \|\psi(x, 0)\|_s$.

Воспользовавшись формулой (20), отсюда имеем

$$\begin{aligned} \|\omega_1^0\|_s(z, t) & \leq \int_0^z (z - \xi) \left[\frac{16R_0 l}{(\nu^0(z) - s)^2} + p_0 R_0 + 2l R_0^2 t \right] d\xi \leq \\ & \leq a_0 R_0 \left[16l + s_0^2(p_0 + 2l^2 R_0) \right] \frac{z}{\nu^0(z) - s}, \quad (z, t, s) \in F_0. \end{aligned}$$

Аналогично оцениваем и другую компоненту:

$$\begin{aligned} \|\omega_2^0\|_s(z) & \leq \left| \frac{2g(x, z)}{\psi(x, 0)} \right| \int_0^{z/2} \|\varphi_2^0\|_s(z - 2\xi) d\xi + \\ & + \frac{2}{\psi(x, 0)} \int_0^{z/2} \left[\|\varphi_{1xx}^0\|_s(\xi, z - \xi) + \int_0^{z-2\xi} \|\varphi_2^0\|_s(\alpha) \|\varphi_1^0\|_s(\xi, z - \xi - \alpha) d\alpha \right] d\xi \leq \\ & \leq \frac{R_0}{\mu_0} \left[24 + s_0^2 R_0 (1 + l) \right] \frac{z}{(\nu^0(z) - s)^2}, \quad (z, t, s) \in F_0. \end{aligned}$$

При получении этих неравенств были использованы неравенства

$$\frac{1}{\nu^0(\xi) - s} \leq \frac{1}{\nu^0(z) - s}, \quad \nu^0(z) - s < s_0,$$

справедливые для $\xi \in (0, z)$, $s \in (0, s_0)$, $(z, t, s) \in F_0$. Данные оценки показывают верность неравенства (21) при $n = 0$. Далее, для $(z, t, s) \in F_1$ находим

$$\|\varphi_1^1 - \varphi_0^0\|_s(z, t) = \|\omega_1^0\|_s(z, t) \leq \frac{a_0 \lambda_0 z}{\nu^0(z) - s} \leq a_0 \lambda_0,$$

$$\|\varphi_2^1 - \varphi_0^0\|_s(z) = \|\omega_2^0\|_s(z) \leq \frac{a_0 \lambda_0 z}{(\nu^0(z) - s)^2} \leq \frac{4a_0 \lambda_0}{(s_0 - s)}.$$

Таким образом, если выбрать a_0 так, чтобы $4a_0 \lambda_0 \leq R_0$, то неравенства (22) будут выполняться для $n = 0$.

Методом математической индукции покажем, что неравенства (21), (22) имеют место и для других n , если выбрать a_0 подходящим образом. Пусть неравенства (21), (22) справедливы для $n = 1, 2, \dots, j$. Тогда для $(z, t, s) \in F_{j+1}$ имеем

$$\|\omega_1^{j+1}\|_s(z, t) \leq \frac{1}{2} \left| \int_0^z \left[\int_{\xi}^{t+z-\xi} \|\omega_{1xx}^j\|_s(\xi, \tau) d\tau + |\psi(x, 0)| \|\omega_2^j\|_s(t+z-2\xi) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{t+z-2\xi} \int_{\xi}^{t+z-\xi-\alpha} (\|\omega_2^j\|_s(\alpha) \|\varphi_1^{j+1}\|_s(\xi, \tau) + \|\varphi_2^j\|_s(\alpha) \|\omega_1^j\|_s(\xi, \tau)) d\tau d\alpha - \int_{\xi}^{t-z+\xi} \|\omega_{1xx}^j\|_s(\xi, \tau) d\tau + \\
& + |\psi(x, 0)| \|\omega_2^j\|_s(t-z) - \int_0^{t-z+\xi-\alpha} \int_{\xi}^{t-z+\xi-\alpha} (\|\omega_2^j\|_s(\alpha) \|\varphi_1^{j+1}\|_s(\xi, \tau) \|\varphi_2^j\|_s(\alpha) \|\omega_1^j\|_s(\xi, \tau)) d\tau d\alpha \Big] d\xi \Big| \leq \\
& \leq \frac{1}{2} \left| \int_0^z \left[\int_{\xi}^{t+z-\xi} \frac{4a_0\lambda_j\xi}{(s'(\xi)-s)^2(\nu^j(\xi)-s)} d\tau + \frac{2a_0\lambda_j\xi p_0}{(\nu^j(\xi)-s)^2} + \right. \right. \\
& + \int_0^{t+z-2\xi} \left(\frac{4a_0\lambda_j\xi R_0}{\nu^j(\xi)-s} + \frac{a_0\lambda_j(1+s_0^2)}{(s_0-s)^2} \right) (t+z-2\xi-\alpha) d\alpha - \int_{\xi}^{t-z+\xi} \frac{4a_0\lambda_j\xi}{(s'(\xi)-s)^2(\nu^j(\xi)-s)} d\tau + \\
& \left. \left. + \int_0^{t-z} \left(\frac{4a_0\lambda_j\xi R_0}{\nu^j(\xi)-s} + \frac{a_0\lambda_j(1+s_0^2)}{(s_0-s)^2} \right) (t-z-\alpha) d\alpha \right] d\xi \right| \leq \\
& \leq \lambda_j a_0 s_0 [16l^2 R_0 s_0 + 1 + s_0^2 + 2p_0] \frac{z}{\nu^{j+1}(z)-s} =: \lambda_j a_0 \eta_1(R_0, l, s_0, p_0) \frac{z}{\nu^{j+1}(z)-s}.
\end{aligned}$$

Здесь в промежуточных выкладках функция $s'(\xi)$ взята в виде (20) при $n = j$ и использованы оценки

$$\|\varphi_1^{j+1}\|_s(z, t) \leq 2R_0, \quad \|\varphi_2^{j+1}\|_s(z) \leq R_0 \frac{1+s_0^2}{(s_0-s)},$$

справедливые согласно индуктивному предположению, а также очевидные неравенства $a_j \leq a_0$ и $\nu^{j+1}(z) < \nu^j(z)$.

Рассуждая аналогично для ω_2^{j+1} , получаем, что

$$\begin{aligned}
\|\omega_2^{j+1}\|_s(z) & \leq \left| \frac{2g(x, z)}{\psi(x, 0)} \int_0^{z/2} \omega_2^j(x, z-2\xi) d\xi + \frac{2}{\psi(x, 0)} \int_0^{z/2} \left[\omega_{1xx}^j(x, \xi, z-\xi) + \right. \right. \\
& + \left. \left. \int_0^{z-2\xi} (\omega_2^j(x, \alpha) \varphi_1^{j+1}(x, \xi, z-\xi-\alpha) + \varphi_2^j(x, \alpha) \omega_1^j(x, \xi, z-\xi-\alpha)) d\alpha \right] d\xi \right| \leq \\
& \leq \lambda_j a_0 \frac{2R_0}{\mu_0} [4l + (4+l+1+s_0^2)s_0] \frac{z}{(\nu^{j+1}(z)-s)^2} =: \lambda_j a_0 \eta_2(R_0, \mu_0, l, s_0) \frac{z}{(\nu^{j+1}(z)-s)^2}, \quad (z, t, s) \in F_0.
\end{aligned}$$

Из полученных оценок следуют неравенства

$$\lambda_{j+1} \leq \lambda_j \rho, \quad \lambda_{j+1} < \infty, \quad \rho := a_0 \max\{\eta_1, \eta_2\}.$$

Вместе с тем для $(x, t, s) \in F_{j+2}$ имеем

$$\begin{aligned}
\|\varphi_i^{j+2} - \varphi_i^0\|_s(z, t) & \leq \sum_{n=0}^{j+1} \|\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n\|_s(z, t) = \sum_{n=0}^{j+1} \|\omega_i^n\|_s(z, t) \leq \sum_{n=0}^{j+1} \frac{\lambda_n z}{(\nu^n(z)-s)^i} \leq \\
& \leq \frac{1}{(s_0-s)^{i-1}} \sum_{n=0}^{j+1} \frac{\lambda_n a_n^i a_{j+2}}{(a_n - a_{j+2})^i} \leq \frac{\lambda_0 a_0}{(s_0-s)^{i-1}} \sum_{n=0}^{j+1} \rho^n (n+1)^{2i}, \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Выберем $a_0 \in (0, l)$ таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$\rho < 1, \quad \lambda_0 a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (n+1)^4 \leq R_0.$$

Тогда

$$\|\varphi_i^{j+2} - \varphi_i^0\|_s(z, t) \leq \frac{R_0}{(s_0 - s)^{i-1}}, \quad (x, t, s) \in F_{j+2}, \quad i = 1, 2.$$

Так как выбор не зависит от номера приближений, то последовательные приближения φ_i^n , $i = 1, 2$, принадлежат пространству $C(A_s, F)$, $F = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$, и для них имеют место неравенства

$$\|\varphi_i^n - \varphi_i^0\|_s(z, t) \leq \frac{R_0}{(s_0 - s)^{i-1}}, \quad (x, t, s) \in F, \quad i = 1, 2.$$

При $s \in (0, s_0)$ ряды $\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_i^n - \varphi_i^{n-1})$ сходятся равномерно в норме пространства $C(A_s, F)$, поэтому $\varphi_i^n \rightarrow \varphi_i$. Предельные функции являются элементами $C(A_s, F)$ и удовлетворяют уравнениям (19) и (13).

Докажем теперь единственность найденного решения. Пусть $\varphi_i^{(1)}$ и $\varphi_i^{(2)}$ – любые два решения, удовлетворяющие неравенствам

$$\|\varphi_i^{(j)} - \varphi_i^0\|_s(z, t) \leq R_0, \quad i, j = 1, 2, \quad (x, t, s) \in F.$$

Обозначим их разность через $\tilde{\varphi}_i := \varphi_i^{(1)} - \varphi_i^{(2)}$, $i = 1, 2$, и пусть

$$\mu := \max \left\{ \sup_{(z, t, s) \in F} \left[\|\tilde{\varphi}_1\|_s(z, t) \frac{\nu(z) - s}{z} \right], \sup_{(z, t, s) \in F} \left[\|\tilde{\varphi}_2\|_s(z) \frac{(\nu(z) - s)^2}{z} \right] \right\} < \infty,$$

где

$$\nu(z) = s_0 - \frac{z}{a}, \quad a = a_0 \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2 + 1}.$$

Тогда из уравнений (19) и (13) для функций $\tilde{\varphi}_i$ можно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(x, z, t) = & -\frac{1}{2} \int_0^z \left[\int_{\xi}^{t+z-\xi} \tilde{\varphi}_{1xx}(x, \xi, \tau) d\tau - \psi(x, 0) \tilde{\varphi}_2(x, t+z-2\xi) p(x, \xi) + \right. \\ & + \int_0^{t+z-2\xi} \int_{\xi}^{t+z-\xi-\alpha} (\varphi_2^1(x, \alpha) \tilde{\varphi}_1(x, \xi, \tau) + \tilde{\varphi}_2(x, \alpha) \varphi_1^2(x, \xi, \tau)) d\tau d\alpha - \int_{\xi}^{t-z+\xi} \tilde{\varphi}_{1xx}(x, \xi, \tau) d\tau - \\ & \left. - \psi(x, 0) \tilde{\varphi}_2(x, t-z) - \int_0^{t-z+\xi-\alpha} \int_{\xi}^{t-z+\xi-\alpha} (\varphi_2^1(x, \alpha) \tilde{\varphi}_1(x, \xi, \tau) + \tilde{\varphi}_2(x, \alpha) \varphi_1^2(x, \xi, \tau)) d\tau d\alpha \right] d\xi, \\ \tilde{\varphi}_2(x, z) = & \frac{2g(x, z)}{\psi(x, 0)} \int_0^{z/2} \varphi_2(x, z-2\xi) d\xi + \\ & + \frac{2}{\psi(x, 0)} \int_0^{z/2} \left[\varphi_{1xx}(x, \xi, z-\xi) + \int_0^{z-2\xi} (\varphi_2^1(x, \alpha) \tilde{\varphi}_1(x, \xi, z-\xi-\alpha) \tilde{\varphi}_2(x, \alpha) \varphi_1^2(x, \xi, z-\xi-\alpha)) d\alpha \right] d\xi. \end{aligned}$$

Применив к ним оценки, приведённые выше, находим неравенство $\lambda < \lambda\rho'$, где $\rho' < \rho < 1$. Следовательно, $\lambda = 0$. Поэтому $\varphi_i^{(1)} = \varphi_i^{(2)}$, $i = 1, 2$. Теорема доказана.

3. Оценка устойчивости. Введём в рассмотрение множество $\mathfrak{F}$ пары функций (ψ, f) , являющихся элементами $C_t([0, 2l], A_{s_0})$, $s_0 > 0$, для которых выполнены условия теоремы 1 при фиксированных R_0 , l , s_0 . Имеет место следующая теорема условной устойчивости.

Теорема 2. Пусть $(\psi^1, f^1) \in \mathfrak{F}$ и $(\psi^2, f^2) \in \mathfrak{F}$. Тогда для соответствующих решений (v^1, k^1) и (v^2, k^2) уравнений (19) и (13) имеют место оценки

$$\|v^1 - v^2\|_s(z, t) \leq C\sigma, \quad \|k^1 - k^2\|_s(z) \leq \frac{C\sigma}{s_0 - s}, \quad 0 < s < s_0, \quad (23)$$

где C – некоторая постоянная, зависящая от R_0 , l , s_0 ,

$$\sigma = \max \left\{ \max \|f^1 - f^2\|_{s_0}(t), \max \|\psi^1 - \psi^2\|_{s_0}(t), \max \|f_t^1 - f_t^2\|_{s_0}(t), \max \|\psi_t^1 - \psi_t^2\|_{s_0}(t), \right. \\ \max \|f_{tt}^1 - f_{tt}^2\|_{s_0}(t), \max \|\psi_{tt}^1 - \psi_{tt}^2\|_{s_0}(t), \max \|f_{ttt}^1 - f_{ttt}^2\|_{s_0}(t), \max \|\psi_{ttt}^1 - \psi_{ttt}^2\|_{s_0}(t), \\ \left. \max \|f_{tttt}^1 - f_{tttt}^2\|_{s_0}(t) \right\}, \quad t \in [0, 2l].$$

Доказательство. Введём обозначения $\tilde{v} := v^1 - v^2$, $\tilde{k} := k^1 - k^2$, $\tilde{f} := f^1 - f^2$, $\tilde{\psi} := \psi^1 - \psi^2$, $\tilde{g} := g^1 - g^2$, как в книге [14, с. 18]. Тогда из соотношений (19) и (13) получим

$$\begin{aligned} \tilde{v}(x, z, t) = & \frac{1}{2}[\tilde{f}_{ttt}(x, t+z) + \tilde{f}_{ttt}(x, t-z)] + \frac{1}{2}[\tilde{\psi}_{tt}(x, t+z) - \tilde{\psi}_{tt}(x, t-z)] + \tilde{g}(x, z)(z - \xi)z - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^z \left[\int_{\xi}^{t+z-\xi} \tilde{v}_{xx}(x, \xi, \tau) d\tau - \psi(x, 0)\tilde{k}(x, t+z-2\xi) + \int_0^{t+z-2\xi} \left(k^1(x, \alpha) \int_{\xi}^{t+z-\xi-\alpha} \tilde{v}(x, \xi, \tau) d\tau + \right. \right. \\ & \left. \left. + \tilde{k}(x, \alpha) \int_{\xi}^{t+z-\xi-\alpha} v^2(x, \xi, \tau) d\tau \right) d\alpha - \int_{\xi}^{t-z+\xi} \tilde{v}_{xx}(x, \xi, \tau) d\tau + \psi(x, 0)\tilde{k}(x, t-z) - \right. \\ & \left. - \int_0^{t-z} \left(k^1(x, \alpha) \int_{\xi}^{t-z+\xi-\alpha} \tilde{v}(x, \xi, \tau) d\tau + \tilde{k}(x, \alpha) \int_{\xi}^{t-z+\xi-\alpha} v^2(x, \xi, \tau) d\tau \right) d\alpha \right] d\xi, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \tilde{k}(z, t) = & \frac{2}{\psi(x, 0)}(\tilde{g}_{xx}(x, z) - \tilde{f}_{ttt}(x, z) - \tilde{\psi}_{ttt}(x, z)) + \frac{2g(x, z)}{\psi(x, 0)} \int_0^{z/2} \tilde{k}(x, z-2\xi) d\xi + \\ & + \frac{2}{\psi(x, 0)} \int_0^{z/2} \left[\tilde{v}_{xx}(x, \xi, z-\xi) + \int_0^{z-2\xi} (k^1(x, \alpha)\tilde{v}(x, \xi, z-\xi-\alpha) + \tilde{k}(x, \alpha)v^2(x, \xi, z-\xi-\alpha)) d\alpha \right] d\xi, \end{aligned} \quad (25)$$

Очевидно, что

$$\|\tilde{v}_0\|_{s_0}(x, z) \leq 2\sigma, \quad \|\tilde{k}_0\|_{s_0} \leq 2\sigma. \quad (26)$$

Из теоремы 1 следуют оценки

$$\|\tilde{v}\|_s(z, t) \leq 2R_0, \quad \|\tilde{k}\|_s(z) \leq R_0 \frac{1 + s_0^2}{s_0 - s}.$$

Применив к линейной системе уравнений (24), (25) метод последовательных приближений (как при доказательстве теоремы 1), находим при том же выборе постоянной a_0 для решения этой системы справедливые неравенства

$$\|\tilde{v} - \tilde{v}_0\|_s \leq C_1 \sigma, \quad \|\tilde{k} - \tilde{k}_0\|_s \leq \frac{C_1 \sigma}{s_0 - s}, \quad (z, t) \in P_{sT}, \quad 0 < s < s_0.$$

В этих неравенствах C_1 зависит от R_0 , l , s_0 . Следовательно, с учётом (26) получим неравенства (23). Теорема доказана.

Заключение. Полученная теорема о локальной однозначной разрешимости двумерной обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения дополняет совокупность результатов по исследованию многомерных обратных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д. Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16. № 2. С. 72–82.
2. Дурдиев Д.К., Сафаров Ж.Ш. Обратная задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной области // Мат. заметки. 2015. Т. 97. № 6. С. 855–867.
3. Сафаров Ж.Ш., Дурдиев Д.К. Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения акустики // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 1. С. 136–144.
4. Safarov J.Sh. Global solvability of the one-dimensional inverse problem for the integro-differential equation of acoustics // J. of Siberian Federal Univ. Math. & Phys. 2018. V. 11. № 6. P. 753–763.
5. Овсянников Л.В. Нелинейная задача Коши в шкалах банаховых пространств // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200. № 4. С. 789–792.
6. Nirenberg L. Topics in Nonlinear Functional Analysis. New York, 1974.
7. Романов В.Г. О локальной разрешимости некоторых многомерных обратных задач для уравнений гиперболического типа // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 2. С. 275–283.
8. Романов В.Г. Вопросы корректности задачи определения скорости звука // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30. № 4. С. 125–134.
9. Романов В.Г. О разрешимости обратных задач для гиперболических уравнений в классе функций, аналитических по части переменных // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304. № 4. С. 807–811.
10. Дурдиев Д.К. Многомерная обратная задача для уравнения с памятью // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35. № 3. С. 574–582.
11. Дурдиев Д.К., Сафаров Ж.Ш. Локальная разрешимость задачи определения пространственной части многомерного ядра в интегро-дифференциальном уравнении гиперболического типа // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. Вып. 4 (29). С. 37–47.
12. Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д. Задача об определении многомерного ядра уравнения вязкоупругости // Владикавказ. мат. журн. 2015. Т. 17. № 4. С. 18–43.
13. Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д. О глобальной разрешимости одной многомерной обратной задачи для уравнения с памятью // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62. № 2. С. 269–285.
14. Романов В.Г. Устойчивость в обратных задачах. М., 2005.

Институт математики имени В.И. Романовского
АН Республики Узбекистан, г. Ташкент,
Бухарский государственный университет,
Узбекистан,
Diplomat University, г. Ташкент, Узбекистан

Поступила в редакцию 27.11.2021 г.
После доработки 06.12.2022 г.
Принята к публикации 22.12.2022 г.