

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.28

О ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ И РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ  
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ СОПРЯЖЕНИЯ  
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

© 2023 г. Ю. Г. Смирнов, О. В. Кондырев

Рассматривается скалярная трёхмерная краевая задача дифракции волны для уравнения Гельмгольца с условиями сопряжения, предполагающими наличие бесконечно тонкого материала на границе сред. Доказываются теоремы единственности и существования решения. Исходная задача сводится к системе интегральных уравнений по поверхности раздела сред. Приводятся расчётные формулы для системы линейных алгебраических уравнений, полученные после применения метода коллокации, и численные результаты решения задачи, когда область является шаром с определёнными условиями сопряжения.

DOI: 10.31857/S0374064123080083, EDN: IPHEJN

**Введение.** Краевые задачи сопряжения для уравнения Гельмгольца встречаются во многих разделах математической физики: акустике, механике, электродинамике. В частности, это задачи дифракции акустических или электромагнитных волн на препятствиях. Основные типы этих задач исследованы достаточно подробно (см., например, [1–4]). Однако в последнее время появился интерес к краевым задачам со специальными условиями сопряжения, которые предполагают наличие бесконечно тонкого слоя материала на поверхности раздела сред. В качестве примера можно рассмотреть случай графена, покрывающего диэлектрик [5, 6]. Поскольку графен имеет толщину в один атом, то его можно считать бесконечно тонким. Но его наличие на поверхности раздела сред изменяет условия сопряжения. В общем случае графен проявляет нелинейность в инфракрасном и терагерцовом диапазонах частот [7], однако во многих важных для приложений случаях нелинейностью можно пренебречь (формула Кубо–Хансена [8]). В настоящей статье будут рассмотрены линейные условия сопряжения.

Одним из наиболее популярных методов решения задач сопряжения является метод сведения к системе интегральных уравнений. Такой подход не только позволяет исследовать свойства и разрешимость задачи, но и ориентирован на её численное решение. При решении многих задач переход к интегральным уравнениям приводит к понижению размерности решаемой задачи, что очень важно при реализации вычислительного алгоритма с точки зрения быстродействия и памяти компьютера. Кроме того, вычислительные алгоритмы, построенные для решения интегральных уравнений, легко распараллеливаются, что позволяет использовать суперкомпьютеры для их решения.

В настоящей статье будут изучены вопросы единственности решения задачи сопряжения, разрешимости системы интегральных уравнений и представлены результаты численного решения задачи сопряжения в одном конкретном случае.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим задачу дифракции на теле (в области)  $Q$  с границей  $\partial Q$  класса гладкости  $C^2$ , расположенном в однородном пространстве  $\mathbb{R}^3$ , характеризующимся постоянным волновым числом  $k_0$ .

Пусть  $u_0 = e^{ik_0 x_3}$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , – падающая плоская волна. Выбор источника в виде плоской волны не является принципиальным и будет использован только при численном решении конкретной задачи.

В области  $Q$  среда однородна и характеризуется волновым числом  $k \neq k_0$ . На границе  $\partial Q$  будем определять только предельное значение волнового числа с разных сторон поверхности. Требуется определить решение задачи сопряжения (полное поле), где искомая функция должна удовлетворять условиям гладкости

$$u \in C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q}) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}^3 \setminus Q}), \quad (1)$$

уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + k^2(x)u = 0, \quad k^2(x) = \begin{cases} k_0^2, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}, \\ k^2, & x \in Q, \end{cases} \quad (2)$$

условию излучения Зоммерфельда для рассеянного поля  $u_s = u - u_0$

$$\frac{\partial u_s}{\partial r} - ik_0 u_s = o(1/r), \quad r = |x| \rightarrow \infty, \quad (3)$$

и условиям сопряжения на границе  $\partial Q$

$$[u]_{\partial Q} = 0, \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\partial Q} = [\gamma u]_{\partial Q}, \quad (4)$$

где  $[\cdot]_{\partial Q}$  означает разность следов функции с разных сторон  $\partial Q$ . Здесь  $n$  – внешняя нормаль к области  $Q$ , а вещественный коэффициент  $\gamma$  равен  $\gamma_1$  вне области  $Q$  и  $\gamma_2$  внутри неё.

## 2. Единственность решения задачи сопряжения.

**Лемма (Реллиха)** [9, с. 50]. Пусть  $u(x)$  – регулярное вне сферы  $S_{r_0}$ ,  $|x| = r > r_0$ , решение уравнения Гельмгольца. Если

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} |u|^2 dS = 0,$$

где  $S_r$  – сфера радиуса  $r$  (с центром в нуле), то  $u \equiv 0$  при  $r > r_0$ .

Запишем решение задачи в следующем виде:

$$u(x) = \begin{cases} u_+(x), & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}, \\ u_-(x), & x \in Q. \end{cases}$$

### Теорема 1. Решение задачи

$$\Delta u_+(x) + k_0^2 u_+(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q},$$

$$\Delta u_-(x) + k^2 u_-(x) = 0, \quad x \in Q,$$

$$u_+|_{\partial Q} = u_-|_{\partial Q}, \quad \frac{\partial u_+}{\partial n} \Big|_{\partial Q} - \frac{\partial u_-}{\partial n} \Big|_{\partial Q} = \gamma_1 u_+|_{\partial Q} - \gamma_2 u_-|_{\partial Q}, \quad \frac{\partial u_s}{\partial r} - ik u_s = o(1/r), \quad r \rightarrow \infty, \quad (5)$$

удовлетворяющее условию (1), где  $u_s = u_+ - u_0$ , единственно.

**Доказательство.** Так как поставленная задача линейна, достаточно рассмотреть соответствующую однородную задачу и показать, что она имеет только тривиальное решение.

Рассмотрим задачу

$$\Delta u_s(x) + k_0^2 u_s(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q},$$

$$\Delta u_- + k^2 u_- = 0, \quad x \in Q,$$

$$u_s|_{\partial Q} = u_-|_{\partial Q}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_s}{\partial n} \Big|_{\partial Q} - \frac{\partial u_-}{\partial n} \Big|_{\partial Q} = \gamma_1 u_s|_{\partial Q} - \gamma_2 u_-|_{\partial Q}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u_s}{\partial r} - ik u_s = o(1/r), \quad r \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Вместе с функциями  $u_s$  и  $u_-$  будем рассматривать комплексно-сопряжённые им  $\bar{u}_s$  и  $\bar{u}_-$ . Они удовлетворяют тем же однородным уравнениям и условиям сопряжения на границе  $\partial Q$ . Условия на бесконечности примут следующий вид:

$$\frac{\partial \bar{u}_s}{\partial r} + ik\bar{u}_s = o(1/r), \quad r \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Применим вторую формулу Грина к функциям  $u_-$  и  $\bar{u}_-$  в области  $Q$ :

$$\int_{\partial Q} \left( u_- \frac{\partial \bar{u}_-}{\partial n_1} - \bar{u}_- \frac{\partial u_-}{\partial n_1} \right) dS = 0,$$

где  $n_1$  – единичная нормаль к поверхности  $\partial Q$ , направленная во внешность тела.

Пусть  $\Sigma_R$  – сфера такого радиуса  $R$ , что содержит в себе область  $Q$ . Тогда, применив формулу Грина к функциям  $u_s$  и  $\bar{u}_s$  в области между  $\Sigma_R$  и  $\partial Q$ , получим

$$\int_{\partial Q} \left( u_s \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial n_2} - \bar{u}_s \frac{\partial u_s}{\partial n_2} \right) dS + \int_{\Sigma_R} \left( u_s \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial r} - \bar{u}_s \frac{\partial u_s}{\partial r} \right) dS = 0,$$

где  $n_2$  – единичная нормаль к поверхности интегрирования и  $n_2 = -n_1$  на  $\partial Q$ .

Сложим два предыдущих равенства:

$$\int_{\partial Q} \left( u_- \frac{\partial \bar{u}_-}{\partial n_1} - \bar{u}_- \frac{\partial u_-}{\partial n_1} \right) dS + \int_{\partial Q} \left( u_s \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial n_2} - \bar{u}_s \frac{\partial u_s}{\partial n_2} \right) dS + \int_{\Sigma_R} \left( u_s \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial r} - \bar{u}_s \frac{\partial u_s}{\partial r} \right) dS = 0.$$

Воспользуемся условием (6) и его аналогом для сопряжённой функции и приведём к одному вектору нормали. В результате получим

$$\int_{\partial Q} \left( u_- \left( \frac{\partial \bar{u}_-}{\partial n_1} - \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial n_1} \right) + \bar{u}_- \left( \frac{\partial u_s}{\partial n_1} - \frac{\partial u_-}{\partial n_1} \right) \right) dS + \int_{\Sigma_R} \left( u_s \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial r} - \bar{u}_s \frac{\partial u_s}{\partial r} \right) dS = 0.$$

Из условия (7) имеем равенство

$$\int_{\partial Q} (u_- (\gamma_2 \bar{u}_- - \gamma_1 \bar{u}_s) + \bar{u}_- (\gamma_1 u_s - \gamma_2 u_-)) dS + \int_{\Sigma_R} \left( u_s \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial r} - \bar{u}_s \frac{\partial u_s}{\partial r} \right) dS = 0.$$

В нём первое слагаемое в силу условия (6) равно нулю. Второе слагаемое преобразуем с помощью условий (8) и (9) на бесконечности. При  $R \rightarrow \infty$  будем иметь

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_R} |u_s|^2 dS = 0.$$

Воспользовавшись леммой получаем, что  $u_s \equiv 0$  всюду вне сферы  $\Sigma_R$ . Тогда, аналитически продолжая  $u_s$  вплоть до границы  $\partial Q$  (в силу аналитичности решения однородного уравнения Гельмгольца с постоянным коэффициентом), находим, что  $u_s \equiv 0$  всюду вне  $Q$ .

Из условий сопряжения для функции  $u_-$  получаем однородную переопределённую задачу в области  $Q$

$$\begin{aligned} \Delta u_- + k^2 u_- &= 0, \quad x \in Q, \\ u_-|_{\partial Q} &= 0, \quad \frac{\partial u_-}{\partial n} \Big|_{\partial Q} = 0, \end{aligned}$$

откуда, применяя третью формулу Грина [4, с. 80] для решения однородного уравнения Гельмгольца, заключаем, что функция  $u_-$  тождественно равна нулю.

### 3. Сведение задачи к системе интегральных уравнений. Обозначим

$$G = G(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \quad G_0 = G_0(x, y) = \frac{e^{ik_0|x-y|}}{4\pi|x-y|}.$$

Функции  $u_s$  и  $u_-$  будем искать в виде потенциалов простого слоя:

$$u_s(x) = \int_{\partial Q} G_0(x, y) \phi(y) ds_y, \quad (10)$$

$$u_-(x) = \int_{\partial Q} G(x, y) \psi(y) ds_y, \quad (11)$$

где  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  и  $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ . Падающая волна имеет вид  $u_0(x) = e^{ik_0x_3}$ . Итак, на контуре  $\partial Q$  будут выполняться два условия:

$$u_0 + u_s = u_-, \quad (12)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial n} + \frac{\partial u_s}{\partial n} - \frac{\partial u_-}{\partial n} = \gamma_1(u_0 + u_s) - \gamma_2 u_-. \quad (13)$$

Запишем условия (12) и (13) с учётом (10) и (11). Воспользуемся теоремой о производной потенциала простого слоя по направлению нормали [4, с. 65] и получим

$$u_0|_{\partial Q} + \int_{\partial Q} G_0(x, y) \phi(y) ds_y = \int_{\partial Q} G(x, y) \psi(y) ds_y, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial n} - \frac{1}{2}(\phi(x) + \psi(x)) + \int_{\partial Q} \left( \frac{\partial}{\partial n_x} G_0(x, y) \phi(y) - \frac{\partial}{\partial n_x} G(x, y) \psi(y) \right) ds_y = \\ = \gamma_1 \left( u_0|_{\partial Q} + \int_{\partial Q} G_0(x, y) \phi(y) ds_y \right) - \gamma_2 \int_{\partial Q} G(x, y) \psi(y) ds_y. \end{aligned} \quad (15)$$

Систему интегральных уравнений (14) и (15) запишем в операторном виде

$$S_{11}\phi - S_{12}\psi = f_1, \quad (I + S_{21})\phi + (I + S_{22})\psi = f_2, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} S_{11}\phi &= \int_{\partial Q} G_0(x, y) \phi(y) ds_y, & S_{12}\psi &= \int_{\partial Q} G(x, y) \psi(y) ds_y, \\ S_{21}\phi &= 2\gamma_1 \int_{\partial Q} G_0(x, y) \phi(y) ds_y - 2 \int_{\partial Q} \frac{\partial}{\partial n_x} G_0(x, y) \phi(y) ds_y, \\ S_{22}\psi &= 2 \int_{\partial Q} \frac{\partial}{\partial n_x} G(x, y) \psi(y) ds_y - 2\gamma_2 \int_{\partial Q} G(x, y) \psi(y) ds_y, \\ f_1 &= -u_0|_{\partial Q}, & f_2 &= 2 \left( \frac{\partial u_0}{\partial n} \Big|_{\partial Q} - \gamma_1 u_0|_{\partial Q} \right). \end{aligned}$$

**4. Существование решения системы интегральных уравнений.** Пусть  $\tilde{\varphi} = \phi + \psi$ ,  $\tilde{\psi} = \phi - \psi$ . Тогда система (16) примет вид

$$\frac{1}{2}(S_{11} - S_{12})\tilde{\varphi} + \frac{1}{2}(S_{11} + S_{12})\tilde{\psi} = f_1, \quad \tilde{\varphi} + \frac{1}{2}(S_{21} + S_{22})\tilde{\varphi} + \frac{1}{2}(S_{21} - S_{22})\tilde{\psi} = f_2. \quad (17)$$

Будем искать решения системы интегральных уравнений в пространствах Гёльдера  $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in C^{0,\alpha}(\partial Q)$ ,  $f_1 \in C^{1,\alpha}(\partial Q)$ ,  $f_2 \in C^{0,\alpha}(\partial Q)$ , где  $0 < \alpha < 1$ .

Линейные ограниченные операторы  $S_{21}, S_{22} : C^{0,\alpha}(\partial Q) \rightarrow C^{0,\alpha}(\partial Q)$  компактны [4, с. 73], следовательно, компактны операторы  $S_{21} + S_{22}, S_{21} - S_{22} : C^{0,\alpha}(\partial Q) \rightarrow C^{0,\alpha}(\partial Q)$ .

Пусть  $k_1 > 0$  такое число, при котором внутренняя задача Неймана для уравнения Гельмгольца с волновым числом  $k_1$  в области  $Q$  имеет только тривиальное решение. Тогда [10, с. 43] ограниченный оператор  $T_1 : C^{1,\alpha}(\partial Q) \rightarrow C^{0,\alpha}(\partial Q)$ , определённый по формуле

$$T_1 f = \frac{\partial}{\partial n_x} \int_{\partial Q} \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{ik_1|x-y|}}{4\pi|x-y|} f(y) ds_y,$$

непрерывно обратим, т.е. имеет ограниченный обратный оператор  $T_1^{-1} : C^{0,\alpha}(\partial Q) \rightarrow C^{1,\alpha}(\partial Q)$ .

Далее пусть оператор  $S_1 : C^{0,\alpha}(\partial Q) \rightarrow C^{1,\alpha}(\partial Q)$  определён по формуле

$$S_1 f = \int_{\partial Q} \frac{e^{ik_1|x-y|}}{4\pi|x-y|} f(y) ds_y.$$

Тогда имеет место равенство [10, с. 44]

$$4T_1 S_1 = 4K_1^2 - I, \quad (18)$$

где  $I$  – тождественный оператор, а  $K_1 : C^{0,\alpha}(\partial Q) \rightarrow C^{0,\alpha}(\partial Q)$  – компактный оператор, определённый формулой

$$K_1 f = \int_{\partial Q} \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{e^{ik_1|x-y|}}{4\pi|x-y|} f(y) ds_y.$$

Подействуем на левую и правую части первого уравнения в (17) оператором  $T_1$  и получим

$$\frac{1}{2}T_1(S_{11} - S_{12})\tilde{\varphi} + \frac{1}{2}T_1(S_{11} + S_{12})\tilde{\psi} = \tilde{f}_1, \quad (19)$$

где  $\tilde{f}_1 = T_1 f_1$ . Операторы  $S_{11}, S_{12} : C^{0,\alpha}(\partial Q) \rightarrow C^{1,\alpha}(\partial Q)$  являются ограниченными [10, с. 43], а оператор  $K_0 = S_{11} - S_{12} : C^{0,\alpha}(\partial Q) \rightarrow C^{1,\alpha}(\partial Q)$  – компактным, так как ядро интегрального оператора и его производная не имеют особенностей:

$$G_0(x, y) - G(x, y) = i(k_0 - k)/4\pi + O(|x - y|),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(G_0(x, y) - G(x, y)) = O(1) \quad \text{при} \quad |x - y| \rightarrow 0.$$

Рассмотрим оператор  $S_{11} + S_{12} : C^{0,\alpha}(\partial Q) \rightarrow C^{1,\alpha}(\partial Q)$ . Имеем

$$S_{11} + S_{12} = 2S_1 + (S_{11} - S_1) + (S_{12} - S_1).$$

Операторы  $S_{11} - S_1, S_{12} - S_1 : C^{0,\alpha}(\partial Q) \rightarrow C^{1,\alpha}(\partial Q)$  будут компактными (доказательство аналогично приведённому выше). Тогда, учитывая формулу (18), уравнение (19) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}T_1 K_0 \tilde{\varphi} + \frac{1}{2}T_1(S_{11} - S_1)\tilde{\psi} + \frac{1}{2}T_1(S_{12} - S_1)\tilde{\psi} + \frac{1}{2}K_1^2 \tilde{\psi} - \frac{1}{4}\tilde{\psi} = \tilde{f}_1, \quad (20)$$

где все операторы (за исключением  $I/4$ ), входящие в (20) и действующие в  $C^{0,\alpha}(\partial Q) \rightarrow C^{0,\alpha}(\partial Q)$ , компактны.

В результате имеем систему интегральных уравнений второго рода в пространстве  $C^{0,\alpha}(\partial Q)$

$$\begin{aligned} -2T_1 K_0 \tilde{\varphi} - 2T_1 (S_{11} + S_{12} - 2S_1) \tilde{\psi} - 2K_1^2 \tilde{\psi} + \tilde{\psi} &= -4\tilde{f}_1, \\ \tilde{\varphi} + \frac{1}{2}(S_{21} + S_{22})\tilde{\varphi} + \frac{1}{2}(S_{21} - S_{22})\tilde{\psi} &= f_2. \end{aligned} \quad (21)$$

Заметим, что все преобразования и переходы от одной системы к другой эквивалентны, т.е. допускают обратные преобразования (именно для этого выбирался обратимый оператор  $T_1$ ). Таким образом, система уравнений (21) эквивалентна системе (17).

Система уравнений (21) определяет фредгольмов оператор как сумму единичного и компактного операторов. Следовательно, для системы (21) справедлива альтернатива Фредгольма.

**Теорема 2.** *Решения систем интегральных уравнений (16), (17), (21) существуют и единственны.*

**Доказательство.** Пусть  $\tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{\psi}$  – нетривиальное решение ( $|\tilde{\varphi}| + |\tilde{\psi}| \neq 0$ ) однородной системы (21) (при  $\tilde{f}_1 \equiv 0$ ,  $f_2 \equiv 0$ ). Так как оператор  $T_1$  имеет ограниченный обратный, то эти функции являются решением однородной системы (17). По формулам  $\phi = (\tilde{\varphi} + \tilde{\psi})/2$ ,  $\psi = (\tilde{\varphi} - \tilde{\psi})/2$  определим функции  $\phi$ ,  $\psi$ , которые будут нетривиальным решением однородной системы (16). Далее по формулам (10), (11) определяем функции  $u_s$  и  $u_-$ , которые, как нетрудно проверить, дают нетривиальное решение однородной задачи (5) (с  $u_0 \equiv 0$ ). Но это решение в силу теоремы 1 должно быть тривиальным. Полученное противоречие доказывает, что однородная система (21) может иметь только тривиальное решение.

Из фредгольмовости оператора системы (21), пользуясь альтернативой Фредгольма, заключаем, что решение системы (21) существует и единственно. Из эквивалентности систем (21), (17), (16) получаем существование и единственность решений и для систем (17) и (16).

**Теорема 3.** *Решение краевой задачи (1)–(4) существует и единственно.*

**Доказательство.** Из теоремы 2 следует, что построенное с помощью решений системы (21) по формулам (10), (11) решение краевой задачи удовлетворяет (2)–(4). Остаётся проверить условия гладкости решения (1). Потенциалы (10), (11), очевидно, бесконечно дифференцируемы в областях  $Q$  и  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}$ . Известно [4, с. 62], что первые производные потенциала простого слоя с равномерной непрерывной по Гёльдеру плотностью можно продолжить с сохранением непрерывности по Гёльдеру вплоть до границы области, если граница  $\partial Q$  класса гладкости  $C^2$ . Отсюда заключаем, что условие (1) также выполняется.

Теоремы 1–3 полностью обосновывают решение краевой задачи через потенциалы простого слоя, а также сводят решение краевой задачи (1)–(4) к одной из интегральных систем (16), (17) и (21).

**5. Метод коллокации.** Построим схему для решения системы интегральных уравнений (16) методом коллокации.

Будем считать, что  $Q$  – шар радиуса  $R$  с центром в начале координат. Перейдём к сферической системе координат, точка в пространстве теперь определяется следующим образом:

$$x = (\varphi_x, \theta_x, \rho_x), \quad y = (\varphi_y, \theta_y, \rho_y).$$

На  $\partial Q = \{x : 0 < \varphi < 2\pi, 0 < \theta < \pi, \rho = R\}$  в сферических координатах введём прямоугольную сетку

$$\Pi_{kl} = \{x : x_{1,k} < \varphi < x_{1,k+1}, x_{2,l} < \theta < x_{2,l+1}, \rho = R\},$$

$$h_1 = \frac{2\pi}{n}, \quad h_2 = \frac{\pi}{n}, \quad x_{1,k} = h_1 k, \quad x_{2,l} = h_2 l,$$

где  $k, l = \overline{0, n-1}$ .

Определим кусочно-постоянную на сетке функцию

$$\chi_{kl}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Pi_{kl}, \\ 0, & x \notin \Pi_{kl}. \end{cases}$$

Перенумеруем базисные функции и их носители с помощью одного индекса  $\chi_I(x)$ ,  $I = \overline{1, N}$ ,  $N = n^2$ . Теперь функции  $\phi(x)$  и  $\psi(x)$  можно определить следующим образом:

$$\phi(x) = \sum_{I=1}^N \alpha_I \chi_I(x), \quad \psi(x) = \sum_{I=1}^N \beta_I \chi_I(x),$$

где  $\chi_I(x)$  – базисные кусочно-постоянные функции,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)^T$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)^T$  – вектор-столбцы неизвестных коэффициентов.

После применения метода коллокации получим систему линейных алгебраических уравнений

$$A_{11}\alpha - A_{12}\beta = B_1, \quad A_{21}\alpha + A_{22}\beta = B_2, \quad (22)$$

элементы матриц  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$ ,  $A_{22}$  и вектор-столбцов  $B_1$ ,  $B_2$  определяются формулами

$$\begin{aligned} A_{11}^{ij} &= \int_{\Pi_j} G_0(x_i, y) ds_y, & A_{12}^{ij} &= \int_{\Pi_j} G(x_i, y) ds_y, \\ A_{21}^{ij} &= \delta_{ij} + 2\gamma_1 \int_{\Pi_j} G_0(x_i, y) ds_y - 2 \int_{\Pi_j} \frac{\partial}{\partial n} G_0(x_i, y) ds_y, \\ A_{22}^{ij} &= \delta_{ij} + 2 \int_{\Pi_j} \frac{\partial}{\partial n} G(x_i, y) ds_y - 2\gamma_2 \int_{\Pi_j} G(x_i, y) ds_y, \\ B_1^i &= -u_0(x_i), & B_2^i &= 2 \left( \frac{\partial}{\partial n} u_0(x_i) - \gamma_1 u_0(x_i) \right), \end{aligned}$$

где координаты точек коллокации

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, R), \quad x_{i1} = (i_1 + 1/2)h_1, \quad x_{i2} = (i_2 + 1/2)h_2,$$

а  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Решив систему линейных алгебраических уравнений (22), найдём приближённое решение поставленной задачи. Интегралы в коэффициентах матрицы вычислялись по квадратурным формулам с учётом особенностей ядер интегральных операторов.

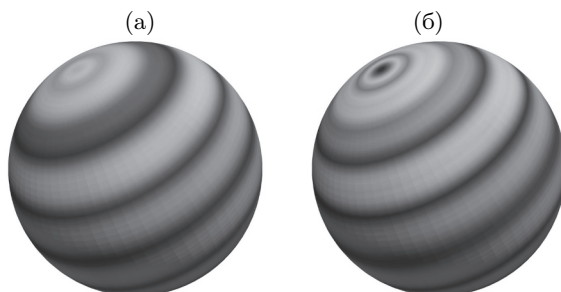
Заметим, что можно было решать систему интегральных уравнений второго рода (21) (с учётом того, что действие оператора  $T_1$  на операторы  $S_{11}$  и  $S_{12}$  вычисляется аналитически по формулам (18)).

В этой статье мы не будем доказывать сходимость метода коллокации. Доказательство сходимости этого метода для таких систем интегральных уравнений, а также оценки скорости сходимости, см. в [11]. Некоторой трудностью при доказательстве сходимости является то обстоятельство, что базисные функции не вложены в пространство решений, однако она преодолевается с помощью понятия дискретной сходимости [12].

**6. Численные результаты.** Пусть радиус рассматриваемого тела  $R = 0.006$  м, параметр  $k_0 = 1846 \text{ м}^{-1}$ , а  $k = 1.5k_0$ . Условия сопряжения следующие:

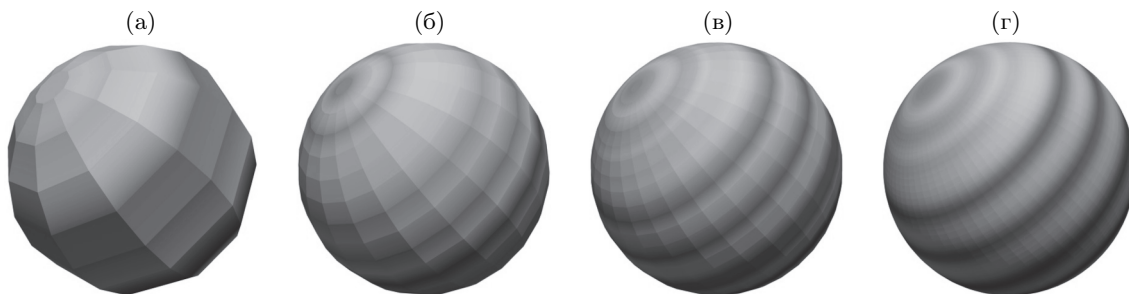
$$u_0 + u_s = u^-, \quad \frac{\partial u_0}{\partial n} + \frac{\partial u_s}{\partial n} - \frac{\partial u^-}{\partial n} = 5000(u_0 + u_s) - u^-. \quad (23)$$

Применим метод коллокации и решим полученную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). На рис. 1 изображены найденные функции плотности  $\phi(x)$  (а) и  $\psi(x)$  (б).



**Рис. 1.** Модуль функций плотности  $\phi(x)$  и  $\psi(x)$ .

Рассмотрим внутреннюю сходимость приближённого решения. Для этого построим решения задачи с сеткой  $10 \times 10$  (а),  $20 \times 20$  (б),  $30 \times 30$  (в) и  $70 \times 70$  (г) (рис. 2).



**Рис. 2.** Сходимость функции плотности  $\phi(x)$ .

Зная функции плотности, можно построить полное поле (рис. 3) в выбранной области при помощи введённых ранее потенциалов простого слоя (10) и (11).



**Рис. 3.** Модуль полного поля в сечении плоскостью  $x = 0$ .

При реализации вычислительного алгоритма применялось распараллеливание вычисления коэффициентов матрицы и решения СЛАУ на 10 процессов.

**Заключение.** В работе рассмотрена краевая задача для уравнения Гельмгольца со специальными условиями сопряжения. С помощью потенциалов простого слоя (10) и (11) исходная

задача сведена к исследованию системы интегральных уравнений по границе области  $\partial Q$ . Доказаны единственность и существование решения как системы интегральных уравнений, так и задачи сопряжения. Существование решения обосновано с помощью теоремы единственности для решения задачи сопряжения и фредгольмовости оператора системы интегральных уравнений.

Для численного решения системы интегральных уравнений применён метод коллокации. Рассмотрен пример, когда область есть шар. Выполнен переход к сферической системе координат и получена блочная система линейных алгебраических уравнений с кусочно-постоянными базисными функциями на прямоугольной сетке. Представлены численные результаты для плотностей при определённых условиях сопряжения. Рассмотрена внутренняя сходимость решения и построено полное поле внутри и вне области  $Q$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20087).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М., 1973.
2. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М., 1984.
3. *Nedelec J.-C.* Acoustic and Electromagnetic Equations. Integral Representations for Harmonic Problems. New York, 2001.
4. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1987.
5. *Лерер А.М.* Численная оценка погрешности метода возмущения при решении задачи об отражении электромагнитной волны от нелинейного графенового слоя // Радиотехника и электроника. 2022. Т. 67. № 9. С. 855–858.
6. *Смирнов Ю.Г., Тихов С.В., Гусарова Е.В.* О распространении электромагнитных волн в диэлектрическом слое, покрытом графеном // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. 2022. № 3. С. 11–18.
7. *Mikhailov S.A.* Quantum theory of the third-order nonlinear electrodynamic effects of graphene // Phys. Rev. B. 2016. V. 93. № 8. Art. 085403.
8. *Hanson G.W.* Dyadic Green's functions and guided surface waves for a surface conductivity model of graphene // J. of Appl. Phys. 2008. V. 103. № 6. Art. 064302.
9. *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г.* Математические модели электродинамики и акустики. М., 1991.
10. *Colton D., Kress R.* Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. New York, 2013.
11. *Vainikko G.* Multidimensional Weakly Singular Integral Equation. Berlin; Heidelberg, 1993.
12. *Вайникко Г.М., Карма О.О.* О сходимости приближённых методов решения линейных и нелинейных операторных уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1974. Т. 14. № 4. С. 828–837.

Пензенский государственный университет

Поступила в редакцию 26.05.2023 г.

После доработки 26.05.2023 г.

Принята к публикации 20.07.2023 г.