

УДК 517.977.8

ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ, ПРОСТЫМИ МАТРИЦАМИ И РАЗНЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ИГРОКОВ

© 2023 г. Н. Н. Петров, А. И. Мачтакова

В конечномерном евклидовом пространстве рассмотрена задача преследования группой преследователей одного убегающего, описываемая системой уравнений с производной по Капуто порядка α , где множествами допустимых управлений являются выпуклые компакты. Получены достаточные условия разрешимости задач преследования и уклонения, при исследовании которых использовался метод разрешающих функций.

DOI: 10.31857/S0374064123070075, EDN: GUVVLF

Введение. Работы Р. Айзекса (см., например, [1]) заложили основы теории дифференциальных игр преследования–уклонения двух лиц, которая к настоящему времени представляет собой фундаментальную содержательную теорию с различными подходами к анализу конфликтных ситуаций [2–10]. Обобщением этой теории преследования–уклонения являются задачи конфликтного взаимодействия преследователей и одного или нескольких убегающих [11–14]. Следует отметить, что для анализа игровых задач группового преследования до настоящего времени нет конструктивных подходов, позволяющих использовать теорию дифференциальных игр двух лиц. Одна из причин этого состоит в том, что объединение множеств достижимости всех преследователей и объединение всех целевых множеств представляют собой множества, не являющиеся выпуклыми и, более того, не являющиеся связными. С другой стороны, есть некоторые приложения этих игр к задачам движения транспортных средств, избежания столкновений кораблей и других. Одним из направлений современного развития теории группового преследования является поиск новых задач, к которым применимы ранее разработанные методы. В частности, в работах [15–18] рассматривались задачи преследования двух лиц, описываемые уравнениями с дробными производными, где были получены достаточные условия поимки. В статье [19] доказано существование цены игры в дифференциальной игре, описываемой уравнением с дробными производными. Задачи группового преследования и уклонения с дробными производными при условии, что все участники обладают равными возможностями, рассматривались в [20–24].

В данной работе рассматривается задача о поимке убегающего группой преследователей в дифференциальной игре с дробными производными без предположения о равенстве всех возможностей участников конфликта. Получены достаточные условия поимки и уклонения.

1. Постановка задачи.

Определение 1 [25]. Пусть $\alpha \in (0, 1)$, $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$ такая функция, что f' абсолютно непрерывна на промежутке $[0, \infty)$. Производной по Капуто порядка α функции f называется функция $D^{(\alpha)}f$ вида

$$(D^{(\alpha)}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^\alpha} ds, \quad \text{где} \quad \Gamma(\beta) = \int_0^\infty e^{-s} s^{\beta-1} ds.$$

В пространстве $\mathbb{R}^k$, $k \geq 2$, рассматривается дифференциальная игра $G(n+1)$ $(n+1)$ -го лица: n преследователей $P_1, \dots, P_n$ и убегающего E . Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$D^{(\alpha)}x_i = a_i x_i + u_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad u_i \in U_i, \quad (1)$$

а закон движения убегающего E – вид

$$D^{(\alpha)}y = ay + v, \quad y(0) = y^0, \quad v \in V. \quad (2)$$

Здесь $i \in I = \{1, \dots, n\}$, $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, U_i, V – выпуклые компакты в $\mathbb{R}^k$, a_i, a – вещественные числа. Считаем, что $x_i^0 - y^0 \notin M_i$ для всех $i \in I$, где $M_i, i \in I$, – заданные выпуклые компакты. Если $x_i^0 - y^0 \in M_i$ при некотором i , то в игре $G(n+1)$ происходит поимка в начальный момент времени.

2. Достаточные условия поимки. Назовём *предысторией* $v_t(\cdot)$ управления $v(\cdot)$ убегающего E в момент t , $t > 0$, сужение функции v на $[0, t]$.

Определение 2. Будем говорить, что задана *квазистратегия* $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i , если определено отображение $U_i^0(t, z^0, v_t(\cdot))$, ставящее в соответствие начальным позициям $z^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, y^0)$, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего E измеримую по Лебегу функцию $u_i(t) = U_i^0(t, z^0, v_t(\cdot))$, $t \geq 0$, со значениями в U_i .

Определение 3. В игре $G(n+1)$ происходит *поимка*, если существуют момент $T > 0$ и квазистратегии $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ преследователей $P_1, \dots, P_n$ такие, что для любой измеримой по Лебегу функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [0, T]$, существуют момент $t_0 \in [0, T]$ и номер $l \in I$, для которых $x_l(t_0) - y(t_0) \in M_l$, где $x_i(t)$, $i \in I$, – решения задачи Коши (1), порождённые квазистратегиями $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$, а $y(t)$ – решение задачи Коши (2), порождённое функцией $v(\cdot)$.

Введём следующие обозначения:

$$E_\rho(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\rho^{-1} + \mu)}, \quad \rho > 0, \quad z, \mu \in \mathbb{R}^1,$$

– обобщённая функция Миттаг-Лёффлера,

$$\begin{aligned} f_i(t) &= E_{1/\alpha}(a_i t^\alpha, 1), \quad f(t) = E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1), \\ g_i(t, \tau) &= (t - \tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a_i(t - \tau)^\alpha, \alpha), \quad g(t, \tau) = (t - \tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t - \tau)^\alpha, \alpha), \\ F_i(t) &= \int_0^t g_i(t, \tau) d\tau, \quad F(t) = \int_0^t g(t, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

$\text{Int } A$, со A – внутренность и выпуклая оболочка множества A соответственно. Отметим, что из теоремы 4.1.1 [26] следует, что для всех $i \in I$, $t \geq 0$, $\tau \in [0, t]$ справедливы неравенства $g_i(t, \tau) \geq 0$, $g(t, \tau) \geq 0$.

Пусть $\gamma_i(t, \tau)$, $i \in I$, $t \geq 0$, $\tau \in [0, t]$, – некоторые ограниченные, измеримые по (t, τ) , локально суммируемые по τ (при каждом t) вектор-функции, которые, следуя [27], будем называть *функциями сдвига*. Зафиксируем некоторый набор функций сдвига $\gamma(t, \tau) = \{\gamma_i(t, \tau), i \in I\}$ и обозначим

$$\xi_i(t) = f_i(t)x_i^0 - f(t)y^0 + \int_0^t \gamma_i(t, \tau) d\tau.$$

Рассмотрим многозначные отображения

$$\begin{aligned} W_i(t, \tau, v, \gamma_i) &= g_i(t, \tau)U_i - g(t, \tau)v - \gamma_i(t, \tau), \\ W_i(t, \tau, \gamma_i) &= \bigcap_{v \in V} W_i(t, \tau, v, \gamma_i). \end{aligned}$$

Предположение 1. Существуют функции сдвига $\gamma(t, \tau) = \{\gamma_i(t, \tau), i \in I\}$ такие, что для всех $i \in I$, $t \geq 0$, $0 \leq \tau \leq t$ выполнено условие

$$0 \in W_i(t, \tau, \gamma_i).$$

Теорема 1. Пусть выполнено предположение 1 и существуют $T > 0$, $l \in I$ такие, что $\xi_l(T) \in M_l$. Тогда в игре $G(n+1)$ происходит поимка.

Доказательство. Рассмотрим многозначное отображение

$$U_l(T, \tau, v) = \{u_l \in U_l : g_l(T, \tau)u_l - g(T, \tau)v - \gamma_l(T, \tau) = 0\}.$$

В силу предположения 1 $U_l(T, \tau, v) \neq \emptyset$ для всех $\tau \in [0, T]$, $v \in V$. Из теоремы 20.6 [28] следует, что существует измеримый селектор $u_l^2(\tau, v) \in U_l(T, \tau, v)$. Полагаем управление преследователя P_l равным

$$u_l(\tau) = u_l^2(\tau, v(\tau)), \quad \tau \in [0, T].$$

Управления остальных преследователей задаём произвольным образом. Из решений задачи Коши для систем (1), (2) получим (см. [29]) представление

$$x_l(t) - y(t) = \xi_l(t) + \int_0^t (g_l(t, \tau)u_l(\tau) - g(t, \tau)v(\tau) - \gamma_l(t, \tau)) d\tau,$$

поэтому $x_l(T) - y(T) = \xi_l(T) \in M_l$. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть существует номер $l \in I$ такой, что:

- 1) $0 \in g_l(t, \tau)U_l - g(t, \tau)v$ для всех $v \in V$, $t \geq 0$, $\tau \in [0, t]$;
- 2) $a_l < 0$, $a < 0$;
- 3) $0 \in \text{Int } M_l$.

Тогда в игре $G(n+1)$ происходит поимка.

Доказательство. Взяв $\gamma_l(t, \tau) = 0$ для всех $t \geq 0$, $\tau \in [0, t]$, получим, что $0 \in W_l(t, \tau, \gamma_l)$ для всех $t \geq 0$, $\tau \in [0, t]$. Тогда $\xi_l(t) = f_l(t)x_l^0 - f(t)y^0$. Из [26, с. 12] следует, что при $t \rightarrow +\infty$ справедливы асимптотические оценки

$$f(t) = -\frac{1}{at^\alpha \Gamma(1-\alpha)} + O(1/t^{2\alpha}), \quad f_l(t) = -\frac{1}{a_l t^\alpha \Gamma(1-\alpha)} + O(1/t^{2\alpha}),$$

поэтому $\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi_l(t) = 0$. Следовательно, существует $T > 0$, для которого $\xi_l(T) \in M_l$. Осталось применить теорему 1. Следствие доказано.

В дальнейшем будем считать, что $\xi_i(t) \notin M_i$ для всех $i \in I$, $t \geq 0$. Каждому преследователю P_i , $i \in I$, поставим в соответствие разрешающую функцию

$$\lambda_i(t, \tau, v) = \sup\{\lambda \geq 0 : \lambda(M_i - \xi_i(t)) \cap W_i(t, \tau, v, \gamma_i) \neq \emptyset\}.$$

Теорема 2. Пусть выполнено предположение 1 и существует момент $T > 0$ такой, что

$$\inf_{v(\cdot)} \max_{i \in I} \int_0^T \lambda_i(T, \tau, v(\tau)) d\tau \geq 1.$$

Тогда в игре $G(n+1)$ происходит поимка.

Доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 3.1.1 [11].

Теорема 3. Пусть $M_i = \{0\}$ для всех $i \in I$, выполнено предположение 1 и существует момент $T > 0$ такой, что

$$\inf_{v(\cdot)} \max_i \int_0^T \frac{\lambda_i^0(T, \tau, v(\tau))}{\|\xi_i(T)\|} d\tau \geq 1,$$

где

$$\lambda_i^0(t, \tau, v) = \sup\{\lambda \geq 0 : -\lambda \xi_i^0(t) \in g_i(t, \tau)U_i - g(t, \tau)v - \gamma_i(t, \tau)\}, \quad \xi_i^0(t) = \xi_i(t)/\|\xi_i(t)\|.$$

Тогда в игре $G(n+1)$ происходит поимка.

Доказательство. Пусть $v(\cdot)$ – произвольная допустимая функция. Определим функции

$$h_i(t, v(\cdot)) = 1 - \int_0^t \frac{\lambda_i^0(T, \tau, v(\tau))}{\|\xi_i(T)\|} d\tau,$$

множества и моменты времени

$$T_i(v(\cdot)) = \{\tau \in [0, T] : h_i(\tau, v(\cdot)) = 0\}, \quad t_i^*(v(\cdot)) = \begin{cases} \inf\{\tau : \tau \in T_i(v(\cdot))\}, & \text{если } T_i(v(\cdot)) \neq \emptyset, \\ +\infty, & \text{если } T_i(v(\cdot)) = \emptyset. \end{cases}$$

Из условия теоремы следует, что существует номер $l \in I$, для которого $t_l^*(v(\cdot)) \leq T$. Рассмотрим многозначные отображения

$$U_i^1(\tau, v) = \{u_i \in U_i : g_i(T, \tau)u_i - g(T, \tau)v - \gamma_i(T, \tau) = -\lambda_i^0(T, \tau, v)\xi_i^0(T)\},$$

$$U_i^2(\tau, v) = \{u_i \in U_i : g_i(T, \tau)u_i - g(T, \tau)v - \gamma_i(T, \tau) = 0\}.$$

Из теоремы 20.6 работы [28] следует, что существуют измеримые селекторы $u_i^1(\tau, v) \in U_i^1(\tau, v)$, $u_i^2(\tau, v) \in U_i^2(\tau, v)$. Задаём управления преследователей P_i , $i \in I$, следующим образом. Если $t_i^*(v(\cdot)) < T$, то полагаем

$$u_i(t) = \begin{cases} u_i^1(t, v(t)), & t \in [0, t_i^*(v(\cdot))], \\ u_i^2(t, v(t)), & t \in (t_i^*(v(\cdot)), T]. \end{cases}$$

Если $t_i^*(v(\cdot)) \geq T$, то

$$u_i(t) = u_i^1(t, v(t)), \quad t \in [0, T].$$

Из решений задачи Коши для систем (1), (2) получим (см. [29]) представление

$$x_i(t) - y(t) = \xi_i(t) + \int_0^t (g_i(t, \tau)u_i(\tau) - g(t, \tau)v(\tau) - \gamma_i(t, \tau)) d\tau,$$

поэтому

$$\begin{aligned} x_l(T) - y(T) &= \xi_l(T) - \int_0^{t_l^*(v(\cdot))} \lambda_l^0(T, \tau, v(\tau))\xi_l^0(T) d\tau = \\ &= \xi_l^0(T)\|\xi_l(T)\| \left(1 - \int_0^{t_l^*(v(\cdot))} \frac{\lambda_l^0(T, \tau, v(\tau))}{\|\xi_l(T)\|} d\tau \right) = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Рассмотрим далее подробнее ситуацию, в которой для всех $i \in I$

$$M_i = \{0\}, \quad U_i = \{u_i : \|u_i - b_i\| \leq R_i\}, \quad V = \{v : \|v - b\| \leq R\}, \quad (3)$$

где $b, b_i \in R^k$, $i \in I$, R_i , $i \in I$, R – неотрицательные вещественные числа, и в качестве нормы рассматривается евклидова норма.

Предположение 2. $R_i g_i(t, \tau) \geq R g(t, \tau)$ для всех $i \in I$, $t \geq 0$, $\tau \in [0, t]$.

Из данного предположения следует, что предположение 1 будет выполнено, если в качестве $\gamma_i(t, \tau)$ взять $\gamma_i(t, \tau) = g_i(t, \tau)b_i - g(t, \tau)b$. Тогда

$$\xi_i(t) = f_i(t)x_i^0 - f(t)y^0 + F_i(t)b_i - F(t)b.$$

Пусть далее $\delta(t) = \min_{\|p\|=1} \max_i (p, \xi_i^0(t))$, где (a, b) – скалярное произведение векторов a и b .

Предположение 3. Существует момент $T > 0$ такой, что:

- а) $0 \in \text{Int co } \{\xi_i(T), i \in I\}$;
- б) справедливо неравенство

$$\sum_{i \in I} \|\xi_i(T)\| \leq 2\delta(T)RF(T). \quad (4)$$

Лемма. Пусть M_i , U_i , V определены соотношением (3) и выполнены предположения 2, 3. Тогда для любой допустимой функции $v(\cdot)$ имеет место неравенство

$$\sum_{i \in I} \left(\|\xi_i(T)\| - \int_0^T \lambda_i^0(T, \tau, v(\tau)) d\tau \right) \leq 0.$$

Доказательство. Из определения функций λ_i^0 следует, что

$$\lambda_i^0(T, \tau, v) = g(T, \tau)(v - b, \xi_i^0(T)) + \sqrt{g^2(T, \tau)(v - b, \xi_i^0(T))^2 + R_i^2 g_i^2(T, \tau) - \|v - b\|^2 g^2(T, \tau)}.$$

Обозначим $\hat{v} = v - b$. Тогда $\|\hat{v}\| \leq R$. Из предположения 2 следует, что для всех $t \in [0, T]$, $i \in I$, $v \in V$ справедливы неравенства

$$\lambda_i^0(T, t, v) \geq g(T, t)((\hat{v}, \xi_i^0(T)) + |(\hat{v}, \xi_i^0(T))|). \quad (5)$$

Функции $\lambda_i^0(T, t, v)$ при каждом фиксированном t являются вогнутыми по v [12], поэтому существует $\hat{v}_0$, $\|\hat{v}_0\| = 1$, для которого

$$\sum_{i \in I} \lambda_i^0(T, t, \hat{v}) \geq \min_{\|\hat{v}\| \leq R} \sum_{i \in I} \lambda_i^0(T, t, \hat{v}) = \sum_{i \in I} \lambda_i^0(T, t, R\hat{v}_0).$$

Из п. а) предположения 3, работы [30] и определения $\delta(T)$ следует, что для всякого v , $\|v\| = 1$, найдётся номер $l \in I$, для которого $(v, \xi_l^0(T)) \geq \delta(T) > 0$. Следовательно, из (5) получаем

$$\lambda_l^0(T, t, R\hat{v}_0) \geq 2g(T, t)R(\hat{v}_0, \xi_l^0(T)) \geq 2R\delta(T)g(T, t).$$

Тогда для для каждого $t \in [0, T]$ и $v \in V$ справедливы неравенства

$$\sum_{i \in I} \lambda_i^0(T, t, v) \geq \sum_{i \in I} \lambda_i^0(T, t, R\hat{v}_0) \geq \lambda_l^0(T, t, R\hat{v}_0) \geq 2Rg(T, t)\delta(T).$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \|\xi_i(T)\| - \int_0^T \sum_{i \in I} \lambda_i^0(T, t, v(t)) dt &\leq \sum_{i \in I} \|\xi_i(T)\| - \int_0^T 2\delta(T)Rg(T, t) dt = \\ &= \sum_{i \in I} \|\xi_i(T)\| - 2R\delta(T)F(T) \leq 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следствие 2. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда для любой допустимой функции $v(\cdot)$ найдётся номер $l \in I$, для которого имеет место неравенство

$$\|\xi_l(T)\| - \int_0^T \lambda_l^0(T, t, v(t)) dt \leq 0.$$

Теорема 4. Пусть M_i , U_i , V определены соотношением (3) и выполнены предположения 2, 3. Тогда в игре $G(n+1)$ происходит поимка.

Доказательство. Пусть $v(\cdot)$ – допустимая функция. В силу следствия 1 существует номер $l \in I$, для которого справедливо соотношение

$$\|\xi_l(T)\| - \int_0^T \lambda_l^0(T, t, v(t)) dt \leq 0.$$

Осталось применить теорему 3. Теорема доказана.

Следствие 3 [20]. Пусть $a_i = a \leq 0$, $b_i = b = 0$, $R_i = R > 0$, $M_i = \{0\}$ для всех $i \in I$ и

$$y^0 \in \text{Int co} \{x_1^0, \dots, x_n^0\}.$$

Тогда в игре $G(n+1)$ происходит поимка.

Доказательство. В данном случае $f_i(t) = f(t)$, $F_i(t) = F(t) = t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha, \alpha + 1)$ для всех $i \in I$, $t \geq 0$. Взяв $\gamma_i(t, \tau) = 0$, получаем, что $\xi_i(t) = f(t)(x_i^0 - y^0)$. Поэтому для всех $T > 0$

$$\sum_{i \in I} \|\xi_i(T)\| = |f(T)| \sum_{i \in I} \|\xi_i(0)\| = f(T) \sum_{i \in I} \|\xi_i(0)\|,$$

$\delta(T) = \delta(0) > 0$ в силу [30]. Значит неравенство (4) можно представить в виде

$$\sum_{i \in I} \|\xi_i(0)\| \leq 2\delta(0) \frac{RF(T)}{f(T)}. \quad (6)$$

Если $a < 0$, то при $t \rightarrow +\infty$ справедливы следующие асимптотические оценки [26, с. 12]:

$$f(t) = -\frac{1}{at^\alpha \Gamma(1-\alpha)} + O(1/t^{2\alpha}), \quad F(t) = -\frac{1}{a} + O(1/t^\alpha).$$

Таким образом,

$$\frac{F(T)}{f(T)} = T^\alpha \Gamma(1-\alpha) + O(T^\alpha),$$

и поэтому неравенство (6) будет выполнено автоматически при достаточно большом T .

Если $a = 0$, то $f(t) = 1$, $F(t) = t^\alpha / \Gamma(1+\alpha)$. Следовательно, $F(T)/f(T) = T^\alpha / \Gamma(1+\alpha)$, и поэтому неравенство (6) будет выполнено автоматически при достаточно большом T . Следствие доказано.

Замечание. Пусть $a \leq a_i < 0$ для всех $i \in I$. Тогда в силу [31] для всех $t \in [0, +\infty)$, $i \in I$ справедливы неравенства $f(t) \geq f_i(t)$. Так как ввиду [26, с. 12]

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F(t)}{F_i(t)} = \frac{a_i}{a} > 0,$$

то для $\gamma_i = \inf_{t \geq 0} (F(t)/F_i(t))$ выполнено $\gamma_i > 0$. Выбирая R_i , R так, чтобы выполнялись неравенства $R_i/R \leq \gamma_i$, получаем, что условия $RF(t) \geq R_i F_i(t)$, $f_i(t) \geq f(t)$ теоремы 4 будут выполнены.

3. Достаточные условия уклонения. В данном пункте считается, что преследователи P_i , $i \in I$, могут использовать любую информацию при выборе своих управлений $u_i(\cdot)$, $i \in I$, для которых существует решение задачи Коши системы (1), определённое на $[0, +\infty)$.

Определение 4. В игре $G(n+1)$ происходит уклонение от встречи, если существует программное управление $v(\cdot)$ убегающего E такое, что для любых траекторий $x_i(t)$, $i \in I$,

преследователей P_i , $i \in I$, удовлетворяющих системе (1), и для любого $t > 0$ имеет место $x_i(t) \neq y(t)$, где $y(t)$ – решение задачи Коши (2), порождённое управлением $v(\cdot)$.

Теорема 5. Пусть M_i , U_i , V определены соотношением (3) и существует вектор $p \in R^k$, $\|p\| = 1$, такой, что:

1) для всех $i \in I$, $t \geq 0$ справедливы неравенства

$$\|b + Rp\|F(t) \geq (\|b_i\| + R_i)F_i(t), \quad f(t) \geq f_i(t);$$

2) $(b + Rp, y^0) \geq 0$, $(b + Rp, y^0) \geq \max_{i \in I}(b + Rp, x_i^0)$.

Тогда в игре $G(n+1)$ происходит уклонение от встречи.

Доказательство. Задаём управление убегающего E следующим образом. Полагаем $v(t) = b + Rp$ для всех $t \in [0, +\infty)$. Пусть $u_i(t)$, $i \in I$, – произвольные управления преследователей P_i , $i \in I$. Определим функции $\hat{u}_i(t) = u_i(t) - b_i$,

$$\tilde{u}_i(t) = \frac{1}{R_i F(t)} \int_0^t g_i(t, s) \hat{u}_i(s) ds, \quad \omega_i(t) = f(t)y^0 - f_i(t)x_i^0.$$

Отметим, что $F_i(t) \neq 0$ для всех $t > 0$. Тогда для всех $t \geq 0$, $i \in I$ выполняются соотношения

$$\|\hat{u}_i(t)\| \leq R_i, \quad \|\tilde{u}_i(t)\| \leq 1,$$

$$y(t) - x_i(t) = \omega_i(t) + (b + Rp)F(t) - (b_i + R_i \tilde{u}_i(t))F_i(t).$$

Докажем, что $(b + Rp, \omega_i(t)) \geq 0$ для всех $i \in I$, $t \geq 0$. Действительно,

$$(b + Rp, y^0) \geq (b + Rp, x_i^0)$$

для всех $i \in I$. Так как $f_i(t) \geq 0$, $f(t) \geq 0$ и $f(t) \geq f_i(t)$ для всех $i \in I$, $t \geq 0$ (см. [31]), то

$$f_i(t)(b + Rp, x_i^0) \leq f_i(t)(b + Rp, y^0) \leq f(t)(b + Rp, y^0) \quad \text{или} \quad (b + Rp, \omega_i(t)) \geq 0.$$

Поэтому для всех $i \in I$, $t \geq 0$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|y(t) - x_i(t)\| &\geq \|\omega_i(t) + (b + Rp)F(t)\| - \|(b_i + R_i \tilde{u}_i(t))F_i(t)\| = \\ &= \sqrt{\|\omega_i(t)\|^2 + 2(b + Rp, \omega_i(t))F(t) + \|b + Rp\|^2 F^2(t)} - F_i(t)(\|b_i\| + R_i) > \\ &> \|b + Rp\|F(t) - (\|b_i\| + R_i)F_i(t) \geq 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие 4. Пусть $M_i = \{0\}$, $b_i = b = 0$ для всех $i \in I$. Кроме того, для всех $t \geq 0$, $i \in I$ справедливы неравенства $RF(t) \geq R_i F_i(t)$, $f(t) \geq f_i(t)$ и существует вектор $p \in R^k$, $\|p\| = 1$, такой, что $(p, y^0) \geq 0$, $(p, y^0) \geq \max_i(p, x_i^0)$. Тогда в игре $G(n+1)$ происходит уклонение от встречи.

Следствие 5. Пусть $a_i = a$, $R_i = R$, $M_i = \{0\}$, $b_i = b = 0$ для всех $i \in I$ и

$$y^0 \notin \text{Int co} \{x_1^0, \dots, x_n^0\}.$$

Тогда в игре $G(n+1)$ происходит уклонение от встречи.

Доказательство. Из условия следствия следует, что y^0 и $\text{co} \{x_1^0, \dots, x_n^0\}$ отделимы. Поэтому существует вектор $p \in R^k$, $\|p\| = 1$, такой, что для всех $i \in I$ $(p, y^0) \geq (p, x_i^0)$. Задаём управление убегающего E , полагая $v(t) = Rp$ для всех $t \geq 0$. Тогда

$$\omega_i(t) = f(t)(y^0 - x_i^0), \quad y(t) - x_i(t) = \omega_i(t) + RpF(t) - \tilde{u}_i(t)RF(t),$$

поэтому

$$\begin{aligned} \|y(t) - x_i(t)\| &\geq \|\omega_i(t) + R p F(t)\| - R F(t) = \\ &= \sqrt{\|\omega_i(t)\|^2 + 2R(p, y^0 - x_i^0)f(t)F(t) + R^2 F^2(t)} - R F(t) > 0 \end{aligned}$$

для всех $t > 0$. Следствие доказано.

4. Примеры.

Пример 1. В пространстве $\mathbb{R}^k$ рассматривается игра $G(3)$, описываемая системой

$$D^{(\alpha)}x_i = u_i, \quad x_1(0) = (1, 0, \dots, 0), \quad x_2(0) = (-1, 0, \dots, 0),$$

$$D^{(\alpha)}y = v, \quad y(0) = (0, 0, \dots, 0), \quad i \in I = \{1, 2\},$$

причём $u_i, v \in V = \{(v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^k : v_j \in [-1, 1], j = \overline{1, k}\}, M_i = \{0\}$.

Тогда предположение 1 будет выполнено с нулевыми функциями сдвига. Далее имеем

$$f_i(t) = f(t) = 1, \quad g_i(t, s) = g(t, s) = (t - s)^{\alpha-1} / \Gamma(\alpha), \quad \xi_i(t) = x_i^0 - y^0, \quad \lambda_i(t, \tau, v) = g(t, \tau) \bar{\lambda}_i(v),$$

где $\bar{\lambda}_i(v) = \sup\{\lambda \geq 0 : -\lambda \xi_i(t) \in V - v\}$. Поэтому

$$\bar{\lambda}_1(v) = 1 + v_1, \quad \bar{\lambda}_2(v) = 1 - v_1, \quad \max\{\bar{\lambda}_1(v), \bar{\lambda}_2(v)\} \geq 1.$$

Следовательно, для любой допустимой функции $v(\cdot)$ имеют место соотношения

$$\int_0^t (\lambda_1(t, \tau, v(\tau)) + \lambda_2(t, \tau, v(\tau))) d\tau \geq \int_0^t \max_i \lambda_i(t, \tau, v(\tau)) d\tau \geq \int_0^t g(t, \tau) d\tau = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}.$$

Выбрав T таким, чтобы выполнялось неравенство $T^\alpha \geq 2\Gamma(\alpha + 1)$, получаем, что для любой допустимой функции $v(\cdot)$ найдётся номер $l \in \{1, 2\}$, для которого

$$\int_0^T \lambda_l(T, \tau, v(\tau)) d\tau \geq 1.$$

Тем самым условие теоремы 2 выполнено. Поэтому в игре $G(3)$ происходит поимка.

Пример 2. В пространстве $\mathbb{R}^2$ рассматривается игра $G(4)$, описываемая системой

$$D^{(\alpha)}x_i = ax_i + u_i, \quad D^{(\alpha)}y = ay + v, \quad i \in I = \{1, 2, 3\},$$

причём $M_i = \{0\}$, $U_i = V = \{u : \|u\| \leq R\}$. Тогда предположение 2 выполнено. Зафиксируем момент $T > 0$ и выберем x_i^0, y^0 такими, чтобы выполнялись равенства ($\mu > 0$)

$$\xi_1(T) = (0, \mu), \quad \xi_2(T) = (-\sqrt{3}\mu/2, -\mu/2), \quad \xi_3(T) = (\sqrt{3}\mu/2, -\mu/2).$$

Получаем

$$0 \in \text{Int co} \{\xi_i^0(T), i \in I\}, \quad \delta(T) = \frac{1}{2}, \quad \sum_{i \in I} \|\xi_i(T)\| = 3\mu.$$

Если $0 < \mu < RF(T)/3$, то для игры $G(4)$ данного примера будут выполнены все условия теоремы 4, т.е. в игре $G(4)$ будет происходить поимка.

Пример 3. В пространстве $\mathbb{R}^2$ рассматривается игра $G(4)$, описываемая системой

$$D^{(\alpha)}x_1 = u_1, \quad \|u_1\| \leq 1, \quad D^{(\alpha)}x_2 = u_2, \quad \|u_2\| \leq 1,$$

$$D^{(\alpha)}x_3 = u_3, \quad \|u_3\| \leq \frac{1}{4}, \quad D^{(\alpha)}y = v, \quad \|v\| \leq 1, \quad I = \{1, 2, 3\},$$

$$x_1^0 = (-\mu/2, -\sqrt{3}\mu/2), \quad x_2^0 = (-\mu/2, \sqrt{3}\mu/2), \quad x_3^0 = (\mu, 0), \quad y^0 = (0, 0), \quad \mu > 0.$$

Тогда для всех $t \geq 0$

$$f_i(t) = f(t) = 1, \quad F(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad \sum_{i \in I} \|\xi_i(t)\| = 3\mu, \quad \delta(t) = \frac{1}{2}.$$

Зададим $T > 0$ и выберем $\mu > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\mu < F(T)/3$. Предположение 3 в данном случае будет выполнено. Докажем, что в игре $G(4)$ происходит уклонение от встречи. Возьмём управление убегающего E в виде $v(t) = v_0 = (\sqrt{3}/2, -1/2)$ для всех $t > 0$. Имеем

$$y(t) = \frac{v_0 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad x_i(t) = x_i^0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u_i(s) ds.$$

Обозначив

$$\hat{u}_i(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u_i(s) ds \left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \right)^{-1},$$

получим

$$x_i(t) = x_i^0 + \frac{t^\alpha \hat{u}_i(t)}{\Gamma(\alpha+1)},$$

причём $\|\hat{u}_1(t)\| \leq 1$, $\|\hat{u}_2(t)\| \leq 1$, $\|\hat{u}_3(t)\| \leq 1/4$,

$$\|x_1(t) - y(t)\| \geq \left\| x_1^0 - \frac{v_0 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right\| - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \geq \sqrt{\mu^2 + \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right)^2} - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} > 0.$$

Аналогично устанавливается, что $\|x_2(t) - y(t)\| > 0$ для всех $t > 0$

$$\begin{aligned} \|x_3(t) - y(t)\| &\geq \left\| x_3^0 - \frac{v_0 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right\| - \frac{1}{4} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} = \\ &= \sqrt{\mu^2 - \sqrt{3}\mu \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right)^2} - \frac{1}{4} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} = \\ &= \sqrt{\left(\mu - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right)^2 + \left(\frac{t^\alpha}{2\Gamma(\alpha+1)} \right)^2} - \frac{1}{4} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \geq \frac{1}{4} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} > 0. \end{aligned}$$

Отметим, что в данном примере не выполнено условие $R_3 F_3(t) \geq R F(t)$ предположения 2, а все остальные условия теоремы 4 выполнены.

Пример 4. Пусть M_i , U_i , V определены соотношением (3). В пространстве $\mathbb{R}^2$ рассматривается игра $G(4)$, описываемая системой

$$D^{(\alpha)}x_i = u_i, \quad u_i \in U_i, \quad D^{(\alpha)}y = y + v, \quad v \in V, \quad i \in I = \{1, 2, 3\},$$

$$b_1 = b = (0, 0), \quad \|b_2\| = \|b_3\| = \frac{1}{2}R, \quad R_1 = R, \quad R_2 = R_3 = \frac{1}{2}R, \quad R > 0,$$

$$x_1^0 = (0, -1.05), \quad x_2^0 = (-1, -3), \quad x_3^0 = (1, -3), \quad y^0 = (0, -1).$$

Имеем

$$f_i(t) = 1, \quad f(t) = E_{1/\alpha}(t^\alpha, 1) \geq f_i(t), \quad F(t) = t^\alpha E_{1/\alpha}(t^\alpha, \alpha+1) \geq F_i(t) = t^\alpha / \Gamma(\alpha+1)$$

для всех $i \in I$, $t \geq 0$. Возьмём $p = (0, 1)$. Тогда справедливы неравенства

$$\|b + Rp\|F(t) \geq (\|b_i\| + R_i)F_i(t), \quad (y^0, b + Rp) \geq \max_i(x_i^0, b + Rp).$$

Полагаем управление $v(t)$ убегающего E равным $v(t) = v_0 = b + Rp = (0, 1)$ для всех $t \geq 0$. Отметим, что управление данного вида гарантировало убегающему уклонение от встречи по теореме 5. Докажем, что преследователь P_1 осуществляет поимку E , используя управление $u_1(t) = (0, 1)$. Имеем

$$y(t) = (0, -E_{1/\alpha}(t^\alpha, 1) + t^\alpha E_{1/\alpha}(t^\alpha, \alpha + 1)), \quad x_1(t) = (0, -1.05 + t^\alpha/\Gamma(\alpha + 1)).$$

Рассмотрим функцию

$$H(t) = -E_{1/\alpha}(t^\alpha, 1) + t^\alpha E_{1/\alpha}(t^\alpha, \alpha + 1) + 1.05 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}.$$

Тогда $H(0) > 0$. В силу [32, с. 118, формула (4)] справедливо равенство

$$E_{1/\alpha}(z, 1) = \frac{1}{\Gamma(1)} + zE_{1/\alpha}(z, \alpha + 1),$$

поэтому $H(1) = 0.05 - 1/\Gamma(\alpha + 1) < 0$. Следовательно, функция H имеет корень на интервале $(0, 1)$, и значит, в игре $G(4)$ при таком управлении v убегающего E преследователь P_1 осуществляет его поимку. Отметим, что в данном случае не выполнено условие $(b + Rp, y^0) \geq 0$ теоремы 5, а все остальные условия данной теоремы выполнены.

Заключение. Получены новые достаточные условия поимки и уклонения от встречи в задаче группового преследования с дробными производными. Для решения задачи использован метод разрешающих функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-71-10070).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М., 1967.
2. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Т. 2. М., 1988.
3. Blaquiere A., Gerard F., Leitmann G. Quantitative and Qualitative Differential Games. New York, 1969.
4. Красовский Н.Н. Игровые задачи в встрече движений. М., 1970.
5. Friedman A. Differential Games. New York, 1971.
6. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.
7. Hajek O. Pursuit Games. New York, 1975.
8. Leitmann G. Cooperative and Noncooperative Many-Player Differential Games. Vienna, 1974.
9. Петросян Л.А. Дифференциальные игры преследования. Л., 1977.
10. Субботин А.И., Ченцов А.И. Оптимизация гарантии в задачах управления. М., 1981.
11. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев, 1992.
12. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М., 1990.
13. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск, 2009.
14. Сатимов Н.Ю., Рихсиев Б.Б. Методы решения задачи уклонения от встречи в математической теории управления. Ташкент, 2000.
15. Эйдельман С.Д., Чикрий А.А. Динамические задачи сближения для уравнений дробного порядка // Укр. мат. журн. 2000. Т. 52. № 11. С. 1566–1583.
16. Чикрий А.А., Матичин И.И. Игровые задачи для линейных систем дробного порядка // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 3. С. 262–278.

17. Чикрий А.А., Матичин И.И. О линейных конфликтно управляемых процессах с дробными производными // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 2. С. 256–270.
18. Chikrii A.A., Matychyn I.I. Game problems for fractional-order systems // New Trends Innanotechnology and Fractional Calculus Applications. New York, 2010. P. 233–241.
19. Gomoynov M.I. Solution to a zero-sum differential game with fractional dynamics via approximations // Dynamic Games and Appl. 2020. V. 10 (2). P. 417–443.
20. Петров Н.Н. Одна задача группового преследования с дробными производными и фазовыми ограничениями // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2017. Т. 27. Вып. 1. С. 54–59.
21. Петров Н.Н. Многократная поимка в одной задаче группового преследования с дробными производными // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24. № 1. С. 156–164.
22. Петров Н.Н. К задаче группового преследования в дифференциальной игре с дробными производными, фазовыми ограничениями и простой матрицей // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 857–864.
23. Банников А.С. Уклонение от группы преследователей в задаче группового преследования с дробными производными и фазовыми ограничениями // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2017. Т. 27. Вып. 3. С. 309–314.
24. Petrov N.N. Multiple capture in a group pursuit problem with fractional derivatives and phase restrictions // Mathematics. 2021. V. 9 (11). P. 1171.
25. Caputo M. Linear model of dissipation whose q is almost frequency independent. II // Geophys. R. Astr. Soc. 1967. № 13. P. 529–539.
26. Попов А.Ю., Седлецкий А.М. Распределение корней функции Миттаг-Лёффлера // Соврем. математика. Фунд. направления. 2011. Т. 40. С. 3–171.
27. Чикрий А.А., Чикрий К.В. Структура образов многозначных отображений в игровых задачах управления движением // Проблемы управления и информатики. 2016. № 3. С. 65–78.
28. Половинкин Е.С. Многозначный анализ и дифференциальные включения. М., 1990.
29. Чикрий А.А., Матичин И.И. Об аналоге формулы Коши для линейных систем произвольного дробного порядка // Доповіді НАН України. 2007. № 1. С. 50–55.
30. Петров Н.Н. Об управляемости автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617.
31. Pollard H. The completely monotonic character of the Mittag-Leffler function $E_a(-x)$ // Bull. of the Amer. Math. Soc. 1948. V. 54. № 12. P. 1115–1116.
32. Джарбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., 1966.

Удмуртский государственный университет,
г. Ижевск,
Институт математики и механики УрО РАН,
г. Екатеринбург

Поступила в редакцию 24.04.2022 г.
После доработки 28.03.2023 г.
Принята к публикации 19.05.2023 г.