

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.929

ОБОБЩЁННЫЕ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ В ДИВЕРГЕНТНОМ ВИДЕ НА ИНТЕРВАЛЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

© 2023 г. А. Л. Скубачевский, Н. О. Иванов

Рассмотрена задача Дирихле для дифференциально-разностного уравнения второго порядка в дивергентном виде с переменными коэффициентами на конечном интервале $Q = (0, d)$. Исследованы условия на правую часть уравнения, обеспечивающие гладкость обобщённого решения на всём интервале. Доказано, что обобщённое решение задачи принадлежит пространству Соболева $W_2^2(Q)$ в случае ортогональности правой части в пространстве $L_2(Q)$ конечному числу линейно независимых функций.

DOI: 10.31857/S0374064123070026, EDN: GTLPJF

Введение. В работе исследуются разрешимость и гладкость обобщённых решений первой краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения с условиями Дирихле на интервале конечной длины $(0, d)$ со сдвигами независимой переменной в старших производных. Впервые такие задачи для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа были рассмотрены в статьях [1, 2]. Было показано, что, в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, решения этих задач обладают рядом принципиально новых свойств. В частности, из-за наличия разностного оператора гладкость обобщённых решений может нарушаться во внутренних точках интервала $(0, d)$ даже при условии бесконечно дифференцируемой правой части. В работах [3, 4] рассматривалась первая краевая задача для дифференциально-разностного уравнения с постоянными коэффициентами на конечном интервале. Используя теорему об изоморфизме пространства Соболева $\dot{W}_2^1(Q)$ и подпространства $W_2^1(Q)$, состоящего из функций, удовлетворяющих нелокальным краевым условиям, исходная краевая задача для дифференциально-разностного уравнения была сведена к нелокальной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения. Такой подход позволил в явном виде получить условия ортогональности правой части уравнения конечному числу линейно независимых функций в $L_2(Q)$, обеспечивающие гладкость обобщённого решения на всём интервале. Аналогичные условия были получены для второй краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами (см. [5, 6]). Условия на коэффициенты дифференциально-разностного уравнения, обеспечивающие гладкость обобщённого решения как первой, так и второй краевых задач при любой правой части, были получены в работах [7, 8]. Задачи для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений со смешанными краевыми условиями рассматривались в статьях [9, 10].

Интерес к функционально-дифференциальным уравнениям связан с их важными приложениями, например, к задаче об успокоении системы управления с последействием [4, 11–15], к теории многослойных пластин и оболочек [4, 16, 17], к теории многомерных диффузионных процессов [4] и др.

На интервале $Q = (0, d)$, где $d = N + \theta$, $N \in \mathbb{N}$, $0 < \theta \leq 1$, рассматривается задача

$$-(R_Q u')' = f(x), \quad x \in Q, \quad (1)$$

$$u(0) = u(d) = 0, \quad (2)$$

где $f \in L_2(Q)$ – комплекснозначная функция. Оператор $R_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ задан формулой

$$R_Q = P_Q R I_Q,$$

здесь $P_Q : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(Q)$, $I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$, $R : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$, при этом

$$\begin{aligned}(P_Q u)(x) &= u(x), \quad x \in Q, \\(I_Q u)(x) &= u(x), \quad x \in Q, \quad (I_Q u)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus Q, \\(Ru)(x) &= \sum_{j=-N}^N b_j(x)u(x+j),\end{aligned}$$

где $b_j(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ – комплекснозначные функции. В дальнейшем нам понадобятся свойства оператора R_Q в пространстве $L_2(Q)$, которые будут сформулированы в виде лемм. Доказательства этих свойств можно найти в монографии [4].

Замечание 1. Заметим, что в случае дифференциально-разностных уравнений с постоянными коэффициентами исследование задачи (1), (2) аналогично исследованию следующей задачи (см. [4]):

$$\begin{aligned}-(R_Q u)'' &= f(x), \quad x \in Q, \\u(0) &= u(d) = 0.\end{aligned}$$

С другой стороны, в случае задачи (1), (2) для дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами, рассматриваемого в настоящей работе, данное утверждение является неверным.

В п. 1 рассматриваются разностные операторы R_Q на интервале Q . Вопросу существования обобщённого решения задачи (1), (2) посвящён п. 2. В п. 3 исследуется гладкость обобщённых решений исследуемой задачи на подынтервалах и на всём интервале.

1. Свойства разностного оператора R_Q на интервале Q . Рассмотрим разбиение интервала $Q = (0, d)$ на непересекающиеся подынтервалы, образованные выбрасыванием орбит концов интервала Q , которые порождаются группой целочисленных сдвигов на j . При $\theta = 1$ будем рассматривать один класс подынтервалов $Q_{1k} = (k-1, k)$, $k = \overline{1, N+1}$, а при $0 < \theta < 1$ – два класса: $Q_{1k} = (k-1, k-1+\theta)$, $k = \overline{1, N+1}$, и $Q_{2k} = (k-1+\theta, k)$, $k = \overline{1, N}$.

Через s обозначим номер класса подынтервалов. Тогда $s = 1$, если $\theta = 1$, и $s = 1, 2$, если $0 < \theta < 1$. Обозначим также $N(s) := N+1$, если $s = 1$, и $N(s) := N$, если $s = 2$.

Обозначим через $P_s : L_2(Q) \rightarrow L_2(\bigcup_k Q_{sk})$, $k = \overline{1, N(s)}$, оператор ортогонального проектирования, где

$$L_2(\bigcup_k Q_{sk}) = \{u \in L_2(Q) : u(x) = 0, \quad x \in Q \setminus \bigcup_k Q_{sk}, \quad k = \overline{1, N(s)}\}.$$

Очевидно, что $L_2(Q) = \bigoplus_s L_2(\bigcup_k Q_{sk})$.

Замечание 2. При $\theta = 1$ оператор P_1 является единичным оператором.

Лемма 1. Операторы $R : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ и $R_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ ограниченные, при этом

$$(R^* u)(x) = \sum_{j=-N}^N \overline{b_j(x-j)} u(x-j), \quad R_Q^* = P_Q R^* I_Q.$$

Доказательство следует из определений операторов P_Q и I_Q .

Лемма 2. Пространство $L_2(\bigcup_k Q_{sk})$, $k = \overline{1, N(s)}$, является инвариантным подпространством оператора R_Q .

Введём изоморфизм гильбертовых пространств $U_s : L_2(\bigcup_k Q_{sk}) \rightarrow L_2^{N(s)}(Q_{s1})$ по формуле

$$(U_s u)_k(x) = u(x+k-1), \quad x \in Q_{s1}, \quad k = \overline{1, N(s)}, \quad (3)$$

где

$$L_2^{N(s)}(Q_{s1}) = \prod_{k=1}^{N(s)} L_2(Q_{s1}).$$

Через $R_s(x)$, $x \in \overline{Q}_{s1}$, обозначим $N(s) \times N(s)$ -матрицу с элементами

$$r_{ij}^s(x) = b_{j-i}(x+i-1), \quad x \in \mathbb{R}, \quad i, j = \overline{1, N(s)}. \quad (4)$$

Другими словами,

$$R_1(x) = \begin{pmatrix} b_0(x) & b_1(x) & \dots & b_N(x) \\ b_{-1}(x+1) & b_0(x+1) & \dots & b_{N-1}(x+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{-N}(x+N) & b_{-N+1}(x+N) & \dots & b_0(x+N) \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$R_2(x) = \begin{pmatrix} b_0(x) & b_1(x) & \dots & b_{N-1}(x) \\ b_{-1}(x+1) & b_0(x+1) & \dots & b_{N-2}(x+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{-N+1}(x+N-1) & b_{-N+2}(x+N-1) & \dots & b_0(x+N-1) \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Лемма 3. Оператор $R_{Qs} = U_s R_Q U_s^{-1} : L_2^{N(s)}(Q_{s1}) \rightarrow L_2^{N(s)}(Q_{s1})$ является оператором умножения на квадратную матрицу $R_s(x)$.

Доказательство. Пусть $V \in L_2^{N(s)}(Q_{s1})$. Положим $u = U_s^{-1}V \in L_2(\bigcup_k Q_{sk})$. Тогда из (3) и (4) следуют равенства

$$(R_{Qs}V)_i(x) = (U_s R_Q u)_i(x) = \sum_{j=-i+1}^{N(s)-i} b_j(x+i-1)u(x+i-1+j) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N(s)} b_{k-i}(x+i-1)u(x+k-1) = \sum_{k=1}^{N(s)} r_{ik}^s(x)V_k(x), \quad x \in Q_{s1}.$$

Лемма доказана.

Из леммы 3 следует

Лемма 4. Оператор $R_Q + R_Q^* : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ положительно определён тогда и только тогда, когда матрицы $R_s(x) + R_s^*(x)$ положительно определены для всех $x \in \overline{Q}_{s1}$, где $R_s^*(x)$ – эрмитово сопряжённые матрицы к $R_s(x)$; $s = 1, 2$, если $0 < \theta < 1$, и $s = 1$, если $\theta = 1$.

Определение 1. Будем говорить, что уравнение (1) удовлетворяет условию сильной эллиптичности, если матрицы $R_s(x) + R_s^*(x)$ положительно определены для всех $x \in \overline{Q}_{s1}$, где $s = 1, 2$, если $0 < \theta < 1$, и $s = 1$, если $\theta = 1$.

Замечание 3. Далее будем предполагать, что уравнение (1) удовлетворяет условию сильной эллиптичности. Для доказательства основных результатов нам понадобится эквивалентная формулировка этого условия в виде выполнения неравенства

$$\operatorname{Re} (R_s(x)Y, Y)_{\mathbb{C}^{N(s)}} \geq c_1 \|Y\|_{\mathbb{C}^{N(s)}}^2 \quad (5)$$

для всех $x \in \overline{Q}_{s1}$ и $Y \in \mathbb{C}^{N(s)}$, где $c_1 > 0$ не зависит от x и Y ; $s = 1, 2$, если $0 < \theta < 1$, и $s = 1$, если $\theta = 1$.

Через $W_2^k(Q)$ обозначим пространство Соболева комплекснозначных функций из $L_2(Q)$, имеющих все обобщённые производные вплоть до k -го порядка из $L_2(Q)$, со скалярным произведением, определённым по формуле

$$(u, w)_{W_2^k(Q)} = \sum_{i=0}^k \int_Q u^{(i)} \overline{w}^{(i)} dx, \quad u, w \in W_2^k(Q).$$

Лемма 5. Пусть $\det R_s(x) \neq 0$ при $x \in \overline{Q}_{s1}$, $s = 1, 2$, если $0 < \theta < 1$, и $s = 1$, если $\theta = 1$. Тогда оператор $R_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ имеет ограниченный обратный. Пусть, кроме того, $u \in W_2^k(Q_{sj})$, $j = \overline{1, N(s)}$. Тогда $R_Q^{-1}u \in W_2^k(Q_{si})$, $i = \overline{1, N(s)}$, и справедлива оценка

$$\|R_Q^{-1}u\|_{W_2^k(Q_{si})} \leq c_2 \sum_{j=1}^{N(s)} \|u\|_{W_2^k(Q_{sj})},$$

где $c_2 > 0$ не зависит от функции u .

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.12 из [4].

2. Обобщённые решения первой краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения. Обозначим через $\dot{W}_2^1(Q)$ множество функций из пространства $W_2^1(Q)$ таких, что $u(0) = u(d) = 0$, т.е.

$$\dot{W}_2^1(Q) = \{u \in W_2^1(Q) : u(0) = u(d) = 0\}.$$

Введём неограниченный оператор $\mathcal{A}_R : L_2(Q) \supset D(\mathcal{A}_R) \rightarrow L_2(Q)$, действующий по формуле

$$\mathcal{A}_R u = -(R_Q u')', \quad u \in D(\mathcal{A}_R),$$

где $D(\mathcal{A}_R) = \{u \in \dot{W}_2^1(Q) : R_Q u' \in W_2^1(Q)\}$.

Дадим эквивалентные определения обобщённого решения задачи (1), (2).

Определение 2. Функция $u \in D(\mathcal{A}_R)$ является обобщённым решением задачи (1), (2), если она удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{A}_R u = f. \quad (6)$$

Определение 3. Функция $u \in \dot{W}_2^1(Q)$ является обобщённым решением задачи (1), (2), если для всех $w \in \dot{W}_2^1(Q)$ выполнено интегральное тождество

$$(R_Q u', w')_{L_2(Q)} = (f, w)_{L_2(Q)}.$$

Теорема 1. Пусть выполнено условие сильной эллиптичности (5). Тогда для любой функции $f \in L_2(Q)$ существует единственное обобщённое решение $u \in \dot{W}_2^1(Q)$ задачи (1), (2), при этом имеет место оценка

$$\|u\|_{W_2^1(Q)} \leq c_3 \|f\|_{L_2(Q)},$$

где $c_3 > 0$ – постоянная, не зависящая от f .

Доказательство теоремы см. в [4].

Следствие 1. Пусть уравнение (1) удовлетворяет условию сильной эллиптичности. Тогда оператор $\mathcal{A}_R$ фредгольмов, $\text{ind } \mathcal{A}_R = 0$ и $\dim \mathcal{N}(\mathcal{A}_R) = 0$.

3. Гладкость обобщённых решений. Рассмотрим вначале гладкость обобщённых решений задачи (1), (2) на подынтервалах. В этом случае справедлива следующая

Теорема 2. Пусть уравнение (1) удовлетворяет условию сильной эллиптичности (5), и пусть $u \in \dot{W}_2^1(Q)$ – обобщённое решение задачи (1), (2). Тогда $u \in W_2^2(Q_{sk})$, $k = \overline{1, N(s)}$; $s = 1, 2$, если $0 < \theta < 1$, и $s = 1$, если $\theta = 1$, при этом

$$\|u\|_{W_2^2(Q_{sk})} \leq c_4 \|f\|_{L_2(Q)}, \quad (7)$$

где $c_4 > 0$ не зависит от f .

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 4.1 из работы [5].

Следствие 2. Пусть выполняется неравенство (5), а $u \in \dot{W}_2^1(Q)$ – обобщённое решение задачи (1), (2), где $f \in L_2(Q)$. Тогда уравнение (1) удовлетворяется почти всюду на Q .

В силу теоремы 2 и следствия 2 область определения оператора $\mathcal{A}_R$ примет вид

$$D(\mathcal{A}_R) = \{u \in \dot{W}_2^1(Q) : R_Q u' \in W_2^1(Q), \quad u \in W_2^2(Q_{sk}), \quad k = \overline{1, N(s)},$$

$$s = 1, 2, \text{ если } 0 < \theta < 1, \text{ и } s = 1, \text{ если } \theta = 1\}. \quad (8)$$

Рассмотрим ограниченный оператор $A_R^0 : W_2^2(Q) \supset D(A_R^0) \rightarrow L_2(Q)$ с областью определения $D(A_R^0) = \{u \in W_2^2(Q) : R_Q u' \in W_2^1(Q), \quad u(0) = u(d) = 0\}$, действующий по формуле $A_R^0 u = \mathcal{A}_R u$ при $u \in D(A_R^0)$. Очевидно, что

$$D(A_R^0) = D(\mathcal{A}_R) \cap W_2^2(Q). \quad (9)$$

Для формулировки результатов о гладкости обобщённого решения задачи (1), (2) на всём интервале $Q = (0, d)$ введём некоторые обозначения и докажем вспомогательные результаты.

Будем предполагать, что выполнены условия

$$\sum_{k=1}^N |b_{-k}(k)| \neq 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^N |b_k(N+1-k)| \neq 0, \quad \text{если } \theta = 1, \quad (10)$$

$$\sum_{k=1}^N |b_{-k}(k)| \neq 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^N |b_k(N+\theta-k)| \neq 0, \quad \text{если } 0 < \theta < 1. \quad (11)$$

Через $G_j^1 = G_j^1(x)$ ($G_j^2 = G_j^2(x)$), $j = \overline{1, N+1}$, обозначим j -й столбец матрицы размерности $N \times (N+1)$, полученной из матрицы $R_1(x)$ вычёркиванием первой (последней) строки.

Замечание 4. Из условий (10) и (11) вытекает, что $G_1^1(0) \neq 0$ или $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$ при $0 < \theta \leq 1$.

Рассмотрим задачу (1), (2). В силу теоремы 1 операторное уравнение $\mathcal{A}_R u = f$ имеет единственное решение u_f при любой правой части $f \in L_2(Q)$. Из (9) следует, что $u_f \in D(A_R^0)$ в том и только том случае, когда

$$u_f \in W_2^2(Q). \quad (12)$$

Лемма 6. Пусть $\theta = 1$ и выполнены условия (5) и (10).

Если столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно независимы, то обобщённое решение u задачи (1), (2) принадлежит пространству $W_2^2(Q)$ тогда и только тогда, когда $u'(0+0) = u'(N+1-0) = 0$.

Если же существуют такие $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, что $\alpha_1 G_1^1(0) + \alpha_2 G_{N+1}^2(1) = 0$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, т.е. столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно зависимы, то $u \in W_2^2(Q)$ тогда и только тогда, когда $\alpha_2 u'(0+0) + \alpha_1 u'(N+1-0) = 0$.

Доказательство. 1. Рассмотрим случай, когда столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно независимы. В силу определения $D(\mathcal{A}_R)$, теоремы 2 и вложения $W_2^2(Q_{1k}) \subset C^1(\overline{Q_{1k}})$, $k = \overline{1, N+1}$, на концах подынтервалов Q_{1k} определены значения $u'(x)$. Тогда можно записать условие $u \in W_2^2(Q)$ в виде

$$u'(k+0) = u'(k-0), \quad k = \overline{1, N}. \quad (13)$$

С другой стороны, $u \in D(\mathcal{A}_R)$, следовательно,

$$(R_Q u')(k+0) = (R_Q u')(k-0), \quad k = \overline{1, N}. \quad (14)$$

В силу (3), (4) и леммы 3 равенства (14) можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^N (-r_{i,j}^1(1)\psi_j + r_{i+1,j+1}^1(0)\varphi_j) = -r_{i+1,1}^1(0)\varphi_0 + r_{i,N+1}^1(1)\psi_{N+1}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (15)$$

где $\varphi_j = (U_1 u')_{j+1}(0+0)$, $j = \overline{0, N}$, и $\psi_j = (U_1 u')_j(1-0)$, $j = \overline{1, N+1}$. Так как $r_{i,j}^1(1) = r_{i+1,j+1}^1(0)$ в силу (4), то при выполнении (13) из (15) следует соотношение

$$\varphi_0 G_1^1(0) - \psi_{N+1} G_{N+1}^2(1) = 0. \quad (16)$$

В силу линейной независимости столбцов $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ получаем

$$u'(0+0) = \varphi_0 = 0, \quad (17)$$

$$u'(N+1-0) = \psi_{N+1} = 0. \quad (18)$$

Таким образом, из условия $u \in W_2^2(Q)$ вытекают равенства (17) и (18). Обратно из (15), (17), (18) и условия (5), обеспечивающего невырожденность матрицы $R_2(1)$, вытекают равенства (13), т.е. принадлежность решения u пространству $W_2^2(Q)$.

2. Пусть теперь столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно зависимы. В этом случае существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, что $\alpha_1 G_1^1(0) + \alpha_2 G_{N+1}^2(1) = 0$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$. В силу (10), не ограничивая общности, можно предположить, что $G_{N+1}^2(1) \neq 0$. Тогда $\alpha_1 \neq 0$ и

$$G_1^1(0) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} G_{N+1}^2(1).$$

Следовательно, в силу (16) имеем

$$\left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \varphi_0 - \psi_{N+1}\right) G_{N+1}^2(1) = 0,$$

т.е. $\alpha_2 \varphi_0 + \alpha_1 \psi_{N+1} = \alpha_2 u'(0+0) + \alpha_1 u'(N+1-0) = 0$. Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть $0 < \theta < 1$ и выполнены условия (5) и (11).

Если $G_1^1(0) \neq 0$, $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$, то обобщённое решение u задачи (1), (2) принадлежит пространству $W_2^2(Q)$ тогда и только тогда, когда $u'(0+0) = u'(N+\theta-0) = 0$.

Если $G_1^1(0) = 0$ или $G_{N+1}^2(\theta) = 0$, то обобщённое решение u задачи (1), (2) принадлежит пространству $W_2^2(Q)$ тогда и только тогда, когда $u'(0+0) = 0$ в случае $G_1^1(0) \neq 0$ и $u'(N+\theta-0) = 0$ в случае $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$.

Доказательство. Аналогично части 1 доказательства леммы 6 можно записать условие (12) в виде

$$u'(k+0) = u'(k-0), \quad k = \overline{1, N}, \quad (19)$$

$$u'(k-1+\theta+0) = u'(k-1+\theta-0), \quad k = \overline{1, N}. \quad (20)$$

С другой стороны, из $u \in D(\mathcal{A}_R)$ и (8) следует

$$(R_Q u')(k+0) = (R_Q u')(k-0), \quad k = \overline{1, N}, \quad (21)$$

$$(R_Q u')(k-1+\theta+0) = (R_Q u')(k-1+\theta-0), \quad k = \overline{1, N}. \quad (22)$$

Рассмотрим, например, соотношения (22). В силу (3), (4) и леммы 3 эти соотношения можно представить в виде

$$\sum_{j=1}^N r_{i,j}^1(\theta)(\varphi^j - \psi^j) = r_{i,N+1}^1(\theta)\psi^{N+1}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (23)$$

где $\varphi^j = (U_2 P_2 u')_j(\theta+0)$, $j = \overline{1, N}$, и $\psi^j = (U_1 P_1 u')_j(\theta-0)$, $j = \overline{1, N+1}$. Поскольку $\det R_2(\theta) \neq 0$ (см. (5)), то при условии выполнения равенств (20) система (23) имеет единственное решение $\varphi^j - \psi^j = 0$, $j = \overline{1, N}$, если $\psi^{N+1} G_{N+1}^2(\theta) = 0$.

Пусть, например, выполнено второе из условий (11). Тогда $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$. Следовательно,

$$u'(N+\theta-0) = \psi^{N+1} = 0.$$

Аналогичным образом доказывается, что при выполнении условия (19) вытекающая из равенств (21) система

$$r_{i+1,1}^1(0)\varphi_0 = \sum_{j=1}^N (r_{i,j}^2(1)\psi_j - r_{i+1,j+1}^1(0)\varphi_j), \quad i = \overline{1, N},$$

имеет единственное решение $\varphi_j - \psi_j = 0$, $j = \overline{1, N}$, если $G_1^1(0) \neq 0$ и

$$u'(0+0) = \varphi_0 = 0,$$

где $\varphi_j = (U_1 P_1 u')_{j+1}(0+0)$, $j = \overline{0, N}$, и $\psi_j = (U_2 P_2 u')_j(1-0)$, $j = \overline{1, N}$. Лемма доказана.

Теорема 3. Пусть $\theta = 1$ и выполнены условия (5) и (10).

Если столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно независимы, то ограниченный оператор $A_R^0 : W_2^2(Q) \supset D(A_R^0) \rightarrow L_2(Q)$ фредгольмов и $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$, $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

Если столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно зависимы, то ограниченный оператор $A_R^0 : W_2^2(Q) \supset D(A_R^0) \rightarrow L_2(Q)$ фредгольмов и $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$, $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

Доказательство. 1. В силу теоремы 1 уравнение (6) имеет единственное решение для любой правой части $f \in L_2(Q)$, т.е. $\mathcal{N}(\mathcal{A}_R) = \{0\}$. По определению оператор A_R^0 является сужением оператора $\mathcal{A}_R$ на $W_2^2(Q)$, поэтому $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$.

2. Предположим, что столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно независимы. Докажем, что оператор A_R^0 фредгольмов и $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 2$. В силу леммы 6 решение u_f операторного уравнения (6) принадлежит области определения $D(A_R^0) = D(\mathcal{A}_R) \cap W_2^2(Q)$ тогда и только тогда, когда

$$u'_f(0+0) = 0, \quad (24)$$

$$u'_f(N+1-0) = 0. \quad (25)$$

Из неравенства (7) и вложения $W_2^2(Q_{sk}) \subset C^1(\overline{Q}_{sk})$ следует, что $u'_f(0+0)$ и $u'_f(N+1-0)$ являются линейными ограниченными функционалами на пространстве $L_2(Q)$. Тогда в силу теоремы Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве существуют единственным образом определённые функции $g_1, g_2 \in L_2(Q)$ такие, что $u'_f(0+0) = (f, g_1)_{L_2(Q)}$ и $u'_f(N+1-0) = (f, g_2)_{L_2(Q)}$. Таким образом, равенства (24), (25) можно записать в виде

$$(f, g_i)_{L_2(Q)} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Остаётся доказать, что функции g_1 и g_2 линейно независимы. Для этого достаточно показать, что существуют функции $f_1, f_2 \in L_2(Q)$, обладающие свойством

$$(f_j, g_i)_{L_2(Q)} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2,$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Докажем, например, что существует функция $f_1 \in L_2(Q)$ такая, что

$$(f_1, g_1)_{L_2(Q)} = 1, \quad (f_1, g_2)_{L_2(Q)} = 0.$$

Другими словами, нужно построить функцию f_1 , для которой

$$u'_{f_1}(0+0) := \tilde{\varphi}_0 = 1, \quad u'_{f_1}(N+1-0) := \tilde{\psi}_{N+1} = 0. \quad (26)$$

Положим в (15) $\varphi_0 = \tilde{\varphi}_0 = 1$, $\psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_{N+1} = \tilde{\psi}_{N+1} = 0$. Тогда система уравнений (15) примет вид

$$\sum_{j=1}^N r_{i,j}^1(1)\varphi_j = -r_{i+1,1}^1(0). \quad (27)$$

В силу условия (5) определитель системы уравнений (27) не равен нулю. Поэтому существует единственное решение этой системы, которое обозначим через $(\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_N)$.

Остаётся доказать, что существует функция $f_1 \in L_2(Q)$ такая, что решение u_{f_1} уравнения (6) удовлетворяет условиям (26) и $u'_{f_1}(j+0) = \tilde{\varphi}_j$, $u'_{f_1}(j-0) = 0$, $j = \overline{1, N}$.

Введём функцию

$$w(x) = \begin{cases} \sum_{j=0}^N (x-j)\tilde{\varphi}_j \xi(x-j), & x \in \bigcup_{j=0}^N (j, j+1/2), \\ 0, & x \in \bigcup_{j=1}^{N+1} (j-1/2, j), \end{cases}$$

где $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ – вещественнозначная функция, $0 \leq \xi(x) \leq 1$; $\xi(x) = 1$, $x \in [-1/8, 1/8]$, $\text{supp } \xi \subset [-1/4, 1/4]$; $\tilde{\varphi}_0 = 1$; $\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_N$ удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (27).

По построению $w \in D(\mathcal{A}_R)$. Обозначим $f_1 := \mathcal{A}_R w$. Тогда, положив $u_{f_1} = w$, получим равенства (26).

Таким образом, мы доказали, что в случае линейно независимых столбцов $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ оператор A_R^0 фредгольмов и $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

3. Предположим теперь, что столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно зависимы, т.е. существуют числа $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, такие, что $\alpha_1 G_1^1(0) + \alpha_2 G_{N+1}^2(1) = 0$. Докажем, что оператор A_R^0 фредгольмов и $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

В силу леммы 6 решение u_f операторного уравнения (6) принадлежит $D(A_R^0)$ тогда и только тогда, когда

$$\alpha_2 u'_f(0+0) + \alpha_1 u'_f(N+1-0) = 0. \quad (28)$$

Поскольку $u'_f(0+0)$ и $u'_f(N+1-0)$ являются линейными ограниченными функционалами на пространстве $L_2(Q)$, в силу теоремы Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве существует единственная функция $g \in L_2(Q)$ такая, что

$$\alpha_2 u'_f(0+0) + \alpha_1 u'_f(N+1-0) = (f, g)_{L_2(Q)}.$$

Таким образом, равенство (28) можно записать в виде $(f, g)_{L_2(Q)} = 0$.

Остаётся доказать, что существует функция $f \in L_2(Q)$, удовлетворяющая равенству

$$(f, g)_{L_2(Q)} = 1. \quad (29)$$

Не ограничивая общности, предположим, что $\alpha_1 \neq 0$. В силу (29) достаточно построить функцию $f_1 \in L_2(Q)$, для которой выполняются равенства

$$u'_{f_1}(0+0) := \tilde{\varphi}_0 = 0, \quad u'_{f_1}(N+1-0) := \tilde{\psi}_{N+1} = \frac{1}{\alpha_1}. \quad (30)$$

Положим в (15) $\varphi_0 = \tilde{\varphi}_0 = 0$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_N = 0$, $\psi_{N+1} = \tilde{\psi}_{N+1} = 1/\alpha_1$. Тогда система уравнений (15) примет вид

$$\sum_{j=1}^N r_{i,j}^1(1) \psi_j = -\frac{r_{i,N+1}^1(1)}{\alpha_1}. \quad (31)$$

Ввиду условия (5) определитель системы уравнений (31) не равен нулю. Поэтому в силу (10) существует единственное нетривиальное решение системы (31), которое обозначим через $(\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_N)$.

Введём функцию

$$w(x) = \begin{cases} 0, & x \in \bigcup_{j=0}^N (j, j+1/2), \\ \sum_{j=1}^{N+1} (x-j) \tilde{\psi}_j \xi(x-j), & x \in \bigcup_{j=1}^{N+1} (j-1/2, j), \end{cases}$$

где $\tilde{\psi}_{N+1} = 1/\alpha_1$, $\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_N$ удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (31).

По построению $w \in D(\mathcal{A}_R)$. Обозначим $f_1 := \mathcal{A}_R w$. Тогда, положив $u_{f_1} = w$, получим равенства (30).

Таким образом, доказано, что в случае линейно зависимых столбцов $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ оператор A_R^0 фредгольмов и $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 1$. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть $0 < \theta < 1$ и выполнены условия (5) и (11).

Если $G_1^1(0) \neq 0$ и $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$, то ограниченный оператор $A_R^0 : W_2^2(Q) \supset D(A_R^0) \rightarrow L_2(Q)$ фредгольмов и $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$, $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

Если $G_1^1(0) = 0$ или $G_{N+1}^2(\theta) = 0$, то ограниченный оператор $A_R^0 : W_2^2(Q) \supset D(A_R^0) \rightarrow L_2(Q)$ фредгольмов и $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$, $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

Доказательство. 1. Аналогично доказательству теоремы 3 легко показать, что

$$\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0.$$

2. Предположим, что $G_1^1(0) \neq 0$, $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$. В силу леммы 7 решение u_f операторного уравнения (6) принадлежит пространству $W_2^2(Q)$ тогда и только тогда, когда

$$u'_f(0+0) = 0, \quad (32)$$

$$u'_f(N+\theta-0) = 0. \quad (33)$$

Из неравенства (7) и вложения $W_2^2(Q_{sk}) \subset C^1(\overline{Q}_{sk})$ следует, что $u'_f(0+0)$ и $u'_f(N+\theta-0)$ являются линейными ограниченными функционалами на пространстве $L_2(Q)$. Тогда в силу теоремы Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве существуют единственным образом определённые функции $g_1, g_2 \in L_2(Q)$ такие, что $u'_f(0+0) = (f, g_1)_{L_2(Q)}$ и $u'_f(N+\theta-0) = (f, g_2)_{L_2(Q)}$. Таким образом, равенства (32), (33) можно записать в виде

$$(f, g_i)_{L_2(Q)} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Остаётся доказать, что функции g_1, g_2 линейно независимы. Для этого достаточно построить функции $f_1, f_2 \in L_2(Q)$, для которых $(f_j, g_i)_{L_2(Q)} = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$.

Докажем, например, существование функции $f_2 \in L_2(Q)$ такой, что

$$(f_2, g_1)_{L_2(Q)} = 0, \quad (f_2, g_2)_{L_2(Q)} = 1.$$

Другими словами, достаточно построить функцию f_2 , удовлетворяющую равенствам

$$u'_{f_2}(0+0) := \tilde{\varphi}_{2,0} = 0, \quad u'_{f_2}(N+\theta-0) := \tilde{\psi}_{2,N+1} = 1. \quad (34)$$

В силу (3), (4) и леммы 3 соотношения (21), (22) можно соответственно записать в виде

$$\sum_{j=1}^N r_{i,j}^1(1)(\varphi_{1,j} - \psi_{1,j}) = -r_{i+1,1}^1(0)\varphi_{1,0}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (35)$$

$$\sum_{j=1}^N r_{i,j}^1(\theta)(\varphi_{2,j} - \psi_{2,j}) = r_{i,N+1}^1(\theta)\psi_{2,N+1}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (36)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\varphi_{1,j} &= (U_1 P_1 u'_{f_2})_j (0+0), \quad j = \overline{0, N}, \\ \psi_{1,j} &= (U_2 P_2 u'_{f_2})_j (1-0), \quad j = \overline{1, N}, \\ \varphi_{2,j} &= (U_2 P_2 u'_{f_2})_j (\theta+0), \quad j = \overline{1, N}, \\ \psi_{2,j} &= (U_1 P_1 u'_{f_2})_j (\theta-0), \quad j = \overline{1, N+1}.\end{aligned}$$

Положим в (36) $\varphi_{2,1}, \dots, \varphi_{2,N} = 0$, $\psi_{2,N+1} = \tilde{\psi}_{2,N+1} = 1$. Тогда система уравнений (36) примет вид

$$-\sum_{j=1}^N r_{i,j}^1(\theta) \psi_{2,j} = r_{i,N+1}^1(\theta). \quad (37)$$

В силу условия (5) определитель системы (37) отличен от нуля. Поэтому ввиду (11) существует единственное нетривиальное решение системы (37). Обозначим это решение через $(\tilde{\psi}_{2,1}, \dots, \tilde{\psi}_{2,N})$.

Остаётся построить функцию $f_2 \in L_2(Q)$ такую, что решение u_{f_2} уравнения (6) удовлетворяет условиям (34), при этом $u'_{f_2}(\theta+j-1+0) = 0$ и $u'_{f_2}(\theta+j-1-0) = \tilde{\psi}_{2,j}$, $j = \overline{1, N}$.

Введём функцию

$$w(x) = \begin{cases} 0, & x \in Q \setminus \bigcup_{j=1}^N (\theta+j-1-\sigma, \theta+j-1), \\ \sum_{j=1}^{N+1} (x - (\theta+j-1)) \tilde{\psi}_{2,j} \eta(x - (\theta+j-1)), & x \in \bigcup_{j=1}^N (\theta+j-1-\sigma, \theta+j-1). \end{cases}$$

Здесь $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ – вещественнозначная функция, $0 \leq \eta(x) \leq 1$; $\eta(x) = 1$, $x \in [-\sigma/3, \sigma/3]$, $\text{supp } \eta \subset [-\sigma/2, \sigma/2]$; $\tilde{\psi}_{2,N+1} = 1$; $\tilde{\psi}_{2,1}, \dots, \tilde{\psi}_{2,N}$ удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (37), $0 < 2\sigma < \min\{\theta, 1-\theta\}$.

Очевидно, что в этом случае числа $\tilde{\varphi}_{1,j} = 0$, $j = \overline{0, N}$, и $\tilde{\psi}_{1,j} = 0$, $j = \overline{1, N}$, удовлетворяют системе уравнений (35).

По построению $w \in D(\mathcal{A}_R)$. Положим $f_2 := \mathcal{A}_R w$. Тогда, положив $u_{f_2} = w$, получим равенства $(f_2, g_i)_{L_2(Q)} = \delta_{i,2}$, $i = 1, 2$.

Аналогично можно построить функцию $f_1 \in L_2(Q)$ такую, что $(f_1, g_i)_{L_2(Q)} = \delta_{i,1}$, $i = 1, 2$.

Таким образом, оператор A_R^0 фредгольмов и $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

3. Если $G_1^1(0) = 0$ или $G_{N+1}^2(\theta) = 0$, то доказательство того, что оператор A_R^0 фредгольмов и $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 1$, проводится так же, как в части 2. Отличие заключается лишь в том, что в случае $G_1^1(0) \neq 0$, $G_{N+1}^2(\theta) = 0$ рассматривается система уравнений (35), а в случае $G_1^1(0) = 0$, $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$ рассматривается система (36), а не две системы (35), (36) одновременно. Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим оператор $R_Q : L_2(0, 3) \rightarrow L_2(0, 3)$, где $Q = (0, 3)$, $(Ru)(x) = b_0 u(x) + (e^{x+1} - 1)u(x+1) + e^{x-1}u(x-1)$, $b_0 \in \mathbb{R}$. Тогда $N = 2$, $\theta = 1$, а матрица $R_1(x)$ примет вид

$$R_1(x) = \begin{pmatrix} b_0 & e^{x+1} - 1 & 0 \\ e^x & b_0 & e^{x+2} - 1 \\ 0 & e^{x+1} & b_0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Предположим, что коэффициент $b_0 > 0$ удовлетворяет условию

$$b_0^2 > \frac{(e^3 + e^2 - 1)^2 + (e^2 + e - 1)^2}{4}.$$

Тогда матрица $R_1(x)$, $0 \leq x \leq 1$, удовлетворяет условию (5). Заметим, что столбцы $G_1^1(0) = (1, 0)^T$ и $G_3^2(1) = (0, e^3 - 1)^T$ линейно независимы, а условие (10), очевидно, выполнено.

Таким образом, в силу первой части теоремы 3 оператор $A_R^0 : W_2^2(0, 3) \supset D(A_R^0) \rightarrow L_2(0, 3)$ фредгольмов, $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$, при этом $\operatorname{codim} \mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

Пример 2. Рассмотрим оператор $R_Q : L_2(0, 3) \rightarrow L_2(0, 3)$, где $Q = (0, 3)$, $(Ru)(x) = b_0 u(x) + (1 - e^{x-2})u(x+1) + u(x-1) + u(x+2)$, $b_0 \in \mathbb{R}$. Тогда $N = 2$, $\theta = 1$, а матрица $R_1(x)$ имеет вид

$$R_1(x) = \begin{pmatrix} b_0 & 1 - e^{x-2} & 1 \\ 1 & b_0 & 1 - e^{x-1} \\ 0 & 1 & b_0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Нетрудно заметить, что условие (10) выполнено, а столбцы $G_1^1(0) = (1, 0)^T$ и $G_3^2(1) = (1, 0)^T$ линейно зависимы.

Будем предполагать, что коэффициент $b_0 > 0$ удовлетворяет неравенству

$$4b_0^3 - b_0(2 + (2 - e^{-1})^2) + (2 - e^{-1}) > 0.$$

Тогда матрица $R_1(x)$, $0 \leq x \leq 1$, удовлетворяет условию (5).

Следовательно, в силу второй части теоремы 3 оператор $A_R^0 : W_2^2(0, 3) \supset D(A_R^0) \rightarrow L_2(0, 3)$ фредгольмов, $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$ и $\operatorname{codim} \mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

Пример 3. Рассмотрим оператор $R_Q : L_2(0, 11/4) \rightarrow L_2(0, 11/4)$, где $Q = (0, 11/4)$, $(Ru)(x) = b_0 u(x) + e^{x-1}u(x+1) + e^{x-2}u(x-1)$, $b_0 \in \mathbb{R}$. Следовательно, $N = 2$, $\theta = 3/4$, при этом

$$R_1(x) = \begin{pmatrix} b_0 & e^{x-1} & 0 \\ e^{x-1} & b_0 & e^x \\ 0 & e^x & b_0 \end{pmatrix}, \quad x \in [0, 3/4],$$

$$R_2(x) = \begin{pmatrix} b_0 & e^{x-1} \\ e^{x-1} & b_0 \end{pmatrix}, \quad x \in [3/4, 1].$$

Матрицы $R_1(x)$ при $0 \leq x \leq 3/4$ и $R_2(x)$ при $3/4 \leq x \leq 1$ удовлетворяют условию (5) при

$$b_0 > 0, \quad b_0^2 > e^{-1/2} + e^{3/2}. \quad (38)$$

Будем предполагать, что условие (38) выполнено.

Очевидно, что столбцы $G_1^1(0) = (e^{-1}, 0)^T$ и $G_3^2(\theta) = (0, e^{3/4})^T$ ненулевые, т.е. выполнено условие (11).

Таким образом, в силу теоремы 4 оператор $A_R^0 : W_2^2(0, 11/4) \supset D(A_R^0) \rightarrow L_2(0, 11/4)$ фредгольмов, $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$ и $\operatorname{codim} \mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

Заключение. Отметим, что используемый в данной работе подход к нахождению числа условий типа ортогональности на правую часть дифференциально-разностного уравнения, обеспечивающих соответствующую гладкость обобщённого решения на всём интервале $(0, d)$, является более универсальным, чем разработанный ранее в [3, 4]. В них использовалось сведение дифференциально-разностного уравнения с постоянными коэффициентами и однородными условиями Дирихле к обыкновенному дифференциальному уравнению с многоточечными краевыми условиями. Однако в случае дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами такой подход невозможен, так как разностный оператор с переменными коэффициентами и однородными условиями Дирихле не коммутирует с оператором дифференцирования первого порядка. Поэтому здесь был использован подход, основанный на представлении первых производных решения на концах интервала $(0, d)$ в виде линейных ограниченных функционалов в пространстве $L_2(0, d)$, зависящих от правых частей дифференциально-разностного уравнения. Данный подход впервые был разработан для исследования гладкости обобщённых решений задачи Неймана для дифференциально-разностного уравнения (см. [5, 6]). Необходимость использования такого подхода в работах [5, 6] была связана с тем, что дифференциально-разностное уравнение с условиями Неймана (в отличие от условий Дирихле) нельзя свести к обыкновенному дифференциальному уравнению с нелокальными краевыми условиями (доказательство см. в [9, 10]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания (проект FSSF-2023-0016).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каменский Г.А., Мышкис А.Д. Постановка краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами в старших членах // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 3. С. 409–418.
2. Каменский А.Г. Краевые задачи для уравнений с формально симметричными дифференциально-разностными операторами // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 5. С. 815–824.
3. Каменский Г.А., Мышкис А.Д., Скубачевский А.Л. О гладких решениях краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа // Укр. мат. журн. 1985. Т. 37. № 5. С. 581–585.
4. Skubachevskii A.L. Elliptic functional differential equations and applications // Operator Theory. Advances and Applications. Basel; Boston; Berlin, 1997. V. 91.
5. Скубачевский А.Л., Иванов Н.О. Об обобщённых решениях второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами // Соврем. математика. Фунд. направления. 2021. Т. 67. № 3. С. 576–595.
6. Скубачевский А.Л., Иванов Н.О. Об обобщённых решениях второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами на интервале нецелой длины // Мат. заметки. 2022. Т. 111. № 6. С. 873–886.
7. Неверова Д.А., Скубачевский А.Л. О классических и обобщённых решениях краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами // Мат. заметки. 2013. Т. 94. № 5. С. 702–719.
8. Neverova D.A. Generalized and classical solutions to the second and third boundary-value problem for differential-difference equations // Funct. Differ. Equat. 2014. V. 21. P. 47–65.
9. Лийко В.В., Скубачевский А.Л. Сильно эллиптические дифференциально-разностные уравнения со смешанными краевыми условиями в цилиндрической области // Соврем. математика. Фунд. направления. 2019. Т. 65. № 4. С. 635–654.
10. Лийко В.В., Скубачевский А.Л. Смешанные задачи для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений в цилиндре // Мат. заметки. 2020. Т. 107. № 5. С. 693–716.
11. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М., 1968.
12. Осипов Ю.С. О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 5. С. 605–618.
13. Кряжиский А.В., Максимов В.И., Осипов Ю.С. О позиционном моделировании в динамических системах // Прикл. математика и механика. 1983. Т. 47. № 6. С. 883–890.
14. Скубачевский А.Л. К задаче об успокоении системы управления с последействием // Докл. РАН. 1994. Т. 335. № 2. С. 157–160.
15. Адхамова А.Ш., Скубачевский А.Л. Об одной задаче успокоения нестационарной системы управления с последействием // Соврем. математика. Фунд. направления. 2019. Т. 65. № 4. С. 547–556.
16. Onanov G.G., Skubachevskii A.L. Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells // Math. Model. Nat. Phenom. 2017. V. 12. № 6. P. 192–207.
17. Onanov G.G., Tsvetkov E.L. On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory // Russ. J. Math. Phys. 1995. V. 3. № 4. P. 491–500.

Российский университет дружбы народов
имени Патриса Лумумбы, г. Москва,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 31.05.2023 г.
После доработки 03.06.2023 г.
Принята к публикации 14.06.2023 г.