

## Неоднородности динамики и локального поля в $\pm J$ изинговских спиновых стеклах<sup>1)</sup>

В. А. Абалмасов<sup>2)</sup>

*Институт автоматки и электрометрии Сибирского отделения РАН, 630090 Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 17 октября 2024 г.

После переработки 17 октября 2024 г.

Принята к публикации 7 ноября 2024 г.

Вычислен средний размер домена для нулевого и ненулевого абсолютного значения локального поля в  $\pm J$  изинговских спиновых стеклах в 2D и 3D при разных температурах, используя симуляции Монте-Карло. Абсолютные значения локального поля определяют вероятности переворота спина и поэтому полученные размеры доменов проливают свет на динамические неоднородности в стеклах, которые сейчас активно изучаются. Оказывается, что средний размер домена для ненулевого абсолютного значения локального поля, соответствующего медленной динамике спина при низких температурах, увеличивается и насыщается при уменьшении температуры главным образом за счет увеличения вероятности существования ненулевого локального поля. Однако также выявлен небольшой эффект пространственной корреляции локального поля. Данные результаты могут быть полезны для понимания природы и особенностей стекольного перехода и динамических неоднородностей в стеклах.

DOI: 10.31857/S0370274X24120172, EDN: CIRHYO

Спиновые стекла были экспериментально обнаружены в разбавленных случайно магнитных сплавах в 1970-х гг. благодаря неожиданному скачку магнитной восприимчивости при определенной температуре, при этом упорядочения магнитных моментов не было обнаружено вплоть до нулевой температуры [1]. Вскоре за этим появились несколько теоретических моделей, описывающих данный эффект. Значительный теоретический прогресс был достигнут в понимании модели Шеррингтона–Киркпатрика со случайными взаимодействиями бесконечного радиуса действия [2] благодаря решающему вкладу метода реплик с нарушением симметрии [3, 4]. В то же время, короткодействующая модель Эдвардса–Андерсона [5], в которой фиксированный беспорядок и фрустрация взаимодействия вызваны случайно распределенными связями между соседними спинами, все еще гораздо менее изучена, несмотря на ее большее соответствие условиям эксперимента [6–9].

Для спиновых стекол, как и для структурных стекол, характерно сильное замедление динамики при низкой температуре, при этом затухание автокорреляционной функции становится неэкспоненциальным [10]. Это происходит из-за определенных кооперативных явлений, при которых движение боль-

ших областей спинов или ионов становится динамически коррелированным [11–14]. В связи с этим динамические неоднородности широко изучались экспериментально и численно как в спиновых стеклах [10, 13, 15–17], так и в структурных стеклах [18–22]. С помощью моделирования методом Монте-Карло (МК) было показано, что масштаб динамической неоднородности, полученный из пространственной корреляции времен релаксации спина в модели Изинга с константами связи  $\pm J$  в размерностях  $d = 2$  и 3, растет с понижением температуры [10]. Однако из-за замедления спиновой динамики расчеты в статье [10] проводились только выше температуры стеклования, и значения масштаба длины не были явно указаны. Качественные доказательства сильных пространственно-временных неоднородностей в этой модели при низких температурах были получены в численных исследованиях среднего времени переворота спина в статье [16], хотя основное внимание там уделялось временным неоднородностям. Позже динамические неоднородности были связаны со структурой так называемого остова (backbone) [23–26], которая включает в себя набор связей с постоянным состоянием (нарушенные или удовлетворенные), а также солидарные спины, сохраняющие одинаковую относительную ориентацию, во всех конфигурациях основного состояния [27]. Аналогично, динамические неоднородности в структурных стеклах были связа-

<sup>1)</sup>См. дополнительный материал к данной статье на сайте нашего журнала [www.jetpletters.ac.ru](http://www.jetpletters.ac.ru)

<sup>2)</sup>e-mail: [abalmasov@iae.nsc.ru](mailto:abalmasov@iae.nsc.ru)

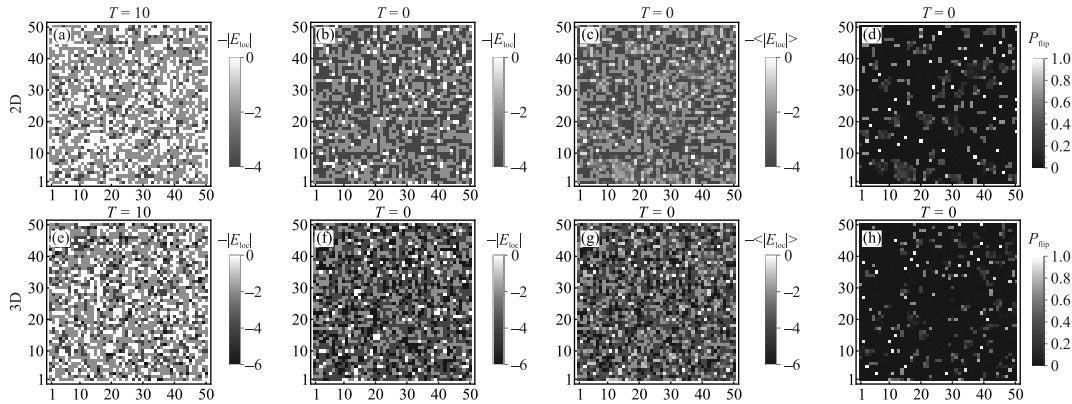


Рис. 1. Типичные конфигурации абсолютной величины локального поля (взятой со знаком минус) для модели стекла  $\pm J$  Изинга в 2D и 3D (с изображением одной из плоскостей) при температуре  $T = 10$  (a) и (e) и  $T = 0$  (b) и (f) соответственно. Для наглядности показана только четверть образца, полный размер которого  $L = 100$ . При этом возможны только дискретные значения локального поля, указанные в легендах. (c) – Абсолютное значение локального поля (со знаком минус), усредненное по  $10^6$  МКШ в 2D и (g) – по  $10^4$  МКШ в 3D, при нулевой температуре. Эти значения имеют непрерывный спектр вследствие усреднения. (d) – Вероятность переворота спина  $P_{\text{flip}}$ , измеренная за  $t_{\text{cal}} = 10^6$  МКШ в 2D и (h) за  $10^4$  МКШ в 3D при нулевой температуре. В самых темных областях спины совсем не переворачиваются за время моделирования

ны с локальными равновесными флуктуациями состава [18].

В то же время динамика каждого спина определяется локальным полем в его расположении, и пространственную конфигурацию этого поля легко получить при любой температуре в ходе МК-моделирования. Отметим также, что распределение локального поля важно для некоторых теорий среднего поля [5, 28–31]. Кроме того, распределение локального поля может быть получено экспериментально из интерпретации спектров Мессбауэра и ядерного магнитного резонанса [6]. В данной статье, используя МК-моделирование, вычисляется средний размер доменов локального поля при различной температуре в модели  $\pm J$  изинговского спинового стекла (также известной как бимодальная или бинарная модель Эдвардса–Андерсона). В конечном итоге это позволяет нам определить характерный масштаб динамических неоднородностей.

Гамильтониан модели имеет вид

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} s_i s_j, \quad (1)$$

где суммирование производится по всем парам ближайших соседей, все спины  $s_i = \pm 1$  – изинговского типа, а связи  $J_{ij}$  с равной вероятностью принимают значения  $\pm J$  (в наших симуляциях их сумма равна нулю для каждого образца, а в качестве единицы энергии в статье используется  $J = 1$ ).

При МК-моделировании используются алгоритм Метрополиса и периодические граничные условия

во всех направлениях. Спины размещены на квадратной (в 2D) и кубической (в 3D) решетке линейного размера  $L$ , равного числу спинов в каждом направлении. Каждый спин  $s_i$  адресуется случайным образом во время каждого шага МК на спин (МКШ) и переворачивается с вероятностью  $P = \min[\exp(-2s_i E_i/T), 1]$ , где  $E_i = \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} s_j$  – локальное поле в расположении спина, а  $T$  – температура в энергетических единицах. Абсолютные значения локального поля  $|E_i|$  могут быть 0, 2 и 4 в 2D, а также 6 в 3D (в энергетических единицах). При низкой температуре спины ориентированы преимущественно в направлении локального поля и вероятность их переворота (возбуждения) определяется фактором Больцмана  $\exp(-2|E_i|/T)$ . Таким образом, вся спиновая динамика обусловлена главным образом теми спинами, которые находятся в нулевом локальном поле, и их возможной диффузией вокруг своего местоположения. При более высоких температурах порядка абсолютной величины ненулевого локального поля также начинает действовать процесс активации.

В обоих измерениях исследовались образцы размером  $L = 100$ , достаточно большие, чтобы минимизировать эффект конечного размера. Моделирование проводилось при 100 температурах с интервалом, экспоненциально уменьшающимся с температурой, от максимальной температуры  $T_{\text{max}} = 10$  вниз до  $T_{\text{min}} = 0.001$  (которая в дальнейшем называется нулевой, поскольку при этой температуре никакой динамики активации не ожидается). При каждой

температуре термодинамические величины рассчитывались за общее время  $t_{\text{cal}} = 10^6$  в 2D и  $10^4$  МКШ в 3D с предварительной термализацией в течение  $t_{\text{th}} = 10^4$  и  $10^3$  МКШ соответственно. Достигнутые таким образом самые низкие энергии,  $\mathcal{E}_{\text{min}} = -1.400$  в 2D и  $-1.777$  в 3D, очень близки к энергиям основного состояния с соответствующими значениями  $\mathcal{E}_{\text{GS}} = -1.401$  и  $-1.787$ , полученными с помощью специальных алгоритмов [32].

Снимки конфигураций абсолютных значений локального поля при максимальной и нулевой температурах показаны на рис. 1a и b для 2D, а также на рис. 1e и f в 3D (где показана одна из плоскостей). При низкой температуре увеличивается количество узлов решетки с ненулевыми абсолютными значениями локального поля, а также типичный размер соответствующих доменов (т.е. последовательных узлов с одинаковым абсолютным значением локального поля по одной из координат). Фактически это соответствует ожидаемому уменьшению полной энергии при понижении температуры. Однако даже при нулевой температуре спины в нулевом локальном поле могут свободно переворачиваться (в литературе эти спины иногда называют свободными (free) [16], отвязанными (loose) [6, 33] или бездельными (idle) [27]). Такой переворот меняет локальное поле в соседних узлах, и если в каком-то из них оно становится равным нулю, соответствующие спины также становятся свободными и могут переворачиваться. Этот процесс выглядит как диффузия свободных спинов и в то же время может рассматриваться как флуктуация формы, размера и расположения доменов с замороженными спинами.

Переворот некоторых свободных спинов не приводит к появлению новых свободных спинов. Эти свободные спины не диффундируют и остаются изолированными. Это видно на рис. 1c и g, где показаны абсолютные значения локального поля, усредненные за все время моделирования  $t_{\text{cal}}$  при нулевой температуре. Некоторые узлы с нулевым локальным полем, показанные белым цветом на снимках на рис. 1b и f, теперь имеют ненулевое локальное поле, усредненное по времени, с небольшим изменением цвета, тогда как другие остаются белыми. Более явно это видно на рис. 1d и h, где показана вероятность переворота спина  $P_{\text{flip}}$ , определяемая как отношение общего количества переворотов спина в данном узле ко времени моделирования  $t_{\text{cal}}$ . Она равна единице для изолированных свободных спинов, имеет ненулевое значение в местах диффузии свободных спинов и нулевое там, где локальное поле всегда имеет конечное значение. При нулевой температуре общая доля сво-

бодных спинов в любой момент времени составляет  $n_0 \approx 0.078$  в 2D и  $0.055$  в 3D, а доля изолированных свободных спинов равна  $n'_0 \approx 0.01$  в обоих случаях.

Измерение размера доменов нулевых и ненулевых абсолютных значений локального поля производится явно (подсчет количества последовательных узлов решетки с соответствующими значениями поля по одной из координат), и их распределение усредняется по  $10^4$  измерениям за время моделирования  $t_{\text{cal}}$ . Это распределение оказывается очень близким к экспоненциальному при каждой температуре (см. дополнительные материалы, рис. S1). Оно не зависит от времени после термализации, а усреднение по множеству измерений лишь уменьшает статистические погрешности. Корреляционные функции являются самоусредняющимися, поэтому моделирование производится только для нескольких достаточно больших образцов без усреднения по случайным константам связи  $J_{ij}$ . Затем находится средний размер домена, который показан на рис. 2 как функция температуры. Кроме того, вычисляется вероятность нахождения нулевых и ненулевых абсолютных значений локального поля  $q$ , что позволяет определить средний размер домена в обоих случаях, предполагая отсутствие пространственной корреляции, как  $l_q = \sum_{n=1}^{\infty} nq^n / \sum_{n=1}^{\infty} q^n = (1-q)^{-1}$ . Этот размер показан на рис. 2 пустыми маркерами. Он немного меньше фактического среднего размера домена (разница составляет менее примерно 6% в 2D и вдвое меньше в 3D и показана на дополнительных материалах, рис. S2). Это означает, что фактически домены слегка скоррелированы в пространстве. Пространственная корреляция узлов с одинаковой абсолютной величиной локального поля может быть качественно объяснена. Действительно, рассмотрим, например, узел с максимальным абсолютным значением локального поля. При достаточно низкой температуре спин в этом узле параллелен локальному полю и, следовательно, все его связи с соседними спинами удовлетворены, т.е. соответствуют наименьшей энергии. Как следствие, соседние спины гарантированно имеют хотя бы одну удовлетворенную связь, и вероятность максимального значения локального поля в их позиции поэтому выше. При высокой температуре пространственные корреляции исчезают, и обе длины стремятся к своему высокотемпературному пределу, соответствующему случайной конфигурации спинов, который составляет ровно  $8/5$  для  $E_{\text{loc}} = 0$  и  $8/3$  для  $E_{\text{loc}} \neq 0$  в 2D и  $16/11$  и  $16/5$  в 3D соответственно. При этом отличие от этого предела уменьшается обратно пропорционально температуре.

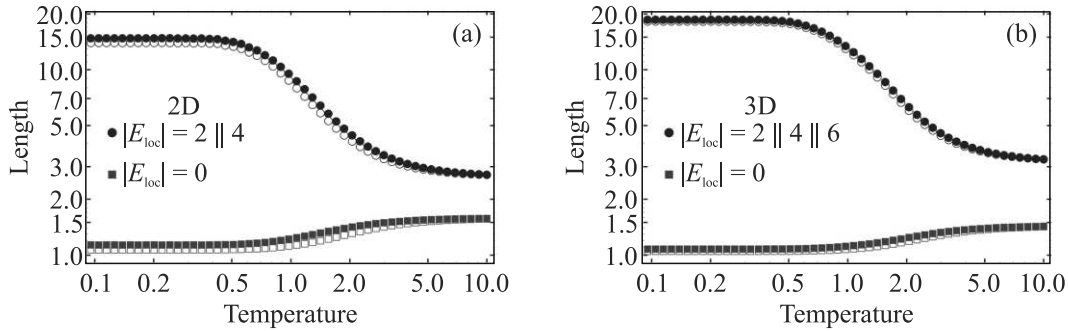


Рис. 2. (Цветной онлайн) Средний размер домена для нулевых и ненулевых абсолютных значений локального поля в зависимости от температуры для модели  $\pm J$  Изинга в 2D (a) и 3D (b) (ср. с рис. 1a, b, e и f). Закрашенные маркеры соответствуют прямым измерениям. Пустые маркеры соответствуют расчету по вероятностям появления этих локальных полей при условии отсутствия их пространственной корреляции. Разница составляет менее 10% в 2D и вдвое меньше в 3D. Температура стеклования равна нулю в 2D и  $T_g = 1.102$  в 3D [34]

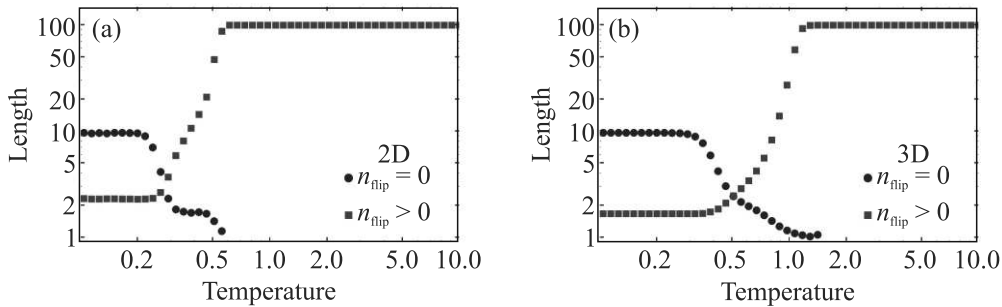


Рис. 3. (Цветной онлайн) Средний размер домена для нулевой и ненулевой частоты переворота спина (ср. с рис. 1d и h) в зависимости от температуры для модели  $\pm J$  Изинга в 2D при времени моделирования  $t_{\text{cal}} = 10^6$  МКШ (a) и 3D при  $t_{\text{cal}} = 10^4$  МКШ (b)

Поскольку более высокие значения локального поля соответствуют более низким энергиям спина, температурная зависимость вероятности ненулевого локального поля и среднего размера его домена, показанная на рис. 2, согласуется с температурной зависимостью энергии, которая обратно пропорциональна  $T$  при высоких температурах с постепенным насыщением ниже  $T \approx 2$ , см. дополнительные материалы, рис. S3. При нулевой температуре средний размер домена для нулевого и ненулевого локального поля составляет  $l_0 \approx 1.10$  и  $l \approx 15$  в 2D и  $l_0 \approx 1.14$  и  $l \approx 19$  в 3D соответственно. Эти значения практически не меняются при дальнейшем увеличении размера образца. Заметим, что средний размер домена, рассчитанный отдельно для каждого абсолютного значения локального поля, уменьшается с температурой для  $|E_{\text{loc}}| \leq 2$  и возрастает при больших абсолютных значениях локального поля, см. дополнительные материалы, рис. S4. Надо отметить, что в модели Изинга средний размер области ненулевого локального поля увеличивается до бесконечности ниже температуры фазового перехода.

Средний размер домена также можно рассчитать по корреляционной функции  $f(r) = q^{-1} \sum_{i,j} \bar{E}_{ij} \bar{E}_{ij+r}$ , где  $\bar{E}_{ij} = 0$ , если  $E_{ij} = 0$ , иначе  $\bar{E}_{ij} = 1$  и  $q = \sum_{i,j} \bar{E}_{ij} \bar{E}_{ij}$  — вероятность ненулевого локального поля, как  $l_d = \sum_{r=1}^{\infty} r g(r) / \sum_{r=1}^{\infty} g(r)$  с  $g(r) = \prod_{r'=1}^r f(r')$ . Однако этот подход требует гораздо большего количества вычислений для получения результата.

Распределение размеров доменов для локальной энергии при низкой температуре, когда каждый спин параллелен своему локальному полю, такое же, как и для локального поля. При более высоких температурах лишь часть спинов равная  $(1 + \alpha)^{-1}$ , где  $\alpha = \exp(-2|E_{\text{loc}}|/T)$ , находятся в состоянии с самой низкой энергией, а остальные находятся в возбужденном состоянии со спинами, антипараллельными локальному полю. Таким образом, средний размер домена для локальной энергии с ростом температуры становится меньше, чем для соответствующего абсолютного значения локального поля.

Чтобы связать полученный средний размер домена локального поля с динамическими неоднородно-

стями, мы находим средний размер доменов, в которых нет переворота спина за время моделирования  $t_{\text{cal}}$  и доменов с количеством переворотов  $n_{\text{flip}} > 0$ , как показано на рис. 3. При низкой температуре средняя диффузионная длина свободных спинов составляет около 2.3 в 2D и 1.7 в 3D, тогда как средний размер замороженной спиновой области в обоих случаях составляет  $l_{\text{frozen}} \approx 10$ , см. также рис. 1d и h для сравнения. Средний размер домена для замороженных спинов начинает уменьшаться при температуре, соответствующей термической активации хотя бы одного спина в ходе моделирования, которая определяется уравнением  $t_{\text{cal}} N \exp(-2|E_{\text{loc}}|/T) \sim 1$ , где  $N = L^d$  – общее количество спинов в образце. При температуре, определяемой тем же уравнением без  $N$ , что означает активацию всех спинов, находящихся в заданном локальном поле, устанавливается новое значение  $l_{\text{frozen}}$ , которое соответствует среднему размеру области более высоких значений локального поля. Например, в 2D средний размер домена для  $|E_{\text{loc}}| = 4$  составляет около 2.06, см. дополнительные материалы, рис. S4. В конечном счете, измеренный средний размер области ненулевого локального поля является верхней границей масштаба динамической неоднородности в модели.

Обратите внимание, что фазовый переход для спинового стекла, который происходит при  $T_g = 0$  в 2D и  $T_g = 1.102$  в 3D [34], не влияет на зависимость среднего размера домена от температуры (рис. 2). В то же время корреляционная длина поля перекрытия двух реплик  $q_i^{ab} = s_i^a s_i^b$  при этих температурах расходится [34] (для одной реплики  $[(s_i s_j)]_{\text{av}} = \delta_{ij}$  при усреднении по времени и беспорядку [33]).

В случае гауссовского распределения констант связи  $J_{ij}$  распределение локального поля  $P(E_{\text{loc}})$  линейно при  $E_{\text{loc}} \rightarrow 0$  с  $P(0) \approx 0.065$  в 2D и  $\approx 0.055$  в 3D [35] (интересно, что эти значения близки к вероятностям нахождения нулевого локального поля, т.е. свободных спинов,  $n_0$  в модели  $\pm J$  Изинга, приведенным выше). При любой температуре можно рассматривать области с абсолютными значениями локального поля  $|E_{\text{loc}}| < cT$ , которые соответствуют почти свободно переворачивающимся активированным спинам, и  $|E_{\text{loc}}| > cT$ , соответствующие замороженным спинам, где можно выбрать множитель  $c \sim 10$ . При низкой температуре число активированных спинов уменьшается пропорционально температуре, а доля замороженных спинов  $q$  линейно приближается к единице. Это должно привести к тому, что средний размер домена замороженных спинов,  $l_q = (1 - q)^{-1} \propto T^{-1}$ , будет обратно пропорционален температуре. Этот случай должен быть ближе

к структурным стеклам, где можно найти распределение по размерам доменов с разной второй пространственной производной локальной потенциальной энергии, определяющей частоту колебаний каждой частицы, и частицы с частотой выше определенного порога, пропорционального температуре, можно считать замороженными.

В заключение отметим, что мы связали пространственные динамические неоднородности в бимодальной модели спинового стекла с изинговскими спинами с доменами с нулевыми и ненулевыми локальными полями, в которых спины могут свободно переворачиваться или замерзнуть соответственно при низкой температуре. Соответствующие средние размеры доменов были получены с помощью моделирования методом Монте-Карло. Установлено, что средний размер домена ненулевого локального поля определяется главным образом вероятностью появления этого поля, а корреляции между соседними узлами решетки малы. Средний размер этого домена увеличивается с понижением температуры и насыщается до конечного значения при низких температурах. Соответствующие домены слегка флуктуируют по размеру, форме и положению даже при нулевой температуре из-за диффузии свободных спинов, находящихся в нулевом локальном поле. Качественно одинаковое поведение для доменов наблюдается в 2D и 3D, и оно оказывается не подверженным влиянию фазового перехода в стеклообразное состояние. Данное исследование проливает свет на пространственные динамические неоднородности в модели  $\pm J$  Изинга и дает некоторое представление о них в других моделях стекла.

Автор благодарен Новикову В.Н. и Вугмейстеру Б.Е. за обсуждение работы. Автор также признателен Сибирскому суперкомпьютерному центру Сибирского отделения Российской академии наук (СО РАН) за предоставление суперкомпьютерного оборудования.

**Финансирование работы.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда # 23-22-00320.

**Конфликт интересов.** Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. J. A. Mydosh, Rep. Prog. Phys. **78**, 052501 (2015).
2. D. Sherrington and S. Kirkpatrick, Phys. Rev. Lett. **35**, 1792 (1975).
3. G. Parisi, Phys. Rev. Lett. **71**, 471 (1995).
4. M. Mezard, G. Parisi, and M. A. Virasoro, *Spin Glass Theory And Beyond: An Introduction To The Replica Method And Its Applications*, World Scientific Lecture

- Notes In Physics, World Scientific Publishing Co., Singapore (1987).
5. S. F. Edwards and P. W. Anderson, *Journal of Physics F: Metal Physics* **5**, 965 (1975).
  6. K. Binder and A. P. Young, Spin glasses: Experimental facts, theoretical concepts, and open questions, *Reviews of Modern Physics* **58**, 801 (1986).
  7. N. Kawashima and H. Rieger, *Recent progress in spin glasses*, in *Frustrated Spin Systems*, World Scientific Publishing Co., Singapore (2013), p. 509.
  8. A. Altieri and M. Baity-Jesi, *An introduction to the theory of spin glasses*, in *Encyclopedia of Condensed Matter Physics*, Elsevier, Amsterdam (2024), p. 361.
  9. C. M. Newman and D. L. Stein, *J. Stat. Phys.* **191**, 128 (2024).
  10. S. C. Glotzer, N. Jan, T. Lookman, A. B. MacIsaac, and P. H. Poole, *Phys. Rev. E* **57**, 7350 (1998).
  11. L. Berthier, G. Biroli, J.-P. Bouchaud, L. Cipelletti, D. E. Masri, D. L'Hôte, F. Ladieu, and M. Pierno, *Science* **310**, 1797 (2005).
  12. A. Montanari and G. Semerjian, *J. Stat. Phys.* **125**, 23 (2006).
  13. R. Alvarez Banos, A. Cruz, L. A. Fernandez et al. (Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **105**, 177202 (2010).
  14. M. Baity-Jesi, E. Calore, A. Cruz et al. (Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **118**, 157202 (2017).
  15. P. H. Poole, S. C. Glotzer, A. Coniglio, and N. Jan, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3394 (1997).
  16. F. Ricci-Tersenghi and R. Zecchina, *Phys. Rev. E* **62**, R7567 (2000).
  17. L. D. C. Jaubert, C. Chamon, L. F. Cugliandolo, and M. Picco, *J. Stat. Mech.: Theory Exp.* **2007**, P05001 (2007).
  18. W. Kob, C. Donati, S. J. Plimpton, P. H. Poole, and S. C. Glotzer, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2827 (1997).
  19. G. Parisi, *J. Phys. Chem. B* **103**, 4128 (1999).
  20. L. Berthier and G. Biroli, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 587 (2011).
  21. G. Biroli, K. Miyazaki, and D. R. Reichman, *Dynamical Heterogeneity in Glass-Forming Liquids*, in *Spin Glass Theory and Far Beyond*, World Scientific Publishing Co., Singapore (2023), p. 187.
  22. V. N. Novikov, *J. Chem. Phys.* **161**, 054501 (2024).
  23. F. Romá, S. Bustingorry, and P. M. Gleiser, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 167205 (2006).
  24. F. Romá, S. Bustingorry, P. M. Gleiser, and D. Dominguez, *Phys. Rev.* **98**, 097203 (2007).
  25. F. Romá, S. Bustingorry, and P. M. Gleiser, *Phys. Rev. B* **81**, 104412 (2010).
  26. F. Romá and S. Risau-Gusman, *Phys. Rev. E* **88**, 042105 (2013).
  27. J. Vannimenus, J. M. Maillard, and L. de Seze, *Journal of Physics C: Solid State Physics* **12**, 4523 (1979).
  28. B. E. Vugmeister and V. A. Solid State Commun. **63**, 323 (1987).
  29. B. E. Vugmeister and M. D. Glinchuk, *Rev. Mod. Phys.* **62**, 993 (1990).
  30. V. A. Abalmasov and B. E. Vugmeister, *Rev. Mod. Phys. E* **107**, 034124 (2023).
  31. V. Abalmasov, *SciPost Physics* **16**, 151 (2024).
  32. F. Romá, S. Risau-Gusman, A. J. Ramirez-Pastor, F. Nieto, and E. E. Vogel, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **388**, 2821 (2009).
  33. D. Landau and K. Binder, *A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics*, Cambridge University Press, Cambridge (2021).
  34. M. Baity-Jesi, R. A. Banos, A. Cruz et al. (Collaboration), *Phys. Rev. B* **88**, 224416 (2013).
  35. S. Boettcher, H. G. Katzgraber, and D. Sherrington, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **41**, 324007 (2008).