

Экстремальные флуктуации интенсивности излучения в турбулентной атмосфере

И. В. Колоколов⁺¹⁾, В. В. Лебедев⁺*

⁺Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия

*Научно-исследовательский университет Высшая школа экономики, 101000 Москва, Россия

Поступила в редакцию 18 октября 2024 г.

После переработки 1 ноября 2024 г.

Принята к публикации 4 ноября 2024 г.

Мы исследуем статистику флуктуаций интенсивности светового пучка при его распространении в турбулентной атмосфере. Нас интересует вероятность относительно больших значений интенсивности пучка. Рассматривается модель единичного фазового экрана. Найден хвост функции плотности вероятности, характеризующийся показателем растянутой экспоненты $7/12$. Устанавливаются условия реализации этого хвоста и обсуждается общая картина.

DOI: 10.31857/S0370274X24120044, EDN: RNHKLM

Наша работа посвящена теории распространения света в турбулентной атмосфере или, в более общем плане, электромагнитной волны в турбулентной среде. Основным эффектом, который исследуется в рамках этой задачи, является дифракция лазерного луча на флуктуациях показателя преломления, которые вызываются турбулентными пульсациями. Колебания показателя преломления являются случайным во времени и пространстве полем, свойства которого должны быть описаны статистически. Поэтому теоретические предсказания поведения лазерного луча касаются средних значений (или соответствующих функций плотности вероятности), которые экспериментально получаются при усреднении по времени.

Проблема распространения светового луча в атмосфере имеет долгую историю. Подход к проблеме восходит к классическим работам [1–5], посвященным развитой турбулентности и статистике пассивных скалярных полей в турбулентных потоках. Основные теоретические результаты, касающиеся распространения лазерного луча в турбулентной атмосфере, были получены в шестидесятых и семидесятых годах 20-го века, они обобщены в ряде монографий [6–11]. В последнее время наблюдается возрождение интереса к этой теме [12–16], связанное, в основном, с численным моделированием распространения лазерного луча (электромагнитной волны) в турбулентной среде, что позволяет получить подробную информацию о процессе.

Известные теоретические результаты, приведенные в работах [6–11], в значительной степени описывают типичное поведение светового пучка в атмосфере. В то же время в уравнении для электромагнитного поля случайный показатель преломления является мультипликативным шумом, который приводит к нетривиальным статистическим свойствам электромагнитного поля. Тогда вероятность редких событий, когда некоторая величина (скажем, напряженность электромагнитного поля) имеет аномально большое значение, как ожидается, будет значительно выше, чем наивные оценки, основанные на анализе типичных процессов. Недавно были опубликованы полученные нами [17] первые теоретические результаты, касающиеся вероятности высоких значений интенсивности.

Предполагается, что все характерные масштабы задачи (размер волнового пакета, длина его распространения) значительно превышают длину волны света, так что применимо описание волны в терминах ее огибающей Ψ . Из-за большого значения скорости света мы можем считать, что состояние среды (атмосферы) остается неизменным во время распространения волны, и использовать стационарное приближение для описания ее огибающей, т.е. рассматривать комплексное поле Ψ как функцию двумерного радиуса-вектор \mathbf{r} в плоскости, поперечной направлению распространения волны, и координаты z в направлении распространения. Конечно, состояние турбулентной среды меняется со временем. В принятом приближении огибающая $\Psi(\mathbf{r}, z)$ адиабатически подстраивается под текущее состояние среды.

¹⁾e-mail: kolokol@itp.ac.ru

Мы предполагаем, что электромагнитная волна достаточно слаба, так что нелинейные эффекты (самофокусировка или расфокусировка) незначительны. Тогда уравнение для огибающей $\Psi(\mathbf{r}, z)$ имеет вид двумерного уравнения Шредингера

$$i\partial_z \Psi + \frac{1}{2k_0} \nabla^2 \Psi + k_0 \nu \Psi = 0, \quad (1)$$

где k_0 – волновой вектор волны, ν представляет отклонения показателя преломления от его равновесного значения, а ∇ – двумерная производная в поперечных направлениях. Поле ν является случайным в пространстве и во времени, оно должно быть охарактеризовано статистически.

При распространении в турбулентной среде световой пучок искажается. На малых расстояниях это искажение слабо, но при распространении на большие расстояния луч распадается на отдельные спеклы. Последний режим известен как режим сильных сцинтилляций (мерцаний). Характерный размер спекла уменьшается с увеличением пройденного расстояния, этот размер можно интерпретировать как длину корреляции светового пучка.

Отклонения показателя преломления от его равновесного значения вызваны турбулентными пульсациями среды, приводящими, в частности, к флуктуациям температуры. Парная корреляционная функция показателя преломления может быть выражена через спектр флуктуаций температуры. Для спектра Обухова–Коррсины $5/3$ справедлив следующий закон для структурной функции показателя преломления [4–6]

$$\langle [\nu(\mathbf{r}, z) - \nu(\mathbf{0}, 0)]^2 \rangle = C_n^2 (r^2 + z^2)^{1/3}. \quad (2)$$

Здесь и ниже угловые скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по времени, а коэффициент C_n^2 характеризует силу флуктуаций показателя преломления. Выражение (2) предполагает однородность и изотропию турбулентности в инерционном интервале. Результаты недавних измерений C_n^2 в атмосфере содержатся в работе [18].

Если длина распространения световой волны в направлении Z существенно превышает характерные масштабы поперечных искажений, то флуктуации показателя преломления ν могут рассматриваться, как δ -коррелированные вдоль оси Z . Из уравнения (2) следует

$$\langle \nu(\mathbf{r}, z_1) \nu(\mathbf{0}, z_2) \rangle \rightarrow \delta(z_1 - z_2) [C - Dr^c], \quad (3)$$

где $c = 5/3$, $D = 1.4572 k_0^2 C_n^2$. Константа C в уравнении (3) определяется флуктуациями на внешнем мас-

штабе турбулентности, а степенная поправка определяется колебаниями на масштабе r , лежащем в инерционном интервале. Параметры C , D , как правило, являются функциями от z . Далее мы используем обозначение c вместо $5/3$, как в уравнении (3), чтобы избежать громоздких чисел.

В данной работе мы используем модель единичного фазового экрана [19, 20]. Обсуждение применимости этой модели к анализу распространения световой волны в атмосфере при различных условиях можно найти в работах [21–23]. В рамках данной модели изучается свободное распространение световой волны за экраном, на котором огибающая Ψ приобретает случайный сдвиг фаз ϕ . Таким образом, сразу за экраном

$$\Psi_{\text{exit}}(\mathbf{r}) = \Psi_0(\mathbf{r}) \exp(i\phi), \quad (4)$$

где $\Psi_0(\mathbf{r})$ – начальная форма волнового пакета (до экрана).

Фазовый сдвиг ϕ является случайной величиной. На основе уравнения (3) определяется парная корреляционная функция

$$\langle \phi(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{0}) \rangle = \int d\zeta [C - Dr^c]. \quad (5)$$

Мы предполагаем, что фазовый сдвиг ϕ обладает гауссовой статистикой. Поэтому парное среднее (5) полностью характеризует статистические свойства поля ϕ . Таким образом, функция плотности вероятности ϕ (с точностью до нормирующего фактора) равна $\exp(-S)$, где

$$S = \frac{1}{2\Lambda} \int d^2 r \phi \hat{k}^{2+c} \phi. \quad (6)$$

Здесь $d^2 r$ означает двумерное интегрирование, \hat{k}^{2+c} – интегральный оператор, сводящийся к умножению на k^{2+c} в представлении Фурье, а параметр Λ характеризует мощность флуктуаций ϕ .

Чтобы найти огибающую Ψ за экраном, используется решение уравнения (1) с $\nu = 0$, которое является свободным уравнением Шредингера. Решение может быть записано в явном виде

$$\Psi(\mathbf{r}, z) = \frac{k_0}{2\pi i z} \int d^2 x \exp \left[i \frac{k_0 (\mathbf{r} - \mathbf{x})^2}{2z} \right] \Psi_{\text{exit}}(\mathbf{x}), \quad (7)$$

где z – расстояние, пройденное волной. Аналогично выражается комплексно сопряженная величина Ψ^* . Единственное отличие заключается в обратном знаке i в показателе степени.

Мы исследуем моменты интенсивности пучка $I = \Psi \Psi^*$ для заданных значений координат \mathbf{r}, z . Эти

моменты могут быть выражены в виде (негауссовых) функциональных интегралов по полю ϕ

$$\langle I^n \rangle = \int D\phi \mathcal{N} \exp(-S) I^n. \quad (8)$$

Здесь вес $\exp(-S)$ определяется выражением (6), а \mathcal{N} – нормализационный фактор. Нас интересуют высокие моменты, т.е. $n \gg 1$. Другими словами, нас интересуют хвосты функции плотности вероятности $P(I)$ для интенсивности пучка I , намного превышающей ее типичное значение.

В данной работе мы рассматриваем случай начальной плоской волны. Тогда $P(I)$ и моменты $\langle I^n \rangle$ не зависят от поперечных координат. Подход может быть обобщен для пучка произвольного профиля. Если начальная амплитуда плоской волны равна 1, то $\Psi_{\text{exit}} = \exp(i\phi)$. В соответствии с уравнением (7) интенсивность I в точке $(0, 0, z)$ равна

$$I = k_0^2 \int \frac{d^2x d^2y}{(2\pi z)^2} \times \cos \left[\frac{k_0(\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2)}{2z} + \phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{y}) \right]. \quad (9)$$

Это выражение является отправной точкой для последующих вычислений.

Мы сосредоточимся на случае высоких моментов $\langle I^n \rangle$, $n \gg 1$, которые могут быть найдены в седловом приближении из функционального интеграла (8). Седловое уравнение, полученное варьированием показателя $-S + n \ln I$, имеет вид

$$\Lambda^{-c} \hat{k}^{2+c} \phi = \frac{n}{I} \frac{\delta I}{\delta \phi}, \quad (10)$$

как следует из уравнения (6). Из выражения (9) следует

$$\frac{\delta I}{\delta \phi(\mathbf{r})} = \frac{2k_0^2}{(2\pi z)^2} \int d^2x \times \sin \left[\frac{k_0(\mathbf{x}^2 - \mathbf{r}^2)}{2z} + \phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{r}) \right]. \quad (11)$$

Мы рассматриваем интенсивность I , взятую в начале координат, и решение ϕ_{saddle} , зависящее от расстояния r от точки \mathbf{r} до начала координат.

Форма решения седлового уравнения (10) определяется принятым большим значением I . Выражение (9) является интегралом с осциллирующим подынтегральным выражением. Оно может быть большим только в том случае, если подынтегральное выражение слабо осциллирует в пределах некоторой большой области, представляющей собой круг радиуса X_* . Поэтому следует предположить, что

$$\phi_{\text{saddle}} = \text{const} - \frac{k_0 r^2}{2z}, \quad (12)$$

внутри круга. За его пределами подынтегральное выражение в уравнении (9) быстро осциллирует, внося несущественный вклад в I . Таким образом, мы приходим к выражению

$$I = \frac{k_0^2 X_*^4}{4z^2}. \quad (13)$$

Вне круга радиуса X_* функция $\phi_{\text{saddle}}(r)$ постепенно уменьшается, стремясь к постоянной величине при $r \rightarrow \infty$. Поведение функции $\phi_{\text{saddle}}(r)$ вне круга может быть найдена минимизацией S (6), поскольку значение I нечувствительно к этому поведению. Тогда из размерных соображений легко сделать вывод, что

$$S \sim \Lambda^{-c} \frac{k_0^2}{z^2} X_*^{4-c}. \quad (14)$$

Таким образом мы выразили I и S через X_* .

Оптимизируя величину $-S + n \ln I$ по X_* , находим

$$X_*^{4-c} \sim n \frac{z^2}{k_0^2} \Lambda^c. \quad (15)$$

Подставляя оценку (15) в уравнения (13), (14), получаем

$$S \sim n, \quad I \sim \left[n(z/Z_{\text{rytov}})^{c/2} \right]^{4/(4-c)}, \quad (16)$$

где введена длина

$$Z_{\text{rytov}} = k_0/\Lambda^2, \quad (17)$$

которую мы называем длиной Рытова. Далее, мы находим из уравнения (8)

$$\ln \langle I^n \rangle_{\text{saddle}} \sim \frac{4}{4-c} n \ln \left[n(z/Z_{\text{rytov}})^{c/2} \right]. \quad (18)$$

Это седловой вклад в момент I .

Теперь мы переходим к анализу роли флуктуаций $\zeta = \phi - \phi_{\text{saddle}}$. Разложим подынтегральное выражение в уравнении (9) по $\zeta(\mathbf{x}) - \zeta(\mathbf{r})$ до второго порядка:

$$I \approx \frac{k_0^2 X_*^4}{4z^2} (1 - A), \quad (19)$$

$$A = \int_{x, r < X_*} \frac{d^2x d^2r}{2\pi^2 X_*^4} [\zeta(\mathbf{x}) - \zeta(\mathbf{r})]^2. \quad (20)$$

Таким образом флуктуации ζ производят фактор \mathcal{Z} в моменте

$$\langle I^n \rangle = \mathcal{Z} \langle I^n \rangle_{\text{saddle}}, \quad (21)$$

$$\mathcal{Z} = \int D\zeta \exp[-S(\zeta) - nA], \quad (22)$$

где величина A определяется уравнением (20).

Функциональный интеграл (22) является гауссовым и, следовательно, сводится к парной корреляционной функции ζ . Предполагая, что характеристический волновой вектор q намного больше, чем X_\star^{-1} , мы находим из уравнения (22) парную корреляционную функцию внутри круга

$$\langle \zeta(\mathbf{x})\zeta(\mathbf{r}) \rangle = \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \exp[i\mathbf{q}(\mathbf{x} - \mathbf{r})] F(q),$$

$$F(q) = \frac{1}{\Lambda^{-c} q^{2+c} + n/(\pi X_\star^2)}. \quad (23)$$

Характерный волновой вектор q_\star в уравнении (23) определяется соотношением $q_\star^{2+c} \sim n\Lambda^{-c}X_\star^{-2}$, т.е.

$$(q_\star X_\star)^{2-c} \sim n^{4/(4-c)} (z/Z_{\text{rytov}})^{2c/(4-c)}. \quad (24)$$

Используя это выражение, можно проверить, выполняется ли условие применимости $q_\star X_\star \gg 1$. Из уравнения (22) следует, что при заданном X_\star

$$\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial n} = - \int \frac{d^2x d^2r}{\pi^2 X_\star^4} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} F(q) \times$$

$$\times \{1 - \exp[i\mathbf{q}(\mathbf{x} - \mathbf{r})]\} \sim -(\Lambda X_\star)^{2c/(2+c)} n^{-c/(2+c)}.$$

Интегрируя по n , мы находим, что

$$\ln \mathcal{Z} \sim -(q_\star X_\star)^2 \sim - \left[(z/Z_{\text{rytov}})^{c/2} n \right]^s, \quad (25)$$

$$s = \frac{8}{(4-c)(2+c)}. \quad (26)$$

Отметим, что $s = 72/77$ для $c = 5/3$.

Обсудим область применимости седлового приближения, зависящую от z/Z_{rytov} . Сначала мы рассмотрим случай $z \sim Z_{\text{rytov}}$. Тогда единственным условием его применимости является $n \gg 1$ или $I \gg 1$. Для $0 < c < 2$ показатель степени s (26) меньше единицы, поэтому флуктуационный вклад не существен, поскольку он меньше, чем чисто седловой вклад (18). Выражение (18) соответствует хвосту функции плотности вероятности $P(I)$ с “растянутой” экспонентой

$$\ln P(I) \sim -I^\beta, \quad (27)$$

показатель которой равен $\beta = (4-c)/4$. Для спектра Обухова–Коррсины, когда $c = 5/3$, $\beta = 7/12$. Это значение β меньше единицы.

Чтобы проиллюстрировать эффекты, к которым приводит хвост с $\beta = 7/12$, приведем значения первых моментов для модельной функции плотности вероятности $\ln P(I) \propto -I^{7/12}$. Нормируя $P(I)$ так, чтобы первый момент $\langle I \rangle$ был равен единице, находим

$\langle I^2 \rangle$	$\langle I^3 \rangle$	$\langle I^4 \rangle$	$\langle I^5 \rangle$
2.88	15.8	138	1743
2	6	24	120.

Здесь для сравнения в последней строчке приведены значения моментов (при том же условии $\langle I \rangle = 1$) для гауссовой статистики огибающей Ψ .

Далее мы рассмотрим случай $z \ll Z_{\text{rytov}}$, соответствующий слабым сцинтилляциям. Тогда условие $I \gg 1$ приводит к неравенству

$$n \gg (z/Z_{\text{rytov}})^{-c/2}, \quad (28)$$

как следует из уравнения (16). То же неравенство (28) обеспечивает выполнение неравенства $q_\star X_\star \gg 1$, как следует из уравнения (24). Флуктуационный вклад (25) в случае $z \ll Z_{\text{rytov}}$ очевидно несуществен. Таким образом, мы возвращаемся к хвосту (27) с $\beta = (4-c)/4$:

$$\ln P \sim -(z/Z_{\text{rytov}})^{-c/2} I^{(4-c)/4}, \quad (29)$$

который реализуется для $I \gg 1$. При $I - 1 \sim 1$ хвост сшивается с гауссовой центральной частью функции плотности вероятности $P(I)$, соответствующей режиму слабых флуктуаций. Эта часть характеризуется законом

$$\ln P \sim -(z/Z_{\text{rytov}})^{-c/2} (I - 1)^2, \quad (30)$$

справедливым при $|I - 1| \ll 1$.

Обратимся к случаю $z \gg Z_{\text{rytov}}$, соответствующему сильным сцинтилляциям. Тогда седловой режим реализуется при условии, что вклад флуктуации (25) меньше, чем чисто седловой вклад (18). Сравнивая эти члены, получаем неравенство

$$n \gg (z/Z_{\text{rytov}})^{4/(2-c)}, \quad (31)$$

ограничивающее область применимости нашего подхода с использованием седловой точки. Неравенство (31) соответствует следующему

$$I \gg (z/Z_{\text{rytov}})^{2(8+2c-c^2)/[(4-c)(2-c)]}.$$

Моменты I определяются выражением (18). Плотность вероятности $P(I)$ определяется выражением

$$\ln P \sim -(z/Z_{\text{rytov}})^{-c/2} I^{(4-c)/4}. \quad (32)$$

Однако при $z \gg Z_{\text{rytov}}$ есть два дополнительных хвоста.

В этом пределе основная часть функции плотности вероятности P от I для начальной плоской волны с $\Psi = 1$ является экспоненциальной [24, 25]

$$P(I) = \exp(-I), \quad (33)$$

что соответствует $\beta = 1$ в выражении (27). В этом случае моменты равны

$$\langle I^n \rangle = n!, \quad \ln \langle I^n \rangle \approx n \ln n. \quad (34)$$

Поправки, найденные в работах [24–26], позволяют сформулировать условие применимости данного режима

$$I, n \ll (z/Z_{\text{rytov}})^{2-c}.$$

Отметим, что для спектра Обухова–Коррзина $2-c = 1/3$.

При $z \gg Z_{\text{rytov}}$ существует также промежуточный хвост, исследованный в работе [17]. Он реализуется в интервале

$$(z/Z_{\text{rytov}})^{2-c} \ll I \ll (z/Z_{\text{rytov}})^{2(8+2c-c^2)/[(4-c)(2-c)]},$$

где плотность вероятности $P(I)$ определяется выражением

$$\ln P \sim -(z/Z_{\text{rytov}})^{2(2-c)/(6-c)} I^{(4-c)/(6-c)}. \quad (35)$$

Это соответствует растянутой экспоненте (27) хвоста функции плотности вероятности $P(I)$ с $\beta = (4-c)/(6-c)$. Для спектра Обухова–Коррзина, когда $c = 5/3$, $\beta = 7/13$. Моменты определяются оценками

$$\ln \langle I^n \rangle \sim \frac{6-c}{4-c} n \ln n - 2n \frac{2-c}{4-c} \ln(z/Z_{\text{rytov}}). \quad (36)$$

Номер n лежит в интервале $(z/Z_{\text{rytov}})^{2-c} \ll n \ll (z/Z_{\text{rytov}})^{4/(2-c)}$.

Результаты нашего анализа хвостов функции плотности вероятности интенсивности I представлены на рис. 1. Координата по горизонтальной оси рав-

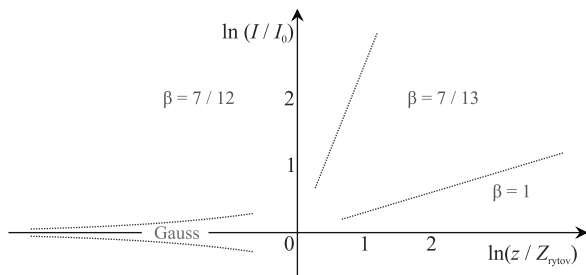


Рис. 1. (Цветной онлайн) Области, где реализуются хвосты функции плотности вероятности интенсивности I с различными показателями β

на $\ln(z/Z_{\text{rytov}})$, а координата по вертикальной оси равна $\ln(I/I_0)$, где I_0 – среднее значение интенсивности. Различные области на рис. 1 соответствуют различным режимам определения функции плотности вероятности $P(I)$. Величина $P(I)$ может быть охарактеризована растянутыми показателями β в (27), разными для разных доменов.

Наш подход с использованием седловой точки означает, что редкие события, которые в основном

способствуют возникновению высоких моментов – это большие линзы радиуса X_* , как видно из (12). Этот подход хорошо работает в случае умеренных сцинтилляций. Однако в случае сильных сцинтилляций его применимость смещается к чрезвычайно большим значениям I (или чрезвычайно высоким моментам).

Найденные нами случайные линзы размера X_* соответствуют флуктуациям сдвига фазы ϕ по амплитуде в \sqrt{n} больше, чем типичные флуктуации масштаба X_* . Поэтому для нас важна справедливость гауссовой статистики для таких флуктуаций. Чтобы обосновать это приближение, следует выйти за рамки модели одиночного фазового экрана. Скажем, для условий, когда изменения в амплитуде Ψ слабо влияют на фазу, набег фазы определяется интегралом

$$\phi(\mathbf{r}) = k_0 \int d\zeta \nu(\mathbf{r}, \zeta), \quad (37)$$

где интеграл идет вдоль направления распространения волны. Нас интересуют флуктуации масштаба X_* , длина корреляции которых в направлении распространения волны также оценивается, как X_* . Таким образом, интеграл (37) является суммой большого числа независимых величин, число которых оценивается, как h/X_* , где h – длина распространения волны. Для любых разумных условий это число является большим, откуда в силу центральной предельной теоремы вытекает гауссова статистика ϕ . При необходимости можно учесть возмущение гауссовой статистики в рамках теории больших отклонений, изложение которой можно найти в классической монографии [27].

Наш анализ был основан на предположении, что начальная волна является плоской. Можно рассматривать начальную огибающую Ψ , отличную от обычной волны. Скажем, можно взять начальный гауссов профиль шириной R , тогда

$$\Psi_{\text{exit}}(\mathbf{r}) = \exp\left(-\frac{r^2}{R^2} + i\phi\right), \quad (38)$$

в соответствии с уравнением (4). Тогда наш подход верен, если $R \gg X_*$. Противоположный случай требует специального анализа. Для других, упомянутых выше, хвостов на R накладываются другие ограничения реализуемости. В любом случае, при достаточно большом R простое приближение плоской волны работает.

Хотя мы использовали приближение одиночного фазового экрана, общие результаты, отраженные на рис. 1, справедливы и для произвольного (непрерывного) распределения показателя преломления в тур-

булентной среде. Соответствующий анализ и его результаты будут опубликованы в другом месте.

Финансирование работы. Исследование выполнено в рамках научной программы Национального центра физики и математики, проект “Физика высоких плотностей энергии”, этап 12023-2025.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. A. N. Kolmogorov, DAN **30**, 299 (1941).
2. A. N. Kolmogorov, DAN **32**, 19 (1941).
3. A. M. Obukhov, DAN **32**, 22 (1941).
4. A. M. Obukhov, Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Geogr. and Geophys. **13**, 58 (1949).
5. S. Corrsin, J. Appl. Phys. **22**, 469 (1951).
6. V. I. Tatarskii, *Wave propagation in turbulent atmosphere*, Nauka, Moscow (1967).
7. V. I. Tatarskii, *The Effects of the Turbulence Atmosphere on Wave Propagation*, Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem (1971).
8. J. W. Goodman, *Statistical Properties of Laser Speckle Pattern*, in *Laser Speckle and Related Phenomena*, ed. by J. C. Dainty, Springer-Verlag, Berlin (1975), p. 9.
9. M. S. Rytov, Yu. A. Kravtsov, and V. I. Tatarskii, *Principles of Statistical Radiophysics 4: Wave Propagation through Random Media*, Springer-Verlag, Berlin (1989).
10. J. W. Strohbehn (editor), *Laser Beam Propagation in the Atmosphere*, Springer, N.Y. (1978).
11. L. C. Andrews and R. L. Phillips, *Laser Beam Propagation Through Random Media*, Press Monograph Series, PM53 (1998).
12. M. A. Vorontsov, G. W. Carhart, V. S. R. Gudimetla, T. Weyrauch, E. Stevenson, S. L. Lachinova, L. A. Beresnev, J. Liu, K. Rehder, and J. F. Riker, Proc. 2010 AMOS Conf. (2010).
13. M. A. Vorontsov, V. R. Gudimetla, G. W. Carhart, T. Weyrauch, S. L. Lachinova, E. Polnau, J. R. L. A. Beresnev, J. Liu, and J. F. Riker, Proc. 2011 AMOS Conf. (2011).
14. S. L. Lachinova and M. A. Vorontsov, J. Opt. **18**, 025608 (2016).
15. P. M. Lushnikov and N. Vladimirova, Pis'ma v ZhETF **108**, 611 (2018) [JETP Lett. **108**, 571 (2018)].
16. T. Fahey, M. Islam, A. Gardi, and R. Sabatini, Atmosphere **12**, 918 (2021).
17. I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, Pis'ma v ZhETF **118**, 234 (2023) [JETP Lett. **118**, 238 (2023)].
18. B. A. Богачев, А. В. Немцова, Ф. А. Стариков, ЖТФ **94**, 827 (2024).
19. В. И. Шишов, Изв. вузов. Радиофизика, **14**, 85 (1971) [V. I. Shishov, Radiophys Quantum Electron **14**, 70 (1971)].
20. В. И. Шишов, Изв. вузов. Радиофизика **17** 684 (1974) [V. I. Shishov, Radiophys Quantum Electron **17**, 1287 (1974)].
21. А. С. Гурвич, В. Кан, Изв. РАН. Физ. атм. океана **39**, 335 (2003) [A. S. Gurvich and V. Kan, Izvestiya Atmospheric and Oceanic Physics **39**, 300 (2003)].
22. А. С. Гурвич, В. Кан, Изв. РАН. Физ. атм. океана **39**, 347 (2003) [A. S. Gurvich and V. Kan, Izvestiya Atmospheric and Oceanic Physics **39**, 311 (2003)].
23. А. С. Гурвич, В. В. Воробьев, Д. А. Маракасов, О. В. Федорова, Известия вузов, Радиофизика **50**, 747 (2007) [A. S. Gurvich, V. V. Vorob'ev, D. A. Marakasov, and O. V. Fedorova, Radiophys Quantum Electron **50**, 679 (2007)].
24. V. U. Zavorotnyi, V. I. Klyatskin, and V. I. Tatarskii, ZhETF **73**, 481 (1977) [Sov. Phys. JETP **46**, 252 (1977)].
25. I. Kolokolov, V. Lebedev, and P. Lushnikov, Phys. Rev. E **101**, 042137 (2020).
26. M. I. Charnotskii, Waves in Random Media **4**, 243 (1994).
27. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Wiley, N.Y. (1957).