

Том 89, Номер 1

ISSN 0367-6765

Январь 2025



ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ



В журнале «Известия Российской академии наук. Серия физическая» публикуются полнотекстовые статьи, подготовленные по материалам лучших докладов, рекомендованных программными комитетами научных конференций, симпозиумов и совещаний, созываемых Российской академией наук.



НАУКА

— 1727 —



СОДЕРЖАНИЕ

Том 89, номер 1, 2025

Волновые явления: физика и применения

Оптические импульсы в неэрмитовой среде вблизи сингулярности <i>В. А. Бушув, Б. И. Манцызов</i>	6
Оптическое вычисление оператора Лапласа при нормальном падении с помощью металлодиэлектрической слоистой структуры <i>А. И. Кашапов, Е. А. Безус, Д. А. Быков, Л. Л. Досколович</i>	13
Радиоэлектрический эффект в сверхрешетке на основе трехмерного дираковского кристалла <i>А. В. Вальков, С. В. Крючков, Е. И. Кухарь</i>	18
Плазменные волны в двумерной сверхрешетке в условиях воздействия нелинейной электромагнитной волны <i>И. А. Агапова, С. Ю. Глазов, С. В. Крючков</i>	23
Преобразование селективных характеристик электрически управляемых чирпированных многослойных неоднородных дифракционных структур на основе фотополимеризующихся композиций с нематическими жидкими кристаллами <i>С. Н. Шарангович, В. О. Долгирев, Д. С. Растрыгин</i>	28
О сверхсветовых объектах в неравновесных средах <i>С. В. Сазонов</i>	34
Распространение фрактальных спеклов в оптических системах и в свободном пространстве <i>Р. Т. Кубанов, А. М. Зотов, П. В. Короленко, А. Ю. Мишин</i>	39
Лазерное формирование релятивистских электронных зеркал и генерация некогерентных рентгеновских лучей <i>В. В. Кулагин, В. Н. Корниенко, В. А. Черепенин</i>	44
Квантовые особенности волн при параметрической генерации света <i>И. А. Терещенко, О. В. Тихонова</i>	51
О возможности дифференциального усиления терагерцового излучения в пластине кристаллического кварца в поле волны накачки <i>И. И. Казаков, М. С. Гусельников, С. А. Козлов</i>	57
(2+1)D солитонные пары в плоском квадратично-нелинейном кристалле с неоднородностью <i>Б. С. Брянецв, А. А. Калинович</i>	63
Микрорезонаторы и временные фотонные кристаллы, создаваемые при столкновении полуцикловых световых импульсов в резонансной среде <i>Р. М. Архипов, М. В. Архипов, А. В. Пахомов, О. О. Дьячкова, Н. Н. Розанов</i>	70

О динамике параметров импульсов, распространяющихся в среде в области аномальной дисперсии групповой скорости	
<i>В. А. Халяпин, А. Н. Бугай</i>	79
Применение методов радиофотоники в проектировании приемных устройств свч для формирования и регистрации радиоголограмм	
<i>Д. Буркитбаев, В. В. Кулагин, Р. В. Рыжук, В. В. Валуев, В. А. Черепенин</i>	84
Генерация субтерагерцового хаотического излучения в сильноточном релятивистском гиротроне в режиме умножения частоты	
<i>Н. С. Гинзбург, И. В. Зотова, А. Н. Леонтьев, А. М. Малкин, Р. М. Розенталь, А. С. Сергеев</i>	90
Влияние двумерных процессов на группирование интенсивных электронных потоков в широкополосных клистродах	
<i>В. Е. Родякин, В. Н. Аксенов</i>	95
Преобразование плоского фронта униполярного импульса излучения в цилиндрический	
<i>В. Н. Корниенко, В. В. Кулагин</i>	103
Восстановление пространственного распределения акустических характеристик на основе аппарата угловых гармоник	
<i>Д. И. Зотов, О. Д. Румянцева, А. С. Черняев</i>	107
Среднее поле акустических волн с разрывами в одномерной случайно-неоднородной среде	
<i>Д. М. Алексеев, В. А. Гусев</i>	114
Модификация уравнения Ван-дер-Ваальса для описания термодинамических свойств жидкой воды	
<i>А. А. Волков, С. В. Чучупал</i>	122
Некоторые характеристики нелинейных потенциальных поверхностных волн в идеальной жидкости	
<i>А. А. Очиров, К. Ю. Лапина</i>	129
Моделирование возбуждения спиновых волн воздействием электрического поля на доменную стенку в магнитных пленках с неоднородным магнитоэлектрическим взаимодействием	
<i>Н. В. Мясников, А. П. Пятаков</i>	136
Расчет релятивистского гиротрона диапазона 300 ГГц с учетом реальной формы импульса ускоряющего напряжения	
<i>А. Н. Леонтьев, Р. М. Розенталь, О. П. Планкин, Е. С. Семенов</i>	145
Применение методов импульсной акустической микроскопии для исследования губчатых биоконструкций на основе хитозана	
<i>Ю. С. Петронюк, Е. А. Храмова, К. Г. Антипова, С. Г. Васильева, А. Н. Богаченков, А. Е. Соловченко, Т. Е. Григорьев</i>	150
Численное исследование схемы поверхностно-волновой томографии трехмерных неоднородностей	
<i>Д. Д. Позднякова, Д. А. Преснов, А. С. Шуруп</i>	157

CONTENTS

Volume 89, No. 1, 2025

Wave Phenomena: Physics and Applications

Optical pulses in a non-Hermitian medium near a singularity <i>V. A. Bushuev, B. I. Mantsyzov</i>	6
Optical computation of the Laplace operator at normal incidence using a multilayer metal-dielectric structure <i>A. I. Kashapov, E. A. Bezus, D. A. Bykov, L. L. Doskolovich</i>	13
Radioelectric effect in a superlattice based on a 3D Dirac crystal <i>A. V. Valkov, S. V. Kryuchkov, E. I. Kukhar</i>	18
Plasma waves in a two-dimensional superlattice under the influence of a nonlinear electromagnetic wave <i>I. A. Agapova, S. Yu. Glazov, S. V. Kryuchkov</i>	23
Conversion of selective characteristics of electrically controlled chirped multilayer inhomogeneous diffraction structures based on photopolymerizing compositions with nematic liquid crystals <i>S. N. Sharangovich, V. O. Dolgirev, D. S. Rastrygin</i>	28
On the superluminal objects in non-equilibrium media <i>S. V. Sazonov</i>	34
Propagation of fractal speckles in optical systems and in free space <i>R. T. Kubanov, A. M. Zotov, P. V. Korolenko, A. Yu. Mishin</i>	39
Laser formation of relativistic electron mirrors and generation of incoherent X-rays <i>V. V. Kulagin, V. N. Kornienko, V. A. Cherepenin</i>	44
Quantum peculiarities of waves in the process of parametric down conversion of light <i>I. A. Tereshchenko, O. V. Tikhonova</i>	51
Differential gain of THz radiation in crystalline quartz plate in the field of pump wave <i>I. I. Kazakov, M. S. Guselnikov, S. A. Kozlov</i>	57
(2+1)D soliton pairs in a planar quadratic nonlinear crystal with inhomogeneity <i>B. S. Bryantsev, A. A. Kalinovich</i>	63
Microcavities and photonic time crystals formed by collision of half-cycle light pulses in a resonant medium <i>R. M. Arkhipov, M. V. Arkhipov, A. V. Pakhomov, O. O. Diachkova, N. N. Rosanov</i>	70
On the dynamics of the parameters of pulses propagating in the medium with anomalous dispersion of the group velocity <i>V. A. Khalyapin, A. N. Bugay</i>	79

Application of microwave photonics methods in the design of microwave receiving devices for the formation and registration of radio holograms	
<i>D. Burkitbayev, V. V. Kulagin, R. V. Ryzhuk, V. V. Valuev, V. A. Cherepenin</i>	84
Generation of sub terahertz chaotic radiation in a high-current relativistic gyrotron in the frequency multiplication mode	
<i>N. S. Ginzburg, I. V. Zotova, A. N. Leontyev, A. M. Malkin, R. M. Rozental, A. S. Sergeev</i>	90
The effect of two-dimensional phenomena on the bunching of intense electron beams in broadband klystrons	
<i>V. E. Rodyakin, V. N. Aksenov</i>	95
Conversion of a flat front of a unipolar radiation pulse into a cylindrical one	
<i>V. N. Kornienko, V. V. Kulagin</i>	103
Reconstructing the spatial distribution of acoustic characteristics by technique of angle harmonics	
<i>D. I. Zotov, O. D. Rumyantseva, A. S. Cherniaev</i>	107
Mean field of acoustic waves with discontinuities in randomly inhomogeneous media	
<i>D. M. Alekseev, V. A. Gusev</i>	114
Modification of the Van der Waals equation for describing the thermodynamic properties of liquid water	
<i>A. A. Volkov, S. V. Chuchupal</i>	122
Some characteristics of nonlinear potential surface waves in an ideal liquid	
<i>A. A. Ochirov, K. Yu. Lapshina</i>	129
Simulation of spin waves excitation by the impact of an electric field on the domain wall in magnetic films with inhomogeneous magnetoelectric interaction	
<i>N. V. Myasnikov, A. P. Pyatakov</i>	136
Calculation of a relativistic 300 GHz range gyrotron, considering the real shape of the accelerating voltage pulse	
<i>A. N. Leontyev, R. M. Rozental, O. P. Plankin, E. S. Semenov</i>	145
Application of pulsed acoustic microscopy for studying chitosan-based biocomposite sponges	
<i>Y. S. Petronyuk, E. A. Khramtsova, K. G. Antipova, S. G. Vasilyeva, A. N. Bogachenkov, A. E. Solovchenko, T. E. Grigoriev</i>	150
Numerical investigation of surface wave tomography scheme for three-dimensional inhomogeneities reconstruction	
<i>D. D. Pozdnyakova, D. A. Presnov, A. S. Shurup</i>	157

Волновые явления: физика и применения

Редактор тематического выпуска
канд. физ.-мат. наук **А. Н. Калиш**

УДК 535.42:621.373.826

ОПТИЧЕСКИЕ ИМПУЛЬСЫ В НЕЭРМИТОВОЙ СРЕДЕ ВБЛИЗИ СИНГУЛЯРНОСТИ

© 2025 г. В. А. Бушуев, Б. И. Манцызов*

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», Москва, Россия

*e-mail: bmantsyzov@gmail.com

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

Спектральным методом решена задача взаимодействия коротких оптических импульсов с РТ-симметричными фотонными кристаллами в условиях частотной сингулярности. Показано, что при малом отклонении от особой точки спонтанного распада РТ-симметричных мод поля возникают частотные сингулярности коэффициентов пропускания и отражения структуры. Это приводит к значительному сужению спектров импульсов и увеличению их амплитуды и длительности при однонаправленном брэгговском отражении.

Ключевые слова: РТ-симметрия, спектральная сингулярность, короткие оптические импульсы, динамическая брэгговская дифракция

DOI: 10.31857/S0367676525010013, EDN: DCKTPJ

ВВЕДЕНИЕ

После того, как в неэрмитовых квантово-механических системах с симметрией четность-время (parity-time, РТ-симметрией) были обнаружены состояния с действительными собственными значениями энергии [1, 2], эта идея была обобщена на различные физические волновые процессы — оптические [3–6], акустические [7], в связанных механических осцилляторах [8], в электрических цепях [9] и др. В оптике в неэрмитовых средах с РТ-симметричной комплексной функцией диэлектрической проницаемости $\epsilon(\vec{r}) = \epsilon^*(-\vec{r})$, т. е. в средах с усилением и поглощением (рис. 1а),

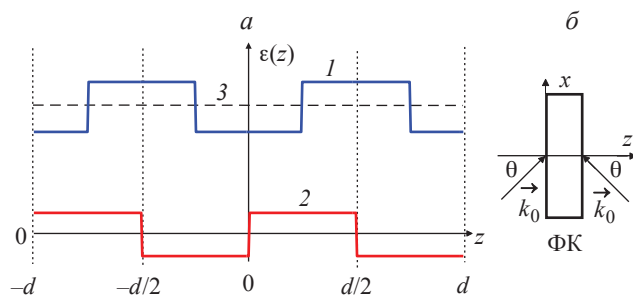


Рис. 1. Четная (кривая 1) и нечетная (кривая 2) функции распределения реальной и мнимой частей резонансной диэлектрической проницаемости в РТ-симметричном фотонном кристалле (а), штриховая линия 3 — ϵ_0 ; схемы падения импульсов (б) слева ($k_{0z} > 0$) и справа ($k_{0z} < 0$) на ФК.

могут распространяться РТ-симметричные моды поля с действительными значениями волновых чисел [3, 4]. Примеры периодических сред такого типа детально описаны, например, в работах [10–13]. Важной особенностью РТ-симметричных сред является наличие особой точки (ОТ) спонтанного распада РТ-симметричных состояний [14, 15], в которой происходит вырождение собственных волн и при изменении баланса усиления и поглощения появляются РТ-несимметричные моды, распространяющиеся с усилением и поглощением. Вблизи ОТ наблюдаются новые оптические явления, такие как: однонаправленное отражение Брэгга, или однонаправленная невидимость [16–18]; повышение прозрачности пассивных РТ-симметричных сред при росте их поглощающей способности [14, 19]; асимметричное деление коротких лазерных импульсов в особой точке в диспергирующей РТ-симметричной среде [20]; изменение структуры излучения мощных диодных лазеров при возникновении РТ-симметричных мод в лазерном резонаторе [21]; частотная сингулярность [22, 23]. Однако до настоящего времени рассматривалось главным образом взаимодействие монохроматических волн или протяженных наносекундных импульсов с РТ-симметричными средами. Распространение же коротких пикосекундных и субпикосекундных импульсов, особенно вблизи частотной сингулярности, оставалось мало изученным.

В настоящей статье исследуется взаимодействие коротких оптических импульсов с РТ-симметричными периодическими структурами, или фотонными кристаллами (ФК), в случае частотной сингулярности спектральных коэффициентов отражения $R(\omega)$ и прохождения $T(\omega)$, в том числе с учетом материальной дисперсии. Задача линейной динамической брэгговской дифракции импульсов в ФК решена спектральным методом в двухволновом приближении. Для восстановления РТ-симметричных свойств среды использован метод широкополосной квази-РТ-симметрии [24]. Показано, что в особой точке распада РТ-симметричных мод поля коэффициенты отражения и прохождения фотонных кристаллов конечной толщины не имеют сингулярностей, и длительности отраженных и проходящих импульсов изменяются незначительно. Однако, даже при малом отклонении от ОТ при определенной толщине ФК возникают частотные сингулярности коэффициентов $R(\omega)$ и $T(\omega)$. В результате возникает значительное сужение спектров импульсов и увеличение их длительности. Имеет место также однонаправленное брэгговское отражение и усиление импульсов в случае широкополосной квази-РТ-симметрии в ФК с материальной дисперсией.

ТЕОРИЯ

Пусть на поверхность $z = 0$ ограниченного одномерного резонансного РТ-симметричного ФК (рис. 1) падает короткий оптический импульс (волновой пакет)

$$E_{\text{in}}(\vec{r}, t) = A_{\text{in}}(x, t) \exp(i\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - i\omega_0 t), \quad (1)$$

где $A_{\text{in}}(x, t)$ — комплексная медленно меняющаяся амплитуда, $\vec{k}_0 = (k_0 \sin \theta, sk_0 \cos \theta)$, θ — угол падения, $k_0 = \omega_0/c$, ω_0 — центральная частота, c — скорость света, $s = +1$ при падении слева, $s = -1$ при падении справа (рис. 1б).

Диэлектрическая проницаемость РТ-симметричного ФК описывается функцией вида

$$\varepsilon(z, \omega) = \varepsilon_0 + \varepsilon' \cos(hz) + \tilde{\varepsilon}'(\omega) \sin(hz) + i\tilde{\varepsilon}''(\omega) \sin(hz), \quad (2)$$

где $\varepsilon_0 + \varepsilon' \cos(hz)$ — действительная четная функция, $\tilde{\varepsilon}'(\omega) \sin(hz)$ и $\tilde{\varepsilon}''(\omega) \sin(hz)$ — нечетные функции действительной и мнимой частей диэлектрической проницаемости, обусловленные резонансными атомами, $h = 2\pi/d$ — модуль вектора обратной решетки ФК, d — период решетки. Появление нечетного действительного слагаемого в (2) связано с соотношением Крамерса–Кронига, которое следует из принципа причинности и неминуемо приводит к нарушению условия РТ-симметрии резонансной среды для части спектра оптического импульса [25]. Однако использование условия широкополосной квази-РТ-симметрии, когда ши-

рина спектра импульса гораздо меньше, чем ширина спектральной линии неоднородного уширения среды, позволяет минимизировать слагаемое $\tilde{\varepsilon}'(\omega) \ll \tilde{\varepsilon}''(\omega)$ в (2) и в значительной степени восстановить РТ-симметричные свойства среды для квазимонохроматического импульса [17, 20, 24].

Граничная задача динамической брэгговской дифракции решается спектральным методом вблизи условия Брэгга в двухволновом приближении [20, 24]. Падающий на ФК импульс поля (1) представляется в виде интеграла Фурье

$$E_{\text{in}}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_{\text{in}}(\Omega) \exp(ik_x x - i\omega t) d\Omega, \quad (3)$$

где $A_{\text{in}}(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_{\text{in}}(t') \exp(i\Omega t') dt'$ — спектральная амплитуда падающего импульса, $t' = t - x \sin \theta/c$, $\Omega = \omega - \omega_0$. Из уравнения Гельмгольца

$$\Delta E(\vec{r}, \omega) + \varepsilon(z, \omega) k^2 E(\vec{r}, \omega) = 0, \quad (4)$$

где $k = \omega/c$, и граничных условий на границах ФК $z = 0, L$ для каждой спектральной компоненты поля $E(x, z, \omega)$ в ФК в двухволновом приближении (вблизи условия Брэгга) аналитически находятся спектральные амплитуды прямых $A_0(\Omega)$ и дифрагированных $A_h(\Omega)$ волн и соответствующие дисперсионные соотношения для z -проекций волновых векторов $q_{0z}(\Omega)$ и $q_{hz}(\Omega) = q_{0z}(\Omega) - sh$ внутри ФК:

$$q_{0z}^{(1,2)} = \frac{sh}{2} \pm \left(\frac{k^2}{h} \right) \sqrt{\alpha^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_{-1}}, \quad (5)$$

где величина $\alpha = \frac{h}{k^2} \left((\varepsilon_0 k^2 - q_{0x}^2)^{1/2} - \frac{h}{2} \right)$ определяет отклонение от точного брэгговского условия $\alpha = 0$;

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon' + i\tilde{\varepsilon}''(\omega)}{2} = \frac{\varepsilon' - \tilde{\varepsilon}''(\omega) + i\tilde{\varepsilon}'(\omega)}{2}, \quad (6)$$

$$\varepsilon_{-1} = \frac{\varepsilon' - i\tilde{\varepsilon}''(\omega)}{2} = \frac{\varepsilon' + \tilde{\varepsilon}''(\omega) - i\tilde{\varepsilon}'(\omega)}{2}$$

— коэффициенты в разложении функции (2) в ряд Фурье.

Как видно из выражений (5) и (6), РТ-симметричные моды поля, соответствующие действительным величинам $q_{0z}^{(1,2)}$, могут распространяться в ФК вблизи брэгговского условия $\alpha \ll 1$ только в том случае, если величина $-\varepsilon_1 \varepsilon_{-1} > 0$, т.е. при достаточно большом усилении в среде, когда $\tilde{\varepsilon}''(\omega) > \varepsilon'$. Равенство $\tilde{\varepsilon}''(\omega) = \varepsilon'$ соответствует особой точке спонтанного распада РТ-симметричных решений при определенной частоте ω_0 , когда действительная часть резонансной диэлектрической проницаемости $\tilde{\varepsilon}'(\omega) = \tilde{\varepsilon}'(\omega_0) = 0$.

Поля прямой $E_0(x, z, t)$ и дифрагированной $E_h(x, z, t)$ волн в любой точке среды в каждый

момент времени вычисляются с помощью фурье-синтеза:

$$E_g(x, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_{g1}(\Omega) \exp \left[i \left(q_{0z}^{(1)} - sf \right) z \right] + \right. \\ \left. + A_{g2}(\Omega) \exp \left[i \left(q_{0z}^{(2)} - sf \right) z \right] \right\} \times \\ \times \exp (i q_{0x} x - i \omega t) d\Omega, \quad (7)$$

где $g = 0, h$ — индексы, относящиеся к проходящей и дифрагированной волнам, соответственно; $f = 0$, если $g = 0$, и $f = h$, если $g = h$.

Амплитуды волн в ФК $A_{01,02}$ находятся из граничных условий. При падении импульса на левую поверхность $z = 0$, т. е. при $k_{0z} > 0$: $E_0(z = 0) = A_{01} + A_{02} = A_{in}(\Omega)$ и $E_h(z = L) = R_1 A_{01} \exp(i q_{0z}^{(1)} L) + R_2 A_{02} \exp(i q_{0z}^{(2)} L) = 0$. Отсюда легко получить следующие выражения для амплитуд $A_{01,02}$:

$$A_{01} = \frac{A_{in}(\Omega)}{1 - P}, \quad A_{02} = -\frac{P A_{in}(\Omega)}{1 - P}, \quad (8)$$

где $P = (R_1/R_2) \exp(i2\varphi)$, $2\varphi = (q_{0z}^{(1)} - q_{0z}^{(2)})L$, $R_{1,2} = -(\alpha \mp s\sqrt{\alpha^2 - \epsilon_1 \epsilon_{-1}})/\epsilon_{-s}$.

В случае падения импульса на правую поверхность ФК $z = L$, т. е. при $k_{0z} < 0$ и $q_{0z} < 0$, граничные условия имеют вид $E_0(z = L) = A_{01} \exp(i q_{0z}^{(1)} L) + A_{02} \exp(i q_{0z}^{(2)} L) = A_{in}(\Omega)$, $E_h(z = 0) = R_1 A_{01} + R_2 A_{02} = 0$, откуда

$$A_{01} = \frac{A_{in}(\Omega)}{1 - P} \exp(-i q_{0z}^{(1)} L), \\ A_{02} = \frac{P A_{in}(\Omega)}{1 - P} \exp(-i q_{0z}^{(2)} L). \quad (9)$$

Так как в случае падения волнового пакета $k = k_0 + \Omega/c$ и $k_{0x} = k \sin \theta$, то параметр отстройки α имеет следующий явный вид $\alpha = \alpha(\Omega) = (h/k^2) [(k_0 + \Omega/c)\sqrt{\epsilon_0 - \sin^2 \theta} - h/2]$.

Спектральные амплитудные коэффициенты прохождения $T(\Omega) = A_0(L, \Omega)/A_{in}(\Omega) = [A_{01}(\Omega) e^{i q_{0z}^{(1)} L} + A_{02}(\Omega) e^{i q_{0z}^{(2)} L}]/A_{in}(\Omega)$ и отражения $R_l(\Omega) = A_h(0, \Omega)/A_{in}(\Omega) = [A_{h1}(\Omega) + A_{h2}(\Omega)]/A_{in}(\Omega)$ полей при падении излучения на левую ($k_{0z} > 0$) поверхность $z = 0$ ФК имеют вид (здесь $A_{hj} = R_j A_{0j}$, $s = 1$):

$$T(\Omega) = \frac{1}{1 - P} \left(1 - \frac{R_1}{R_2} \right) \exp(i s q_{0z}^{(1)} L), \\ R_{l,r}(\Omega) = \frac{R_1}{1 - P} \left[1 - \exp \left\{ i s \left(q_{0z}^{(1)} - q_{0z}^{(2)} \right) L \right\} \right]. \quad (10)$$

Случаю падения излучения справа ($k_{0z} < 0$) соответствует значение $s = -1$ в (10).

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Для удобства дальнейшего анализа запишем спектральные амплитудные коэффициенты отражения $R(\Omega)$ и прохождения ФК в иной форме:

$$T(\Omega) = \frac{W}{W \cos \varphi - i \alpha \sin \varphi}, \quad (11)$$

$$R_{l,r}(\Omega) = i \frac{\epsilon'(1 \mp \sigma) \sin \varphi}{2 [W \cos \varphi - i \alpha \sin \varphi]} = \\ = i \frac{\epsilon'(1 \mp \sigma) \sin \varphi}{2W} T(\Omega), \quad (12)$$

где

$$W = \sqrt{\alpha^2 - \epsilon_1 \epsilon_{-1}}, \quad (13)$$

$$\varphi = k^2 WL/h, \quad (14)$$

индексы l, r и знаки « $-$ » и « $+$ » в (12) соответствуют коэффициентам отражения при падении излучения на левую $z = 0$ и правую $z = L$ границу ФК. Величина $\alpha = \alpha_\Omega - \alpha_\theta$ определяет отклонение от точного брэгговского условия по углу $\Delta\theta = \theta - \theta_B = 0$ и частоте $\Omega = 0$, где $\alpha_\Omega = 2(\Omega/\omega_0)\epsilon_0 \cos^2 \theta_B$, $\alpha_\theta = \Delta\theta \epsilon_V \sin 2\theta_{BV}$, $\cos \theta_B = \lambda_0/2d\sqrt{\epsilon_0}$, $\sin \theta_{BV} = \sqrt{\epsilon_0 - \epsilon_V} \sin \theta_B$, ϵ_V — диэлектрическая проницаемость среды, окружающей ФК.

Отметим, что коэффициент прохождения $T(\Omega)$ (11) не зависит от направления падения излучения на ФК, тогда как коэффициент отражения $R(\Omega)$ (12) изменяется значительно вплоть до $R_l(\Omega = 0) = 0$, $R_l(\Omega = 0) \gg 1$ — однонаправленное отражение.

В случае широкополосной квази-РТ-симметрии, когда материальная дисперсия мала, т. е. $\tilde{\epsilon}'(\omega) \approx \tilde{\epsilon}'(\omega_0) = 0$, из (6) следует, что

$$-\epsilon_1 \epsilon_{-1} = (\tilde{\epsilon}''^2 - \epsilon'^2)/4 = \epsilon'^2 (\sigma^2 - 1)/4, \quad (15)$$

где величина $\sigma = \tilde{\epsilon}''/\epsilon'$ характеризует близость к ОТ $\sigma = 1$.

Из выражений (7), (11) и (12) видно, что для нахождения временной зависимости полей прошедшего $E_{Tr}(L, t) = E_{Tr}(0, t)$ и отраженного $E_{Rl}(0, t)$, $E_{Rl}(L, t)$ импульсов необходимо вычислить следующие интегралы преобразования Фурье для проходящего и отраженного импульсов ($x = 0$):

$$E_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W}{W \cos \varphi - i \alpha \sin \varphi} \times \\ \times A_{in}(\Omega) \exp(-i \omega t) d\Omega, \\ E_{Rl,r}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i \frac{\epsilon'(1 \mp \sigma) \sin \varphi}{2 [W \cos \varphi - i \alpha \sin \varphi]} \times \\ \times A_{in}(\Omega) \exp(-i \omega t) d\Omega. \quad (16)$$

Фаза (14)

$$\varphi = \frac{k^2 WL}{h} = \frac{k^2 Nd}{h} \sqrt{\alpha^2 + \frac{\epsilon'^2 (\sigma^2 - 1)}{4}} \quad (17)$$

варьируется при изменении толщины $L = Nd$ фотонного кристалла и параметра близости к ОТ σ , здесь N — число периодов.

Как видно из выражений (11), (13)–(15), точно в ОТ, т. е. при $\sigma = 1$, коэффициент прохождения (11) равен

$$T(\Omega) = \frac{1}{\cos \varphi - i \left(\alpha / \sqrt{\alpha^2} \right) \sin \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi \pm i \sin \varphi}, \quad (18)$$

т. е. $|T(\Omega)| = 1$ при любых действительных α . При отклонении от ОТ, $\sigma \neq 1$, вблизи условия Брэгга $|\alpha| \ll 1$ у функций $T(\Omega)$ и $R(\Omega)$ появляются спектральные сингулярности, или полюсы функций (нули в знаменателях). Действительно, в простейшем случае $\alpha = 0$, $W \neq 0$ в (11) получаем $T(\Omega) = 1 / \cos \varphi$. Таким образом, возникают частотные сингулярности $T(\Omega_j), R(\Omega_j) \rightarrow \infty$ на частотах Ω_j при значениях фаз

$$\varphi = \frac{\pi}{2}(2j + 1), \quad (19)$$

где $j = 0, 1, 2, \dots$

В случае наличия сингулярности, для корректного вычисления интегралов в (16) необходимо перейти к интегрированию в комплексной плоскости комплексной переменной, т. е. к комплексным частотам $\Omega = \Omega' + i\Omega''$. Как известно [20, 26], из принципа причинности следует, что в интеграле

$$\chi(z, \omega) = \int_0^\infty \tilde{\chi}(z, t') \exp(i\omega t') dt', \quad (20)$$

связывающем комплексную диэлектрическую восприимчивость $\chi(z, \omega)$ и действительную функцию Грина $\tilde{\chi}(z, t')$, время задержки отклика системы t' есть положительная величина, $t' > 0$. Следовательно, в случае аналитической функции Грина и комплексной частоты $\omega = \omega' + i\omega''$ функция $\chi(z, \omega)$ в (20) также будет аналитической, если $\text{Im} \omega > 0$, т. е. в верхней комплексной полуплоскости комплексной переменной. Таким образом, принцип причинности может соблюдаться только при $\Omega'' > 0$, однако это необходимое, но не достаточное условие для соблюдения принципа причинности. Полюсы функций в области $\Omega'' > 0$ при вычислении интегралов (16) следует учитывать таким образом, чтобы контур интегрирования не включал эти полюсы. В этом случае поля $E_T(t)$, $E_R(t)$ не будут возрастать в области $t < 0$. Иными словами, контур интегрирования в (16) следует выбирать выше полюсов Ω_j'' функций $T(\Omega)$, $R(\Omega)$, рис. 2, либо, помимо интегрирования вдоль действительной оси $\Omega = \Omega'$, необходимо осуществить обход полюсов и вычислить суммы вычетов [27–29]:

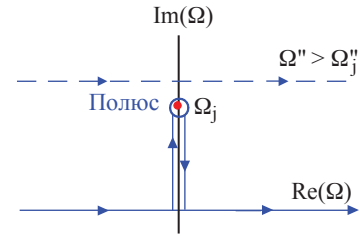


Рис. 2. Иллюстрация двух возможных путей при интегрировании функций со спектральной сингулярностью: интегрирование вдоль действительной оси частот при $\Omega'' > \Omega_j''$ и вдоль траектории с обходом полюса в точке Ω_j .

$$\begin{aligned} E_T(t) &= \int_{-\infty+i\gamma}^{\infty+i\gamma} T(\Omega) A_{in}(\Omega) \exp(-\omega t) d\Omega, \\ E_{Rl,r}(t) &= \int_{-\infty+i\gamma}^{\infty+i\gamma} R_{l,r}(\Omega) A_{in}(\Omega) \exp(-\omega t) d\Omega, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\Omega = \Omega' + i\gamma$, $\gamma > \Omega_j''$, $-\infty < \Omega' < +\infty$. Несоблюдение этого требования приводит к нарушению принципа причинности — отраженное излучение появляется раньше, чем на среду приходит падающий импульс. Если же полюсы находятся в нижней полуплоскости, $\Omega_j'' < 0$, то достаточно интегрирования вдоль вещественной оси $\Omega = \Omega'$.

Из (17) и (19) следует, что первой точке сингулярности при $\varphi = \pi/2$ соответствует критическое значение толщины ФК на центральной частоте $L_{cr} = \pi h / k_0^2 \sqrt{4\alpha^2 + \varepsilon'^2 (\sigma^2 - 1)}$. Аналитические и численные расчеты показали, что при $L > L_{cr}$ полюсы Ω_j'' функций $T(\Omega)$ и $R(\Omega)$ лежат в верхней полуплоскости, т. е. $\Omega_j'' > 0$, а при $L < L_{cr}$ — в нижней полуплоскости, $\Omega_j'' < 0$. Случай $L > L_{cr}$ соответствует процессу лазерной генерации, когда интенсивность поля в ФК быстро возрастает во времени. Это приводит к нелинейному взаимодействию излучения с веществом, которое не описывается в нашей линейной модели.

На рис. 3 представлены графики модулей спектров отражения импульсов $R_r(\Omega')$ (12) при различных параметрах близости к ОТ σ , причем все значения $\sigma > 1$, т. е. в ФК распространяются РТ-симметричные моды. Из сравнения графиков видно, что при $\sigma = 1.1$ спектр отраженного импульса значительно уже не только по сравнению со спектром падающего импульса, кривая 4, но и по отношению к спектрам при других близких значениях $\sigma = 1.11; 1.09$. Величина коэффициента отражения при $\sigma = 1.1$ многократно увеличивается. Это связано с появлением в ФК частотной сингулярности, поскольку при данном значении σ и выбранном числе периодов $N = 109$ величина фазы в (11), (12) близка к критическому значению $\varphi \approx \pi/2$.

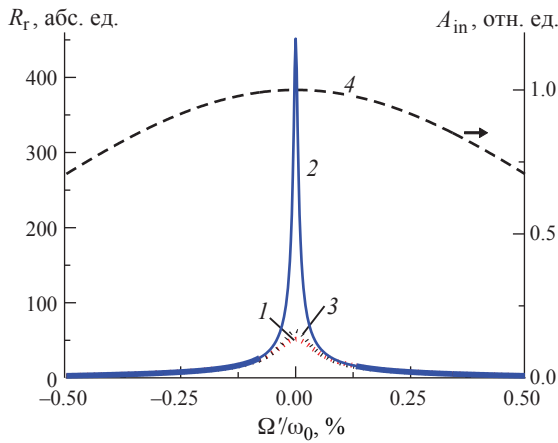


Рис. 3. Спектры отражения $R_r(\Omega')$ при различных значениях параметра σ : 1 — 1.09, 2 — 1.10, 3 — 1.11; 4 — спектр падающего импульса $A_{in}(\Omega')$, импульс падает справа ($k_{0z} < 0$). Параметры: $N = 109$, $\lambda_0 = 0.8$ мкм, $d = 0.5$ мкм, $\varepsilon_0 = 1.3$, $\varepsilon' = 0.0254$, длительность гауссова импульса $\tau = 0.1$ пс.

Сужение спектров отраженных и прошедших импульсов в условиях частотной сингулярности неминуемо должно приводить к соответствующему затягиванию импульсов во времени. Параметры задачи выбраны таким образом, чтобы для ФК выполнялось условие $L < L_{cr}(\sigma)$, т. е. полюсы функций $R_{r,l}(\Omega)$ и $T(\Omega)$ лежали в нижней полуплоскости. Поэтому для определения временной зависимости интенсивностей отраженного и прошедшего импульсов можно проводить интегрирование в (16) только по действительной оси частот. На рис. 4 представлены графики интенсивностей отраженных $I_{R_{r,l}}(t) = |E_{R_{r,l}}(t)|^2$ и прошедших $I_T(t) = |E_T(t)|^2$ импульсов при различных значениях σ . Из сравнения графиков видно, что малое изменение σ на 1% приводит к многократному увеличению длительности

и усилению импульсов. По сравнению с падающим импульсом длительность отраженного сигнала возрастает более чем в 20 раз. Аналогичные значительные изменения интенсивности и длительности импульсов наблюдаются и при вариации толщины кристалла L вблизи критического значения $L_{cr}(\sigma)$ при постоянной величине σ . Дальнейшее увеличение $L > L_{cr}(\sigma)$ приводит к появлению полюсов функций в верхней полуплоскости комплексных частот, происходит переход к режиму лазерной генерации излучения в ФК.

Важно отметить, что, подобно случаю монохроматического излучения, для рассматриваемых коротких импульсов наблюдается типичный РТ-симметричный эффект — однонаправленное брэгговское отражение. Так, из сравнения графиков на рис. 4а и рис. 4б видно, что при смене знака угла падения импульса на структуру интенсивность отраженного импульса радикально уменьшается: $I_{R_l}(t) = I_{R_r}(t)/440$. При этом интенсивность прошедшего импульса $I_T(t)$ не изменяется.

Сравним полученные результаты со случаем взаимодействия излучения с консервативным ФК (без усиления и поглощения) конечной толщины. Известно, что на краю фотонной запрещенной зоны в таком ФК наблюдается резонанс пропускания [30] (или толщинные осцилляции), когда излучение в узком частотном диапазоне не отражается от ФК, $R = 0$, а коэффициент прохождения $T = 1$. Этот эффект связан с интерференцией обратных (прямых) блоховских волн в кристалле и наблюдается при разности фаз двух блоховских волн $(q_{0z}^{(1)} - q_{0z}^{(2)})L = \pi$. В РТ-симметричном ФК при такой разности фаз РТ-симметричных мод возникает спектральная сингулярность и значительный рост $R, T \rightarrow \infty$.

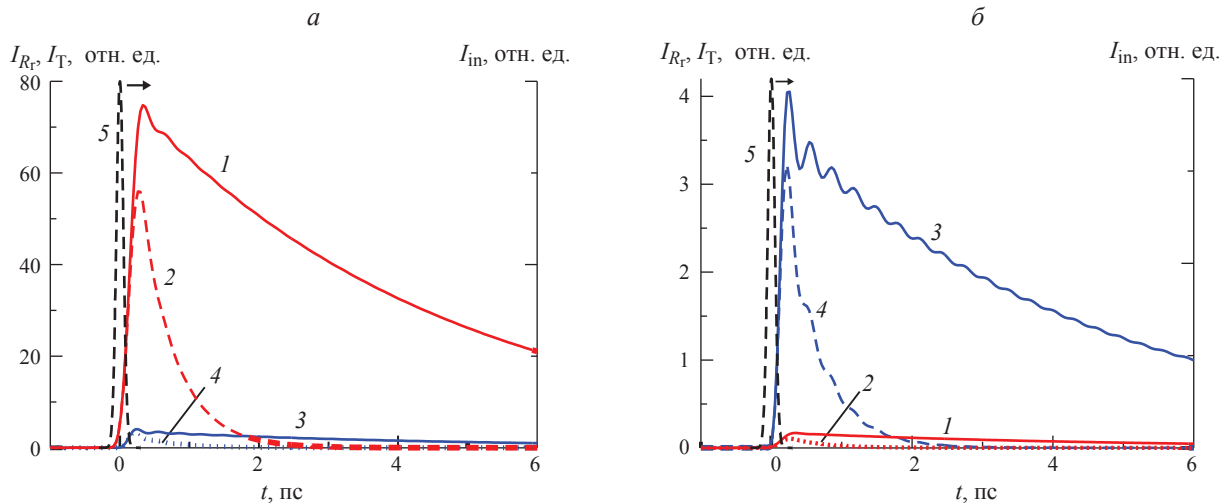


Рис. 4. Интенсивности отраженных $I_{R_{r,l}}(t)$ (красные кривые 1 и 2), прошедших $I_T(t)$ (синие кривые 3 и 4) и падающих импульсов $I_{in}(t)$ (кривые 5, правая шкала) для ФК с $N = 109$ при значениях параметра близости к ОТ $\sigma = 1.10$ (кривые 1 и 3) и $\sigma = 1.09$ (кривые 2 и 4): импульс падает справа (а) ($k_{0z} < 0$) и слева (б) ($k_{0z} > 0$). Остальные параметры как в подписи к рис. 3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанные выше сверхмонохроматизация и усиление коротких импульсов в РТ-симметричных ФК за счет частотной сингулярности при определенных значениях параметра близости к особой точке σ сохраняются и в случае учета дисперсии при широкополосной РТ-симметрии среды. Для коротких импульсов в диспергирующей среде имеет место также асимметрия отражения импульсов при смене знака брэгговского угла падения излучения на ФК. Поскольку величина определяется реальной и мнимой частями диэлектрической проницаемости, то обнаруженная вблизи частотной сингулярности резкая зависимость спектров отражения и прохождения коротких импульсов от σ может быть использована при разработке новых физических принципов создания устройств для управления параметрами коротких оптических импульсов, ограничителей мощности, оптических сенсоров и т. п.

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М. В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bender C.M., Boettcher S.* // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. No. 24. P. 5243.
2. *Bian Z., Xiao L., Wang K. et al.* // Phys. Rev. Res. 2020. V. 2. No. 2. Art. No. 022039(R).
3. *Ruschhaupt A., Delgado F., Muga J.G.* // J. Phys. A. 2005. V. 38. No. 9. P. L171.
4. *Miri M.-A., Alù A.* // Science. 2019. V. 363. No. 6422. Art. No. eaar7709.
5. *Özdemir K., Rotter S., Nori F., Yang L.* // Nature Mater. 2019. V. 18. No. 8. P. 783.
6. *Christodoulides D., Yang J.* Parity-time symmetry and its applications. Springer Tracts in 4 Modern Physics. V. 280. Springer, 2018.
7. *Aurégan Y., Pagneux V.* // Phys. Rev. Lett. 2017. V. 118. No. 17. Art. No. 174301.
8. *Bender C.M., Gianfreda M., Klevansky S.P.* // Phys. Rev. A. 2014. V. 90. No. 2. Art. No. 022114.
9. *Sakhdari M., Hajizadegan M., Zhong Q. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2019. V. 123. No. 19. Art. No. 193901.
10. *Wong Z.J., Xu Y.-L., Kim J. et al.* // Nature Photon. 2016. V. 10. No. 12. P. 796.
11. *Roszeitis K., Sudzjus M., Palatnik A. et al.* // J. Eur. Opt. Soc.-Rapid Publ. 2022. V. 18. No. 1. P. 6.
12. *Brac de la Perrière V., Gaimard Q., Benisty H. et al.* // Nanophotonics. 2021. V. 10. No. 4. P. 1309.
13. *Hao T., Berini P.* // Opt. Express. 2022. V. 30. No. 4. P. 5167.
14. *Guo A., Salamo G.J., Duchesne D. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 103. No. 9. Art. No. 093902.
15. *Kim K.H., Hwang M.S., Kim H.R. et al.* // Nature Commun. 2016. V. 7. No. 1. P. 13893.
16. *Kulishov M., Laniel L.M., Bélanger N. et al.* // Opt. Express. 2005. V. 13. No. 8. P. 3068.
17. *Bushuev V.A., Tsvetkov D.M., Konotop V.V., Mantsyzov B.I.* // Opt. Lett. 2019. V. 44. No. 23. P. 5667.
18. *Feng L., Ayache M., Huang J. et al.* // Science. 2011. V. 333. No. 6043. P. 729.
19. *Бушуйев В.А., Манцызов Б.И.* // ЖЭТФ. 2022. Т. 162. № 3(9). С. 322; *Bushuev V.A., Mantsyzov B.I.* // JETP. 2022. V. 135. No. 3. P. 277.
20. *Tsvetkov D.M., Bushuev V.A., Mantsyzov B.I.* // Phys. Rev. A. 2019. V. 99. No. 2. Art. No. 023846.
21. *Ржанов А.Г.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2024. Т. 88. № 1. С. 35; *Rzhanov A.G.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2024. V. 88. № 1. P. 26.
22. *Mostafazadeh A.* // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102. No. 22. Art. No. 220402.
23. *Chong Y.D., Ge L., Cao H., Stone A.D.* // Phys. Rev. Lett. 2010. V. 105. No. 5. Art. No. 053901.
24. *Tsvetkov D.M., Bushuev V.A., Konotop V.V., Mantsyzov B.I.* // Phys. Rev. A. 2018. V. 98. No. 5. Art. No. 053844.
25. *Zyablovsky A.A., Vinogradov A.P., Dorofeenko A.V. et al.* // Phys. Rev. A. 2014. V. 89. No. 3. Art. No. 033808.
26. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит, 2005. 406 с.
27. *Вайнштейн Л.А.* // УФН. 1976. Т. 118. № 2. С. 339; *Vainshtein L.A.* // Sov. Phys. Usp. 1976. V. 19. No. 2. P. 189.
28. *Skaar J.* // Phys. Rev. E. 2006. V. 73. No. 2. Art. No. 026605.
29. *Дорофеев А.В., Зябловский А.А., Пухов А.А. и др.* // УФН. 2012. Т. 182. № 11. С. 1157; *Dorofeenko A.V., Zyablovsky A.A., Pukhov A.A. et al.* // Phys. Usp. 2012. V. 55. No. 11. P. 1080.
30. *Петров Е.В., Манцызов Б.И.* // ЖЭТФ. 2005. Т. 128. № 3(9). С. 464; *Petrov E.V., Mantsyzov B.I.* // JETP. 2005. V. 101. No. 3. P. 401.

Optical pulses in a non-Hermitian medium near a singularity

V. A. Bushuev, B. I. Mantsyzov*

Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia

**e-mail: bmantsyzov@gmail.com*

The spectral method was used to solve the problem of interaction of short optical pulses with RT-symmetric photonic crystals under conditions of frequency singularity. It is shown that with a small deviation from the exceptional point of spontaneous decay of PT-symmetric field modes, a frequency singularity of the transmission and reflection coefficients of the structure arises. This leads to a significant narrowing of the pulse spectra and an increase in their amplitude and duration with unidirectional Bragg reflection.

Keywords: RT-symmetry, spectral singularity, short optical pulses, dynamic Bragg diffraction

УДК 535.4

ОПТИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА ПРИ НОРМАЛЬНОМ ПАДЕНИИ С ПОМОЩЬЮ МЕТАЛЛОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЛОИСТОЙ СТРУКТУРЫ

© 2025 г. А. И. Кашапов*, Е. А. Безус, Д. А. Быков, Л. Л. Досколович

Отделение «Институт систем обработки изображений — Самара» Курчатовского комплекса кристаллографии и фотоники федерального государственного бюджетного учреждения «Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Самара, Россия

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королёва», Самара, Россия

**e-mail: ar.kashapov@gmail.com*

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

Теоретически и численно исследована оптическая реализация операции пространственного дифференцирования второго порядка с помощью слоистой металлодиэлектрической структуры при нормальном падении светового пучка. Результаты численного моделирования подтверждают теоретические результаты и показывают возможность оптического вычисления оператора Лапласа с высоким качеством.

Ключевые слова: оптическое дифференцирование, вторая производная, оператор Лапласа, слоистая структура, нормальное падение, резонанс

DOI: 10.31857/S0367676525010026, **EDN:** DCJWJG

ВВЕДЕНИЕ

Возможность оптического вычисления оператора Лапласа представляет большой интерес для задач оптической обработки информации, в особенности, задач аналоговых оптических вычислений и обработки изображений [1–7]. Оператор Лапласа может быть применен для выявления изменений яркости или контраста на изображениях, поскольку он позволяет выделить контуры объектов, точки пересечения линий и другие важные детали, что, в частности, может повысить точность классификации изображений [8].

Для оптической реализации оператора Лапласа требуются дифракционные структуры, обладающие нулем второго порядка по пространственным частотам в спектре отражения или пропускания. Это условие легче всего выполнить в геометрии нормального падения, поскольку в этом случае вследствие симметрии задачи дифракции нули отражения (пропускания) будут являться нулями второго порядка [1]. В работах [1, 3, 9, 10] для оптической реализации операторов дифференцирования второго порядка успешно использовались слоистые дифракционные структуры (в отражении) [1, 9] и дифракционные решетки с двумерной периодичностью (в пропускании) [3, 5, 10].

Отметим, что рассмотренные ранее слоистые диэлектрические структуры (брэгговские решетки с дефектом периода) для оптического вычисления оператора Лапласа [1] являются более простыми с точки зрения их изготовления по сравнению с дифракционными решетками. В то же время, они обладают горизонтальной плоскостью симметрии, что создает затруднения при их практической реализации (поскольку, в частности, расположение этих структур на подложке нарушает симметрию и приводит к исчезновению нуля отражения).

По мнению авторов настоящей работы, металлодиэлектрические слоистые структуры, по сравнению с чисто диэлектрическими брэгговскими структурами, обладают преимуществом при вычислении оператора Лапласа при нормальном падении, поскольку не требуют наличия горизонтальной плоскости симметрии.

В настоящей работе исследуется слоистая металлодиэлектрическая структура «металл-диэлектрик-металл-диэлектрик», расположенная на металлической подложке. Показано, что такая структура позволяет выполнить оптическое вычисление оператора Лапласа от профиля падающего оптического пучка с высокой точностью. При

этом приведенные результаты численного моделирования полностью согласуются с теоретическим описанием.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОПТИЧЕСКОГО ПУЧКА ПРИ ОТРАЖЕНИИ ОТ СТРУКТУРЫ

Рассмотрим сначала преобразование x -компоненты электрического поля трехмерного линейно поляризованного оптического пучка, происходящее при его отражении от некоторой слоистой структуры при нормальном падении. Следуя работе [1], можно показать, что x -компонента электрического поля отраженного пучка, представленная в виде разложения по плоским волнам, будет иметь вид

$$E_{\text{refl},x}(x, y) = \iint G_x(k_x, k_y) H(k_x, k_y) \times \exp(ik_x x + ik_y y) dk_x dk_y, \quad (1)$$

где $G_x(k_x, k_y)$ — спектр x -компоненты электрического поля падающего пучка, представляющий амплитуды плоских волн с тангенциальными компонентами волновых векторов (пространственными частотами) k_x, k_y , образующих падающий пучок, а $H(k_x, k_y)$ — передаточная функция (ПФ), которая описывает преобразование спектра падающего пучка (изменение амплитуд плоских волн, происходящее при отражении). Как показано в работе [1], данная ПФ выражается через коэффициенты отражения структуры для ТЕ- и ТМ-поляризованных плоских волн и для слоистой структуры с нулем отражения при нормальном падении имеет следующее разложение в ряд Тейлора до квадратичных членов в окрестности нуля:

$$H(k_x, k_y) \approx c_{x,2} k_x^2 + c_{y,2} k_y^2. \quad (2)$$

Таким образом, в окрестности нуля ПФ содержит только квадратичные члены. В этом случае, как следует из формул (1), (2), структура реализует следующую операцию дифференцирования второго порядка поперечного профиля x -компоненты электрического поля падающего пучка:

$$E_{\text{refl},x}(x, y) = -c_{x,2} \frac{\partial^2 E_{\text{inc},x}(x, y)}{\partial x^2} - c_{y,2} \frac{\partial^2 E_{\text{inc},x}(x, y)}{\partial y^2}. \quad (3)$$

Очевидно, что при равенстве коэффициентов $c_{x,2}$ и $c_{y,2}$ в (2) профиль отраженного пучка (3) будет пропорционален оператору Лапласа от профиля падающего пучка. Как было отмечено выше, данный случай представляет наибольший практический интерес и поэтому будет рассмотрен ниже.

ГЕОМЕТРИЯ ИССЛЕДУЕМОЙ МЕТАЛЛОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЛОИСТОЙ СТРУКТУРЫ И ПОЛУЧЕНИЕ НУЛЯ ОТРАЖЕНИЯ

Для вычисления дифференциального оператора второго порядка (3) при нормальном падении предлагается использовать четырехслойную структуру «металл-диэлектрик-металл-диэлектрик» (МДМД), расположенную на подложке (оптически толстом слое) из металла. Будем считать, что над структурой находится среда с показателем преломления $n_{\text{sup}} = 1$ (рис. 1).

В работах [11, 12] был рассмотрен метод расчета трехслойных металлодиэлектрических структур, состоящих из двух металлических слоев, разделенных слоем диэлектрика, и имеющих нуль отражения. Используем аналогичный этим работам подход для расчета параметров исследуемой четырехслойной МДМД-структуры, имеющей нуль отражения. Формула для расчета толщины верхнего металлического слоя при заданных толщинах «нижней» пары слоев металла и диэлектрика для достижения нулевого отражения [11] имеет вид:

$$\left| \frac{r}{r^2 - t^2} \right| = |\rho|, \quad (4)$$

где r, t — комплексные коэффициенты отражения и пропускания верхнего металлического слоя, рассматриваемые как функции его толщины h_1 ; ρ — комплексный коэффициент отражения «нижней» пары слоев, состоящей из металлического слоя толщиной h_3 и диэлектрического слоя толщиной h_4 (рис. 1). Отметим, что в формуле (4) коэффициенты r и t предполагаются рассчитанными при фиксированных длине волны λ и поляризации падающей волны. После нахождения толщины первого (верхнего) металлического слоя h_1 толщина диэлектрического слоя h_2 «верхней» пары, обеспечивающая нулевое отражение, может быть найдена из формулы [11]

$$h_2 = \frac{1}{2k_0 n} \left[\arg \frac{r}{r^2 - t^2} - \arg \rho + 2\pi j \right], \quad (5)$$

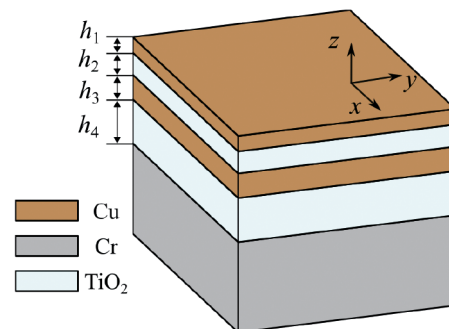


Рис. 1. Геометрия и параметры исследуемой металлодиэлектрической слоистой структуры.

где k_0 — волновое число, n — показатель преломления диэлектрического слоя, j — целое число, обеспечивающее положительное значение толщины h_2 .

Стоит отметить, что структура, параметры которой рассчитаны по формулам (4) и (5) в случае нормального падения, будет обладать нулем отражения второго порядка по пространственным частотам в силу симметрии задачи дифракции.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассмотрим теперь возможность использования исследуемой четырехслойной МДМД-структуры для вычисления оператора Лапласа от профиля x -компоненты электрического поля падающего пучка. Согласно (2), (3), для этого необходимо выполнение условия $c_{x,2} = c_{y,2}$. Возможность достижения указанного условия исследовалась для МДМД-структур в конфигурации «Cu–TiO₂–Cu–TiO₂» (материалы слоев — медь и диоксид титана) на подложке из хрома (Cr) при фиксированной длине волны $\lambda = 633$ нм и ТМ-поляризации. Параметрами оптимизации были толщины нижней «металлодиэлектрической пары» слоев h_3 и h_4 (рис. 1), а толщины верхних двух слоев h_1 и h_2 рассчитывались по формулам (4) и (5) из условия получения нуля отражения. Для выбранной длины волны использовались следующие значения показателей преломления для указанных выше материалов [13, 14]: $n_{\text{Cu}} = 0.23 + 3.43i$ (Cu), $n_{\text{TiO}_2} = 2.58$ (TiO₂), $n_{\text{Cr}} = 3.14 + 3.31i$ (Cr).

В результате расчетов была найдена структура со следующими толщинами слоев: $h_1 = 7.2$ нм, $h_2 = 51$ нм, $h_3 = 34.0$ нм, $h_4 = 79.1$ нм. Для данной структуры условие $c_{x,2} = c_{y,2}$ выполняется с высокой точностью: $c_{x,2} = 0.033 \cdot e^{-2.92i}$ мкм², $c_{y,2} = 0.034 \cdot e^{-2.92i}$ мкм².

На рис. 2а показан модуль ПФ исследуемой структуры, рассчитанный численно в рамках строгого решения уравнений Максвелла методом [15]. Модуль ПФ на рис. 2а оказался визуально неотли-

чимым от модуля «модельной» передаточной функции (2) при значениях коэффициентов, приведенных выше, поэтому последний не показан для краткости. Отклонение модулей модельной функции и численно рассчитанной ПФ является малым: СКО, нормированное на максимум модуля ПФ составляет всего 0.73%, а максимальное отклонение — 1.94%. Отметим, что строго рассчитанная ПФ имеет требуемый квадратичный вид при $\sqrt{k_x^2 + k_y^2}/k_0 \leq 0.135$, что соответствует пространственному разрешению $\approx 3.7\lambda$. Достигнутое пространственное разрешение практически совпадает с пространственным разрешением, полученным в работе [10], где для вычисления оператора Лапласа использовалась существенно более сложная структура в виде метаповерхности с существенно субволновыми размерами деталей элементарной ячейки.

Далее, рассмотрим преобразование x -компоненты электрического поля, происходящее при отражении от исследуемой структуры падающего гауссова пучка:

$$E_{\text{inc},x}(x, y) = \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}\right]. \quad (6)$$

Для рассматриваемого случая «модельная» функция, описывающая профиль отраженного пучка и рассчитанная по формуле (3), будет иметь вид:

$$E_{\text{refl},x}(x, y) = -4 \frac{c_{x,2}}{\sigma^4} (x^2 + y^2 - \sigma^2) \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}\right]. \quad (7)$$

На рис. 2б показан модуль строго рассчитанного профиля отраженного пучка при $\sigma = 6$ мкм. Как и в случае передаточной функции, модельный (7) и строго рассчитанный профили отраженного пучка хорошо совпадают, при этом нормированная среднеквадратическая ошибка составляет всего 0.45%, а максимальное отклонение — 1.07%.

Как было отмечено во введении, оператор Лапласа широко используется для выделения контуров (перепадов яркости) на изображении. В качестве примера, иллюстрирующего эту операцию, рассмотрим падающий пучок с профилем x -компоненты электрического поля в виде т.н. супергауссовой функции

$$E_{\text{inc},x}(x, y) = \exp\left[-\frac{x^6 + y^6}{\sigma^6}\right]. \quad (8)$$

На рис. 3а показан результат преобразования МДМД-структурой падающего пучка с профилем (8) при $\sigma = 3$ мкм, а на рис. 3б — нормированные сечения профилей падающего и отраженного пучков при $y = 0$. Рис. 3 показывает появление характерных для оператора Лапласа двойных контуров на границах входного пучка с квазипрямоугольной формой и шириной по уровню спада 0.5 в 6 мкм.

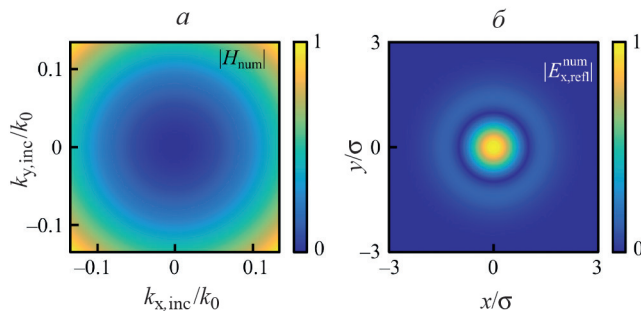


Рис. 2. Модуль строго рассчитанной ПФ металлодиэлектрической слоистой структуры, выполняющей вычисление оператора Лапласа (а) и нормированная на максимальное значение абсолютная величина x -компоненты электрического поля численно рассчитанного отраженного пучка (б).

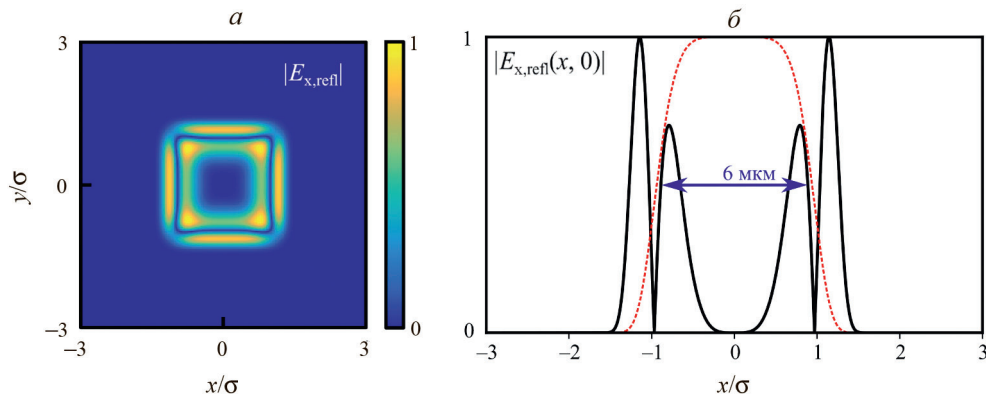


Рис. 3. Нормированный на максимальное значение модуль профиля x -компоненты отраженного электрического поля, формируемый при падающем пучке с профилем в виде супергауссовой функции (а); Сечения нормированных на максимальные значения профилей отраженного пучка $E_{\text{ref},x}(x, y)$ (черная линия) и падающего пучка $E_{\text{inc},x}(x, y)$ вдоль оси x при $y = 0$ (красная пунктирная линия) (б). Синей стрелкой показана ширина падающего пучка по уровню 0.5.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, нами исследована оптическая реализация операции пространственного дифференцирования второго порядка при нормальном падении оптического пучка с помощью слоистой металлодиэлектрической структуры. Найдены параметры четырехслойной МДМД-структуры, при которых выполняется условие, требуемое для оптического вычисления оператора Лапласа от профиля падающего пучка. Результаты численного моделирования подтверждают теоретические результаты и показывают возможность оптического вычисления оператора Лапласа с высоким качеством (при среднеквадратической ошибке менее 1%). Полученные результаты могут найти применение при создании систем аналоговых оптических вычислений и оптической обработки информации.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-12-00028).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bykov D.A., Doskolovich L.L., Bezus E.A., Soifer V.A. // Opt. Express. 2014. V. 22. No. 21. P. 25084.
2. Doskolovich L.L., Kashapov A.I., Bezus E.A. et al. // Opt. Express. 2023. V. 31. No. 10. P. 17050.
3. Zhou Y., Zheng H., Kravchenko I.I., Valentine J. // Nature Photon. 2020. V. 14. P. 316.
4. Tu Y., Liang Y., Zhu X. et al. // Opt. Commun. 2023. V. 549. Art. No. 129935.
5. Guo C., Xiao M., Minkov M. et al. // Optica. 2018. V. 5. No. 3. P. 251.
6. Kashapov A.I., Doskolovich L.L., Bezus E.A. et al. // Comp. Opt. 2023. V. 47. No. 6. P. 845.
7. Кашапов А.И., Безус Е.А., Быков Д.А., Досколович Л.Л. // Изв. РАН. Сер. физ. 2023. Т. 87. № 1. С. 19; Kashapov A.I., Bezus E.A., Bykov D.A., Doskolovich L.L. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2023. V. 87. No. 1. P. 13.
8. Soshnikov D.V., Doskolovich L.L., Byzov E.V. et al. // Comp. Opt. 2023. V. 47. No. 5. P. 691.
9. Wesemann L., Panchenko E., Singh K. et al. // APL Photonics. 2019. V. 4. No. 10. Art. No. 100801.
10. Pan D., Wan L., Ouyang M. et al. // Photon. Res. 2021. V. 9. No. 9. P. 1758.
11. Kashapov A.I., Doskolovich L.L., Bezus E.A. et al. // J. Optics. 2021. V. 23. No. 2. Art. No. 023501.
12. Doskolovich L.L., Kashapov A.I., Bezus E.A. et al. // Photon. Nanostruct. 2022. V. 52. Art. No. 101069.
13. <https://refractiveindex.info/>
14. Johnson P.B., Christy R.W. // Phys. Rev. B. 1972. V. 6. No. 12. P. 4370.
15. Moharam M.G., Pommet D.A., Grann E.B. Gaylord T.K. // J. Opt. Soc. Amer. A. 1995. V. 12. P. 1077.

Optical computation of the Laplace operator at normal incidence using a multilayer metal-dielectric structure

A. I. Kashapov*, E. A. Bezus, D. A. Bykov, L. L. Doskolovich

*Image Processing Systems Institute, National Research Centre «Kurchatov Institute», Samara, 443001 Russia
Samara National Research University, Samara, 443086 Russia*

**e-mail: ar.kashapov@outlook.com*

We theoretically and numerically investigate the optical implementation of the second-order spatial differentiation operation using a layered metal-dielectric structure at normal light beam incidence. Numerical simulation results confirm the theoretical results and show the possibility of ‘optical calculation of the Laplace operator with high quality.

Keywords: optical differentiation, second derivative, Laplace operator, layered structure, normal incidence, resonance

УДК 537.87:537.9

РАДИОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ В СВЕРХРЕШЕТКЕ НА ОСНОВЕ ТРЕХМЕРНОГО ДИРАКОВСКОГО КРИСТАЛЛА

© 2025 г. А. В. Вальков¹, С. В. Крючков^{1, 2}, Е. И. Кухарь^{1, *}

¹ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Волгоградский государственный технический университет», Волгоград, Россия

² Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Волгоградский государственный социально-педагогический университет», Волгоград, Россия

* e-mail: eikuhar@yandex.ru

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

Построена кинетическая теория радиоэлектрического эффекта в сверхрешетке на основе трехмерного дираковского кристалла, помещенной в постоянное электрическое поле. Показано, что в случае, когда блоховская частота кратна частоте электромагнитной волны, плотность тока испытывает резонанс. Последний может приводить к изменению направления плотности тока. Изучена амплитудная зависимость плотности радиоэлектрического тока.

Ключевые слова: радиоэлектрический эффект, сверхрешетка, дираковский кристалл, блоховская частота

DOI: 10.31857/S0367676525010037, EDN: DCFZFV

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время активно изучаются электронные свойства трехмерных (3D) структур на основе дираковских или графеноподобных кристаллов [1, 2], имеющих широкий диапазон применения [2–5]. С одной стороны, для носителей заряда 3D дираковских материалов характерно наличие трех степеней свободы движения, а с другой — релятивистской формы закона дисперсии [6, 7]. Существуют различные способы изготовления таких структур [8, 9]. В [10] предложена 3D структура, представляющая собой сверхрешетку (СР), вдоль оси роста которой располагаются графеновые листы, разделенные полупроводниковыми прокладками. В [11] рассмотрена гетероструктура, состоящая из периодически чередующихся слоев топологического изолятора и диэлектрика, играющего роль квантового барьера. Внимание к СР на основе дираковских кристаллов обусловлено, в частности, возможностью использования последних в качестве рабочей среды для генерации уединенных электромагнитных (ЭМ) волн нового типа, предсказанных в [12] и привлекающих в последнее время внимание исследователей, в том числе, за рубежом [13–15].

За основу методов диагностики полупроводниковых структур, а также детектирования распространяющихся в них ЭМ волн может быть взят так

называемый радиоэлектрический эффект, заключающийся в увлечении свободных носителей заряда ЭМ излучением в направлении своего распространения [16]. Данный эффект применительно к стандартным 3D полупроводниковым СР теоретически изучен в [16, 17] для различных поляризаций волны. Увлечение электронов проводимости уединенной волной в графеновой СР рассматривалось в [18]. Однако наблюдение данного явления в последнем случае требует достаточно точной ориентации плоскости поляризации волны вдоль графеновой плоскости, что является сложной экспериментальной задачей. Кроме того, создание свободного графенового листа затруднено неизбежным возникновением дефектов и деформаций поверхности [19], с целью устранения которых используют специальные подложки. Нетрудно видеть, что 3D материалы лишены такой необходимости.

В настоящей работе построена кинетическая теория радиоэлектрического эффекта в СР на основе 3D дираковского кристалла, а также влияния данного эффекта на продольную вольтамперную характеристику (ВАХ) рассматриваемой структуры. Отметим, что ВАХ СР в режиме поглощения ЭМ излучения изучалась в [20], где возникающие участки ВАХ с абсолютной отрицательной проводимостью (АОП) интерпретировались

как результат резонансного поглощения электронами квантов ЭМ поля и оптических фононов, приводящего к соответствующим квантовым переходам по штарковской лестнице. Ниже показана возможность АОП в иной ситуации, а именно в режиме увлечения носителей заряда ЭМ волной, поляризованной по кругу. Причем в отличие от [20] здесь не потребуются условия для штарковского квантования, и участки АОП удастся описать в рамках квазиклассического подхода, основанного на приближении времени релаксации.

ЭЛЕКТРОННЫЙ СПЕКТР СР

Рассматриваемая далее СР представляет собой многослойную гетероструктуру, состоящую из чередующихся слоев 3D дираковского кристалла и обычного изолятора, выступающего в качестве прокладочного материала (рис. 1). На данный момент такая структура вполне может быть изготовлена с использованием доступных технологий [21, 22]. Гамильтониан, описывающий данную структуру, можно записать следующим образом: $\hat{H}_{SL} = v_F \tau_x \otimes \vec{\sigma} \cdot \vec{p} + \tau_z V(z)$. Здесь матрицы Паули $\vec{\sigma}$ и $\vec{\tau}$ отвечают соответственно за спиновые и псевдоспиновые степени свободы [7], \otimes — операция кронекерского произведения, v_F — скорость на поверхности Ферми, \vec{p} — трехмерный оператор импульса, $V(z) = V(z + d)$ — дополнительный скалярный потенциал, обусловленный чередованием квантовых ям и барьеров вдоль оси Oz , d — период СР. В низкоэнергетическом одномини-зонном приближении закон дисперсии для электронов в минизоне проводимости можно записать в следующем виде ($\hbar = 1$):

$$\epsilon(\vec{p}) = \epsilon_{\perp}(p_{\perp}) + \Delta(1 - \cos p_z d), \quad (1)$$

где \vec{p}_{\perp} — поперечная по отношению к оси СР компонента импульса электрона, $\epsilon_{\perp}(\vec{p}_{\perp}) = \sqrt{\Delta_g^2 + v_F^2 p_{\perp}^2}$, Δ_g — полуширина энергетической щели между зоной проводимости и валентной зоной, Δ — структурный параметр, выражающийся через интегралы перекрытия волновых функций из соседних квантовых ям и имеющий смысл полуширины мини-

зоны проводимости. Считается, что выполняется неравенство: $\Delta \ll \Delta_g$.

ВЛИЯНИЕ ЭФФЕКТА УВЛЕЧЕНИЯ НА ПРОДОЛЬНУЮ ВАХ

Поместим рассмотренную выше СР в поле ЭМ волны, поляризованной по кругу и распространяющейся против оси Oz так, как показано на рис. 1. Проекция векторов напряженности ЭМ поля волны на координатные оси имеют вид:

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 \cos(\omega t + qz), & E_y &= E_0 \sin(\omega t + qz), \\ H_x &= E_y, & H_y &= -E_x, \end{aligned} \quad (2)$$

где E_0 , q и ω — амплитуда, волновое число и частота волны соответственно. Считаем, что структура обладает электронной проводимостью. Согласно выбранной ориентации векторов напряженностей, поле волны передает импульс электронам, увлекая их против оси Oz . Следовательно плотность тока увлечения в отсутствие постоянного поля направлена вдоль оси Oz . Вычислим продольную по отношению к оси СР компоненту плотности тока j_z при условии одновременного действия как поля волны, так и постоянного электрического поля с напряженностью \vec{E}^{dc} , направленной вдоль оси Oz . Для этого воспользуемся следующей формулой:

$$j_z = -e \sum_{\vec{p}} v_z(\vec{p}) f(\vec{p}, t), \quad (3)$$

где $\vec{v} = \partial_{\vec{p}} \epsilon$, $f(\vec{p}, t)$ — неравновесная функция распределения, учитывающая действие силовых полей и являющаяся решением кинетического уравнения Больцмана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} - e \left(\vec{E}^{dc} + \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{H}] \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = \\ = - \frac{f(\vec{p}, t) - f_0(\vec{p})}{\tau}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $f_0(\vec{p})$ — равновесная функция распределения, τ — время релаксации. Как и в [16, 17] предполагается, что длина ЭМ волны значительно превышает длину свободного пробега носителей заряда. Поэтому в (4) слагаемое с пространственной производной $\partial_{\vec{p}} f$ опущено. Последнее позволяет также пренебречь координатной зависимостью напряженностей поля волны (2). Введем обозначение: $\gamma = d\Delta_g c^{-1}$. Параметр γ имеет порядок $\gamma \approx v c^{-1}$, где v — характерная скорость носителей заряда, причем $v \ll c$. В нулевом приближении по малому параметру $v c^{-1}$ можно пренебречь действием магнитного поля так, что решение (4) имеет вид:

$$f^{(0)}(\vec{p}, t) = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} f_0 \left(\vec{p} + \frac{e}{c} (\vec{A}_1 - \vec{A}) \right), \quad (5)$$

где $\vec{A}(t)$ — векторный потенциал ЭМ поля, $\vec{A}_1 = \vec{A}(t_1)$. Подставим (5) в (3) и учтем четность

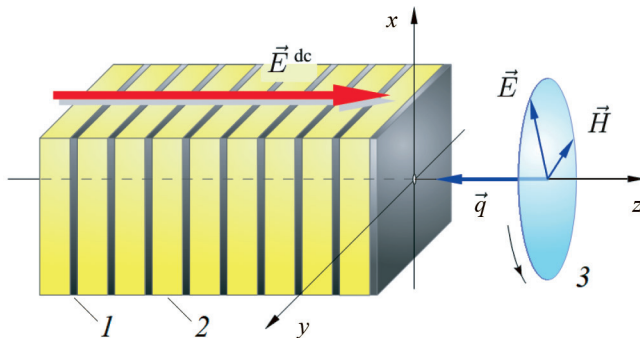


Рис. 1. Схема СР и конфигурация ЭМ полей: 1 — слой 3D дираковского кристалла, 2 — прокладочный слой изолятора, 3 — ЭМ волна, поляризованная по кругу.

равновесной функции распределения. В результате приходим к классическому выражению, описывающему продольную ВАХ СР [23]: $j_z^{(0)} = j_0 \Omega_B \tau (1 + \Omega_B^2 \tau^2)^{-1}$. Здесь обозначено: $j_0 = n_0 e d \Delta$, $\Omega_B = e E_z^{dc} d$ — блоховская частота, n_0 — концентрация свободных носителей заряда в зоне проводимости. Поправка для функции распределения в следующем приближении имеет вид:

$$f^{(1)}(\vec{p}, t) = \frac{e}{c} \int_{-\infty}^t dt_1 e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} \left[\vec{v} \left(\vec{p} + \frac{e}{c} (\vec{A}_1 - \vec{A}) \right), \vec{H}(t_1) \right] \times \times \frac{\partial}{\partial \vec{p}} f_0 \left(\vec{p} + \frac{e}{c} (\vec{A}_1 - \vec{A}) \right). \quad (6)$$

После подстановки (6) в (3) и некоторых преобразований приходим к следующему выражению для поправки к плотности тока:

$$j_z^{(1)} = \frac{e}{c} \int_0^\infty e^{-\xi} \cos(\Omega_B \tau \xi) d\xi \cdot \sum_{\vec{p}} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right) \times \times \left(\epsilon_\perp \left(\vec{p}_\perp + \frac{e}{c} \vec{A}(t - \tau \xi) - \frac{e}{c} \vec{A}(t) \right) - \epsilon_\perp(\vec{p}_\perp) \right) v_z^2(p_z). \quad (7)$$

Далее вычисления проведем для случая предельно низких температур таких, что можно сделать замену: $(-\partial_\epsilon f_0) \rightarrow \delta(\epsilon - \epsilon_F)$, где $\delta(\xi)$ — дельта-функция, ϵ_F — энергия, отвечающая уровню Ферми. Считаем, что последний располагается внутри зоны проводимости вблизи его дна так, что выполняется неравенство: $0 < \epsilon_F - \Delta_g \ll \Delta_g$. Если принять следующее характерное для дираковских и графеноподобных материалов численное значение энергетической щели $\Delta_g \approx 50$ мэВ, то концентрации свободных электронов в зоне проводимости $n_0 \approx 10^{14} \text{ см}^{-3}$ соответствует энергия Ферми, равная $\epsilon_F \approx 51$ мэВ, что вполне удовлетворяет указанному выше неравенству. Согласно последнему в электронном переносе при низких температурах будут участвовать только те электроны, которые находятся вблизи дна минизоны, т. е. электроны с малыми значениями импульсов: $p_\perp v_F \ll \Delta_g$, $p_\perp \omega \ll e E_0$. В результате вычислений в (7), выполненных с учетом перечисленных условий, приходим к следующему результату:

$$\frac{j_z^{(1)}}{j_0} = \frac{\gamma \Delta}{\epsilon_F - \Delta_g} \left[\frac{S_0}{1 + \Omega_B^2 \tau^2} + \sum_{n=1}^\infty S_n \times \times \left(\frac{1}{1 + (\Omega_B - n\omega)^2 \tau^2} + \frac{1}{1 + (\Omega_B + n\omega)^2 \tau^2} \right) \right], \quad (8)$$

где обозначен

$$S_n(a_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + a_0^2 \sin^2 \xi} \cos(2n\xi) d\xi, \quad (9)$$

$$S_0(a_0) = \frac{2}{\pi} E(-a_0^2) - 1,$$

$E(\xi)$ — полный эллиптический интеграл 2-го рода, $a_0 = 2\omega^{-1} \Delta_g^{-1} v_F e E_0$ — безразмерная амплитуда

напряженности электрического поля волны. Зависимость результирующей плотности тока, равной $j_z = j_z^{(0)} + j_z^{(1)}$, от напряженности E_z^{dc} показана на рис. 2 сплошной линией. Здесь же пунктирной линией показана продольная ВАХ СР в отсутствие ЭМ волны. Видно, что области отрицательной дифференциальной проводимости в обоих случаях практически совпадают за исключением резонансных ситуаций, когда блоховская частота кратна частоте ЭМ волны: $\Omega_B = n\omega$. В последнем случае плотность тока резко уходит в область отрицательных значений, что соответствует АОП. Аналогичная ситуация имела место и для СР с параболическим поперечным спектром [17], где также вычислялся ток увлечения в линейном приближении по параметру $v c^{-1} \sim \gamma$. Однако в [17] резонанс, соответствующий АОП, возникал только в одном случае: $\Omega_B = \omega$. Появление других областей АОП являлось в [17] эффектом более высокого порядка по γ и требовало достаточно больших интенсивностей волны, при которых ВАХ существенно искажалась по сравнению с ВАХ в отсутствие эффекта увлечения. Согласно (8), в случае СР на основе дираковских кристаллов уже в первом приближении по γ имеет место серия резонансов, что является следствием непараболическости поперечного спектра рассмотренной здесь СР.

Вычислим плотность тока в k -м резонансе. Для этого положим в (8) $\Omega_B = k\omega$ и оставим в силу неравенства $\omega\tau \gg 1$ только слагаемое с $n = k$. В результате имеем: $j_z^{\text{res}} \sim -\gamma j_0 |S_k(a_0)|$. Графики зависимости плотности тока от амплитуды волны в первых двух резонансах показаны на рис. 3. Нетрудно показать, что в случае малых амплитуд волны ($a_0 \ll 1$) плотность тока в k -м резонансе пропорциональна a_0^{2k} . В случае же больших амплитуд ($a_0 \gg 1$) резонансное значение линейно по амплитуде. Последний результат отличает рассматриваемый здесь эффект от аналогичного в [17], где в линейном по γ приближении резонансное значение квадратично по ам-

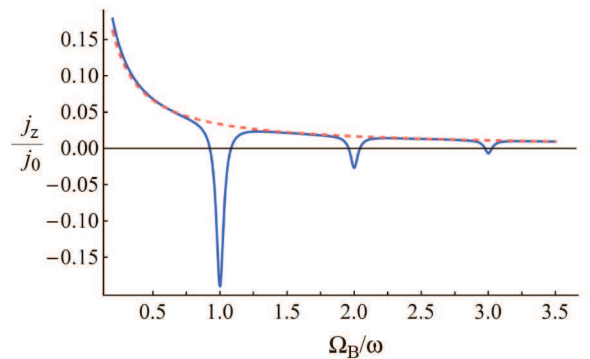


Рис. 2. Продольная ВАХ СР, модифицированная за счет радиоэлектрического эффекта (сплошная линия, $\omega\tau = 30$, $a_0 = 20$) и ВАХ СР в отсутствие ЭМ волны (пунктирная линия).

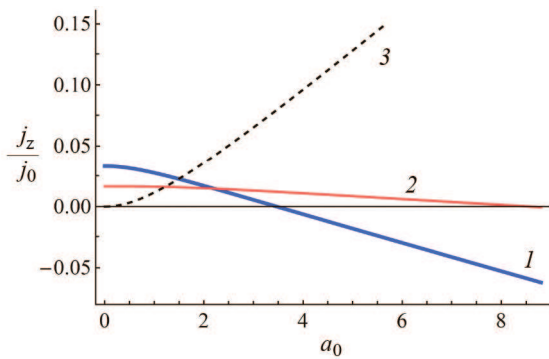


Рис. 3. Зависимость плотности радиоэлектрического тока от безразмерной амплитуды волны a_0 : $\omega\tau = 30$, $1 - \Omega_B = \omega$, $2 - \Omega_B = 2\omega$, $3 - E^{dc} = 0$.

плитуде волны. Линейная по амплитуде плотность тока при $a_0 \gg 1$ является прямым следствием релятивистского характера поперечного спектра носителей заряда.

ЭФФЕКТ УВЛЕЧЕНИЯ В ОТСУТСТВИЕ ПОСТОЯННОГО ПОЛЯ

В отсутствие постоянного поля электрический ток вдоль оси СР существует только за счет увлечения электронов ЭМ волной. Поскольку импульс ЭМ волны, передаваемый электронам проводимости, направлен против оси Oz , соответствующая плотность тока имеет положительную проекцию j_z . Подставляя в (8) $\vec{E}^{dc} = 0$, и учитывая неравенство $\omega\tau \gg 1$, запишем:

$$j_z = \frac{\gamma j_0 \Delta S_0 (a_0)}{\varepsilon_F - \Delta_g}. \quad (10)$$

График зависимости плотности тока увлечения от безразмерной амплитуды волны a_0 , построенный по формуле (10), показан на рис. 3 пунктирной линией. Как и ожидалось, график для плотности тока при $\vec{E}^{dc} = 0$ лежит в положительной области. Из (10) следует, что для малых амплитуд плотность тока увлечения квадратична по амплитуде: $j_z \propto \gamma j_0 a_0^2$, а для больших амплитуд — линейна: $j_z \propto \gamma j_0 a_0$. Заметим, что амплитудная зависимость радиоэлектрического тока аналогична соответствующей зависимости для поглощаемой графеноподобным материалом мощности ЭМ излучения [24]. Эта особенность может служить дополнительным указанием на правильность результатов вычислений. Действительно, за счет поглощения носителями заряда энергии излучения импульс ЭМ поля волны передается электронам, что и обеспечивает увлечение последних вдоль направления распространения излучения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате исследования эффекта увлечения в СР на основе дираковских кристаллов получены следующие результаты. Во-первых, эффект увле-

чения электронов ЭМ волной модифицирует продольную ВАХ СР так, что появляется серия резонансов: плотность тока испытывает резкое изменение всякий раз, когда блоховская частота кратна частоте волны ($\Omega_B = n\omega$). Следует обратить внимание на следующую особенность в поведении плотности тока увлечения при включении постоянного электрического поля с резонансным значением напряженности. Как показано выше, несмотря на положительное значение напряженности постоянного поля ($E_z^{dc} > 0$), проекция плотности тока j_z в резонансе, согласно графикам на рис. 3, не увеличивается, а, напротив, уменьшается вплоть до смены своего знака. При этом данный эффект тем заметнее, чем выше интенсивность ЭМ излучения.

Во-вторых, каждый из таких резонансов является эффектом первого порядка по малому параметру γ в отличие от [17], где для СР на основе материалов с квадратичным законом дисперсии их носителей в соответствующем приближении появлялся только один резонанс. В-третьих, для больших амплитуд волны плотность тока увлечения растет линейно с амплитудой, что является прямым следствием релятивистского характера поперечного спектра рассмотренной здесь СР. Последнее может быть использовано в качестве основы методов лабораторной диагностики поперечного спектра носителей заряда СР на базе дираковских кристаллов.

Работа поддержана ФГБОУ ВО ВолгГТУ в рамках текущего финансирования и внутривузовского гранта ФГБОУ ВО ВГСПУ. Никаких дополнительных источников финансирования или грантов со стороны других организаций не привлекалось.

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yang B.-J., Nagaosa N. // Nature Commun. 2014. V. 5. Art. No. 4898.
2. Umar E., Ikram M., Haider J. et al. // J. Environ. Chem. Eng. 2023. V. 11. Art. No. 110339.
3. Zhong Ch., Zhang W., Ding G. et al. // Carbon. 2019. V. 154. P. 478.
4. Ding Y., Li Ch., Tian M. et al. // Front. Phys. 2023. V. 18. Art. No. 53301.
5. Macili A., Vlamidis Y., Pfusterschmied G. et al. // Appl. Surf. Sci. 2023. V. 615. Art. No. 156375.
6. Liu Z.K., Zhou B., Wang Z.J. et al. // Science. 2014. V. 343. P. 864.
7. Armitage N.P., Mele E.J., Vishwanath A. // Rev. Mod. Phys. 2018. V. 90. Art. No. 15001.
8. Ameri S.K., Singh P.K., Sonkusale S.R. // Analyt. Chim. Acta. 2016. V. 934. P. 212.
9. Sun Zh., Fang S., Hu Y.H. // Chem. Rev. 2020. V. 120. Art. No. 10336.
10. Bolmatov D., Mou Ch.-Yu // JETP. 2011. V. 112. P. 102.

11. *Burkov A.A., Balents L.* // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 107. Art. No. 127205.
12. *Kryuchkov S.V., Kukhar' E.I.* // Physica B. 2013. V. 408. P. 188.
13. *Martin-Vergara F., Rus F., Villatoro F.R.* // Chaos Solit. Fractals. 2021. V. 151. Art. No. 111281.
14. *Martin-Vergara F., Rus F., Villatoro F.R.* // Chaos Solit. Fractals. 2022. V. 162. Art. No. 112530.
15. *Бадикова П.В., Завьялов Д.В., Конченков В.И. и др.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2023. Т. 87. № 1. С. 38; *Badikova P.V., Zav'yalov D.V., Konchenkov V.I. et al.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2023. V. 87. No. 1. P. 30.
16. *Энштейн Э.М.* // Изв. вузов. Радиофиз. 1981. Т. 24. № 4. С. 514.
17. *Крючков С.В., Кухарь Е.И., Сивашова Е.С.* // ФТТ. 2008. Т. 50. № 6. С. 1102; *Kryuchkov S.V., Kukhar' E.I., Sivashova E.S.* // Phys. Solid State. 2008. V. 50. No. 6. P. 1150.
18. *Kryuchkov S.V., Kukhar' E.I.* // Physica E. 2013. V. 48. P. 96.
19. *Meyer J.C., Geim A.K., Katsnelson M.I. et al.* // Nature. 2007. V. 446. P. 60.
20. *Крючков С.В., Кухарь Е.И., Ионкина Е.С.* // ФТТ. 2016. Т. 58. № 7. С. 1254; *Kryuchkov S.V., Kukhar' E.I., Ionkina E.S.* // Phys. Solid State. 2016. V. 58. No. 7. P. 1295.
21. *Zhang G., Qin H., Teng J. et al.* // Appl. Phys. Lett. 2009. V. 95. Art. No. 053114.
22. *Koo S., Park I., Watanabe K. et al.* // Nano Lett. 2021. V. 21. No. 15. P. 6600.
23. *Басс Ф.Г., Булгаков А.А., Тетервов А.П.* Высоко-частотные свойства полупроводников со сверх-решетками. М.: Наука, 1989.
24. *Kryuchkov S.V., Kukhar' E.I., Zav'yalov D.V.* // Phys. Wave Phenom. 2013. V. 21. No. 3. P. 207.

Radioelectric effect in a superlattice based on a 3D Dirac crystal

A. V. Valkov^a, S. V. Kryuchkov^{a, b}, E. I. Kukhar^{a, *}

^a*Volgograd State Technical University, Volgograd, 400005 Russia*

^b*Volgograd State Socio-Pedagogical University, Volgograd, 400066 Russia*

**e-mail: eikuhar@yandex.ru*

A kinetic theory for the radioelectric effect in a superlattice based on a 3D Dirac crystal in a constant electric field has been constructed. The current density has been shown to get the resonance in the case where the Bloch frequency is a multiple of the frequency of the electromagnetic wave. The latter can lead to a change in the direction of the current density. The amplitude dependence of the radioelectric current density has been studied.

Keywords: radioelectric effect, superlattice, Dirac crystal, Bloch frequency

УДК 538.915

ПЛАЗМЕННЫЕ ВОЛНЫ В ДВУМЕРНОЙ СВЕРХРЕШЕТКЕ В УСЛОВИЯХ ВОЗДЕЙСТВИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

© 2025 г. И. А. Агапова¹, С. Ю. Глазов^{1, *}, С. В. Крючков^{1, 2}¹ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Волгоградский государственный социально-педагогический университет», Волгоград, Россия² Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Волгоградский государственный технический университет», Волгоград, Россия

*e-mail: ser-glazov@yandex.ru

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

Получено выражение, позволяющее определить закон дисперсии плазменных волн $\omega(k)$ в двумерной полупроводниковой сверхрешетке в условиях воздействия нелинейной электромагнитной волны. В предельном случае слабой нелинейности найдено аналитическое выражение для $\omega(k)$. Установлена возможность управления частотой плазменной волны путем изменения параметров нелинейной волны.

Ключевые слова: полупроводниковая сверхрешетка, двумерный электронный газ, энергетический спектр, нелинейная электромагнитная волна, плазменные волны

DOI: 10.31857/S0367676525010049, EDN: DCFJXA

ВВЕДЕНИЕ

Квантовая теория плазменных волн для полупроводниковых сверхрешеток (СР) построена в работах [1, 2]. Важным направлением исследования коллективных явлений в конденсированных средах является изучение процессов распространения плазменных волн в низкоразмерных электронных системах и, в частности, в двумерных (2D) полупроводниковых СР. Не ослабевает внимание исследователей к изучению нелинейных электромагнитных волн, распространяющихся в полупроводниковых структурах с неквадратичным законом дисперсии. В работах [3–5] изучены нелинейные плазменные колебания электронного газа в полупроводниковой квантовой СР. В режиме редких столкновений ($\nu \ll \omega_p$, частота столкновений электрона с нерегулярностями кристаллической решетки ν много меньше обобщенной плазменной частоты электрона в минизоне ω_p) распространение электромагнитной волны вдоль слоев СР, когда ее поле направлено по оси СР, описывается уравнением Sine-Gordon (SGE) [6]. Одними из наиболее общих периодических решений SGE являются решения, выраженные через эллиптические функции Якоби и получившие название кноидальных волн. Когда характерное расстояние, на котором происходит заметное изменение поля волны, значи-

тельно больше длины свободного пробега электронов, можно считать поле волны однородным. Напряженность электрического поля волны при этом имеет вид [7–9]

$$E_x(t) = E_0 \operatorname{cn} \left(\frac{2K(\kappa)\omega_0}{\pi} t, \kappa \right), \quad (1)$$

где $\operatorname{cn}(x)$ — эллиптическая функция Якоби, $\kappa = \frac{eE_0 d}{2\omega_p} \cdot \frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta}$ — модуль нелинейности (здесь и далее $\hbar = 1$), $\omega_0 = \frac{\pi}{2K(\kappa)}$, $\beta = \frac{u}{V}$ ($\beta > 1$), V — скорость волны в отсутствие электронов, u — фазовая скорость волны, $K(\kappa)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, E_0 — амплитуда напряженности поля нелинейной волны. В [7–9] рассмотрены особенности влияния поля нелинейной кноидальной волны на различные физические процессы в СР. В последнее время появилось значительное количество работ, посвященных теории кноидальных волн [10–13]. Это подчеркивает актуальность настоящего исследования.

В физике полупроводников вызывают повышенный интерес процессы распространения плазменных волн в 2D полупроводниковых СР. Возможность возникновения плазменных волн и плотность плазменных возбудений в 2D электронном

газе СР изучена в работах [14, 15]. В [16, 17] исследовано влияние сильного постоянного и переменного электрического поля на плазменные колебания в 2D электронном газе СР. Возможность распространения в 2D СР уединенных электромагнитных волн показана в [18]. Работы [19–23] посвящены исследованию новых материалов на основе графена — графеновых СР и особенностям закона дисперсии плазменных волн в таких структурах. В случае слабой неаддитивности энергетического спектра графеновых СР выражения для нахождения закона дисперсии плазменных волн $\omega(k)$, полученные для квантовых полупроводниковых СР, можно использовать для оценки $\omega(k)$ как в отсутствии внешних воздействий, так и в сильном статическом и переменном электрическом полях.

В данной работе исследуется влияние нелинейной электромагнитной волны на закон дисперсии плазменных волн в двумерной полупроводниковой квантовой сверхрешетке.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Энергетический спектр носителей заряда в 2D СР можно выбрать в модельном виде [14, 15]

$$\varepsilon(\vec{p}) = \Delta - \frac{\Delta}{2} [\cos(p_x d) + \cos(p_y d)], \quad (2)$$

где Δ — полуширина минизоны проводимости; d — период СР; \vec{p} — квазиимпульс электрона. Ограничимся одноминизонным приближением, пренебрегая межминизонными переходами.

На рис. 1 представлена геометрия задачи. Пусть в направлении оси ОХ СР приложено нелинейное электрическое поле (1), которое будем описывать векторным потенциалом $\vec{A}(t) = \left\{ -\frac{c\Phi(t)}{ed}, 0 \right\}$. Удобнее перейти от напряженности нелинейной волны к безразмерному потенциалу $\Phi(t)$

$$\Phi(t) = 2 \arcsin \left\{ \kappa \operatorname{sn} \left(\frac{2K(\kappa)\omega_0}{\pi} t, \kappa \right) \right\}, \quad (3)$$

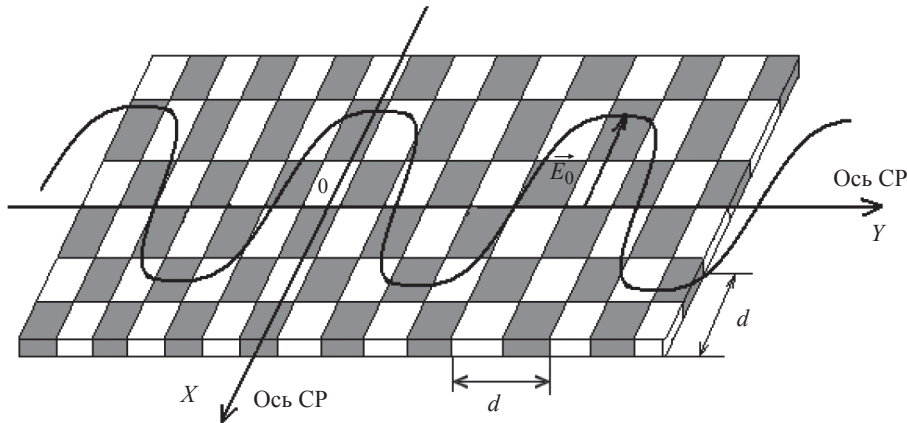


Рис. 1. Геометрия задачи.

где $0 < \kappa \leq 1$, $\operatorname{sn}(x)$ — эллиптическая функция Якоби.

В приближении самосогласованного поля гамильтониан взаимодействующих электронов с учетом процессов переброса имеет вид [16, 17]

$$H = \sum_{\vec{p}} \varepsilon \left(\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}(t) \right) a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}} + e \frac{1}{\sqrt{N_x N_y}} \times \sum_{\vec{p}, \vec{k}} \sum_{n, m} U(\vec{k}, t) \cdot M(k_x) M(k_y) a_{\vec{p}-\vec{k}+\vec{g}}^+ a_{\vec{p}}, \quad (4)$$

где $a_{\vec{p}}^+$, $a_{\vec{p}}$ — операторы рождения и уничтожения электрона с импульсом \vec{p} ; N_x и N_y — число потенциальных ям, образующих СР вдоль осей x и y соответственно, $\vec{g} = \left(n \frac{2\pi}{d}, m \frac{2\pi}{d} \right)$,

$$M(k_x) = \int_0^{N_x d} \varphi^*(x) \varphi(x) \exp(-ik_x x) dx, \quad (5)$$

$$M(k_y) = \int_0^{N_y d} \varphi^*(y) \varphi(y) \exp(-ik_y y) dy,$$

$U(\vec{k}, t)$ — самосогласованный потенциал, определяемый следующим соотношением

$$U(\vec{k}, t) = \frac{2\pi e}{\chi^k} \sum_{\vec{p}} \sum_{n, m} \langle a_{\vec{p}+\vec{k}+\vec{g}}^+ a_{\vec{p}} \rangle M(-k_x) M(-k_y), \quad (6)$$

χ — диэлектрическая проницаемость решетки.

Достаточно хорошим приближением, которым пользуются в теоретической физике низкоразмерных систем, является приближение случайных фаз [14–17, 19, 21–23]. Уравнение движения для средних $\langle a_{\vec{p}+\vec{k}+\vec{g}}^+ a_{\vec{p}} \rangle$ в этом случае имеет вид [16, 17]

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + i \left[\varepsilon \left(\vec{p} + \vec{k} + \frac{e}{c} \vec{A}(t) \right) - \varepsilon \left(\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}(t) \right) \right] \right\} \times \langle a_{\vec{p}+\vec{k}+\vec{g}}^+ a_{\vec{p}} \rangle = -ie U(\vec{k} + \vec{g}, t) \times M([\vec{k} + \vec{g}]_x) M([\vec{k} + \vec{g}]_y) (n_{\vec{p}+\vec{k}+\vec{g}} - n_{\vec{p}}), \quad (7)$$

где $n_{\vec{p}} = \langle a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}} \rangle$ — числа заполнения электронных уровней в 2D — электронном газе.

Решение уравнения (7) имеет вид

$$\begin{aligned} \langle a_{\vec{p}+\vec{k}+\vec{g}}^+ a_{\vec{p}} \rangle = & -ie \int_0^t dt' U(\vec{k} + \vec{g}, t) \times \\ & \times M([\vec{k} + \vec{g}]_x) M([\vec{k} + \vec{g}]_y) (n_{\vec{p}+\vec{k}+\vec{g}} - n_{\vec{p}}) \times \\ & \times \exp \left\{ i \int_0^{t'} \left[\varepsilon \left(\vec{p} + \vec{k} + \frac{e}{c} \vec{A}(t'') \right) - \varepsilon \left(\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}(t'') \right) \right] dt'' \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для вычисления второго интеграла, входящего в выражение (8), воспользуемся разложением $\sin \Phi(t)$ и $\cos \Phi(t)$ в тригонометрический ряд Фурье для значения модуля нелинейности $\kappa \in (0, 1)$:

$$\cos \Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos 2n\omega_0 t, \quad (9)$$

$$\sin \Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin (2n+1)\omega_0 t,$$

$$a_0 = 2 \frac{E(\kappa)}{K(\kappa)} - 1, \quad a_n = 4n \frac{\pi^2}{K^2(\kappa)} \frac{q_{\kappa}^n}{1 - q_{\kappa}^{2n}}, \quad (10)$$

$$b_n = 2(2n+1) \frac{\pi^2}{K^2(\kappa)} \frac{q_{\kappa}^{n+\frac{1}{2}}}{1 + q_{\kappa}^{2n+1}},$$

$$q_{\kappa} = \exp \left(-\frac{\pi K'(\kappa)}{K(\kappa)} \right), \quad K'(\kappa) = K(\sqrt{1 - \kappa^2}).$$

Подставляя решение уравнения (7) в (6), получаем уравнение, определяющее закон дисперсии плазменных волн $\omega(\vec{k})$. Оценки показывают, что при $\omega_0 > \Delta$ и $\kappa < 0.5$ с достаточной степенью точности в дисперсионном уравнении можно оставить только первые члены сумм (9). Тогда дисперсионное уравнение примет вид

$$\frac{2\pi e^2}{\chi} \prod (\vec{k}, \omega) S(\vec{k}) = 1, \quad (11)$$

$$S(\vec{k}) = \sum_{n,m} \frac{|M([\vec{k} + \vec{g}]_x)|^2 |M([\vec{k} + \vec{g}]_y)|^2}{\sqrt{(\vec{k}_x + \vec{g}_x)^2 + (\vec{k}_y + \vec{g}_y)^2}}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \prod (\vec{k}, \omega) = & \sum_p J_{+0}^2 \left[\Delta \sin(p_x d + \alpha_x) \sin(\alpha_x) \frac{a_1(\kappa)}{2\omega_0} \right] \times \\ & \times J_{+0}^2 \left[\Delta \cos(p_x d + \alpha_x) \sin(\alpha_x) \frac{b_1(\kappa)}{2\omega_0} \right] \times \\ & \times \frac{n(\vec{p} + \vec{k}) - n(\vec{p})}{\Delta [\sin(p_x d + \alpha_x) \sin(\alpha_x) a_0(\kappa) + \sin(p_y d + \alpha_y) \sin(\alpha_y)] - \omega}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{где } \alpha_x = \frac{k_x d}{2}, \alpha_y = \frac{k_y d}{2}.$$

Для получения явного вида $S(\vec{k})$ нужно задать вид потенциальных ям в СР. При $\varphi(x) = \text{const}$ при $0 \leq x \leq d$, и $\varphi(x) = 0$ при $x < 0$, $x > d$ формула (12) примет вид

$$S(\vec{k}) = \frac{4}{d^4} \sum_{n,m} \frac{[1 - \cos(k_x d)] [1 - \cos(k_y d)]}{(k_x + g_x)^2 (k_y + g_y)^2 \sqrt{(k_x + g_x)^2 (k_y + g_y)^2}}. \quad (14)$$

Даже в таком простом модельном случае при произвольных значениях \vec{k} не удается получить аналитическое выражение для $S(\vec{k})$. Однако при малых значениях k ($k_x, k_y \ll \frac{\pi}{d}$) $S(\vec{k}) \sim \frac{1}{k}$ и спектр плазмонов обладает дисперсией $\omega^2 \sim k$, характерной для 2D газа без периодического потенциала.

Для невырожденного электронного газа в пределе высоких температур: $\Delta \ll T$ рассмотрим частный случай, для которого можно получить аналитическое выражение закона дисперсии $\omega(k)$. При $\omega_0 \gg \Delta$ и $k_y = 0$ получаем:

$$S(\vec{k}) = \sum_{n,m} \frac{|M([\vec{k} + \vec{g}]_x)|^2 |M([\vec{k} + \vec{g}]_y)|^2}{\sqrt{(\vec{k}_x + \vec{g}_x)^2 + (\vec{k}_y + \vec{g}_y)^2}}, \quad (15)$$

$$\text{где } f(k_x) = 1 + \frac{\chi T}{2\pi e^2 N_0} \frac{a_0(\kappa)}{S(k_x)}.$$

На рис. 2 построен график зависимости частоты плазменных волн от волнового числа $\omega(k)$, полученный с помощью численного анализа формулы (15). Установлена возможность управления частотой плазменной волны параметрами внешней нелинейной волны. Из рис. 2 следует, что уменьшение амплитуды нелинейной волны приводит к увеличению плазменной частоты. При $\frac{kd}{2} \ll 2$ получа-

ем ожидаемую дисперсионную зависимость $\omega^2 \sim k$, характерную для 2D газа без СР. В пределе линейных волн ($\kappa \rightarrow 0$) выражение (15) соответствует закону дисперсии плазменных волн в 2D электронном газе СР, находящейся в условиях воздействия переменного высокочастотного электрического поля [17]. В случае, когда $E_0 = 0$ ($\kappa = 0$) выполняется предельный переход к результатам работы [14].

Параметры электронного спектра СР могут быть оценены в рамках модели Кронига–Пенни [15]. Таким образом можно из (11) определить дисперсионную зависимость $\omega(k)$ в широком диапазоне температур, периода СР и ширины потенциальных ям, образующих СР.

В последнее время внимание исследователей сосредоточено на изучении графеновых СР и, в частности, особенностям законов дисперсии плазменных волн в таких структурах [19–23], что может определить дальнейший предмет исследования и развитие данной работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена задача о влиянии нелинейной электромагнитной волны на закон дисперсии плазменных волн в двумерной полупроводниковой кван-

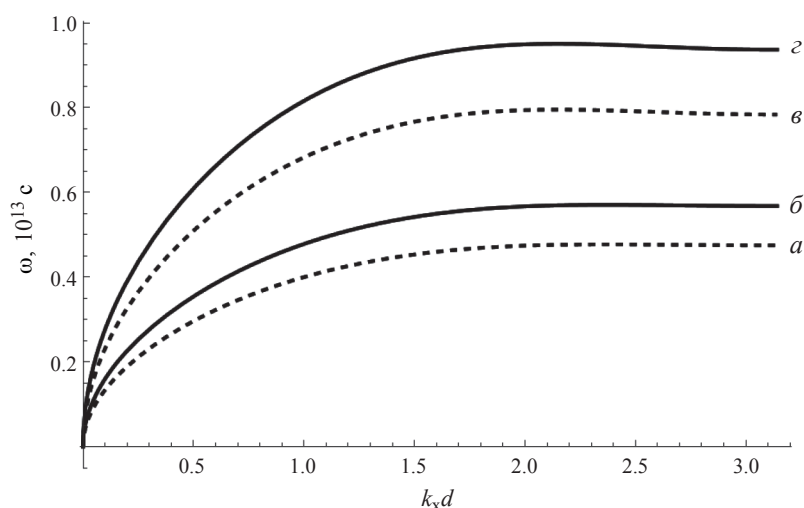


Рис. 2. Закон дисперсии плазменных волн $\omega(k)$ при: $\kappa = 0.4$; $T = 100$ К (а), $\kappa = 0$; $T = 100$ К (б), $\kappa = 0.4$ (в); $T = 300$ К, $\kappa = 0$; $T = 300$ К (з).

товой сверхрешетке. Получено выражение, позволяющее определить дисперсионную зависимость $\omega(k)$ в широком диапазоне температур, периода сверхрешетки и ширины потенциальных ям, образующих сверхрешетку. Показано, что при увеличении амплитуды нелинейной волны плазменная частота уменьшается. В предельном случае слабой нелинейности получено аналитическое выражение для $\omega(k)$. Расчеты выполнены на основе квантовой теории плазменных волн в приближении случайных фаз с учетом процессов переброса.

Данное исследование имеет фундаментальный характер, полученные теоретические результаты могут быть полезны при экспериментальном исследовании СР и результативно дополняют имеющиеся сведения о коллективных эффектах в низкоразмерных полупроводниковых сверхструктурах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shmelev G.M., Chaikovskii I.A., Pavlovich V.V., Epshtein E.M. // Phys. Stat. Sol. 1977. V. 82. No. 391. P. 391.
2. Das Sarma S., Quinn J.J. // Phys. Rev. B. 1982. V. 25. No. 12. P. 7603.
3. Энштейн Э.М. // ФТП. 1977. Т. 11. № 7. С. 456.
4. Энштейн Э.М. // ФТП. 1978. Т. 12. № 5. С. 985.
5. Басс Ф.Г., Лыхах В.А., Тетервов А.П. // ФТП. 1982. Т. 16. № 5. С. 865.
6. Энштейн Э.М. // ФТТ. 1977. Т. 11. № 11. С. 3456.
7. Крючков С.В., Попов К.А. // ФТП. 1998. Т. 32. № 3. С. 334; Kryuchkov S.V., Popov K.A. // Semiconductors. 1998. V. 32. No. 3. P. 302.
8. Крючков С.В., Федоров Э.Г. // ФТП. 2002. Т. 36. № 3. С. 326; Kryuchkov S.V., Fedorov E.G. // Semiconductors. 2002. V. 36. No. 3. P. 307.
9. Завьялов Д.В., Крючков С.В. // ФТП. 2001. Т. 35. № 5. С. 575; Zav'yalov D.V., Kryuchkov S.V. // Semiconductors. 2001. V. 35. No. 5. P. 554.
10. Черняев А.П., Черняева С.А. // Комп. иссл. и моделир. 2021. Т. 13. № 5. С. 885.
11. Макаров В.А., Петникова В.М. // Квантовая электроника. 2018. Т. 48. № 11. С. 1023.
12. Dzedolik V., Leksin A.Yu. // J. Optics. 2020. V. 22. No. 7. Art. No. 075001.
13. Ebadi G., Krishnan E.V., Biswas A. // Pramana – J. Phys. 2012. V. 79. P. 185.
14. Глазов С.Ю., Крючков С.В. // ФТП. 2000. Т. 34. № 7. С. 835; Glazov S.Yu., Kryuchkov S.V. // Semiconductors. 2000. V. 34. No. 7. P. 807.
15. Глазов С.Ю., Громышов И.С., Мещерякова Н.Е. // Изв. РАН. Сер. физ. 2014. Т. 78. № 12. С. 1521; Glazov S.Y., Gromyshev I.S., Mescheryakova N.E. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2014. V. 78. No. 12. P. 1239.
16. Глазов С.Ю., Крючков С.В. // ФТП. 2001. Т. 35. № 4. С. 456; Glazov S.Yu., Kryuchkov S.V. // Semiconductors. 2001. V. 35. No. 4. P. 444.
17. Глазов С.Ю., Кубракова Е.С. // Изв. РАН. Сер. физ. 2009. Т. 73. № 12. С. 1713; Glazov S.Y., Kubrakova E.S. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2009. V. 73. No. 12. P. 1605.
18. Крючков С.В., Шаповалов А.И. // ФТТ. 1997. Т. 39. № 8. С. 1470; Kryuchkov S.V., Shapovalov A.I. // Phys. Solid State. 1997. V. 39. No. 8. P. 1305.
19. Глазов С.Ю., Ковалев А.А., Мещерякова Н.Е. // Изв. РАН. Сер. физ. 2012. Т. 76. № 12. С. 1479; Glazov S.Yu., Kovalev A.A., Mescheryakova N.E. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2012. V. 76. No. 12. P. 1323.
20. Ратников П.В., Силин А.П. // Письма в ЖЭТФ. 2015. Т. 102. № 11. С. 823; Ratnikov P.V., Silin A.P. // JETP Lett. 2015. V. 102. No. 11. P. 713.
21. Глазов С.Ю., Ковалев А.А., Мещерякова Н.Е. // ФТП. 2015. Т. 49. № 4. С. 515; Glazov S.Yu., Kovalev A.A., Meshcheryakova N.E. // Semiconductors. 2015. V. 49. No. 4. P. 504.

22. Глазов С.Ю., Ковалев А.А. // Изв. РАН. Сер. физ. 2018. Т. 82. № 1. С. 105; Glazov S.Yu., Kovalev A.A. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2018. V. 82. No. 1. P. 94.
23. Глазов С.Ю., Ковалев А.А., Крючков С.В. // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 2. С. 254; Glazov S.Y., Kovalev A.A., Kryuchkov S.V. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2020. V. 84. No. 2. P. 199.

Plasma waves in a two-dimensional superlattice under the influence of a nonlinear electromagnetic wave

I. A. Agapova^a, S. Yu. Glazov^{a, *}, S. V. Kryuchkov^{a, b}

^a*Volgograd State Socio-Pedagogical University*

^b*Volgograd State Technical University*

*e-mail: ser-glazov@yandex.ru

An expression is obtained that allows us to determine the law of dispersion of plasma waves $\omega(k)$ in a two-dimensional semiconductor superlattice under the influence of a nonlinear electromagnetic wave and, in the extreme case of weak nonlinearity, an analytical expression for $\omega(k)$ is found. The possibility of controlling the frequency of the plasma wave by the parameters of a nonlinear wave has been established.

Keywords: semiconductor superlattice, two-dimensional electron gas, energy spectrum, nonlinear electromagnetic wave, plasma waves

УДК 535.421

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЕЛЕКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРИЧЕСКИ УПРАВЛЯЕМЫХ ЧИРПИРОВАННЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ДИФРАКЦИОННЫХ СТРУКТУР НА ОСНОВЕ ФОТОПОЛИМЕРИЗУЮЩИХСЯ КОМПОЗИЦИЙ С НЕМАТИЧЕСКИМИ ЖИДКИМИ КРИСТАЛЛАМИ

© 2025 г. С. Н. Шарангович, В. О. Долгирев, Д. С. Растрьгин*

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники», Томск, Россия

*e-mail: gg9dragon9gg@gmail.com

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

Разработана аналитическая модель дифракции оптического излучения на чирпированных многослойных неоднородных дифракционных структурах, сформированных голографическим методом в фотополимеризующихся композициях с нематическими жидкими кристаллами, имеющих плавную оптическую неоднородность по толщине слоев. Путем численного расчета было показано, что с помощью метода чирпирования возможно кратно уширить угловые и спектральные характеристики многослойных неоднородных голографических дифракционных структур, сформированных в фотополимеризующихся композициях с нематическими жидкими кристаллами.

Ключевые слова: многослойная неоднородная дифракционная голографическая структура, фотополимеризующаяся композиция с нематическими жидкими кристаллами, чирпированные структуры

DOI: 10.31857/S0367676525010057, EDN: DBZAIR

ВВЕДЕНИЕ

В современной науке наблюдается растущий интерес к многослойным неоднородным голографическим дифракционным структурам (МНГДС). Эти структуры имеют потенциал для широкого использования как ключевые компоненты в оптических сетях связи в качестве мультиплексоров [1–7] и в генерации фемтосекундных лазерных импульсов [8–13]. Основная особенность таких структур заключается в их угловой избирательности, проявляющейся в формировании набора локальных максимумов, которые зависят от соотношения толщин промежуточных и дифракционных слоев.

Ранее проведенные исследования [1, 2] продемонстрировали перспективу управления угловой избирательностью как одиночных, так и мультиплексированных МНГДС, сформированных в фотополимерных композициях, содержащих высокие концентрации нематических жидких кристаллов (ФПМ-ЖК). Например, применение внешнего электрического поля к определенным дифрак-

ционным слоям позволило не только изменять уровень дифракционной эффективности, но и модифицировать сам угловой отклик, сопровождая этот процесс значительным смещением угловой избирательности [2]. В случае мультиплексированных МНГДС, где последовательно были сформированы несколько дифракционных структур под разными углами записи, наблюдалось многократное расширение как угловых, так и спектральных характеристик [1].

Вместе с тем уширение угловых и спектральных характеристик для фотонных структур также возможно за счет изменения периода вдоль вектора решетки (чирпирование). Так, например, в работе [14] авторы показали на примере одиночных голографических дифракционных структур (ГДС) в ФПМ возможность уширения селективного отклика дифрагировавшего излучения за счет формирования структуры с изменяющимся периодом.

Таким образом, основной целью работы является исследование процесса преобразования

селективных характеристик электрически управляемых чирпированных МНГДС на основе ФПМ-ЖК.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Математическая модель дифракции оптического излучения на чирпированной МНГДС с ФПМ-ЖК, разработана в соответствии с работой [2].

Для создания чирпированных МНГДС, используются два монохроматических световых пучка, обладающие различными фазовыми характеристиками. Один из пучков обладает постоянным фазовым распределением E_0 , в то время как другой пучок характеризуется фазовыми неоднородностями E_1 . Эти две волны направлены на сложную многослойную ФПМ-ЖК структуру под углами θ_0 и θ_1 . При этом, будет учтен фазовый профиль $\varphi_c^n(\vec{r})$ чирпированной структуры для каждого слоя [14]:

$$\varphi_c^n(\vec{r}) = \varphi_0^n + \nabla \varphi^n \cdot \vec{r} + 0.5 \nabla^2 \varphi^n \cdot \vec{r}^2, \quad (1)$$

где $\nabla \varphi^n = K_0^n$ является средней величиной, а $0.5 \nabla^2 \varphi^n$ квадратичным коэффициентом изменения модуля вектора решетки \vec{K} .

Тензор же диэлектрической проницаемости для ФПМ-ЖК в n -м слое МНГДС с переменным периодом будет определяться следующими параметрами: объемной долей ЖК, изменением состава полимера и ЖК компоненты, а также самой чирпированной структуры:

$$\hat{\epsilon}^n = (1 - \rho) (\hat{\epsilon}_p^n \cdot \hat{I} + \Delta \hat{\epsilon}_c^n + \Delta \hat{\epsilon}_p^n) + \rho (\hat{\epsilon}_{LC}^n + \hat{\epsilon}_c^n + \hat{\epsilon}_{LC}^n), \quad (2)$$

где ρ — определяет объемную долю нематических ЖК, \hat{I} — единичный тензор, ϵ_p^n — значение полимерной составляющей, $\hat{\epsilon}_{LC}^n$ — тензор диэлектрической проницаемости ЖК составляющей, $\Delta \hat{\epsilon}_p^n$ и $\Delta \hat{\epsilon}_{LC}^n$ — функции, определяющие изменение тензора диэлектрической проницаемости, $\Delta \hat{\epsilon}_c^n = 0.5 \Delta \hat{\epsilon}_p^n [U_0 U_m(\vec{r}) \exp(i \cdot \varphi_c^n(\vec{r}))]$ — периодические изменения в тензоре диэлектрической проницаемости, U_0 и U_m — амплитуда возмущения диэлектрической проницаемости и нормированный амплитудный профиль.

При решении задачи дифракции, предположим, что световой пучок \vec{E}^0 , падающий на МНГДС, имеет произвольную поляризацию с единичным комплексным вектором поляризации \vec{e}_0 (рис. 1). В случае брэгговской дифракции света в оптически неоднородных ФПМ-ЖК слоях можно воспользоваться методом медленноменяющихся амплитуд и определить амплитуды взаимодействующих волн с помощью системы уравнений связанных волн в частных производных следующего вида [1, 2]:

$$\begin{aligned} \vec{N}_{r0}^{m,n} \cdot \nabla e_0^{m,n} &= -i C_1^{m,n} \cdot n_1^{m,n} \cdot E_1^{m,n} \cdot \exp[+i \Theta^{m,n}], \\ \vec{N}_{r1}^{m,n} \cdot \nabla e_1^{m,n} &= -i C_0^{m,n} \cdot n_1^{m,n} \cdot E_0^{m,n} \cdot \exp[+i \Theta^{m,n}], \end{aligned} \quad (3)$$

где $C_j^{m,n}(\vec{E}) = \omega (\vec{e}_1^{m,n} \Delta \epsilon^n(\vec{r}) \vec{e}_0^{m,n}) (c n_{1,0}^{m,n} \cos \beta_{1,0}^{m,n})^{-1} / 4$ являются коэффициентами связи, $j = \{0, 1\}$ — порядок дифракции, \vec{r} — радиус вектор, $n = 1 \dots N$ — количество дифракционных слоев, N — номер последнего слоя, $m = o, e$ — индекс, соответствующий обыкновенным и необыкновенным волнам, $n_1^{m,n}$ определяет нормированный профиль показателя преломления первой гармоники ГДС, $\Theta^{m,n}(\vec{r}, \vec{E})$ является параметром интегральной фазовой расстройки, которая выражается как [1, 2]:

$$\Theta^{m,n}(\vec{r}, \vec{E}) = \int_0^{\vec{r}} \Delta \vec{K}^{m,n}(\vec{r}_i, \vec{E}) d\vec{r}_i. \quad (4)$$

Интегральная фазовая расстройка $\Theta^{m,n}(\vec{r}, \vec{E})$ является параметром, обладающим сложной зависимостью, что в свою очередь осложняет процесс получения решений для уравнений связанных волн при высокой эффективности дифракции [1, 2]. Однако, решение все же может быть найдено, если для каждого ФПМ-ЖК слоя аппроксимировать $\Theta^{m,n}(\vec{r}, \vec{E})$ параболической функцией, как было показано в работе [1, 2]. Таким образом, возникает связь между слоями, которая задается параметром $\Theta^{m,n-1}$.

В случае ближней зоны дифракции (рис. 1), выражения световых полей для нулевого и первого ди-

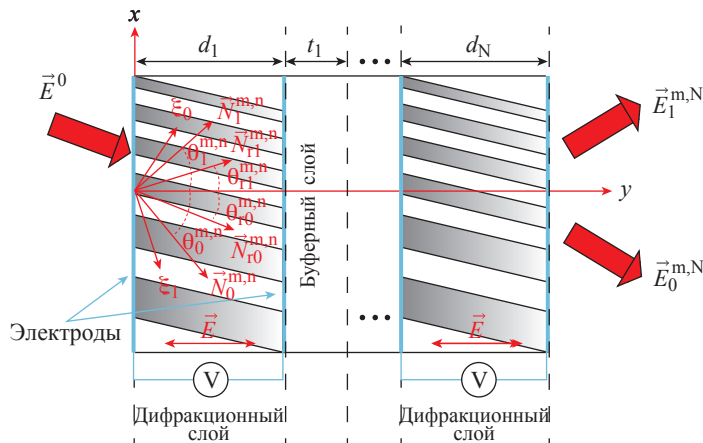


Рис. 1. Схема дифракции света на электрически управляемых МНГДС с изменяющимся периодом в ФПМ-ЖК.

фракционного порядка на выходе chirпированной МНГДС могут быть определены как [1, 2]:

$$\begin{aligned}\bar{E}_1^n(\eta) &= \bar{e}_1^{o,n} E_1^{o,n}(\eta) \exp \left[-i \int_0^{d_n} \bar{k}_1^{o,n} d\bar{r}_i \right] + \\ &+ \bar{e}_1^{e,n} E_1^{e,n}(\eta) \exp \left[-i \int_0^{d_n} \bar{k}_1^{e,n} d\bar{r}_i \right], \\ \bar{E}_0^n(\xi) &= \bar{e}_0^{o,n} E_0^{o,n}(\xi) \exp \left[-i \int_0^{d_n} \bar{k}_0^{o,n} d\bar{r}_i \right] + \\ &+ \bar{e}_0^{e,n} E_0^{e,n}(\xi) \exp \left[-i \int_0^{d_n} \bar{k}_0^{e,n} d\bar{r}_i \right],\end{aligned}\quad (5)$$

где $\xi_0 = \xi$, $\xi_1 = \eta$, ξ_0, ξ_1 — апертурные координаты.

Для нахождения распределения дифракционного поля в дальней зоне дифракции необходимо воспользоваться взаимосвязью пространственных распределений и угловых спектров дифрагирующих пучков [1, 2]:

$$E_j^m(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} E_j^m(l) \exp[ik_j^m l \theta] dl, \quad (6)$$

где угол θ определяет ориентацию плосковолновых компонент $E_j^m(\theta)$ в отношении волновых нормалей, а $l = \xi_0, \xi_1$.

Затем, используя матричный метод, можно описать процесс преобразования частотно-угловых спектров взаимодействующих плоских световых волн через всю МНГДС [1, 2]:

$$\bar{E}^{m,N} = \bar{T}^{m,N} \cdot \bar{A}^{m,N-1} \cdot \bar{T}^{m,N-1} \cdot \dots \cdot \bar{A}^{m,1} \cdot \bar{T}^{m,1} \cdot \bar{E}^0, \quad (7)$$

$$\text{где } \bar{E}^{m,n} = \begin{bmatrix} E_0^{m,n}(\omega, \Delta K) \\ E_1^{m,n}(\omega, \Delta K) \end{bmatrix},$$

$$\bar{T}^{m,n} = \begin{bmatrix} T_{00}^{m,n}(\omega, \Delta K) & T_{10}^{m,n}(\omega, \Delta K) \\ T_{01}^{m,n}(\omega, \Delta K) & T_{11}^{m,n}(\omega, \Delta K) \end{bmatrix} \text{ — матричная}$$

передаточная функция для n -го ФПМ-ЖК слоя,

$$\bar{E}^0 = \begin{bmatrix} E_0(\omega, \Delta K) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \omega \text{ — частота считывающего пучка, } \Delta K \text{ — фазовая расстройка, } \bar{A}^{m,n} \text{ является матрицей перехода для буферного слоя [8].}$$

Компоненты матрицы $\bar{T}^{m,n}$ определяются как [1, 2]:

$$\begin{aligned}T_{00}^{m,n} &= \frac{C_0^{m,n} C_1^{m,n} d_n^2}{4\nu_1 \nu_0} \int_{-1}^{+1} \exp[\delta m'(1-y) + \delta^2 n'(1-y)^2] \times \\ &\times \Phi\left(\frac{d'}{b'} + 1, 2; b' \delta^2 \frac{\nu_1}{\nu_0} (1-y^2)\right) dy, \\ T_{10,01}^{m,n} &= -i \frac{C_{1,0}^{m,n} d_n}{2\nu_{0,1}} \int_{-1}^{+1} \exp[\delta m'(1-y) + \delta^2 n'(1-y)^2] \times\end{aligned}$$

$$\times \Phi\left(\frac{d'}{b'}, 1; b' \delta^2 \frac{\nu_1}{\nu_0} (1-y^2)\right) dy,$$

$$T_{11}^{m,n} = -\frac{C_0^{m,n} C_1^{m,n} d_n^2}{4\nu_1 \nu_0} \int_{-1}^{+1} \exp[\delta m(1-y) + \delta^2 n(1-y)^2] \times$$

$$\times \Phi\left(\frac{d'}{a} + 1, 2; a \delta^2 \frac{\nu_1}{\nu_0} (1-y^2)\right) dy,$$

где $\Phi(a, b; c)$ является вырожденной гипергеометрической функцией первого рода, $\delta = d_n \frac{\eta_1 \nu_0 - \eta_0 \nu_1}{2\nu_1}$, $\theta_{\vec{r}_j}^{m,n}$ — углы между групповыми нормальными $\vec{N}_{\vec{r}_j}^{m,n}$ и осью y , $\eta_j = \eta_j^{m,n} = \pm \sin \theta_{\vec{r}_j}^{m,n}$,

$$m = \eta \left(-a + b \frac{\nu_1}{\nu_0} \right) - i \Delta K' \frac{d_n}{2\delta}, \quad \nu_j = \nu_j^{m,n} = \cos \theta_{\vec{r}_j}^{m,n},$$

$$d' = -\sigma^2, \quad m' = \xi \left(-\frac{a'}{2} + b' \frac{\nu_1}{\nu_0} \right) - i \Delta K' \frac{d_n}{2\delta}, \quad a' = -i \times$$

$$\times \frac{t_y^n \nu_1}{(\eta_1 \nu_0 + \eta_0 \nu_1)^2}, \quad a = i \frac{t_y^n \nu_1 \nu_0}{(\eta_1 \nu_0 + \eta_0 \nu_1)^2}, \quad n' = \frac{b' \nu_1}{\nu_0} - \frac{a'}{2},$$

$$b = i \frac{t_y^n \nu_0^2}{(\eta_1 \nu_0 + \eta_0 \nu_1)^2}, \quad n = \frac{\nu_1}{\nu_0} \left(a - \frac{b \nu_1}{2\nu_0} \right), \quad b' = -i \times$$

$$\times \frac{t_y^n \nu_1 \nu_0}{(\eta_1 \nu_0 - \eta_0 \nu_1)^2}, \quad \sigma = \frac{C_0^{m,n} C_1^{m,n}}{(\eta_1 \nu_0 + \eta_0 \nu_1)^2}.$$

В случае дифракции света на неchirпированных МНГДС, сформированных в ФПМ без ЖК, имеющих однородные профили показателя преломления, компоненты матрицы $\bar{T}^{m,n}$ переходят в известные, полученные другими авторами [5, 6].

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ

При численном моделировании исследовалась двухслойная ГДС с однородными профилями показателя преломления, в которой была записана chirпированная дифракционная структура на длине волны $\lambda = 633$ нм и углами между записывающими пучками $2\theta = 16$ градусов. Параметры для моделирования: $\lambda_{\text{read}} = 1431$ нм — длина считывающей волны; $d_n = 20$ мкм — толщины ФПМ-ЖК слоев; $t_n = 120$ мкм — толщина промежуточного слоя; угол Брэгга для считывающей волны (λ_{read}) составляет $\theta_b = 18$ градусов.

На рис. 2 приведена зависимость дифракционной эффективности (η) от угла поворота и длины волны считывания, как одиночных, так и двухслойных ГДС, которые имели, как постоянный период решетки, так и изменяющийся с квадратичным коэффициентом $0.5 \nabla^2 \varphi^n = 3 \cdot 10^5$.

Как видно из рис. 2, наличие изменяющегося периода у ГДС приводит к уширению угловых и спектральных характеристик в 3.6 раза по сравнению со стандартными ГДС. Если же сравнивать полученные данные с результатами для мультиплексированных МНГДС из работы [1, 2], то в случае мультиплексированных МНГДС увеличение

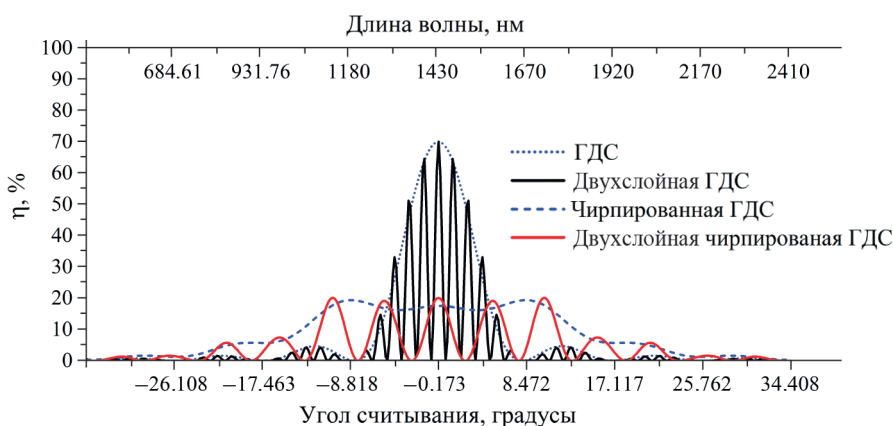


Рис. 2. Зависимость дифракционной эффективности от угла поворота и длины волны считывания.

угловых и спектральных характеристик осуществлялось за счет слияния селективностей двух решеток, при этом ширина локальных максимумов не изменялась, а их количество возрастало. Для случая с чирпированными МНГДС, количество локальных максимумов остается неизменным, но их ширина увеличивается. Таким образом, для постоянства ширины локальных максимумов в случае чирпированных МНГДС необходимо увеличивать ширину буферного слоя.

На рис. 3 приведена зависимость дифракционной эффективности двухслойной стандартной и чирпированной ГДС от угла поворота и длины волны считывания при воздействии внешнего электрического поля на каждый фотополимерный слой с жидкими кристаллами.

Как видно из рис. 3, при внешнем электрическом воздействии к каждому дифракционному слою происходит снижение дифракционной эффективности и смещение угловой селективности при считывании световым излучением с поляризацией, совпадающей с собственными необыкновенными волнами в образце, на одинаковую величину, которая напрямую зависит от толщины дифракционного слоя. При этом, для стандартной МНГДС относительно общей ширины угловой селективности

смещение более существенно, чем для чирпированной структуры. Так, например, при напряженности электрического поля $E = 1.16E_c$, где E_c — критическая напряженность Фредерикса [15], смещение для стандартной МНГДС составило 5 локальных максимумов, а для чирпированной — 2.

На рис. 4 приведена зависимость дифракционной эффективности двухслойной стандартной и чирпированной ГДС от угла поворота и длины волны считывания при считывании световой волной с углом азимута поляризации 30 градусов и электрическом напряжении на дифракционных слоях $E = 1.32E_c$.

Как видно из рис. 4, при электрическом воздействии и считывании световой волной, поляризация которой отличается от собственных необыкновенных волн в образце, дифракция света происходит как на обыкновенных волнах, так и на необыкновенных. При этом для необыкновенных волн характерно смещение угловой селективности, вследствие влияния электрического поля, а для обыкновенных волн смещение отсутствует. В свою очередь, для стандартных МНГДС можно наблюдать значительный рост числа локальных максимумов из-за наложения угловых селективностей на обыкновенных и необыкновенных волнах. Для чирпи-

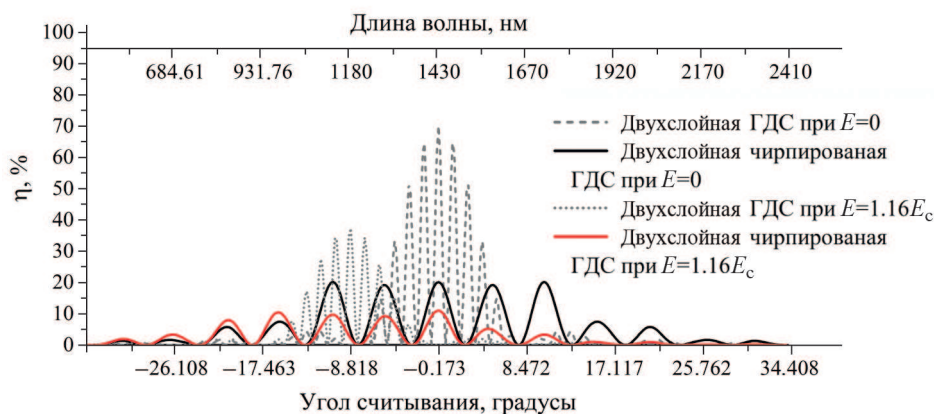


Рис. 3. Зависимость дифракционной эффективности от угла поворота и длины волны считывания при воздействии внешним электрическим полем.

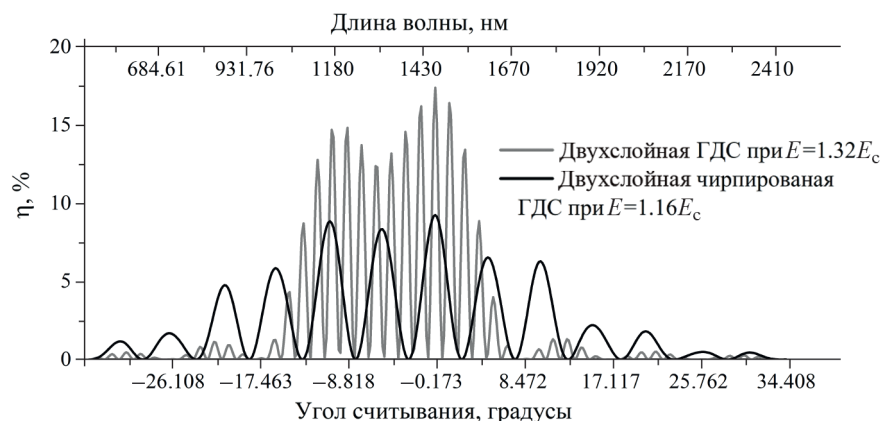


Рис. 4. Зависимость дифракционной эффективности от угла поворота и длины волны считывания при воздействии внешним электрическим полем и угле поляризации считывающего излучения $\theta = 30$ градусов.

рованных МНГДС данный эффект менее заметен вследствие незначительного смещения угловой селективности относительно ширины локальных максимумов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, нами исследовано преобразование селективных характеристик электрически управляемых chirпированных многослойных неоднородных голографических дифракционных структурах, сформированных в фотополимерных композициях с высоким содержанием нематических жидких кристаллов. Установлено, что при считывании chirпированных многослойных неоднородных голографических ФПМ-ЖК дифракционных структур количество локальных максимумов угловой селективности остается неизменным, но их ширина увеличивается. При считывании chirпированных многослойных неоднородных голографических ФПМ-ЖК дифракционных структур световой волной, поляризация которой совпадает с поляризацией собственных необыкновенных волн, и при одинаковой полярности прикладываемого внешнего электрического поля к каждому дифракционному слою происходит снижение дифракционной эффективности со смещением угловой селективности в одну сторону. При этом, относительно общей ширины угловой селективности, у chirпированной структуры смещение происходит на меньшее число локальных максимумов, вследствие их значительного уширения. При считывании chirпированных многослойных неоднородных голографических ФПМ-ЖК дифракционных структур световой волной, поляризация которой не совпадает с поляризацией собственных необыкновенных волн, и при одинаковой полярности прикладываемого внешнего электрического поля к каждому дифракционному слою, количество локальных максимумов может быть увеличено за счет дифракции света на обыкновенных и необыкновенных волнах. В то же время увели-

чение количества локальных максимумов у chirпированной структуры будет ниже по сравнению со стандартной структурой, что связано с незначительным смещением угловой селективности дифрагировавшего излучения на необыкновенных волнах относительно ширины локальных максимумов.

Продemonстрировано, что с помощью метода chirпирования возможно кратно уширить угловые и спектральные характеристики многослойных неоднородных голографических дифракционных структур, сформированных в фотополимеризующихся композициях с нематическими жидкими кристаллами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шарангович С.Н., Долгирев В.О., Растрьгин Д.С. // Изв. РАН. Сер. физ. 2024. Т. 88. № 1. С. 11; Sharangovich S.N., Dolgirev V.O., Rastrygin D.S. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2024. V. 88. No. 1. P. 6.
2. Долгирев В.О., Шарангович С.Н. // Изв. РАН. Сер. физ. 2023. Т. 87. № 1. С. 12; Sharangovich S.N., Dolgirev V.O. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2023. V. 87. No. 1. P. 7.
3. Malallah R., Li H., Qi Y. et al. // J. Opt. Soc. Amer. A. 2019. V. 36. No. 3. P. 320.
4. Malallah R., Li H., Qi Y. et al. // J. Opt. Soc. Amer. A. 2019. V. 36. No. 3. P. 334.
5. Pen E.F., Rodionov M.Yu., Chubakov P.A. // Optoelectron. Instrum. Data Process. 2017. V. 53. P. 59.
6. Pen E.F., Rodionov M.Yu. // Quantum Electron. 2017. V. 40. No. 10. P. 919.
7. Nordin G.P., Johnson R.V. // J. Opt. Soc. Amer. A. 1992. V. 9. No. 12. P. 2206.
8. Yan X., Wang X., Chen Y. et al. // Appl. Phys. B. 2019. V. 125. Art. No. 67.
9. Yan X., Gao L., Yang X. et al. // Opt. Express. 2014. V. 22. No. 21. P. 26128.
10. Казанский Н.Л., Хонина С.Н., Карпеев С.В., Порфирьев А.П. // Квант. электрон. 2020. Т. 50. № 7.

- C. 636; Kazanskiy N.L., Khonina S.N., Karpeev S.V. *et al.* // Quantum Electron. 2020. V. 50. No. 7. P. 629.
11. Kudryashov S.I. // Appl. Surf. Sci. 2019. V. 484. P. 948.
 12. Pavlov D. // Optics Lett. 2019. V. 44. No. 2. P. 283.
 13. Aimin Y., Liren L., Yanan Z. *et al.* // J. Opt. Soc. Amer. A. 2009. V. 26. No. 1. P. 135.
 14. Dovolnov E.A., Sharangovich S.N., Sheridan J.T. // Photorefractive effects, materials, and devices 2005 (PR05). OSA Trends in Optics and Photonics Series (TOPS), 2005. P. 337.
 15. Соинин А.С. Введение в физику жидких кристаллов. М.: Наука. Главн. ред. физ.-мат. лит., 1983. 320 с.

Conversion of selective characteristics of electrically controlled chirped multilayer inhomogeneous diffraction structures based on photopolymerizing compositions with nematic liquid crystals

S. N. Sharangovich, V. O. Dolgirev, D. S. Rastrygin

*Tomsk State University of Control and Radioelectronics Systems,
Tomsk, 634050 Russia*

*e-mail: gg9dragon9gg@gmail.com

We developed the analytical model of optical radiation diffraction on chirped multilayer inhomogeneous diffraction structures formed by the holographic method in photopolymerizing compositions with nematic liquid crystals having smooth optical heterogeneity in layer thickness. By numerical calculation, it was shown that using the chirping method it is possible to multiply the angular and spectral characteristics of multilayer inhomogeneous holographic diffraction structures formed in photopolymerizing compositions with nematic liquid crystals.

Keywords: multilayer inhomogeneous diffraction structures, photopolymerizing compositions with nematic liquid crystals, chirped structures

УДК 535.2

О СВЕРХСВЕТОВЫХ ОБЪЕКТАХ В НЕРАВНОВЕСНЫХ СРЕДАХ

© 2025 г. С. В. Сазонов*

Федеральное государственное бюджетное учреждение «Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Москва, Россия

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», Москва, Россия

*e-mail: sazonov.sergey@gmail.com

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

Представлен анализ сверхсветового распространения резонансных и квазирезонансных солитоноподобных лазерных импульсов в неравновесных средах. Показано, что такие импульсы неустойчивы. Однако на начальной стадии развития неустойчивости возможно наблюдение сверхсветового распространения профилей импульсов за счет механизма переформирования.

Ключевые слова: неравновесная среда, инверсная населенность, сверхсветовое распространение, механизма переформирования

DOI: 10.31857/S0367676525010064, EDN: DBWQEP

ВВЕДЕНИЕ

В связи с постоянным усовершенствованием лазерной техники появилась возможность генерации очень коротких оптических импульсов [1–4]. Длительность таких импульсов порядка нескольких фемтосекунд, что значительно короче типичных времен релаксации населенностей квантовых уровней различных сред. В таких условиях появляются уникальные возможности исследования неравновесных состояний вещества, соответствующих инверсным населенностям квантовых состояний. В таких средах с необходимостью присутствуют сверхсветовые режимы распространения лазерных импульсов. На эту тему известно много работ, начиная с 1960-х годов [5–8]. В экспериментальной работе [5] зарегистрированная групповая скорость превышала скорость света в вакууме в 6–9 раз. В методических обзорах [6–8] детально исследованы механизмы сверхсветового (superluminal) распространения.

Настоящая работа посвящена анализу сверхсветового распространения импульсов в резонансных и квазирезонансных двухуровневых средах с инверсной населенностью квантовых состояний.

РЕЗОНАНСНЫЕ СВЕРХСВЕТОВЫЕ ИМПУЛЬСЫ

Распространение вдоль оси z квазимонохроматического лазерного импульса в двухуровневой

среде описывается самосогласованной системой уравнений Максвелла–Блоха (МБ)

$$\frac{\partial r}{\partial r} = i\Delta r + i\psi w, \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{i}{2} (\psi^* r - \psi r^*), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\alpha r - i\frac{c}{2\omega} \nabla_{\perp}^2 \psi. \quad (3)$$

Здесь $\psi = d\varepsilon/\hbar$ — комплексная частота Раби, ε и r — комплексные огибающие электрического поля импульса и атомного дипольного момента соответственно, w — разность населенностей (инверсия) квантовых состояний, d — вещественный матричный элемент дипольного момента рассматриваемого квантового перехода, \hbar — постоянная Планка, c — скорость света в вакууме, $\Delta = \omega_0 - \omega$ — отстройка несущей частоты ω импульса от резонансной частоты ω_0 квантового перехода, $\alpha = 4\pi d^2 n \omega / \hbar c$, n — концентрация двухуровневых атомов, ∇_{\perp}^2 — поперечный лапласиан.

В системе (1)–(3) мы пренебрегли диссипативными процессами, так как считаем, что длительность τ_p импульса и время наблюдения за процессом распространения значительно короче всех времен релаксации.

Система материальных уравнений (1), (2) обладает хорошо известным интегралом движения [9]

$$w^2 + |r|^2 = w_{\text{in}}^2, \quad (4)$$

где w_{in} — начальная разность населенностей квантовых состояний.

Учитывая (4), легко видеть, что в случае точного резонанса ($\Delta = 0$) система (1), (2) имеет следующие решения

$$r = iw_{\text{in}} \sin \theta, \quad w = w_{\text{in}} \cos \theta, \quad (5)$$

где

$$\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \psi dt', \quad (6)$$

а ψ является вещественной динамической переменной.

Подставляя (5) в (3) с учетом (6), получим в одномерном случае ($\nabla_{\perp}^2 = \psi$) уравнение синус–Гордона (СГ)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \alpha w_{\text{in}} \sin \theta, \quad (7)$$

которое обладает «киновым» решением вида [10]

$$\theta = \sigma \arctan e^{(t-z/v)/\tau_p}, \quad (8)$$

где

$$\sigma = 4, \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{c} - \alpha w_{\text{in}} \tau_p^2, \quad (9)$$

а временная длительность τ_p выступает в качестве свободного параметра.

Из (5), (6) и (8) находим

$$w = w_{\text{in}} \left[1 - 2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{t - z/v}{\tau_p} \right) \right], \quad (10)$$

$$\psi = \psi_m \operatorname{sech} \left(\frac{t - z/v}{\tau_p} \right), \quad \psi_m = \frac{2}{\tau_p}. \quad (11)$$

Из (11) видно, что огибающая лазерного импульса имеет вид солитона, временная длительность которого равна τ_p . Как следует из (10), после прохождения солитона (при $t \rightarrow +\infty$) разность населенностей w возвращается к своемуначальному значению w_{in} , которому оно было равно при $t \rightarrow -\infty$.

Скорость v солитона определяется вторым выражением (9). При равновесной начальной заселенности квантовых состояний $w_{\text{in}} < 0$. Тогда, как видно из (9), имеем досветовой режим распространения, при котором $v < c$. Данный режим соответствует эффекту самоиндуцированной прозрачности (СИП) [9, 10]. Передним фронтом лазерный импульс индуцировано переводит атомы из основного состояния в возбужденное, а задним фронтом также индуцировано возвращает их к исходному состоянию. Этим обусловлено замедленное по сравнению со скоростью света распространение солитона.

В случае неравновесной начальной заселенности ($w_{\text{in}} > 0$), как следует из второго выражения (9), рассматриваемое решение формально описывает сверхсветовой (superluminal) режим распространения солитона: $v > c$. В этом случае оптический им-

пульс передним фронтом индуцировано переводит атомы из возбужденного состояния в основное, а задним фронтом возвращает атомы в исходное возбужденное состояние (см. (10)). На первый взгляд, здесь скорость также должна быть меньше скорости света, так как затрачивается время на перекачку энергии из атомов в импульс и на ее возвращение обратно в атомы. Но такое рассуждение явно не согласуется со второй формулой (9), из которой следует, что в этом случае скорость солитона превосходит скорость света в пустоте. Дело в том, что индуцированное излучение при неравновесной заселенности квантовых уровней вызывает находящаяся далеко впереди от центрального пика его практически незаметная «хвостовая» часть. В результате она порождает новый пик импульса, переводя среду к моменту прихода в нее старого пика в равновесное состояние. При этом старый пик поглощается, и создается впечатление сверхсветового распространения максимума импульса. Таким образом, со сверхсветовой скоростью распространяется не энергия импульса, а его форма [6]. Такой механизм распространения называется переформированием (reshaping) [11]. Очевидно, при таком механизме импульс также не переносит информацию.

В экспериментальной работе [5] зарегистрированная групповая скорость светового импульса превышала скорость света в вакууме в 6–9 раз. Детальный теоретический анализ механизма переформирования с интерпретацией результатов работы [5] содержится в работе [6].

Согласно теореме площадей Мак-Колла–Хана [9, 12], в равновесной среде устойчивы импульсы, суммарная площадь $A = \theta|_{t \rightarrow +\infty} - \theta|_{t \rightarrow -\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi dt$ которых кратна значению 2π . В средах же с неравновесной начальной заселенностью, для которых $w_{\text{in}} > 0$, устойчивостью обладают импульсы, для которых $A = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ [12]. Из (8) и первого выражения (9) следует, что в нашем случае $A = \pi\sigma/2 = 2\pi$. Таким образом, в равновесной среде ($w_{\text{in}} < 0$) 2π -солитон СИП (11), для которого $v < c$, является устойчивым. В неравновесной же среде ($w_{\text{in}} > 0$) сверхсветовой рассматриваемый 2π -солитон неустойчив. Здесь сразу же возникают два вопроса. 1) С какой скоростью распространяется в неравновесной среде устойчивый π -импульс? 2) Почему, все-таки, неустойчивый сверхсветовой 2π -солитон наблюдался в эксперименте?

АВТОМОДЕЛЬНЫЙ π -ИМПУЛЬС

Следуя [12], введем автомодельную переменную

$$\xi = z \left(t - \frac{z}{c} \right). \quad (12)$$

Тогда (7) примет вид обыкновенного дифференциального уравнения

$$\xi \theta'' + \theta' = \alpha w_{\text{in}} \sin \theta, \quad (13)$$

где «штрих» обозначает производную по переменной ξ .

Численный анализ показывает, что уравнение (13) обладает решением, при котором огибающая ψ имеет выделяющийся главный максимум в точке $\xi = 0$ [12]. По бокам главного максимума имеются малоамплитудные осцилляции. При этом площадь такого импульса равна π , что соответствует условию его устойчивости в неравновесной среде.

В точке главного максимума $\frac{\partial \psi}{\partial t} \propto \theta'' = 0$. К тому же здесь $\xi = 0$. Поэтому, задавшись целью поиска решения в окрестности главного максимума, можно пренебречь первым слагаемым в правой части уравнения (13). Тогда имеем приближенное решение вида (8), где

$$\sigma = 2, \quad \nu = c, \quad (14)$$

$$\frac{1}{\tau_p} = \alpha w_{in} z. \quad (15)$$

Таким образом, площадь импульса определяется площадью его главного максимума в окрестности $\xi = 0$ и равна π . Используя также (5), найдем

$$w = -w_{in} \tanh \left(\frac{t - z/c}{\tau_p} \right). \quad (16)$$

Если вначале (при $t = -\infty$) возбуждены все атомы, то $w_{in} = 1/2$. Тогда, как видно из (16), по прошествии импульса (при $t = +\infty$) имеем $w_{in} = -1/2$. Т.е., все атомы переходят в основное состояние. Таким образом, по мере распространения автомодельный π -импульс индуцированно переводит атомы из возбужденного состояния в основное.

Для огибающей электрического поля из (6) и (8) при учете (14) будем иметь первое выражение (11), где

$$\psi_m = \frac{1}{\tau_p}, \quad (17)$$

а скорость и длительность определяются соответственно формулами (14) и (15).

Итак, автомодельный π -импульс в неравновесной среде распространяется со скоростью, равной скорости света в вакууме. Это есть ответ на первый вопрос, поставленный в конце предыдущего раздела.

По мере распространения π -импульс испытывает усиление, сопровождаемое его самосжатием. При этом временная длительность импульса уменьшается обратно пропорционально пройденной дистанции, а амплитуда растет пропорционально данной дистанции.

Дистанцию l_{inst} , на которой развивается неустойчивость рассмотренного в предыдущем разделе сверхсветового 2π -импульса, можно, исходя из теоремы площадей [9], оценить по формуле $l_{inst} \sim \pi/\alpha T_2^*$, где T_2^* — время, характеризующее неоднородное уширение квантового перехода. При

параметрах кристаллического рубина, использованного в [5], имеем $l_{inst} \approx 30$ см. В то же время в экспериментальной работе [5] использовались рубиновые образцы размерами от 7 до 24 см. Таким образом, обсуждаемая неустойчивость не успевала развиваться. Поэтому наблюдался сверхсветовой 2π -импульс, распространяющийся в режиме перестройки. Так выглядит ответ на второй вопрос, поставленный в конце предыдущего раздела.

Время жизни среды в неравновесном состоянии $\sim 10^{-8}$ с. За это время сверхсветовой импульс проходит дистанцию $\sim 1-10$ м, что значительно превосходит размеры использованных в [5] образцов. Поэтому спонтанной релаксацией неравновесной среды к равновесному состоянию можно было с хорошей точностью пренебречь.

КВАЗИРЕЗОНАНСНЫЕ СВЕРХСВЕТОВЫЕ ИМПУЛЬСЫ

Рассмотрим теперь оптические импульсы, распространяющиеся в условиях квазирезонанса [13–15]

$$\delta = (\Delta \tau_p)^{-1} \ll 1. \quad (18)$$

Понятно, что при столь большой отстройке Δ от резонанса возбуждение атомов является слабым, т.е., w должно незначительно отличаться от w_{in} . Проводя в (1) разложение по малому параметру δ [13–15], будем иметь

$$r = -\frac{\psi}{\Delta} w + i \frac{w_{in}}{\Delta^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{w_{in}}{\Delta^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (19)$$

Из (4) с точностью до членов $\sim |r|^2$ найдем

$$w = w_{in} \left(1 - \frac{|r|^2}{2w_{in}^2} \right). \quad (20)$$

Из (19) и (20) придем к выражению

$$r = -w_{in} \frac{\psi}{\Delta} \left(1 - \frac{|\psi|^2}{2\Delta^2} \right) + i \frac{w_{in}}{\Delta^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{w_{in}}{\Delta^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (21)$$

После подстановки (21) в (3) и простых преобразований будем иметь

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial z} = g |\Phi|^2 \Phi + \frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + \frac{c}{2\omega} \nabla_{\perp}^2 \Phi, \quad (22)$$

где

$$\Phi = \psi e^{-i\alpha w_{in} z / \Delta}, \quad (23)$$

$g = \alpha w_{in} / 2\Delta^3$, $\beta = 2\alpha w_{in} / \Delta^3$, $\tau = t - z/v_g$, а линейная групповая скорость v_g определяется выражением

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{c} - w_{in} \frac{\alpha}{\Delta^2}. \quad (24)$$

Если в правой части (22) пренебречь третьим слагаемым, то получим одномерное нелинейное уравнение Шредингера (НУШ). Коэффициенты g и β в этом уравнении обладают одинаковыми знаками. В этом случае НУШ обладает устойчивыми решениями в виде «светлых» солитонов,

распространяющихся с линейной групповой скоростью v_g [16]. Из (24) видно, что в неравновесной ($\omega_g > 0$) среде $v_g > c$. В этом случае, как и при точном резонансе, сверхсветовое распространение происходит в режиме переформирования. Поэтому не возникает противоречий с принципами теории относительности.

Одномерные сверхсветовые солитоны НУШ можно наблюдать на дистанциях распространения, меньших, чем длина дифракционного уширения данных солитонов. Поэтому важно рассмотреть вопрос устойчивости квазирезонансных трехмерных локализованных импульсов — пространственно-временных солитонов или световых пучков [17–20]. Для иллюстрации рассмотрим случай $g, \beta > 0$.

Следуя [19, 20], совершим преобразование Маделунга

$$\psi_1 = \sqrt{\rho} \exp(-i\omega\varphi/c), \quad (25)$$

где ρ и φ — подлежащие определению функции. Подставляя (25) в (22), приходим к системе уравнений, формально описывающей течение воображаемой квантовой жидкости:

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} + \nabla(\rho \nabla \varphi) = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} - \frac{c}{\omega} g \rho = \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{2\sqrt{\rho}}, \quad (27)$$

где $\nabla^2 = \nabla_{\perp}^2 + \partial^2/\partial \eta^2$ — эффективный трехмерный лапласиан,

$$\eta = \sqrt{\frac{c}{\omega \beta}} \tau, \quad (28)$$

∇ — оператор эффективного трехмерного градиента в переменных \vec{r}_{\perp} и η , \vec{r}_{\perp} — поперечный к направлению распространения импульса радиус-вектор.

Гидродинамический подход, основанный на системе типа (26), (27), является очень эффективным в теории самофокусировки и формирования световых пучков [17–23].

Уравнение непрерывности (10) обладает автономным «сферически-симметричным» в системе координат (\vec{r}_{\perp}, η) решением [21]

$$\rho = \psi_m^3 \frac{R_0^2}{R^3} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{R^2}\right), \quad \varphi = f(z) + \frac{\zeta^2}{2} \frac{R^2}{R}, \quad (29)$$

где $\zeta = \sqrt{r_{\perp}^2 + \eta^2}$, $R = R(z)$ — характерный размер рассматриваемого сгустка световой энергии, ψ_m — амплитуда поля, R_0 — равновесное значение параметра R , $f(z)$ — некоторая функция, штрих над переменной R здесь и ниже обозначает производную по переменной z .

Следуя [22], используем в левой уравнения (27) приосевое приближение (near-axis approximation), т. е., запишем $e^{-r^2/R^2} \approx 1 - r^2/R^2$. Приравнявая после этого в левой и правой частях выражения при r^0 и r^2 , приходим к уравнениям

$$f' = \frac{c}{\omega} g \psi_m^2 \frac{R_0^3}{R^3} - \frac{3}{2} \left(\frac{c}{n\omega}\right)^2 \frac{1}{R^2}, \quad (30)$$

$$R'' = -\frac{\partial U}{\partial R} = \left(\frac{c}{n\omega}\right)^2 \frac{1}{R^3} - \frac{2c}{\omega} g \psi_m^2 \frac{R_0^3}{R^4}. \quad (31)$$

Уравнение (31) представляет собой уравнение движения ньютоновской частицы единичной массы во внешнем поле с «потенциальной энергией» $U(R)$, где R и z играют роли координаты частицы и времени соответственно.

Первое слагаемое в правой части (31) соответствует эффектам дифракции. В свою очередь, второе слагаемое описывает влияние кубической (керровской) нелинейности.

Условия формирования устойчивого пространственно-временного солитона имеют вид $(\partial U/\partial R)_{R=R_0} = 0$, $(\partial^2 U/\partial R^2)_{R=R_0} > 0$, что соответствует наличию локального минимума в зависимости $U(R)$ при равновесном значении радиуса пучка. Из (31) легко видеть, что данным условиям удовлетворить невозможно, так как зависимость $U(R)$ не обладает локальным минимумом. Напротив, в данной зависимости имеется локальный максимум. Этот вывод согласуется с известным фактом: при одной только керровской нелинейности трехмерные пространственно-временные солитоны неустойчивы [24].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное в настоящей работе методическое рассмотрение показывает, что сверхсветовые оптические импульсы в неравновесных (усиливающих) средах неустойчивы, как и сами неравновесные среды. Данный вывод согласуется с выводами предыдущих работ, включая [6] и [8], хотя вопросы устойчивости здесь исследованы другими способами. С другой стороны, не противоречащий фундаментальным физическим принципам механизм переформирования позволяет наблюдать сверхсветовые импульсы на дистанциях, меньших характерных длин развития неустойчивостей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Täschler P., Bertrand M., Schneider B. et al. // Nature Photon. 2021. V. 15. P. 919.
2. Стремоухов С.Ю. // Изв. РАН. Сер. физ. 2024. Т. 88. № 1. С. 48; Stremoukhov S.Yu. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2024. V. 88. No. 1. P. 38.
3. Конобеева Н.Н., Белоненко М.Б. // Изв. РАН. Сер. физ. 2023. Т. 87. № 12. С. 1749; Konobeeva N.N., Belonenko M.B. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2023. V. 87. No. 12. P. 1829.
4. Кошкин К.В., Сазонов С.В., Калинович А.А., Комиссарова М.В. // Изв. РАН. Сер. физ. 2024. Т. 88. № 1. С. 68; Koshkin K.V., Sazonov S.V., Kalinovich A.A., Komissarova M.V. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2024. V. 88. No. 1. P. 56.

5. Басов Н.Г., Амбарцумян Р.В., Зуев В.С. и др. // ЖЭТФ. 1966. Т. 50. № 1. С. 23; *Basov N.G., Ambartsumyan R.V., Zuev V.S. et al.* // JETP. 1966. V. 23. No. 1. P. 16.
6. Ораевский А.Н. // УФН. 1998. Т. 168. № 12. С. 1311; *Oraevskii A.N.* // Phys. Usp. 1998. V. 41. No. 12. P. 1199.
7. Сазонов С.В. // УФН. 2001. Т. 171. № 6. С. 663; *Sazonov S.V.* // Phys. Usp. 2001. V. 44. No. 6. P. 631.
8. Розанов Н.Н. // УФН. 2005. Т. 175. № 2. С. 181; *Rozanov N.N.* // Phys. Usp. 2001. V. 48. No. 2. P. 167.
9. Allen L., Eberly J.H. Optical resonance and two-level atoms. N.Y.: John Wiley & Sons, 1975.
10. Полуэктов И.А., Попов Ю.М., Ройтберг В.С. // УФН. 1974. Т. 114. № 1. С. 97.
11. Blaauuboer M., Kofman A.G., Kozhekin A.E. et al. // Phys. Rev. A. 1998. V. 57. P. 4905.
12. Lamb J.L. Elements of soliton theory. N.Y.: John Wiley & Sons, 1980.
13. Crisp M.D. // Phys. Rev. A. 1973. V. 8. P. 2128.
14. Башаров А.М., Маймистов А.И. // Опт. и спектроск. 2000. Т. 88. № 3. С. 428; *Basharov A.M., Maimistov A.I.* // Opt. Spectrosc. 2000. V. 88. No. 3. P. 380.
15. Sazonov S.V. // Roman. Rep. Phys. 2018. V. 70. No. 1. P. 401.
16. Agrawal G.P. Nonlinear fiber optics. Boston: Academic Press, 1989.
17. Двужилова Ю.В., Двужилов И.С., Белоненко М.Б. // Изв. РАН. Сер. физ. 2022. Т. 86. № 1. С. 68; *Dvuzhilova Y.V., Dvuzhilov I.S., Belonenko M.B.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2022. V. 86. No. 1. P. 46.
18. Двужилова Ю.В., Двужилов И.С., Белоненко М.Б. // Изв. РАН. Сер. физ. 2021. Т. 85. № 12. С. 1701; *Dvuzhilova Y.V., Dvuzhilov I.S., Belonenko M.B.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2022. V. 85. No. 12. P. 1354.
19. Silberberg Ya. // Opt. Lett. 1990. V. 15. P. 1282.
20. Kivshar Yu.S., Agrawal G.P. Optical solitons. N.Y.: Academic Press, 2003.
21. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. Колебания, волны, структуры. М.: Наука, 2001.
22. Ахманов С.А., Сухоруков А.П., Хохлов Р.В. // УФН. 1967. Т. 93. № 9. С. 19.
23. Конобеева Н.Н., Трофимов Р.Р., Белоненко М.Б. // Изв. РАН. Сер. физ. 2023. Т. 87. № 12. С. 1763; *Konobeeva N.N., Trofimov R.R., Belonenko M.B.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2023. V. 87. No. 12. P. 1841.
24. Skarka V., Berezhiani V.I., Miklaszewski R. // Phys. Rev. A. 1997. V. 56. No 1. P. 1080.

On the superluminal objects in non-equilibrium media

S. V. Sazonov*

*National Research Centre «Kurchatov Institute»,
Moscow, 123182 Russia
Moscow Aviation Institute (National Research University),
Moscow, 125993 Russia*

*e-mail: sazonov.sergey@gmail.com

An analysis of superluminal propagation of resonant and quasi-resonant soliton-like laser pulses in non-equilibrium media is presented. It is shown that such pulses are unstable. However, at the initial stage of instability development, it is possible to observe superluminal propagation of these pulse profiles due to the reshaping mechanism.

Keywords: non-equilibrium medium, inversion population, superluminal propagation, reshaping mechanism

УДК 535.8

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ СПЕКЛОВ В ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2025 г. Р. Т. Кубанов¹, А. М. Зотов^{1, 2}, П. В. Короленко^{1, 2, *}, А. Ю. Мишин¹

¹ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», Москва, Россия

² Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Физический институт имени П. Н. Лебедева Российской академии наук», Москва, Россия

*e-mail: pvkorolenko@rambler.ru

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

Рассмотрено дифракционное преобразование волновых фрактальных полей. Показано, что при распространении световых пучков со спекловой структурой в оптических системах и в свободном пространстве их фрактальные свойства обладают высокой степенью устойчивости.

Ключевые слова: спеклы, фрактал, оптическая система, фурье-преобразование

DOI: 10.31857/S0367676525010072, **EDN:** DBRFMC

ВВЕДЕНИЕ

Проводимые в рамках фрактальной оптики исследования свойств фрактальных спекловых полей дали возможность найти решение ряда важных вопросов фундаментального характера. Уточнено применительно к спекловым структурам понятие скейлинга (масштабной инвариантности) [1], дана оценка фрактальности расположения дислокационных образований [2], рассмотрены особенности перехода от релеевской статистики распределения интенсивности к нерелеевской [3]. Весьма значимыми оказались и прикладные аспекты выполненных исследований. К ним в первую очередь следует отнести биомедицинские приложения. Так, фрактальная спекловая технология позволила разработать новые диагностические методы [4–6], повысить информационную емкость систем связи [7], дала возможность улучшить лечебные методики в офтальмологии [8–11] и арт-терапии [12–15].

Как правило, на практике световой пучок со спекловой структурой проходит некоторое расстояние от начальной плоскости, где формируется спекловая структура, до плоскости, где фиксируется с целью того или иного применения поперечное распределение интенсивности. Однако в литературе нет полноценной информации о характере и степени трансформации амплитудно-фазовых, скейлинговых и статистических характеристик излучения в процессе его распространения. Целью данной работы является оценка самосогласованных изменений указанных характеристик в зависи-

мости от изначально задаваемых параметров. При этом особое внимание уделяется нахождению степени адекватности начального поля его изображению в оптической системе.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД ЕЕ РЕШЕНИЯ

В качестве постановочной части задачи рассмотрим спекловый пучок, падающий на собирающую линзу с фокусным расстоянием f . Начальную плоскость разместим сразу за линзой, где радиус кривизны R волнового фронта пучка равен f . Рассмотрим, как будет меняться структура пучка в процессе фокусировки и какова степень корреляции распределения поля в начальной плоскости и в плоскости изображения, находящейся от линзы на расстоянии $2R$.

При численном моделировании структуры фрактального спеклового поля в начальной плоскости использовалась функция Вейерштрасса, имеющая вид

$$W_{x,y} = \sigma \sum_{v=0}^V \sum_{n=0}^N \left[b^{(D-2)n} \cos \left[2\pi s b^n \left[\left(x - \frac{K+1}{2} \right) \times \right. \right. \right. \quad (1) \\ \left. \left. \left. \times \sin(\alpha v) + \left(y - \frac{K+1}{2} \right) \cos(\alpha v) \right] + \psi_n + \psi_v \right] \right] + A.$$

Здесь $W_{x,y}$ — амплитуда поля излучения; x, y — дискретные поперечные координаты ($0 \leq x, y \leq K$); σ — стандартное отклонение амплитуды от среднего значения; N — количество гармоник; V — количество азимутальных парциальных волн;

n — номер гармоники; v — индекс азимутальной составляющей волны; α — элементарный азимутальный угол поворота; b — параметр скейлинга; s — масштабирующий параметр; D — фрактальная размерность графика функции Вейерштрасса при одномерном представлении; ψ_n, ψ_v — фазы компонент поля; A — компонента с однородным распределением амплитуды поля. При случайных значениях фаз ψ_n, ψ_v формировалось спекловое поле, плотность распределения интенсивности в котором подчинялась релеевской статистике.

Для того, чтобы учесть сферичность волнового фронта пучка на выходе линзы, функция (1) умножалась на корректирующую функцию

$$F_{x,y} = e^{\frac{i \left[\left[xu - \frac{(K+1)u}{2} \right]^2 + \left[yu - \frac{(K+1)u}{2} \right]^2 \right] \pi}{\lambda R}}. \quad (2)$$

Здесь параметр u характеризует используемую степень дискретизации поперечных координат, λ — длина волны, R — радиус кривизны волнового фронта, $i = \sqrt{-1}$. В некоторых случаях для снижения влияния краевых эффектов использовалась дополнительная корректирующая функция T , играющая роль «мягкой» диафрагмы

$$T_{x,y} = \xi e^{\left[\left(xu - \frac{(K+1)u}{2} \right)^2 + \left(yu - \frac{(K+1)u}{2} \right)^2 \right]^4}, \quad (3)$$

где ξ — постоянная величина.

Приведенные ниже результаты численного моделирования, иллюстрирующие распространение спеклового пучка, получены для следующего набора параметров: $K = 255$, $\alpha = 2\pi/48$, $V = 47$, $v = 0 \dots V$, $N = 5$, $n = 0 \dots N$, $\sigma = 3.3$, $s = 0.05$, $b = 2$, $A = 0$. Случайные фазы ψ_n, ψ_v задавались с помощью соотношений

$$\psi_n = \frac{\text{rnd}(n)4\pi}{n+1}, \quad \psi_v = \frac{\text{rnd}(v)4\pi}{v+2}. \quad (4)$$

Будем для наглядности считать, что $R = 1.5$ м, а длина волны $\lambda = 0.5 \cdot 10^{-6}$ м. Положим также, что размер рабочего поля, определяемого величиной K , в метрическом измерении равен $a = 0.02$ м. В этом же измерении расстояние между значащими точками рабочего поля составляет $u = a/K = 7.812 \cdot 10^{-5}$ м.

Для оценки характеристик светового поля на разных расстояниях за экраном использовался составляющий основу фурье-оптики метод разложения изначального поля по плоским волнам [16]. Он реализуется в несколько этапов. Сначала с помощью процедуры быстрого преобразования Фурье определяется пространственный комплексный спектр излучения $S = \text{fft}(W)$. Затем с учетом набегов плоских волн на разных

расстояниях z определяется новый комплексный спектр Q

$$Q_{x,y} = S_{x,y} \cdot \exp[i2\pi z_T (c(x)^2 + c(y)^2)]. \quad (5)$$

Для проведения дальнейших расчетов ему целесообразно придать центрально-симметричный характер

$$H_{x,y} = \left| Q_{\text{mod}\left(x+\frac{K+1}{2}, K+1\right), \text{mod}\left(y+\frac{K+1}{2}, K+1\right)} \right|. \quad (6)$$

В формуле (5) расстояния z выражаются в долях так называемой длины Тальбо $T = 2a^2/\lambda$, т. е. $z_T = z/T$. Входящие в эту формулу вспомогательные функции $c(t)$ имеют вид

$$c(t) = \text{mod}\left(t + \frac{K+1}{2}, K+1\right) + \frac{K+1}{2}. \quad (7)$$

Наконец, на последнем этапе процедуры посредством обратного преобразования Фурье определяется распределение поля $B_{x,y}$ на расстоянии z_T

$$B = \text{icfft}(H). \quad (8)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Расчет показал, что в соответствии с представлениями волновой оптики изначальный световой пучок сначала фокусируется вплоть до фокусного расстояния $z = R$, а затем расходится, формируя на расстоянии $z = 2R$ изображение начального распределения. Такого рода трансформация пучка показана на рис. 1. На нем показаны распределения $|W_{x,y}|$. На рис. 1а показано распределение $|W_{x,y}|$ сразу за линзой в предположении, что световой пучок ограничивает квадратная диафрагма, размер которой в 3.2 раза меньше размера рабочего поля. Постепенное уменьшение размеров пучка в процессе его фокусировки иллюстрирует рис. 1б, где световое поле приведено на расстоянии $z = R/2$. Качественное преобразование структуры пучка происходит в фокальной плоскости, когда $z = R$ (рис. 1в). В соответствии с положением фурье-оптики в этой плоскости поле является результатом фурье-преобразования начального распределения амплитуды световых колебаний. Сформированный в фокальной плоскости фурье-образ имел вид системы концентрических окружностей, которые соответствовали распределению пространственных частот фрактального спеклового пучка. Наличие скейлинга в фурье-образе доказывает то, что отношение радиусов окружностей составляли постоянную величину равную присутствующему в формуле (1) параметру $b = 2$. Изменение этого параметра, являющегося по сути коэффициентом скейлинга, приводило к изменению отношения радиусов. Особенность пространственного спектра, обусловленная наличием скейлинга, во многом определяет эффективность визуального воздействия фрактальных структур при проведении лечебных процедур в арт-терапии и офтальмологии. Дело в том,

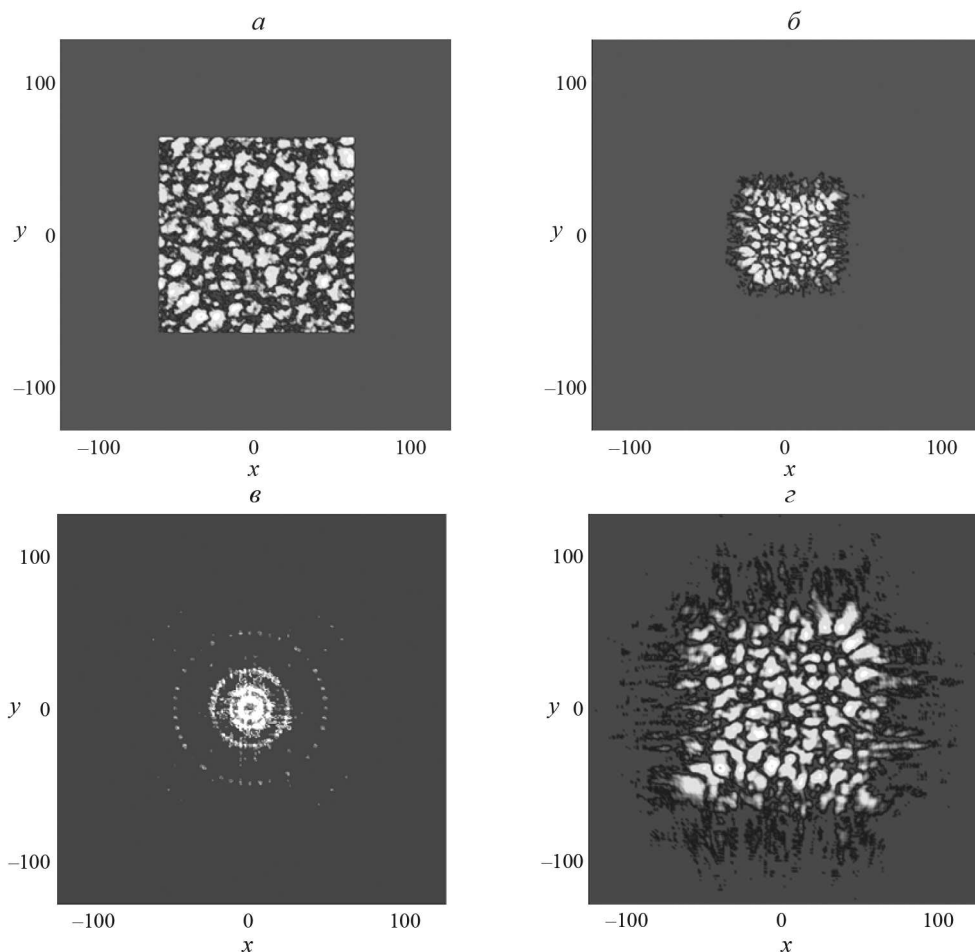


Рис. 1. Изменение структуры пучка в оптической системе. $z = 0$ (а), $R/2$ (б), R (в), $2R$ (г).

что в коре головного мозга обработка зрительных сигналов, несущих информацию об изображениях, осуществляется на основе структуры их пространственных спектров [14]. Из-за присутствия скейлинга отсутствует необходимость в обработке пространственных спектров в широком частотном диапазоне, достаточно зафиксировать лишь их низкочастотную часть. Это ускоряет и облегчает процесс зрительного восприятия рассматриваемых объектов и, как следствие, создает ощущение комфорта и эстетического наслаждения. Происходящее при этом укрепление связей между нейронами в коре головного мозга способствует излечению ряда глазных болезней (например, глаукомы). Распространяясь далее от фокальной плоскости пучок увеличивает размеры и формирует на расстоянии $z = R$ изображение начального распределения (рис. 1г).

Было обнаружено, что в процессе распространения спеклового пучка он сохранял фрактальные признаки независимо от статистически независимых реализаций их структуры. Оцениваемые методом покрытий [17] фрактальные размерности начального распределения и его изображения оказались близки между собой и составляли величину 2.5 ± 0.1 . Минимальная фрактальная размерность,

равная 2.25 ± 0.05 соответствовала распределению поля в фокальной плоскости. Параллельно с оценкой значений фрактальной размерности на разных расстояниях от начальной плоскости определялись средние значения спеклов. Делалось это по отсечке 0.5 от максимального значения рассчитываемой автокорреляционной функции. Расчет показал, что размеры спеклов в изображении за счет дифракционного уширения, примерно, на 20% превосходят свои начальные размеры. Значительное уменьшение спеклов (в 2.5 раза) наблюдалось вблизи фокальной плоскости.

Расчет коэффициента корреляции η распределений поля в начальной плоскости и в плоскости изображения (рис. 1а и 1г) дал значение $\eta = 0.53$. Увеличение фрактальной размерности D приводило к снижению η . Это хорошо видно из хода кривой, приведенной на рис. 2. В наиболее важной области для практических применений ($D < 1.5$) уменьшение величины η относительно максимального значения не превышает 30%.

ДРУГАЯ СТРУКТУРА ВОЛНОВОГО ФРОНТА

Для того, чтобы учесть влияние на характеристики излучения присутствия в начальной плоско-

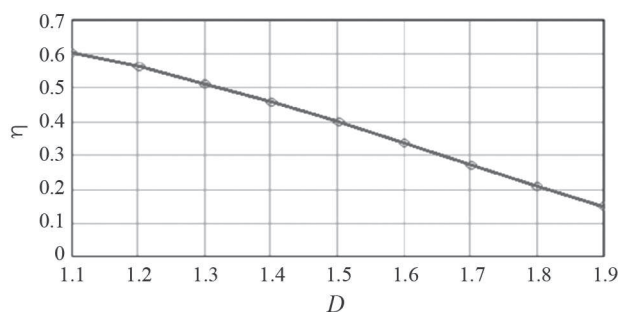


Рис. 2. Влияние фрактальной размерности D на значение коэффициента корреляции η .

сти сферической аберрации формуле (2) придавался иной вид

$$F_{x,y} = e^{i \left[\left(\frac{2x}{K+1} - 1 \right)^2 + \left(\frac{2y}{K+1} - 1 \right)^2 \cdot \left[1 + \rho \left[\left(\frac{2x}{K+1} - 1 \right)^2 + \left(\frac{2y}{K+1} - 1 \right)^2 \right] \right] \right]} \cdot \frac{\pi \left(\frac{a}{\lambda R} \right)^2}{\lambda R} \quad (9)$$

Входящий в выражение (9) параметр ρ характеризует степень влияния аберрации на структуру изображения. На рис. 3 это влияние графически представлено в виде изменения коэффициента корреляции η изображения и начального распределения поля. Из рисунка видно, что снижение коэффициента корреляции, превосходящее 10%, происходит при $|\rho| > 0.1$.

Была рассмотрена также возможность использования разработанного программного обеспечения для случая распространения спекловой волны с изначально плоским волновым фронтом. Используемый в нем метод плоских волн по сравнению с предыдущим случаем потребовал определенной корректировки. Это связано с тем, что расходимость спеклового пучка требует увеличения размеров рабочего поля ввиду необходимости учета особенностей структуры пучка на его периферии. Указанная проблема была преодолена путем использования адаптивной схемы постоянного увеличения размеров рабочего поля. Было показано, что на расстоянии от начальной плоскости $z_1 = 0.0001d^2/\lambda$, где d — размер рабочего поля, распределение интенсивности сохраняет свойства, характерные для спеклового фрактального пучка. Количественный анализ трансформации структуры спекловой волны позволил установить, что такие характеристики поля как плот-

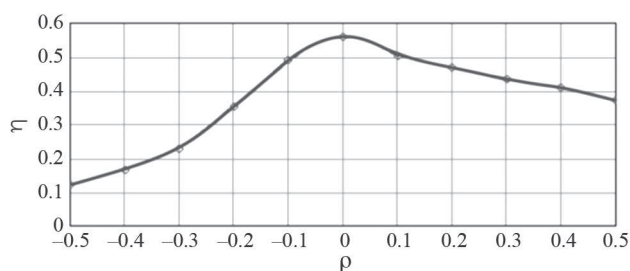


Рис. 3. Влияние сферической аберрации на структуру изображения.

ность вероятности и радиус корреляции значений интенсивности, их стандартное отклонение в области $0 < z < z_1$ в зависимости от реализации могут претерпевать заметные, а иногда значительные изменения. В то же время, фрактальная размерность, рассчитанная методом покрытий, испытывала отклонения от среднего значения, равного 2.45, не превышающие 2%. Это говорит об устойчивости такой важной характеристики спеклового поля, как его фрактальная размерность.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Распространение в оптических системах и в свободном пространстве фрактальных спекловых пучков рэлеевского типа характеризуется рядом важных физических закономерностей. Помимо того, что в процессе распространения остается неизменной скейлинговая структура их пространственного спектра, сохраняется как фрактальная форма, так и плотность вероятности поперечного распределения интенсивности. Однако величина фрактальной размерности, фиксируемой на различных расстояниях, в общем случае может меняться в больших пределах. В то же время фрактальные размерности пучков в начальной плоскости и в плоскости изображения близки между собой.

Коэффициент корреляции изначального поля и его изображения зависит от задаваемой в начальной плоскости фрактальной размерности и снижается ее увеличением. Так, увеличения фрактальной размерности от значения 2.25, до значения 2.7 может уменьшить коэффициент корреляции в 2 раза. Заметным образом влияет на коэффициент корреляции присутствие в сформированном в начальной плоскости пучке сферической аберрации. Если вклад аберрации в структуру волнового фронта превосходит 10%, то следует считаться с резким падением корреляционного коэффициента. Дополнительный анализ процесса распространения фрактального спеклового пучка в свободном пространстве показал, что и в этом случае он сохраняет фрактальные свойства.

Авторы выражают благодарность профессору физического факультета МГУ Боголюбову А. Н. за поддержку данного направления исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Funamizu H., Uozumi J. // J. Optics A. Pure Appl. Opt. 2008. V. 10. No. 2. Art. No. 025004.
2. O'Holleran K., Dennis M.R., Flossmann F. et al. // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 100. No. 5. Art. No. 053902.
3. Зотов А.М., Короленко П.В., Павлов Н.Н. // Изв. РАН. Сер. физ. 2022. Т. 86. № 11. С. 1617; Zotov A.M., Korolenko P.V., Pavlov N.N. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2022. V. 86. No. 11. P. 1341.

4. Engin E.Z., Şişli A.B., Pahnvar A.J. et al. // CBU-JOS. 2020. V. 16. No. 1. P. 47.
5. Carvalho O., Benderitter M., Roy L. // J. Biomed. Opt. 2010. V. 15. No. 2. Art. No. 027013.
6. Ульянов А.С. // Квант. электрон. 2008. Т. 38. № 6. С. 557; Ulyanov A.S. // Quantum. Electron. 2008. V. 38. No. 6. P. 557.
7. Korolenko P.V. // Phys. Wave Phenom. 2020. V. 28. No. 4. P. 313.
8. Каданер Г.И., Овчинников Б.В., Рубинштейн М.М. // Опт. журн. 2007. Т. 74. № 12. С. 19; Kadaner G.I., Ovchinnikov B.V., Rubinshtein M.M. // J. Opt. Technol. 2007. V. 74. No. 12. P. 806.
9. Кащенко Т.П., Корнюшина Т.А., Базарбаева А.Р. и др. // Вестн. офтальмологии. 2014. Т. 130. № 5. С. 48.
10. Матросова Ю.В., Фабрикантов О.Л. // Офтальмология. 2018. Т. 15. № S2. С. 52.
11. Прокопенко В.Т., Матвеев Н.В., Олейник Р.В. и др. // Светотехника. 2021. № 4. С. 50.
12. Пьянкова С.Д. // Психол. иссл. 2019. Т. 12. № 63. Art. No. 12.
13. Simion R.M. // J. Experient. Psychother. 2016. V. 19. No. 2(74). P. 14.
14. Копытин А.И. Современная клиническая арт-терапия: учебное пособие. М.: Когито-Центр, 2015. 528 с.
15. Шелепин Ю.Е. Введение в нейроиконику: монография. СПб.: Троицкий мост, 2017. 352 с.
16. Короленко П.В. Когерентная оптика. М.: Юрайт, 2020. 184 с.
17. Митин В.Ю. // Вестн. Пермск. ун-та. Матем. Механ. Информ. 2013. № 2 (21). С. 16.

Propagation of fractal speckles in optical systems and in free space

R. T. Kubanov^a, A. M. Zotov^{a, b}, P. V. Korolenko^{a, b, *}, A. Yu. Mishin^a

^a Moscow State University,
Moscow, 119991 Russia

^b Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, 119991 Russia

*e-mail: pvkorolenko@rambler.ru

The diffraction transformation of wave fractal fields is considered. It is shown that when light beams with a speckle structure propagate in optical systems and in free space, their fractal properties have a high degree of stability.

Keywords: speckles, fractal, optical system, Fourier transform

УДК 535.36

ЛАЗЕРНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ЗЕРКАЛ И ГЕНЕРАЦИЯ НЕКОГЕРЕНТНЫХ РЕНТГЕНОВСКИХ ЛУЧЕЙ

© 2025 г. В. В. Кулагин¹*, В. Н. Корниенко², В. А. Черепенин²

¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», Государственный астрономический институт имени П. К. Штернберга, Москва, Россия

²Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова Российской академии наук», Москва, Россия

*e-mail: victorvkulagin@yandex.ru

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

С помощью методов вычислительного эксперимента изучена генерация рентгеновских лучей при взаимодействии встречной лазерной волны с релятивистским электронным зеркалом, сформированным мощным ускоряющим лазерным импульсом из плазменного слоя. Исследована структура излучаемого поля в дальней зоне, найдены спектральная плотность поля излучения и угловое распределение энергии импульса. Изменение параметров ускоряющей и встречной волн позволяет контролировать характеристики излучения.

Ключевые слова: генерация некогерентных рентгеновских импульсов, сверхмощные неадиабатические лазерные импульсы, релятивистские электронные зеркала

DOI: 10.31857/S0367676525010081, EDN: DBKJON

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время рентгеновские лучи являются одним из наиболее эффективных инструментов исследования различных систем во многих областях науки и техники. При этом особое место занимают источники рентгеновского излучения, основанные на синхротронном излучении релятивистских электронов [1]. Метод генерации рентгеновских лучей с помощью синхротронного излучения привлекает все большее внимание исследователей, что связано с широким распространением лазеров мультитераваттного уровня и возможностью создания на их основе полностью оптического источника рентгеновского излучения с контролируемыми параметрами.

Синхротронный генератор рентгеновских лучей может быть основан на лазерном источнике, формирующем релятивистское электронное зеркало, параметры которого во многом определяют параметры рентгеновских импульсов. Для нанопленки идея синхронного ускорения электронов сверхмощным неадиабатическим лазерным импульсом была впервые предложена в [2], и затем были исследованы характеристики формируемых релятивистских электронных зеркал [3]. При перпендикулярном падении лазерного импульса с крутым фронтом и релятивистской амплитудой на плазменный

слой может происходить одновременное смещение всех электронов слоя по нормали к поверхности под действием продольной компоненты силы Лоренца. Если амплитуда поля достаточно большая, эта сила разгоняет электроны до релятивистских скоростей и формирует релятивистское электронное зеркало с диаметром порядка диаметра лазерного импульса и толщиной несколько нанометров. Такой сгусток может сформироваться при безразмерной амплитуде лазерного импульса a_0 , превышающей определенный порог, зависящий от параметров плазменного слоя [3] ($a_0 = |e|E_0/(mc\omega)$, где e и m — заряд и масса электрона, E_0 и ω — амплитуда и частота лазера с длиной волны λ и периодом T_0 , c — скорость света в вакууме).

При отражении встречного лазерного импульса от релятивистского электронного зеркала частота образующегося электромагнитного импульса увеличивается вследствие преобразования Доплера. При этом формируется когерентное излучение, характеристики которого исследованы в [4, 5] для перпендикулярного падения встречного импульса на зеркало. Для когерентного отраженного излучения преобразование частоты пропорционально нормированной энергии электронов γ , что связано с наличием не только продольного движения зеркала, но и поперечного, в результате чего направление отраженной волны не совпадает

с направлением скорости электронов. Кроме того, в формируемом излучении присутствует также и некогерентная часть, для которой направление распространения максимума интенсивности совпадает с направлением скорости электронов, а преобразование частоты пропорционально γ^2 . Следует отметить, что такое излучение может рассматриваться как синхротронное в поле лазерного ондулятора встречной волны или как Томсоновское рассеяние встречной волны электронами зеркала в поле ускоряющей волны и кулоновском поле ионов мишени, что определяет специфику взаимодействия. Аналитические оценки параметров этого излучения показали [6], что при использовании современных мультитераваттных лазеров возможна генерация аттосекундных рентгеновских и гамма пучков с высокой яркостью и максимальной энергией в единицы МэВ.

Формирование электронных сгустков при взаимодействии мощного лазерного импульса с твердотельными мишенями и сопутствующая генерация некогерентного рентгеновского и гамма-излучения широко исследуются в литературе [1, 6–11]. В качестве мишеней рассматриваются пленки [6–8], нити и стержни [9], полоски [10], кластеры [11] и др. с микрометровыми или нанометровыми размерами вдоль одного или нескольких направлений. Так, пленки нанометровой толщины могут быть сформированы из различных материалов, в частности, графена, который используется в лазерно-плазменных экспериментах уже более десяти лет. Рассматривается как излучение электронов в поле одной волны [7, 8, 10, 11], так и взаимодействие с полями двух встречных волн [6, 9]. С точки зрения приложений реализация схемы с одним лазерным импульсом намного проще, чем схемы встречного распространения двух импульсов, полученных от одного лазерного источника. В то же время схема с двумя импульсами позволяет обеспечить полный контроль параметров формируемого излучения, включая угловое распределение, энергию фотонов, интегральную по частоте энергию в импульсе, спектральные характеристики и др., что может быть существенным в различных применениях.

Целью настоящей статьи является численное исследование процессов формирования релятивистского электронного зеркала и его взаимодействия со встречной волной, а также определение характеристик генерируемого некогерентного излучения рентгеновского диапазона частот.

ФОРМИРОВАНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ЗЕРКАЛА И ЕГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СО ВСТРЕЧНОЙ ВОЛНОЙ

Для нахождения характеристик релятивистского электронного зеркала проводился вычислитель-

ный эксперимент, включающий двумерные (2D) численные моделирования с помощью PIC (в англоязычной литературе «particle-in-cell», «облако в ячейке») кодов процесса взаимодействия ускоряющего неадиабатического лазерного импульса релятивистской амплитуды с плазменным слоем. Ускоряющий лазерный импульс с амплитудой $a_0 = 10$, линейной поляризацией вдоль оси x , гауссовским поперечным профилем с диаметром 20 мкм (здесь и ниже диаметр лазерного импульса соответствует диаметру лазерного луча, определяемому по уровню поля e^{-1} от максимального значения поля на оси) распространяется вдоль линии $x = 20\lambda$ в положительном направлении оси z , длина волны $\lambda = 1$ мкм. Такие параметры соответствуют широко распространенным в настоящее время лазерным установкам с импульсной мощностью порядка 100–200 ТВт. Импульс имеет вид отрезка синусоиды длиной 5λ , что соответствует неадиабатической форме (уже первый полуцикл имеет амплитуду, близкую к максимальной амплитуде импульса [4]). Толщина плазменного слоя 5 нм и концентрация электронов $0.6 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$, его начальное положение $z = 0.5\lambda$. Характеристики электронов релятивистского зеркала через 4.5 периода T_0 лазерного поля после начала моделирования представлены на рис. 1.

Из рис. 1а следует, что при выбранных параметрах лазерного импульса и мишени к моменту времени 4.5 периода T_0 лазерного поля от начала моделирования формируется релятивистское электронное зеркало. Наибольшую энергию имеют электроны вблизи оси лазерного импульса (участок зеркала от $x = 15\lambda$ до $x = 25\lambda$), при этом их продольный импульс существенно больше поперечного (рис. 1б и 1в), а разброс направления скорости не превышает 0.2 градуса. Толщина зеркала около оси лазера составляет порядка 3 нм.

Характеристики наиболее энергичных электронов зеркала в зависимости от времени представлены на рис. 2. Максимальная энергия электронов релятивистского зеркала может достигать величины $\gamma_{\max} = 2a_0^2 = 200$ при выбранных параметрах мишени [3, 4], поэтому ускорение электронов зеркала при взаимодействии со встречной волной еще продолжается (моделирование более длинных времен ускорения требует существенного увеличения вычислительных ресурсов). Импульсы и энергия электронов растут, в частности, увеличение энергии происходит от $\gamma = 44.5$ до $\gamma = 59$. Угол, составляемый вектором скорости наиболее энергичных электронов релятивистского зеркала относительно оси z , также изменяется от -12 до -10.5 градусов. Исходя из этих значений, необходимо выбирать угол падения встречной волны при проведении вычислительных экспериментов. Так как энергия электронов и угол их вектора скорости изменяются согласованно и регулярно во время взаи-

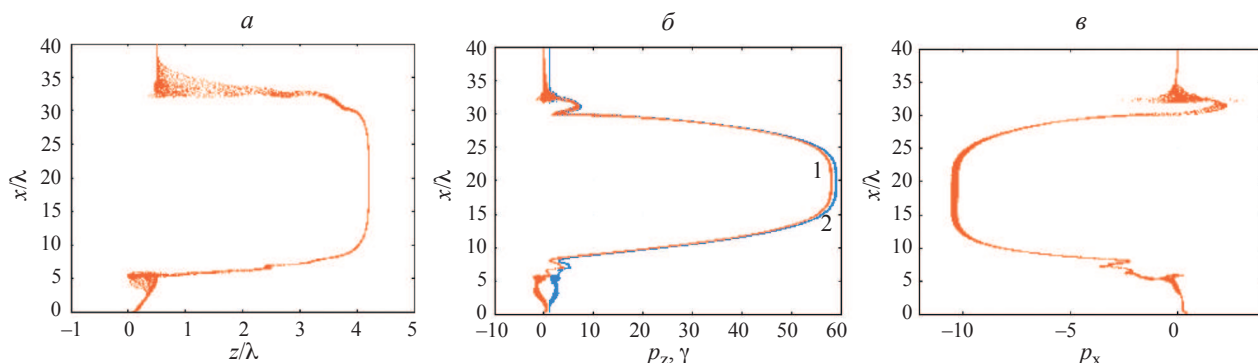


Рис. 1. Характеристики электронов релятивистского зеркала через 4.5 периода T_0 лазерного поля от начала моделирования: пространственное распределение электронов (а), продольный импульс (красная кривая 1) и нормированная энергия γ (синяя кривая 2) (б), поперечный импульс (в). Импульсы нормированы на тс.

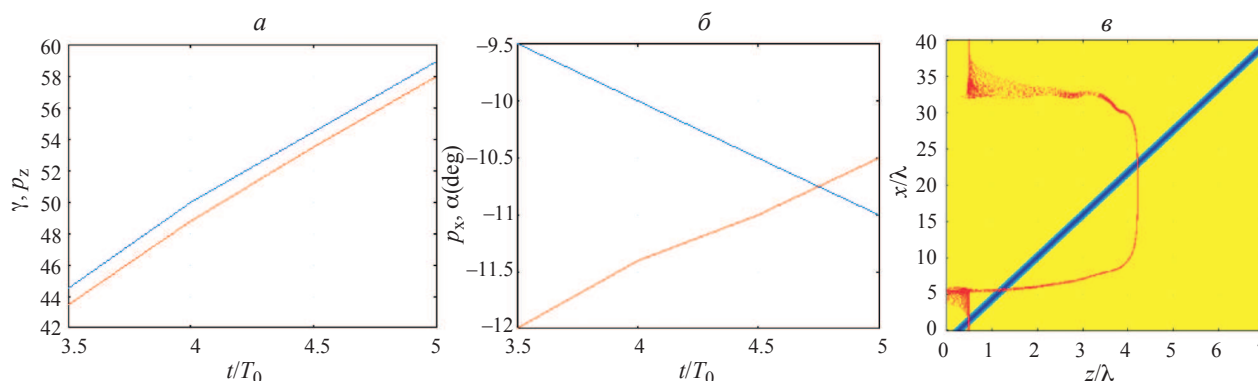


Рис. 2. Характеристики наиболее энергичных электронов релятивистского зеркала в зависимости от времени: нормированные энергия γ (синяя кривая) и продольный импульс p_z (красная кривая) (а), нормированный поперечный импульс p_x (синяя кривая) и угол вектора скорости (в градусах) относительно оси z (красная кривая) (б), геометрия взаимодействия релятивистского электронного зеркала со встречной волной в момент времени $4.5T_0$ от начала моделирования (встречная волна схематично показана синей полосой, на рисунке масштабы по осям z и x различные) (в).

модействия со встречной волной, характеристики формируемого излучения (энергия импульса, спектральная плотность излучения и др.) будут зависеть не только от направления, но и от времени.

Встречная волна в вычислительном эксперименте задавалась как внешнее поле, что упростило модификацию уже имеющегося численного кода на случай неколлинеарного падения ускоряющего и встречного импульсов. Короткая длительность встречной волны позволила детально исследовать генерацию синхротронного излучения в различные моменты времени. Геометрия взаимодействия релятивистского электронного зеркала со встречной волной (синяя полоса) в момент времени $4.5T_0$ от начала моделирования показана на рис. 2в. Взаимодействие электронов зеркала со встречной волной начинается только после того, как зеркало сформировалось и электроны набрали требуемую энергию (в данном случае энергия электронов зеркала примерно в 4 раза меньше энергии γ_{\max} , достижимой при увеличении времени ускорения). Поляризованная вдоль оси y плоская встречная волна с амплитудой $a_1 = 1$ включала один период лазерного поля T_0 . Угол ее падения составлял 170.3° к оси z (на рис. 2в масштабы по осям z и x раз-

личные). Использование различных поляризаций ускоряющей и встречной волн позволило выделить синхротронное излучение электронов зеркала, связанное только с полем встречной волны. При этом излучение, вызванное начальным ускорением электронов и их продолжающимся движением в поле ускоряющей волны, имело поляризацию вдоль оси x и не препятствовало этому. Длительность взаимодействия встречной волны с наиболее энергичными электронами зеркала составляет около $1.5T_0$ (от $3.5T_0$ до $5T_0$ после начала моделирования), именно для этого интервала времени и представлены параметры электронов на рис. 2а и 2б. Остальные электроны в окне моделирования имеют существенно меньшие энергии во время взаимодействия со встречной волной и формируют низкочастотную часть излучения, поэтому в расчете дальнего поля они не учитываются.

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ ЗЕРКАЛА ПРИ ДВИЖЕНИИ В ПОЛЕ ВСТРЕЧНОЙ ВОЛНЫ

Моделирование взаимодействия лазерного импульса с электронами с помощью PIC-кодов не позволяет напрямую исследовать поля

рентгеновских и гамма частот. В то же время их генерация происходит в результате движения и синхротронного излучения электронов в поле встречного лазерного импульса [1], и такое движение уже допускает РС моделирование. В результате высокочастотные излучаемые поля в дальней зоне могут быть вычислены с помощью применения потенциалов Лиенара–Вихерта по сохраненным на каждом шаге РС моделирования координатам и импульсам частиц. Для расчета этого излучения была написана отдельная программа.

Характеристики синхротронного излучения представлены на рис. 3. Поле излучения электронов в зависимости от времени (рис. 3а) на расстоянии 10 м от области моделирования вдоль линии максимальной интенсивности, составляющей угол -11.2° от оси z , имеет вид шума, что связано с некоррелированным излучением отдельных электронов зеркала, имеющих разные координаты и импульсы. Длительность импульса излучения определяется временем прохождения встречной волны по релятивистскому зеркалу и окружающим электронам (рис. 2в). Средняя часть импульса излучения с большими амплитудами длительностью около $1.5T_0$ (по уровню $1/e$) формируется наиболее энергичными электронами релятивистского зеркала, находящимися вблизи оси лазерного импульса, начало и конец импульса излучения — менее энергичными электронами, окружающими зеркало с обеих сторон. Все электроны с энергией γ в момент времени $5T_0$, удовлетворяющей условию $\gamma < \gamma_m - 20$, где γ_m — энергия наиболее энергичных электронов в этот момент времени, в расчете поля в дальней зоне не участвовали.

Встречная волна включает всего один период поля, поэтому излучение одиночного электрона (частицы в РС моделировании) состоит из двух коротких импульсов (выделено красным эллипсом рис. 3в) — положительного и отрица-

тельного, разделенных промежутком времени, где поле мало. Этот промежуток времени намного больше длительности импульсов. Такая структура излучения электрона возникает из-за разного преобразования времени при изменении скорости и ускорения электрона во время его движения в поле встречной волны. Там, где импульсы накладываются, возникает увеличенный пик. Поскольку начальное распределение плотности в мишени случайное, расстояния между импульсами излучения разных частиц также подчиняются случайному закону (рис. 3б), а суммарное поле, излучаемое всеми электронами, становится стохастическим.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ И УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ ИМПУЛЬСА

Частотные и угловые характеристики синхротронного излучения электронов релятивистского зеркала показаны на рис. 4. Спектральная плотность поля излучения в точке на расстоянии 10 м от области моделирования вдоль линии, составляющей угол -11.2° от оси z , для прежней амплитуды встречной волны ($a_1 = 1$) представлены на рис. 4а. Вычисление спектральной плотности проводилось по алгоритму Вэлша. Спектральная плотность поля имеет модуляцию, характерную для генерации синхротронного излучения электронами в поле лазерной волны [12]. Такая форма спектра содержит несколько плавных максимумов, которые возникают при наложении спектров двух близких по форме положительного и отрицательного импульсов, составляющих полный импульс излучения одного электрона (рис. 3в). Период модуляции определяется расстоянием между импульсами, а общая ширина спектра — длительностью импульса. Сложение излучений от всех электронов приводит к дополнительной случайной высокочастотной модуляции спектра, поскольку для двух электронов в зерка-

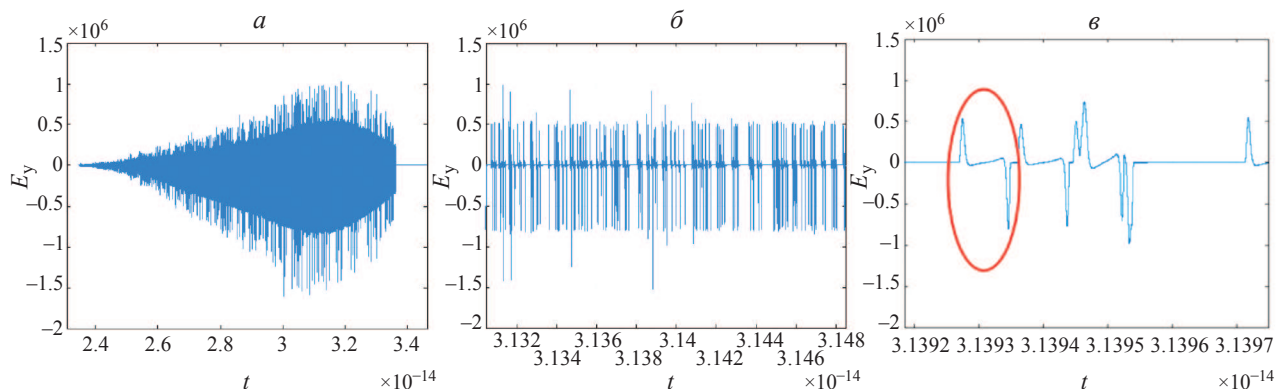


Рис. 3. Характеристики синхротронного излучения: зависимость поля излучения электронов от времени на расстоянии 10 м от области моделирования вдоль линии максимальной интенсивности, составляющей угол -11.2° от оси z (а); поле излучения электронов в увеличенном масштабе (б); импульсы излучения одиночных электронов (в). Здесь и ниже поле E_y представлено в относительных единицах, время t в секундах). Красным эллипсом на рис. 3в выделен импульс излучения одиночного электрона.

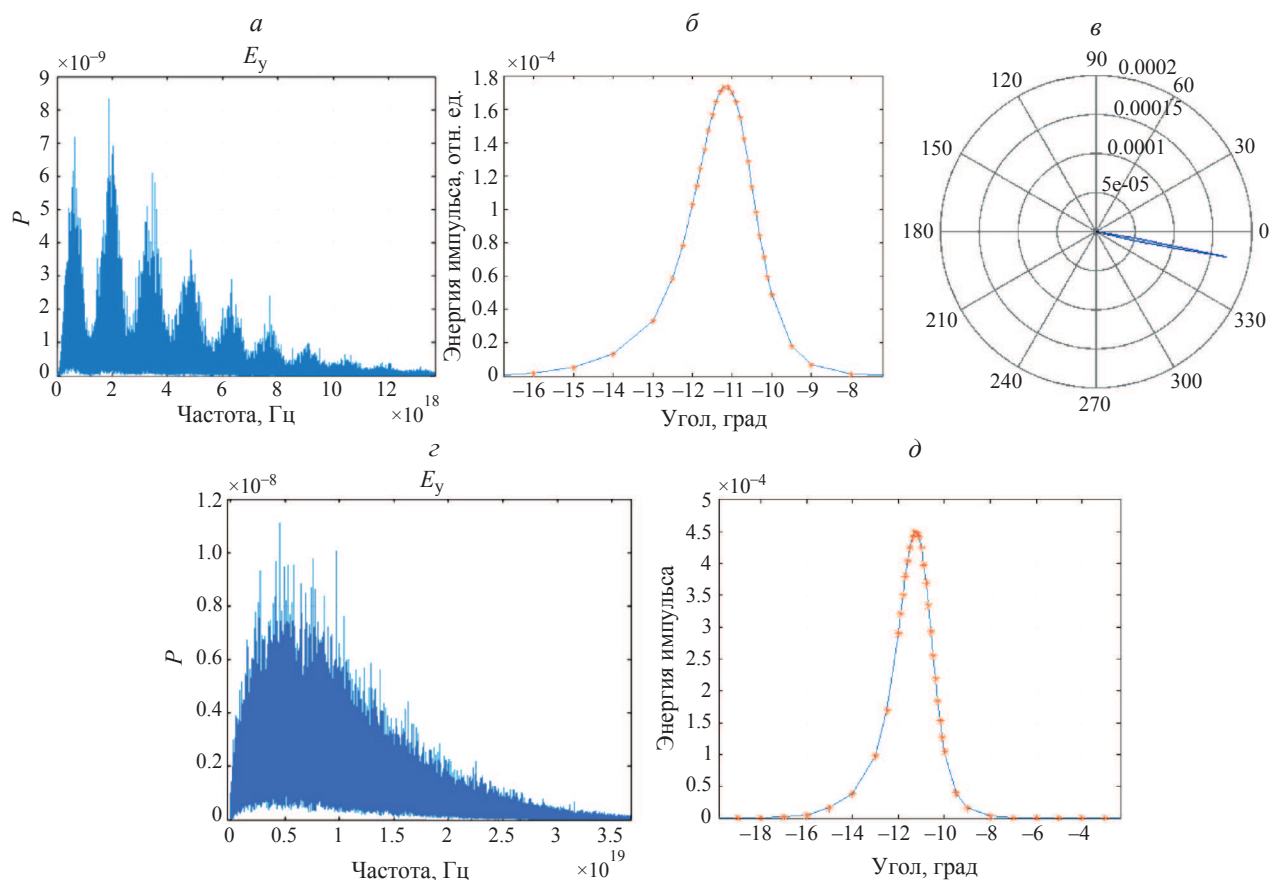


Рис. 4. Частотные и угловые характеристики синхротронного излучения электронов релятивистского зеркала: спектральная плотность поля излучения в точке на расстоянии 10 м от области моделирования вдоль линии, составляющей угол -11.2° от оси z (а) (здесь и ниже спектральная плотность представлена в относительных единицах); интегральная (по спектру) энергия импульса рентгеновского излучения в зависимости от угла от оси z на расстоянии 10 м от области моделирования (б); то же, но в полярных координатах (в), спектральная плотность поля излучения для увеличенной амплитуды встречной волны $a_1 = 5$ (г); интегральная (по спектру) энергия импульса рентгеновского излучения в зависимости от угла для увеличенной амплитуды встречной волны (д).

ле частота модуляции их совместного спектра тем больше, чем больше расстояние по времени между их импульсами излучения, в результате спектр получается фактически линейчатым (см. первый, второй и третий максимумы на рис. 4а). Период модуляции составляет около $1.4 \cdot 10^{18}$ Гц, т.е. порядка 5.8 кэВ. Максимальное значение спектральной плотности достигается вблизи частоты $2 \cdot 10^{18}$ Гц, при этом энергия фотонов составляет около 8.3 кэВ. В спектральной плотности отчетливо видны 9 периодов модуляции, таким образом, формируется некогерентное рентгеновское излучение с максимальной энергией фотонов более 50 кэВ. Для других направлений максимальная энергия излученных фотонов уменьшается, при этом период модуляции спектра также становится меньше. Так, под углом 9° наблюдается 4 максимума с шириной каждого около $7.5 \cdot 10^{17}$ Гц, что соответствует максимальной энергии фотонов около 12 кэВ.

На рис. 4б представлена интегральная (по частоте) энергия импульса рентгеновского излучения в зависимости от угла от оси z на расстоянии 10 м от области моделирования. Энергия импульса

имеет максимум при отклонении от оси z на угол -11.2° , что соответствует направлению скорости наиболее энергичных электронов в момент времени, соответствующий середине интервала взаимодействия встречной волны с зеркалом (рис. 2б). Полная ширина распределения составляет порядка 2° (по уровню половины высоты), что находится в хорошем соответствии с максимальной энергией электронов γ в процессе взаимодействия [1]. Полярная диаграмма на рис. 4в демонстрирует, что формируется узкий игольчатый луч, который может найти применение во многих приложениях.

Спектральная плотность поля излучения электронов релятивистского зеркала для увеличенной амплитуды встречной волны $a_1 = 5$ показана на рис. 4г. В этом случае модуляция спектральной плотности практически отсутствует, поскольку расстояние между двумя импульсами, входящими в поле, излучаемое каждым электроном, увеличилось и период модуляции стал малым. Максимум спектральной плотности сдвинулся на частоту $5 \cdot 10^{18}$ Гц, при этом энергия фотонов выросла в 2.5 раза до значения ≈ 20.7 кэВ. При этом

максимальное значение спектральной плотности увеличилось незначительно (приблизительно на 30%), а ее ширина увеличилась более, чем в 2 раза, так что максимальная энергия фотонов оказалась более 100 кэВ.

Интегральная (по спектру) энергия импульса рентгеновского излучения в зависимости от угла для увеличенной амплитуды встречной волны показана на рис. 4д. Ширина распределения осталась практически неизменной, что связано с наличием поля ускоряющего лазерного импульса во время взаимодействия электронов зеркала со встречной волной. При этом максимальная энергия в импульсе выросла в 2.6 раз в соответствии с уширением спектра генерируемого излучения.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Максимальная энергия электронов релятивистского зеркала $\gamma_{\max} = 2a_0^2 = 200$ достигается для времени ускорения $T_{\text{acc}}/T_0 \approx 3a_0^2/8 = 75$ при выбранных параметрах ускоряющего импульса и мишени [3, 4]. Поэтому простой задержкой встречной волны можно регулировать энергию ускоренных электронов во время взаимодействия. Выбирая максимальную задержку, можно получить энергию фотонов почти до 1 МэВ. Увеличение амплитуды ускоряющего импульса также позволит увеличить энергию излучаемых фотонов даже при малых временах ускорения. Так, для $a_0 = 20$ энергия электронов вырастает в четыре раза, а максимальная энергия фотонов в 16 раз, т.е. уже могут генерироваться гамма-лучи. Еще одной возможностью управлять энергией фотонов является увеличение амплитуды встречной волны. Поскольку угловое распределение излучения с увеличением амплитуды встречной волны меняется слабо (по крайней мере, до величины $a_1 = 5$), энергетическая эффективность схемы в экспериментальных приложениях может быть увеличена путем выбора сравнимых амплитуд ускоряющей и встречной волн и оптимальных задержек встречной волны относительно ускоряющей. Одновременно с увеличением максимальной энергии фотонов увеличивается и энергия в излучаемом импульсе.

Еще одной важной характеристикой рентгеновского излучения является длительность импульса. В вычислительном эксперименте длительность импульса определялась временем прохода встречной волны по зеркалу и составляла порядка 5 фс, при этом диаметр зеркала был около 10 мкм (область нахождения ускоренных электронов с высокой энергией). Длительность импульса можно уменьшить, если выбрать ускоряющий импульс с меньшим диаметром (что позволит так-

же ослабить требования к мощности лазера), либо уменьшить диаметр встречной волны (при использовании в экспериментах встречного импульса с гауссовским поперечным распределением). Оценки показывают [6], что в этом случае длительность импульса рентгеновского излучения может составлять несколько сотен аттосекунд. Кроме того, фокусировка встречной волны позволяет также уменьшить и диаметр источника рентгеновского излучения до размера порядка 1–2 мкм.

Таким образом, преимуществами схемы являются: возможность управлять параметрами формируемого импульса; аттосекундная длительность генерируемого рентгеновского и гамма-излучения; минимальный диаметр источника порядка 1–2 мкм; ширина формируемого луча 1–2 градуса и менее (игольчатый луч); возможность одновременно сформировать под разными углами синхронизированные по времени импульсы с разной энергией фотонов.

Установки с такими характеристиками могут с успехом использоваться во многих приложениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Corde S., Phuoc K.T., Lambert G. et al. // Rev. Mod. Phys. 2013. V. 85. No 1. P. 1.
2. Kulagin V.V., Cherepenin V.A., Hur M.S. et al. // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 99. Art. No. 124801.
3. Kulagin V.V., Cherepenin V.A., Gulyaev Y.V. et al. // Phys. Rev. E. 2009. V. 80. Art. No. 016404.
4. Кулагин В.В., Корниенко В.Н., Черепенин В.А. и др. // Квант. электрон. 2013. Т. 43. № 5. С. 443; Kulagin V.V., Kornienko V.N., Cherepenin V.A. et al. // Quantum. Electron. 2013. V. 43. No. 5. P. 443.
5. Кулагин В.В., Корниенко В.Н., Черепенин В.А. // Квант. электрон. 2016. Т. 46. № 4. С. 315; Kulagin V.V., Kornienko V.N., Cherepenin V.A. // Quantum. Electron. 2016. V. 46. No. 4. P. 315.
6. Кулагин В.В., Корниенко В.Н., Черепенин В.А. // Журн. радиоэлектрон. 2015. № 12. С. 1.
7. Martinez B., d'Humières E., Gremillet L. // Phys. Rev. Research. 2020. V. 2. Art. No. 043341.
8. Dromey B., Cousens S., Rykovanov S. et al. // New J. Phys. 2013. V. 15. Art. No. 015025.
9. Li H.Z., Yu T.P., Hu L.X. et al. // Opt. Express. 2017. V. 25. N. 18. P. 21583.
10. Shen X., Pukhov A., Qiao B. // Commun. Phys. 2024. V. 7. P. 84.
11. Андреев А.А., Платонов К.Ю. // Квант. электрон. 2022. Т. 52. № 2. С. 195; Andreev A.A., Platonov K.Yu. // Quantum Electron. 2022. V. 52. No. 2. P. 195.
12. Lee K., Cha Y.H., Shin M.S. et al. // Phys. Rev. E. 2003. V. 67. No 4. Art. No. 026502.

Laser formation of relativistic electron mirrors and generation of incoherent X-rays

V. V. Kulagin^{a, *}, V. N. Kornienko^b, V. A. Cherepenin^b

^a *Lomonosov Moscow State University, Sternberg State Astronomical Institute,
Moscow, 119991 Russia*

^b *Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, 125009 Russia*

* *e-mail: victorvkulagin@yandex.ru*

Using numerical 2D-PIC simulations, the generation of X-rays during the interaction of an oncoming laser wave with a relativistic electron mirror formed by a powerful accelerating laser pulse from a plasma layer is investigated. The structure of the radiated field in the far zone is investigated, the spectral density of the radiation field and the angular distribution of the pulse energy are found. Changing the parameters of the accelerating and counter waves allows one to control the characteristics of the radiation.

Keywords: generation of incoherent X-ray pulses, superintense nonadiabatic laser pulses, relativistic electron mirrors

УДК 535.015

КВАНТОВЫЕ ОСОБЕННОСТИ ВОЛН ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ГЕНЕРАЦИИ СВЕТА

© 2025 г. И. А. Терещенко^{1, 2, *}, О. В. Тихонова^{1, 2, 3}

¹ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», физический факультет, Москва, Россия

² Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д. В. Скобельцына, Москва, Россия

³ Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова Российской академии наук», Москва, Россия

*e-mail: tereshchenko.ia19@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

В рамках полностью квантового подхода изучено взаимное влияние одновременно происходящих процессов параметрического излучения света в вырожденном по частоте режиме и генерации второй гармоники. Выявлен эффект истощения квантовой накачки. Обнаружено установление баланса между рассматриваемыми процессами и достижения равновесного числа фотонов в модах поля. Продемонстрирована генерация сильно перепутанного двухмодового поля.

Ключевые слова: квантовая оптика, неклассический свет, параметрическая генерация света, сжатый вакуум, генерация второй гармоники, перепутанное полевое состояние

DOI: 10.31857/S0367676525010099, **EDN:** DBJZRF

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время одной из важнейших задач квантовой оптики является генерация различных неклассических состояний электромагнитного поля. Так, например, в процессе параметрического излучения света можно получить сжатые состояния электромагнитного поля [1–5]. Важно, что сжатый свет может быть использован для сверхчувствительных измерений с уменьшением уровня шума ниже стандартного квантового предела [6]. При этом крайне востребованными оказываются методы, позволяющие управлять свойствами генерируемого света [7–9]. Еще одним интересным и перспективным направлением является анализ нелинейных процессов, происходящих под действием неклассического света. Данное направление является еще малоизученным в силу своей новизны, однако по нему уже было проведено несколько экспериментальных реализаций, одними из немногочисленных примеров которых служат эксперименты по возбуждению второй гармоники светом в состоянии сжатого вакуума [10]. Эксперименты показали, что начальное состояние поля и состояния фотонов сильно влияют на характеристики вы-

ходного сигнала второй гармоники [10]. В большинстве случаев нелинейные процессы рассматриваются именно в случае классической накачки, так как квантовая накачка характеризуется ограниченным запасом фотонов, которые могут расходоваться в процессе взаимодействия в отличие от классического случая, где число фотонов настолько велико, что их убывание пренебрежимо мало. Тем не менее, физические особенности нелинейных процессов, возникающих под действием неклассических полей, представляют собой крайне важное направление современных квантовых исследований.

В данной работе в рамках полностью квантового рассмотрения исследовано взаимное влияние одновременно происходящих процессов параметрического излучения света в вырожденном по частоте режиме и генерации второй гармоники в нелинейной среде. Нельзя не отметить, что ранее такой полностью квантовый подход уже был успешно применен в ряде работ [11–13]. Так, в работе [11] аналитически в пределе малых времен был описан процесс многократной генерации второй гармоники. В работе [12] в этом же приближении в результате анализа процесса генерации выс-

ших гармоник было показано значительное сжатие фундаментальной моды. Детальный анализ квантового состояния поля фундаментальной моды, возникающий в режиме генерации второй гармоники, был проведен в [13]. В данной работе проведенный анализ выходит за рамки приближения малых времен, а в случае изначально малого запасаемого числа фотонов в системе позволяет найти аналитическое решение. Кроме того, в отличие от [11–13], в данной работе основное внимание уделено анализу именно процесса генерации параметрического излучения, поскольку изначально в фундаментальной моде предполагается вакуум. Исследование заключается в анализе вырожденного по частоте режима, в результате чего возникает нелинейное взаимодействие низкочастотной моды и моды на удвоенной частоте. На основе полученного решения были исследованы различные режимы динамики системы, приводящие к перераспределению начальной энергии между высокочастотной и низкочастотной модами. Обнаружены новые эффекты, обусловленные квантовыми свойствами поля в изначально заселенной моде. Аналитически получены интегралы движения в системе и продемонстрированы особенности изменения среднего числа фотонов для каждой из мод поля во времени. Рассмотрены различные начальные состояния каждого из полей, и для каждого из случаев детально проанализировано изменение статистики фотонов в каждой моде в процессе взаимодействия. Получен параметр Шмидта, который количественно характеризует степень перепутанности генерируемых полевых состояний.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Исследуется динамика взаимодействия высокочастотного и низкочастотного полей в нелинейно-оптической среде с ненулевой квадратичной нелинейной восприимчивостью в условиях одновременно происходящих процессов вырожденного по частоте параметрического излучения света и генерации второй гармоники. Взаимодействие полей рассматривается в рамках нестационарного уравнения Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi. \quad (1)$$

В исследуемом случае высокочастотное поле является накачкой для вырожденного по частоте процесса параметрической генерации, в то время как фотоны низкочастотного поля стимулируют генерацию света на удвоенной частоте. Гамильтониан такой системы имеет следующий вид:

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \hat{a}^+ \hat{a} + 2\hbar\omega_0 \hat{c} + i\hbar\Gamma (\hat{a}^{+2} \hat{c} - \hat{c}^+ \hat{a}^2), \quad (2)$$

где \hat{a}^+ и \hat{a} — операторы рождения и уничтожения фотона в низкочастотном поле, соответственно, а \hat{c}^+ и \hat{c} — в высокочастотном поле. Коэффициент Γ определяется нелинейной восприимчивостью

среды второго порядка, а частоты ω_0 и $2\omega_0$ — это собственные частоты квантовых полевых осцилляторов, характеризующих низкочастотную и высокочастотную полевые моды, соответственно. Гамильтониан (2) описывает одновременно происходящие и взаимосвязанные процессы генерации параметрического излучения и сигнала суммарной частоты, точнее, второй гармоники, поскольку рассматривается вырожденный режим.

В общем случае нестационарное уравнение Шредингера (1) решается численно с помощью метода разложения решения по собственным (фоковским) состояниям $\Phi_n(q_1)$ и $(\tilde{\Phi}_k(q_2))$ невзаимодействующих подсистем низкочастотного и высокочастотного поля, соответственно:

$$\psi(q_1, q_2, t) = \sum C_{n,k} \Phi_n(q_1) \tilde{\Phi}_k(q_2) e^{-\frac{iE_{nk}t}{\hbar}}, \quad (3)$$

где q_i — безразмерная полевая квадратура моды квантового поля, $C_{n,k}(t)$ — зависящие от времени амплитуды вероятности обнаружить n фотонов в низкочастотном поле и k фотонов в моде второй гармоники, а суммарная энергия E_{nk} определяется следующим образом:

$$E_{nkm} = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right) + 2\hbar\omega_0 \left(k + \frac{1}{2}\right). \quad (4)$$

Подстановка решения (3) в уравнение (1) приводит к системе дифференциальных уравнений для амплитуд вероятности $C_{n,k}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{C}_{n,k} = \Gamma \bigg(& -\sqrt{(n+1)(n+2)} k C_{n+2,k-1} + \\ & + \sqrt{n(n-1)(k+1)} C_{n-2,k+1} \bigg). \end{aligned} \quad (5)$$

Решение данной системы было найдено аналитически для случая, когда в поле изначально запасаемо малое количество фотонов.

В общем случае полученное решение позволит нам рассчитать вероятность обнаружить n фотонов в низкочастотной моде и k фотонов в высокочастотной моде по следующей формуле:

$$W_{nk}(t) = |C_{nk}(t)|^2. \quad (6)$$

При этом вероятность обнаружения n фотонов в низкочастотном поле может быть получена по формуле:

$$W_n(t) = \sum_k |C_{nk}(t)|^2. \quad (7)$$

Аналогичная формула используется для вычисления вероятности обнаружить k фотонов в высокочастотной моде:

$$W_k(t) = \sum_n |C_{nk}(t)|^2. \quad (8)$$

В качестве начальных состояний квантового поля были рассмотрены такие неклассические состояния, как фоковское состояние Φ_n с различным числом фотонов n и когерентное состояние $|\alpha\rangle$, которое может быть представлено в виде суперпозиции фоковских состояний [14]:

$$|\alpha\rangle = \sum_n \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \Phi_n. \quad (9)$$

Данное состояние характеризуется распределением Пуассона со средним числом фотонов $\langle N \rangle = |\alpha|^2$ и дисперсией по числу фотонов $D_n = \langle N \rangle$.

Для количественной характеристики запутанности полевых мод был рассчитан параметр Шмидта K [15], который для нашей системы может быть вычислен следующим образом:

$$K = \frac{1}{\sum_{n,a,k,j} C_{nk} C_{ak}^* C_{nj}^* C_{aj}}. \quad (10)$$

Чем больше этот параметр, тем выше степень перепутывания в системе [15, 16]. Минимальное значение параметра Шмидта равняется 1, что соответствует случаю полной независимости полевых мод друг от друга.

Для случая, когда изначально вся энергия запасена в высокочастотной моде и превалирует процесс рождения низкочастотных фотонов, было проведено сравнение полученных результатов со случаем параметрической генерации под действием классической накачки. Гамильтониан такой системы имеет следующий вид:

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \hat{a}^+ \hat{a} + i\hbar\Gamma (\hat{a}^{+2} e^{-2i\omega_0 t} + \hat{a}^2 e^{2i\omega_0 t}), \quad (11)$$

где \hat{a}^+ и \hat{a} — это операторы рождения и уничтожения фотона в полевой моде, соответствующей частоте ω_0 .

Для случая классической накачки изменение среднего числа фотонов в квантовой моде со временем хорошо известно и имеет следующий вид:

$$\langle N_a(t) \rangle = \text{sh}^2(2\Gamma t). \quad (12)$$

Поскольку в случае классической накачки в параметр Γ включена амплитуда поля накачки, обобщение данной формулы на квантовый случай приводит к выражению для правой части (12) в виде

$\text{sh}^2(2\Gamma\sqrt{\langle N_c \rangle}t)$, где $\langle N_c \rangle$ — среднее число фотонов на входе высокочастотной квантовой моды.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Эффект истощения квантовой накачки

Первоначально в работе рассматривается взаимодействие квантовых полей при таком начальном состоянии ψ_{in_1} , что высокочастотное поле находится в фокковском состоянии с 10 фотонами, а низкочастотное — в вакууме. В результате анализа изменения энергии каждой из полевых мод наблюдается периодическая перекачка энергии из одной моды в другую. Так, на рис. 1 представлены осцилляции среднего числа фотонов в низкочастотной моде, на фоне которых режим генерации сигнала параметрического излучения можно увидеть на самом начальном этапе взаимодействия.

Для более детального исследования данного режима сравним воздействие квантовой накачки с влиянием классической, для изучения которой был взят гамильтониан (11), соответствующий системе, состоящей из низкочастотного квантового поля с параметрической нелинейностью. Из рис. 1 видно, что на начальном этапе энергетические кривые совпадают. Однако в силу того, что в случае квантовой накачки изначальный запас фотонов конечен и достаточно мал, с течением времени начинает проявляться все в большей степени эффект истощения накачки. Он проявляется значительным отклонением кривой, полученной в квантовом случае, от результата, соответствующего классической накачке, в которой запас фотонов настолько велик, что их убывание никак не проявляется. Как только эффект истощения накачки становится существенным, возникает режим квазипериодического обмена энергией между полевыми модами.

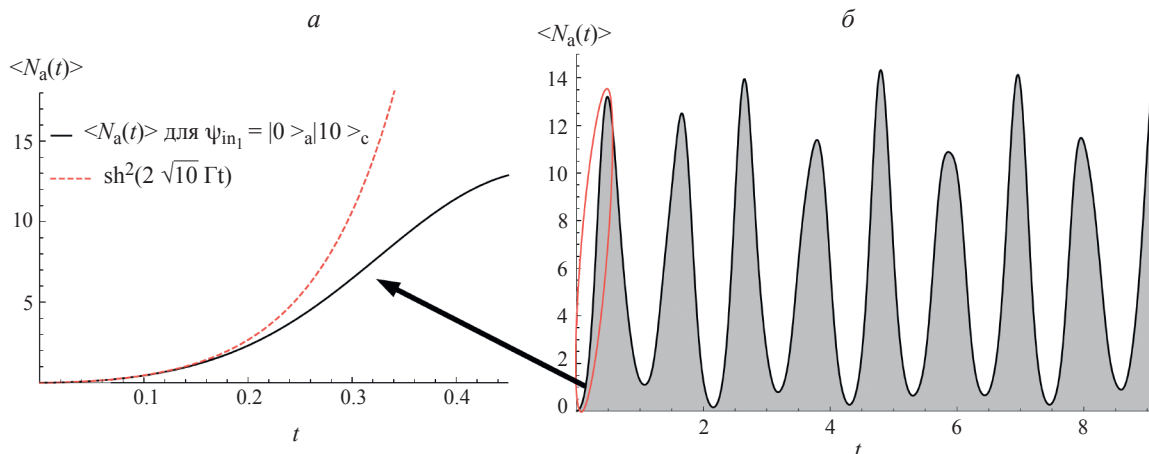


Рис. 1. Сравнение временных зависимостей изменения среднего числа фотонов в низкочастотной моде $\langle N_a(t) \rangle$ в случае численного расчета для системы, состоящей из двух квантовых полевых мод, при начальном условии $\psi_{in_1} = |0\rangle_a |10\rangle_c$ (а) и в случае аналитически полученной зависимости для параметрического излучения с классической накачкой (б).

Эффект достижения равновесного числа фотонов в модах поля

Также был рассмотрен случай, когда высокочастотное поле в начальный момент времени находится в когерентном состоянии $\psi_{in_2} = |0\rangle_a |\alpha\rangle_c$ со средним числом фотонов $\langle N \rangle = 20$. При анализе изменения средних энергий полей на начальных этапах взаимодействия обнаружена перекачка энергии из одной подсистемы в другую, во время которой происходит квазипериодическая смена режимов генерации параметрического излучения и второй гармоники. Эффективность данного процесса постепенно снижается, пока не наступает баланс между процессами генерации фотонов в низкочастотной и высокочастотной полевых модах. Данный эффект соответствует достижению равновесного числа фотонов в каждой из мод поля, что хорошо проиллюстрировано на рис. 2 в виде квазипериодического формирования так называемых «плато», свидетельствующих о том, что среднее число фотонов в каждой из полевых мод практически не меняется со временем.

Формирование перепутанного двумодового полевого состояния

Проанализируем свойства двумодового полевого состояния, формирующегося в интервале времен, соответствующих «плато». Для любого момента времени полевое состояние должно удовлетворять закону сохранения энергии, согласно которому суммарная энергия, запасенная в системе изначально, сохраняется:

$$\langle N_a(t) \rangle + \langle N_c(t) \rangle = \text{const} = \langle N_a(0) \rangle + 2\langle N_c(0) \rangle. \quad (13)$$

Более того, анализ системы уравнений Гейзенберга для операторов числа фотонов $\hat{n}_a = \hat{a}^+ \hat{a}$ и $\hat{n}_c = \hat{c}^+ \hat{c}$, записанных для гамильтониана (2),

$$\begin{cases} \dot{\hat{n}}_a(t) = 2\Gamma (\hat{c}(t)\hat{a}^{+2}(t) + \hat{c}^+(t)\hat{a}^2(t)), \\ \dot{\hat{n}}_c(t) = -\Gamma (\hat{c}(t)\hat{a}^{+2}(t) + \hat{c}^+(t)\hat{a}^2(t)) \end{cases} \quad (14)$$

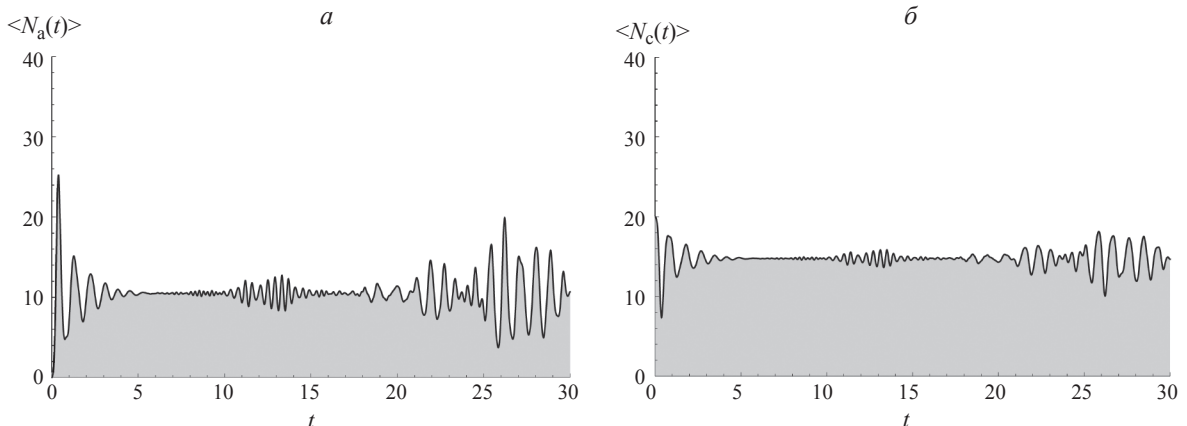


Рис. 2. Временная зависимость среднего числа фотонов в низкочастотной (а) и высокочастотной (б) модах поля в случае начального состояния $\psi_{in_2} = |0\rangle_a |\alpha\rangle_c$, где $|\alpha|^2 = 20$.

позволяет выявить следующий интеграл движения в операторном виде:

$$\hat{I} = \hat{n}_a(t) + 2\hat{n}_c(t). \quad (15)$$

Найденный интеграл движения не только воспроизводит закон сохранения энергии (13), определяя для выбранного начального условия соотношение между средним числом фотонов $\langle k \rangle$ и $\langle n \rangle$ высокочастотной и низкочастотной мод поля в виде:

$$\langle k \rangle = \frac{2|\alpha|^2 - \langle n \rangle}{2}, \quad (16)$$

но и дает возможность получить для любого момента времени дисперсию суммы чисел фотонов в двух модах, которая определяется начальной дисперсией числа фотонов входного высокочастотного поля:

$$D_{n+2k} = 4|\alpha|^2. \quad (17)$$

Соотношения (16) и (17) показывают, что двойное распределение по числу фотонов в полевых модах будет иметь анти-диагональную структуру с характерной шириной, определяемой из (17). Это подтверждает и представленное на рис. 3 полученное численно двумерное распределение по числу фотонов для момента времени, соответствующий «плато». Действительно, распределение имеет анти-диагональный вид с широким разбросом по номерам, квазилинейчатые структуры в распределении, подчиняющиеся закону (16), исходя из четных высоких номеров n , соответствующих вакууму в высокочастотном поле.

Представленное на рис. 3 распределение позволяет детально проанализировать статистические характеристики возникающих «квазистационарных» состояний поля во время установления баланса между процессами генерации фотонов в рассматриваемых полевых модах. Так, для низкочастотного поля в распределении по числу фотонов задействованы лишь четные номера состояний, при этом для низких фоковских состояний характерен спад вероятности с увеличением номера состояния. Таким образом, распределение

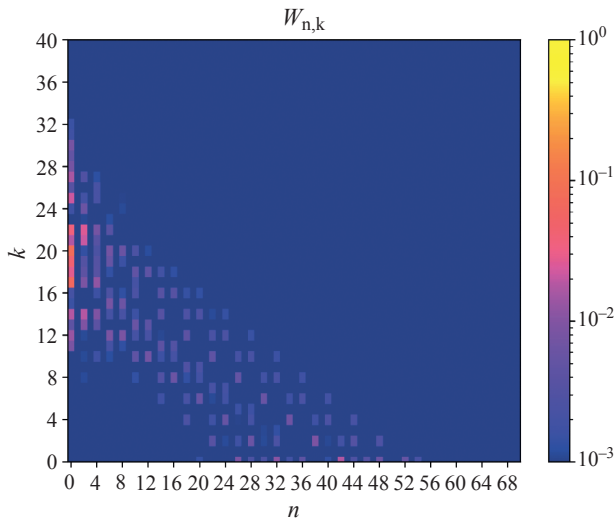


Рис. 3. 2D-распределение вероятности нахождения n фотонов в низкочастотной и k фотонов в высокочастотной моде поля в случае начального состояния $\psi_{\text{in}_3} = |0\rangle_a |\alpha\rangle_c$, где $|\alpha|^2 = 20$ для $t = 6$.

низкочастотного поля аналогично распределению для сжатого состояния [2, 16, 17]. Тем не менее, для высоких номеров, соответствующих основаниям анти-диагоналей на рис. 3, возникают локальные пики вероятности. Что касается статистики фотонов высокочастотного поля, то, с одной стороны, распределение Пуассона, соответствующее начальному состоянию (9), сильно деформируется, однако при этом его очертания в изначальной окрестности номеров все же заметны. С другой стороны, наблюдается сильное проявление вакуума, а также низких фокковских состояний с четными номерами. Такое формирование квазистационарных состояний и есть проявление особенностей установления баланса между процессами генерации параметрического излучения и второй гармоники.

Отметим, что, как и можно было ожидать, распределение, представленное на рис. 3, однозначно свидетельствует о формировании перепутанного двумодового полевого состояния, которое не может быть представлено в виде произведения векторов состояний в отдельных модах. Для анализа квантовых корреляций в системе был рассчитан параметр Шмидта (10), который показал, что моды в процессе нелинейного взаимодействия характеризуются высокой степенью запутывания вплоть до тех пор, пока в системе не наступит баланс. В этом случае параметр Шмидта выходит на конкретное значение, примерно равное 5, в окрестности которого осциллирует с малой амплитудой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, изучена динамика взаимного влияния процессов генерации второй гармоники и параметрического излучения, одновремен-

но происходящих в нелинейной среде. Продемонстрирован эффект истощения квантовой накачки при сравнении динамики среднего числа фотонов в низкочастотной моде, в случае квантовой и классической высокочастотной накачки. Обнаружено квазипериодическое формирование «плато» на зависимостях средней энергии в высокочастотном и низкочастотном полях от времени, причем в данном режиме среднее число фотонов в каждой из полевых мод практически не меняется со временем. Продемонстрировано формирование квазистационарного двумодового полевого состояния, возникающего за счет установления баланса между рассматриваемыми процессами, и выявлены его статистические характеристики. Показано, что в процессе взаимодействия полевые моды оказываются сильно перепутаны, причем максимальная перепутанность достигается именно для формирующегося квазистационарного двумодового полевого состояния в режиме баланса энергии между двумя рассматриваемыми нелинейными процессами.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (грант № 075-15-2024-538) и при поддержке фонда «Базис» (грант № 24-2-1-24-1). Исследование выполнено в рамках Программы развития Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Фотонные и квантовые технологии. Цифровая медицина».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Klyshko D.N.* Photons and nonlinear optics. N.Y.: Gordon and Breach, 1988.
2. *Захаров Р.В., Тихонова О.В.* // УФН. 2023. Т. 193. № 4. С. 406; *Zakharov R.V., Tikhonova O.V.* // Phys. Usp. 2023. V. 66. No. 4. P. 381.
3. *Agafonov I.N., Chekhova M.V., Leuchs G.* // Phys. Rev. A. 2010. V. 82. Art. No. 011801.
4. *Iskhakov T., Chekhova M.V., Leuchs G.* // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102. Art. No. 183602.
5. *Spasibko K.Yu., Iskhakov T.Sh., Chekhova M.V.* // Opt. Express. 2012. V. 20. Art. No. 7507.
6. *Chekhova M.V., Leuchs G., Żukowski M.* // Opt. Commun. 2015. V. 337. P. 27.
7. *Брянцев Б.С., Калинович А.А., Захарова И.Г.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2021. Т. 85. № 1. С. 28; *Bryantsev B.S., Kalinovich A.A., Zakharova I.G.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2021. V. 85. No. 1. P. 20.
8. *Калинович А.А., Захарова И.Г., Комиссарова М.В., Сазонов С.В.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2022. Т. 86. № 1. С. 25; *Kalinovich A.A., Zakharova I.G., Komissarova M.V., Sazonov S.V.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2022. V. 86. No. 1. P. 9.
9. *Белинский А.В., Сингх Р.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2024. Т. 88. № 1. С. 40; *Belinsky A.V., Singh R.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2024. V. 88. No. 1. P. 30.

10. *Spasibko K.Yu., Kopylov D.A., Krutyanskiy V.L. et al. // Phys. Rev. Lett. 2017. V. 119. Art. No. 223603.*
11. *Chmela P. // Opt. Quantum Electron. 1984. V. 16. P. 445.*
12. *Chmela P., Kozierowski M., Kielich S. // Czech J. Phys. 1987. V. 37. P. 846.*
13. *Nikitin S.P., Masalov A.V. // Quantum Optics. 1991. V. 3. P. 105.*
14. *Scully M.O., Zubairy M.S. Quantum optics. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.*
15. *Fedorov M.V., Volkov P.A., Mikhailova J.M. et al. // New J. Phys. 2011. V. 13. No. 8. Art. No. 083004.*
16. *Popolitova D.V., Tikhonova O.V. // Laser Phys. Lett. 2019. V. 16. Art. No. 125301.*
17. *Tereshchenko I.A., Tikhonova O.V. // Laser Phys. Lett. 2023. V. 20. Art. No. 075301.*

Quantum peculiarities of waves in the process of parametric down conversion of light

I. A. Tereshchenko^{a, b, *}, O. V. Tikhonova^{a, b, c}

^a*Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
Moscow, 119991 Russia*

^b*Lomonosov Moscow State University, Skobeltsyn Scientific Research Institute of Nuclear Physics,
Moscow, 119234 Russia*

^c*Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, 125009 Russia*

^{*}*e-mail: tereshchenko.ia19@physics.msu.ru*

We analyzed the mutual influence of simultaneous processes of second harmonic generation and parametric down conversion within the framework of a fully quantum approach. The effect of depletion of quantum pumping has been revealed. The effect of establishing a balance between the processes under consideration and achieving an equilibrium number of photons in the field modes is found. The generation of a strongly entangled two-mode field is demonstrated.

Keywords: quantum optics, non-classical light, parametric down conversion, squeezed vacuum, second harmonic generation, entangled field state

УДК 535-14

О ВОЗМОЖНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УСИЛЕНИЯ ТЕРАГЕРЦОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛАСТИНЕ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО КВАРЦА В ПОЛЕ ВОЛНЫ НАКАЧКИ

© 2025 г. И. И. Казаков*, М. С. Гусельников, С. А. Козлов

*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»,
Санкт-Петербург, Россия*

**e-mail: ikazzakov@yandex.ru*

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

Теоретически изучена возможность использования нелинейных интерферометров Фабри–Перо для дифференциального усиления терагерцового излучения в поле волны накачки той же частоты. Показано, что в беззеркальном нелинейном интерферометре Фабри–Перо, состоящем из пластины кристаллического кварца, коэффициент отражения «зеркал» которого определяется только френелевским отражением, режим максимального дифференциального усиления для излучения с центральной частотой 1 ТГц возможно наблюдать при толщинах рабочей среды порядка 1 мм и интенсивностях излучения порядка 10^8 Вт·см⁻².

Ключевые слова: нелинейный интерферометр Фабри–Перо, терагерцовый спектральный диапазон, беззеркальный интерферометр, кристаллический кварц, оптический транзистор, дифференциальное усиление сигнала

DOI: 10.31857/S0367676525010107, EDN: DBAFLS

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейное пропускание интерферометров, заполненных различными оптическими средами, в поле интенсивного света было экспериментально продемонстрировано еще в 1970-е годы [1]. Особое внимание исследователей привлекли гистерезис и бистабильные и мультистабильные режимы пропускания нелинейных интерферометров. Эти явления вызвали большой интерес не только из-за их фундаментальной значимости, но и из-за вдохновляющих перспектив практического применения для управления «светом с помощью света» (см., например, обзор более тысячи публикаций в монографии [2]). Было показано, что большое значение для приложений имеют интерферометры, заполненные материалами, которые характеризуются высокой и малоинерционной нелинейностью оптических характеристик. Однако материалы, время нелинейного отклика которых соответствовало бы субпикосекундному диапазону, конкурентному для создания устройств управления параметрами излучения в сравнении с электронными аналогами, и нелинейность которых при этом наблюдалась бы при относительно невысоких интенсивностях излучения, найдены

тогда не были [3]. Это не позволило реализовать многообещающие научные проекты, такие как, например, создание чисто оптических сверхбыстродействующих цифровых вычислительных систем [4].

Недавнее обнаружение у ряда сред в терагерцовом (ТГц) спектральном диапазоне гигантской и одновременно малоинерционной нелинейности показателя преломления колебательной природы, в миллионы раз превосходящей нелинейность этих сред в видимом и ближнем ИК диапазонах [5–13], вновь привлекает внимание к возможности создания разнообразных систем сверхбыстрого управления «светом с помощью света», но теперь в ТГц спектральном диапазоне [14, 15].

Важной особенностью многих оптических сред в ТГц спектральном диапазоне является не только высокая нелинейность показателя преломления, но и значительная величина его линейной части. Это позволяет рассматривать нелинейные интерферометры Фабри–Перо в их простейшем виде кристаллической пластины, для которой френелевское отражение вполне позволяет наблюдать значимые эффекты многолучевой интерферометрии без напыления зеркал на грани пластины.

Настоящая работа посвящена анализу возможности использования беззеркальных нелинейных интерферометров Фабри–Перо для сверхбыстрого дифференциального усиления ТГц излучения в поле волны накачки той же частоты. Под дифференциальным усилением в статье мы понимаем большое увеличение интенсивности выходного сигнала ΔI_{out} при малом увеличении интенсивности сигнала на входе в нелинейный интерферометр ΔI_{in} . Энергия, необходимая для усиления сигнала, поступает из волны накачки той же частоты. Высокоэффективным дифференциальное усиление полагаем, когда $\Delta I_{\text{out}} \gg \Delta I_{\text{in}}$.

В работе показано, что для наблюдения в нелинейном интерферометре Фабри–Перо режима максимального нелинейного усиления любого сигнала, в том числе терагерцового, необходимо, чтобы геометрическая толщина рабочей среды и интенсивность излучения на входе в интерферометр принимали фиксированные дискретные значения, которые определяются френелевским коэффициентом отражения среды и коэффициентом ее нелинейного показателя преломления. Расчетами продемонстрировано, что в кристаллическом кварце, который обладает гигантской и малоинерционной нелинейностью показателя преломления в ТГц диапазоне, режим дифференциального усиления для излучения с центральной частотой 1 ТГц возможно наблюдать при толщинах порядка 1 мм и интенсивностях порядка $10^8 \text{ Вт}\cdot\text{см}^{-2}$.

БИСТАБИЛЬНОСТЬ И УСИЛЕНИЕ В НЕЛИНЕЙНОМ ИНТЕРФЕРОМЕТРЕ ФАБРИ–ПЕРО

Функция пропускания нелинейного интерферометра Фабри–Перо, состоящего из двух плоскопараллельных зеркал, между которыми заключена оптическая среда, в случае нормального падения излучения на интерферометр, имеет вид [2]

$$I_t = \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \left(\frac{2\pi L}{\lambda} n_0 + \frac{3}{2} \left(\frac{1+R}{1-R} \right) \left(\frac{2\pi L}{\lambda} \right) n_2 I_t \right)}, \quad (1)$$

где I_0 и I_t — интенсивности излучения на входе и выходе из интерферометра, соответственно, λ — длина волны излучения, L — геометрическая толщина оптической среды интерферометра, n_0 — ее линейный показатель преломления, n_2 — коэффициент нелинейного показателя преломления среды, R — коэффициент отражения зеркал интерферометра.

Формула (1) справедлива и для описания пропускания беззеркального интерферометра, в котором отражение падающего излучения происходит не от зеркал, а от границы раздела оптической среды интерферометра и воздуха. В таком случае ко-

эффициент отражения R рассчитывается по формулам Френеля и зависит только от показателя преломления среды. Впервые такой нелинейный беззеркальный интерферометр был экспериментально рассмотрен в 1979 году для монохроматического излучения ближнего ИК диапазона спектра [16].

На рис. 1 в логарифмическом масштабе изображена рассчитанная по формуле (1) кривая пропускания излучения частоты 1 ТГц беззеркальным нелинейным интерферометром Фабри–Перо в виде пластинки из кристаллического кварца толщиной $L = 1.013 \text{ мм}$ (показатель преломления $n_0 = 2.1$ и, соответственно, коэффициент френелевского отражения $R = 0.126$). При входной интенсивности большей значения $1 \cdot 10^8 \text{ Вт}\cdot\text{см}^{-2}$ нелинейное пропускание резко увеличивается, превышая значение, которое было бы при линейной рефракции. В этом диапазоне входных интенсивностей возможна реализация режима дифференциального усиления слабого сигнала той же частоты (смотри вставку на рисунке). Иногда этот режим также называют «транзисторным» в силу сходства кривой пропускания интерферометра при дифференциальном усилении входного излучения в поле волны накачки с выходной характеристикой биполярного транзистора. При интенсивности порядка $3 \cdot 10^8 \text{ Вт}\cdot\text{см}^{-2}$ и выше в функции пропускания интерферометра наблюдается бистабильность пропускания, когда одному значению интенсивности на входе в интерферометр соответствует два значения на выходе из него (строго говоря, одному значению входной интенсивности на кривой пропускания соответствует три значения, но одно из них — среднее — неустойчиво и не реализуется на практике [2]). Важно отметить, что режимы бистабильного пропускания возникают после

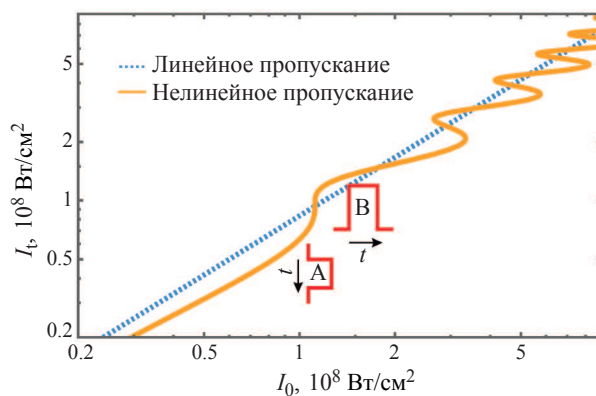


Рис. 1. Зависимость интенсивности излучения с частотой 1 ТГц на выходе из пластины кристаллического кварца толщиной 1.013 мм от интенсивности излучения на входе в пластину (сплошная оранжевая кривая). Вставка иллюстрирует возможность использования пластины кристаллического кварца для усиления входного сигнала той же частоты (А — временной профиль входного сигнала, В — выходного). Синей пунктирной линией приведен вид линейного пропускания.

«транзисторного» режима. В этом смысле точка, где наблюдается максимальное усиление, является пороговой точкой и для наблюдения бистабильности. Однако, например, при несколько большей толщине пластинки кристаллического кварца $L = 1.063$ мм в кривой пропускания нелинейного интерферометра режим дифференциального усиления отсутствует, и наблюдается только режим бистабильности. Математически условия наличия в функции пропускания нелинейного интерферометра Фабри–Перо режима дифференциального усиления задаются выражениями [2]

$$\frac{dI_0}{dI_t} = 0, \quad \frac{d^2 I_t}{dI_t^2} = 0. \quad (2)$$

Для дальнейшего анализа и вычислений удобно ввести нормированные переменные:

$$\begin{cases} \tilde{L} = \frac{2\pi L}{\lambda} n_0, \\ \tilde{I}_t = \frac{3}{2} \frac{1+R}{1-R} \frac{n_2}{n_0} \tilde{L} I_t, \\ \tilde{I}_0 = \frac{3}{2} \frac{1+R}{1-R} \frac{n_2}{n_0} \tilde{L} I_0. \end{cases} \quad (3)$$

В безразмерных переменных (3) функция пропускания (1) принимает более простой вид

$$\tilde{I}_0 = \tilde{I}_t \left[1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(\tilde{I}_t + \tilde{L}) \right]. \quad (4)$$

Подстановка уравнения (4) в выражения (2) в приближении отсутствия зависимости коэффициента отражения от интенсивности приводит к системе из двух линейно независимых уравнений

$$\begin{cases} \frac{1+R^2}{2R} - \cos 2(\tilde{I}_t + \tilde{L}) + 2\tilde{I}_t \sin 2(\tilde{I}_t + \tilde{L}) = 0, \\ \sin 2(\tilde{I}_t + \tilde{L}) + \tilde{I}_t \cos 2(\tilde{I}_t + \tilde{L}) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Система (5) сводится к уравнению

$$\cos 2(\tilde{I}_t + \tilde{L}) = f_{\pm}(R), \quad (6)$$

где

$$f_{\pm}(R) = -\frac{R^2 + 1 \pm \sqrt{R^4 + 34R^2 + 1}}{4R}. \quad (7)$$

Так как косинус в (6) не может по модулю превышать единицу, то решению уравнения (6) удовлетворяет только корень $f_-(R)$. Далее для удобства переобозначим $f_-(R) \equiv f(R)$. Тогда решение системы (5) относительно неизвестных \tilde{I}_t и \tilde{L} представляется в виде

$$\begin{cases} \tilde{I}_t = f(R)^{-1} \sqrt{1 - f(R)^2}, \\ \tilde{L} = -f(R)^{-1} \sqrt{1 - f(R)^2} - \frac{1}{2} \arccos f(R) + \pi m, \end{cases} \quad (8)$$

где m — целое число.

Из выражений (8) для значений нормированных выходной интенсивности излучения \tilde{I}_t и толщины рабочей среды интерферометра \tilde{L} , при которых возможно наблюдение дифференциального

усиления, получаем соотношения ненормированных величин

$$\begin{cases} I_0 = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{1}{Ln_2} \Phi(R), \\ L = \frac{\lambda}{2\pi n_0} (\Psi(R) + \pi m), \end{cases} \quad (9)$$

где

$$\Phi(R) = \frac{2}{3} \frac{1-R}{1+R} \frac{\sqrt{1 - (f(R))^2}}{f(R)} \left(1 + \frac{2R(1-f(R))}{(1-R)^2} \right), \quad (10)$$

$$\Psi(R) = -\frac{\sqrt{1 - (f(R))^2}}{f(R)} - \frac{1}{2} \arccos f(R). \quad (11)$$

Важно отметить, выражение $\Phi(R)$ в (9) имеет вид интеграла распада, который дает оценку условий начала в нелинейной среде мелкомасштабной самофокусировки излучения [17] и, соответственно, границ применимости используемого в настоящей статье приближения плоской поперечно однородной волны. Оценки известны [18]: эффект пространственной неустойчивости плоской поперечно однородной волны начинает проявляться в нелинейной среде при значении интеграла распада больше π .

ПЛАСТИНА КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО КВАРЦА В ПОЛЕ ТГЦ ИЗЛУЧЕНИЯ

В экспериментальной работе [12] было показано, что кристаллический кварц обладает в ТГц диапазоне коэффициентом нелинейного показателя преломления $n_2 = 5 \cdot 10^{-10} \text{ см}^2 \cdot \text{Вт}^{-1}$, что примерно в миллион раз больше, чем его значение для кристаллического кварца в оптическом диапазоне [19]. Помимо гигантской и малоинерционной нелинейности колебательной природы кристаллический кварц обладает в ТГц диапазоне хорошей прозрачностью и относительно большим линейным показателем преломления $n_0 = 2.1$ (на длине волны 1 ТГц), что дает значение коэффициента отражения френелевских «зеркал» $R = 0.126$. Важно, что при таком относительно небольшом R интеграл распада $\Phi(R)$ имеет значение меньше π , то есть пластину кристаллического кварца можно рассмотреть в качестве беззеркального интерферометра Фабри–Перо в поле плоской монохроматической ТГц волны.

На рис. 2 приведены результаты расчета по формулам (9) значений толщины пластины кристаллического кварца и интенсивности ТГц излучения на входе в эту пластину, необходимых для наблюдения максимального дифференциального усиления слабого сигнала в поле интенсивной волны накачки на частоте 1 ТГц. Из рисунка видно, что допустимые толщины и интенсивности принимают значения из дискретного набора. Дискретность значений обусловлена целочисленным параметром m , входящим в выра-

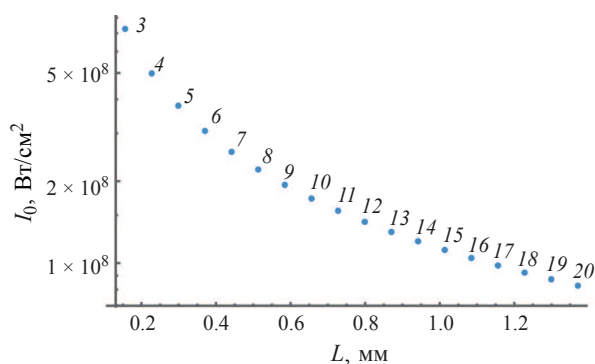


Рис. 2. Значения интенсивности входного излучения I_0 на центральной частоте 1 ТГц и соответствующей ей толщины пластины кристаллического кварца L , при которых наблюдается максимальное дифференциальное усиление сигналов. Целые числа обозначают порядковый номер значений толщины пластины, удовлетворяющих условию максимального усиления.

жения (9). Каждому значению m соответствует своя толщина оптической среды и входная интенсивность. При этом, чем больше толщина пластины кварца, тем меньшая входная интенсивность требуется для наблюдения эффекта усиления.

При $m = 15$ требуемая толщина пластины кварца равна $L(m = 15) = 1.013$ мм, а входная интенсивность $I_0(m = 15) = 1.1 \cdot 10^8$ Вт·см⁻². Именно при этих значениях мы наблюдали максимальное дифференциальное усиление на рис. 1.

Оценим, дифференциальное усиление какого порядка возможно достичь в нелинейном беззеркальном интерферометре Фабри–Перо на основе кристаллического кварца. Для этого представим, что на нелинейный интерферометр падает прямоугольный сигнал подобно тому, как это изображено на рис. 1. Предположим, что минимальная ненулевая интенсивность такого импульса составляет $I_{\min} = 0.9I_0(m)$, а максимальная — $I_{\max} = 1.1I_0(m)$ и $\Delta I_0 = I_{\max} - I_{\min} = 0.2I_0(m)$. В результате прохождения импульса через интерферометр максимальное и минимальное значения его выходной интенсивности изменятся, и их разница составит ΔI_t . На рис. 3 наглядно изображены рассматриваемые диапазоны для случая $I_0 = I_0(m = 15)$. В таком случае $\Delta I_0 = 2.236 \cdot 10^7$ Вт·см⁻² и $\Delta I_t = 5.890 \times 10^7$ Вт·см⁻². Отношение $\frac{\Delta I_t}{\Delta I_0}$ в общем случае непостоянно. При малых m , когда $\frac{dI_0(m)}{dm}$ велико, сильно меняется и $\frac{\Delta I_t}{\Delta I_0}$. При больших m производная $\frac{dI_0(m)}{dm}$ мала, поэтому и $\frac{\Delta I_t}{\Delta I_0}$ почти постоянно. Например $\frac{\Delta I_t(m=15)}{\Delta I_0(m=15)} \approx \frac{\Delta I_t(m=20)}{\Delta I_0(m=20)} \approx 2.63$, в то время как $\frac{\Delta I_t(m=5)}{\Delta I_0(m=5)} \approx 2.4$.

Важным аспектом при экспериментальном использовании усиления сигнала в нелинейном ин-

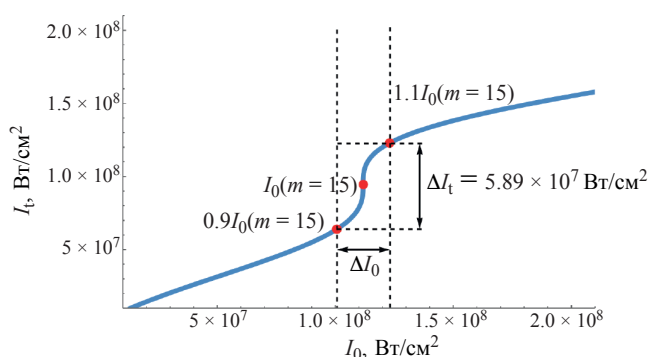


Рис. 3. Модель усиления сигнала в нелинейном интерферометре на основе пластины кристаллического кварца. ΔI_0 — амплитуда входного сигнала, ΔI_t — амплитуда выходного сигнала.

терферометре Фабри–Перо является чувствительность режима максимального дифференциального усиления к изменению параметров интерферометра. Рис. 4 иллюстрирует чувствительность интерферометров к изменению толщины оптической среды. Видно, что при изменении толщины на 1 мкм в беззеркальном интерферометре с френелевским коэффициентом отражения $R = 0.126$ точка максимума дифференциального усиления сдвигается на 2% по входной интенсивности. В то же время в интерферометре с зеркалами с коэффициентом отражения $R = 0.99$ при изменении толщины на 0.1 мкм пропускание интерферометра меняется радикально и наблюдение режима дифференциального усиления становится невозможным. Таким образом, беззеркальные интерферометры имеют преимущество перед интерферометрами с зеркалами с точки зрения требуемой точности обеспечения толщины оптической среды для наблюдения эффекта максимального дифференциального усиления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе, нами продемонстрирована возможность использования пластины кристаллического кварца в качестве беззеркального нелинейного интерферометра Фабри–Перо в поле излучения ТГц диапазона. Определены условия наблюдения дифференциального усиления ТГц излучения в поле волны накачки той же частоты таким интерферометром. Показано, что для реализации усиления толщина оптической среды интерферометра и величина излучения на входе в интерферометр должны принимать конкретные дискретные значения, определяемые значением коэффициента отражения пластины и коэффициентом ее нелинейного показателя преломления.

Показано, что в кристаллическом кварце, который обладает гигантской и малоинерционной нелинейностью показателя преломления в ТГц диапазоне, режим максимального нелинейного усиления для излучения с центральной

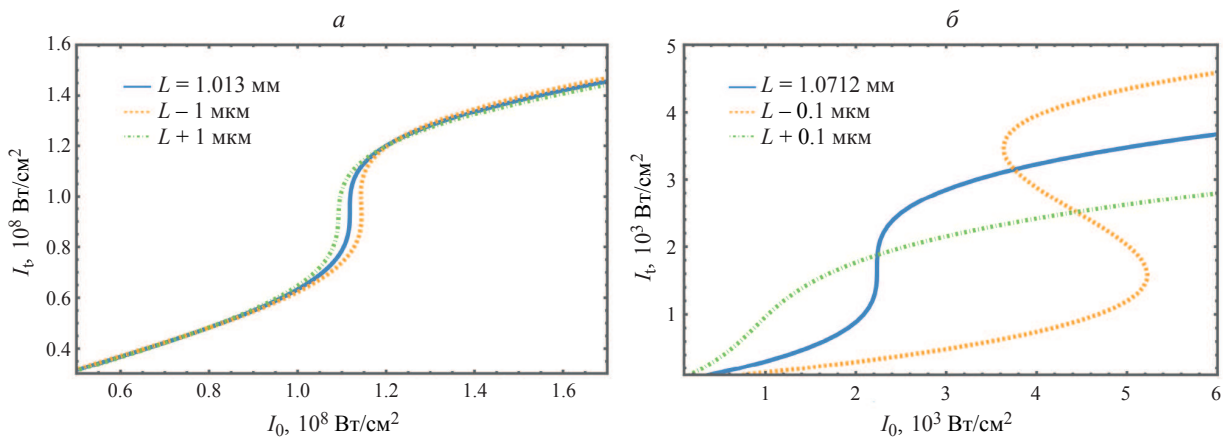


Рис. 4. Функция пропускания нелинейного интерферометра Фабри–Перо с рабочей средой из кристаллического кварца: без зеркал ($R = 0.126$) (а) и с зеркалами ($R = 0.99$) (б). Сплошные кривые соответствуют толщине оптической среды, необходимым для наблюдения эффекта максимального дифференциального усиления. Штриховые и штрихпунктирные кривые соответствуют малым отклонениям в толщине от значений, при которых наблюдается максимальное дифференциальное усиление.

частотой 1 ТГц возможно наблюдать при толщинах порядка 1 мм и интенсивностях порядка 10^8 Вт·см $^{-2}$. Оценки величины дифференциального усиления излучения интерферометром по изменению разницы между максимальным и минимальным значениями интенсивности ΔI_t импульса на выходе из интерферометра по отношению к изменению разницы между максимальным и минимальным значениями интенсивности ΔI_0 импульса на входе в интерферометр показали, что для кристаллического кварца отношение ΔI_t к ΔI_0 для всех толщин, удовлетворяющих условию максимального усиления, варьируется в диапазоне 2.4–2.6 единиц.

Выявлено, что беззеркальные интерферометры обладают меньшей чувствительностью к изменению толщины оптической среды, чем интерферометры с зеркалами. Благодаря этому беззеркальные интерферометры становятся перспективными для создания на их основе оптических устройств.

Полученные результаты указывают на то, что нелинейный интерферометр Фабри–Перо можно использовать для управления излучением ТГц диапазона за счет дифференциального усиления, в том числе в качестве оптического транзистора при использовании высокоинтенсивного излучения и слабого управляющего импульса. Приведенные в настоящей работе оценки могут оказаться полезными при разработке оптических транзисторов в ТГц спектральном диапазоне.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках гранта № 24-22-00084.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Луговой В.Н. // Квант. электрон. 1979. Т. 6. № 10. С. 2053; *Lugovoi V.N.* // *Sov. J. Quantum Electron.* 1979. V. 9. No. 10. P. 1207.
2. *Gibbs H.* Optical bistability: controlling light with light. Elsevier, 2012. 471 p.
3. Ахманов С.А., Выслух В.А., Чиркин А.С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. М: Наука, 1988. 310 с.
4. *Miller D.A.B.* // *Nature Photon.* 2010. No. 4. P. 3.
5. *Тыркин А.Н., Мельник М.В., Жукова М.О. et al.* // *Opt. Express.* 2019. V. 27. No. 8. P. 10419.
6. *Francis K.J.G., Chong M.L.P., E Y., Zhang X.-C.* // *Opt. Express.* 2020. V. 45. No. 20. P. 5628.
7. *Novelli F., Ma C.-Y., Adhlakha N. et al.* // *Appl. Sci.* 2020. V. 10. No. 15. P. 5290.
8. *Zhukova M.O., Melnik M.V., Vorontsova I.O. et al.* // *Photonics.* 2020. V. 7. No. 4. P. 98.
9. *Тыркин А.Н., Жукова М.О., Мельник М.В. et al.* // *Phys. Rev. Appl.* 2021. V. 15. No. 5. Art. No. 054009.
10. *Artser I.R., Melnik M.V., Ismagilov A.O. et al.* // *Sci. Reports.* 2022. V. 12. No. 1. Art. No. 9019.
11. *Wu Q., Huang Y., Lu. Y. et al.* // *Light: Sci. Appl.* 2023.
12. *Zibod S., Rasekh P., Yildirim M. et al.* // *Adv. Opt. Mater.* 2023. V. 11. No. 15. Art. No. 2202343.
13. *Nabilkova A.O., Ismagilov A.O., Melnik M.V. et al.* // *Opt. Letters.* 2023. V. 48. No. 5. P. 1312.
14. Гусельников М.С., Жукова М.О., Козлов С.А. // *Опт. журн.* 2022. Т. 89. № 7. С. 3; *Guselnikov M.S., Zhukova M.O., Kozlov S.A.* // *J. Opt. Technol.* 2022. V. 89. No. 7. P. 371.
15. Гусельников М.С., Жукова М.О., Козлов С.А. // *Опт. и спектроск.* 2023. Т. 131. № 2. С. 287.
16. *Miller D.A.B., Smith S.D., Johnston A.* // *Appl. Phys. Lett.* 1979. V. 35. No. 9. P. 658.
17. Власов С.Н., Таланов В.И. Самофокусировка волн. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1997. 217 с.

18. *Boyd R.W.* Nonlinear optics. Elsevier, 2008. 640 p.
19. *Weber M., Milam D., Smith W.* // Opt. Engin. 1978. V. 17. No. 5. P. 463.

Differential gain of THz radiation in crystalline quartz plate in the field of pump wave

I. I. Kazakov*, M. S. Guselnikov, S. A. Kozlov

ITMO University, St. Petersburg, 197101 Russia

** e-mail: ikazzakov@yandex.ru*

The possibility to exploit nonlinear Fabry–Perot interferometers to differential gain of terahertz radiation in the field of a pump wave of the same frequency was theoretically considered. It is shown that in mirrorless nonlinear Fabry–Perot interferometer consisted of crystalline quartz plate, which reflection is determined by Fresnel reflection only, the regime of maximal differential gain of radiation with central frequency at 1 THz can be observed at thickness of working medium near 1 mm and at radiation intensity with order of magnitude at $10^8 \text{ W}\cdot\text{cm}^{-2}$.

Keywords: nonlinear Fabry–Perot interferometer, THz spectral range, mirrorless interferometer, crystalline quartz, optical transistor, differential gain

УДК 548.735.6

(2+1)D СОЛИТОННЫЕ ПАРЫ В ПЛОСКОМ КВАДРАТИЧНО-НЕЛИНЕЙНОМ КРИСТАЛЛЕ С НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

© 2025 г. Б. С. Брянецев*, А. А. Калинович

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

**e-mail: brisbryantsev@mail.ru*

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

Исследован процесс распространения и формирования импульсных пар в квадратично-нелинейном кристалле с двумя волноводами при изменении параметров, связанных с положением волноводов относительно друг друга, задержкой и соотношением фаз между импульсами. Обнаружено изменение режима распространения импульсов при сближении волноводов и зависимость характера взаимодействия между импульсами от начального соотношения фаз.

Ключевые слова: оптические солитоны, квадратичная нелинейность, двумерные импульсы, неоднородность, нелинейная оптика

DOI: 10.31857/S0367676525010115, **EDN:** DBAFIE

ВВЕДЕНИЕ

Одной из наиболее интригующих областей оптических исследований является нелинейная оптика, где солитоны занимают особое место. Оптический солитон представляет собой уединенный лазерный импульс определенной длительности (от нано- до фемтосекунд) обладающий несущей частотой видимого диапазона и способный распространяться в нелинейной диспергирующей среде без изменения своей формы на большие расстояния. Особый интерес вызывают оптические солитоны в керровской среде, которая описывается нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) обладающим солитонным решением [1]. Световые пули или многомерные солитоны в однородной керровской среде испытывают коллапс самофокусировки при превышении определенного порога, связанного с амплитудой импульсов. В частности, двумерное НУШ приводит к возникновению так называемого солитона Таунса [2], который является вырожденным в свободном пространстве в том смысле, что он возникает только при одном значении энергии. С физической точки зрения Таунсовский солитон представляет собой нестабильное состояние, которое разделяет два режима распространения света: распыливание импульса-пучка, вызванное дифракцией, и его неограниченная самофокусировка из-за нелинейности [3, 4]. Это по-

казывает, что нелинейность важна для образования солитонов, но не гарантирует их устойчивость.

Удалось найти множество конфигураций оптических сред, в которых солитоны стабильны. Эти конфигурации включают в себя материалы, учитывающие более высокие порядки нелинейности и дисперсии [5], среды с комбинированным типом нелинейности [6], а также среды с неоднородностями, которые могут компенсировать дифракционное распыливание [7]. Солитоны также удалось получить в искусственной оптической среде, описываемой дробным уравнением Шредингера [8]. Некоторым результатам, связанным с рассмотрением дробных сред, посвящен мини-обзор [9]. Так как неограниченная самофокусировка является основным препятствием для формирования солитонов в керровской среде, были также рассмотрены квадратичные нелинейные среды [10], в которых коллапс отсутствует. Другим интересным подходом к получению солитонов является учет дисперсии связи между плоскими волноводами с керровской нелинейностью в качестве аналога спин-орбитальной связи в бозе-эйнштейновском конденсате [11].

В нашей работе мы рассмотрели квадратично-нелинейную среду с двумя плоскими волноводами. С помощью изменения параметров, связанных с положением и размером волноводов, а также из-

менением параметров пробного решения, мы хотели добиться стабильного распространения импульсной пары на большие расстояния или, другими словами, получить солитонное решение. Как уже было упомянуто выше, мы рассматриваем распространение пары импульсов пучков, начальными параметрами которых можно управлять. Рассмотрение проводится в режиме генерации второй гармоники (ГВГ) при нормальной дисперсии, где каждому импульсу из пробного решения отведен собственный волновод со специально определенными характеристиками. Связь между ними осуществляется за счет части энергии импульсов-пучков, которая может проникать в область между волноводами. Данная работа опирается на результаты ранее проведенных исследований [12, 13].

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Описание процесса генерации второй оптической гармоники проводится в квазиоптическом приближении с зависимостью линейной восприимчивости среды от координаты $\chi_\omega(r_\perp)$ в виде: $\chi_\omega^{(0)} [1 + f_\omega(r_\perp)]$, где r_\perp — радиус-вектор, перпендикулярный центральной оси волновода, $\chi_\omega^{(0)}$ — линейная восприимчивость среды в центре поперечного сечения одного из волноводов, а $f_\omega(r_\perp)$ — безразмерная функция, которая описывает профиль волновода. В этом случае система уравнений для описания процесса ГВГ в системе из двух планарных волноводов принимает вид:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{\beta_\omega}{2} \frac{\partial^2 A_1}{\partial \tau^2} - \alpha_\omega A_1^* A_2 e^{i(2k_1 - k_2)z} = \\ = \omega g_1(x) A_1 + \frac{c}{2n_\omega^{(0)} \omega} \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}, \\ i \frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{\beta_{2\omega}}{2} \frac{\partial^2 A_2}{\partial \tau^2} - \alpha_{2\omega} A_1^2 e^{-i(2k_1 - k_2)z} = \\ = 2\omega g_2(x) A_2 + \frac{c}{4n_{3\omega}^{(0)} \omega} \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $A_{1,2}$ — амплитуда огибающей первой и второй гармоники, соответственно, τ — локальное время, которое равно $\tau = t - \frac{z}{2} \left(\frac{1}{v_g^{(\omega)}} + \frac{1}{v_g^{(2\omega)}} \right)$, где t — время, z — направление распространения, x — поперечная координата, $v_g^{(\omega, 2\omega)}$ — групповые скорости для соответствующих гармоник в центре волновода, причем $|v_g^{(2\omega)} - v_g^{(\omega)}| \ll v_g^{(2\omega)}, v_g^{(\omega)}$. Коэффициент $\beta_{\omega, 2\omega}$ отвечает за дисперсию групповой скорости в центре волновода, за влияние нелинейности отвечают $\alpha_\omega = \frac{2\pi\omega}{cn_\omega^{(0)}} \chi^{(2)}(2\omega, -\omega)$ и $\alpha_{2\omega} = \frac{4\pi\omega}{cn_{2\omega}^{(0)}} \chi^{(2)}(\omega, \omega)$, где $\chi^{(2)}(2\omega, -\omega), \chi^{(2)}(\omega, -\omega)$ — коэффициенты нели-

нейной восприимчивости второго порядка в центре волновода. Волновые числа для первой второй гармоник представлены $k_1 = k(\omega)$ и $k_2 = k(2\omega)$. Дифракция описывается вторым слагаемым в правой части каждого из уравнений, где $n_{\omega, 2\omega}^{(0)2}(x) = 1 + (n_{\omega, 2\omega}^{(0)2} - 1) \left(1 + f_{\omega, 2\omega}(x) \right)$ — показатели преломления гармоник, c — скорость света в вакууме. Первое слагаемое в правой части обоих уравнений отвечает за влияние неоднородности, в нем $g_{1,2}(x)$:

$$g_1(x) = \frac{n_\omega^{(0)2} - 1}{2cn_\omega^{(0)}} f_\omega(x), \quad g_2(x) = \frac{n_{2\omega}^{(0)2} - 1}{2cn_{2\omega}^{(0)}} f_{2\omega}(x),$$

где $f_{\omega, 2\omega}(x)$ — одномерная безразмерная функция, определяющая профиль волновода. В дальнейшем мы будем рассматривать случай группового и фазового синхронизма, поэтому $v_g = v_g^{(2\omega)} = v_g^{(\omega)}$ и $2k_1 = k_2$.

Для проведения численного моделирования систему требовалось обезразмерить, поэтому были введены следующие безразмерные параметры: $A_{1,2} = \bar{A}_{1,2} A_{in}$, $z = \bar{z} l_{nl}$, $x = \bar{x} R_{in}$, $\tau = \bar{\tau} \tau_{in}$, $\Delta \bar{k} = \Delta k l_{nl}$, $l_{nl} = (\alpha_\omega A_{in})^{-1}$, $a_{\omega, 2\omega} = R_{in} \bar{a}_{\omega, 2\omega}$. A_{in} — пиковая амплитуда в центре одного из волноводов, l_{nl} — нелинейная длина, равная расстоянию, на котором происходит полная перекачка энергии между гармониками, R_{in} , τ_{in} — начальный радиус и длительность импульса-пучка. Также были введены безразмерные выражения для коэффициентов из (1), отвечающих за дифракцию, дисперсию, неоднородность, нелинейность:

$$\begin{aligned} D_{x1} &= \frac{cl_{nl}}{2\omega n_\omega^{(0)} R_{in}^2}, & D_{x2} &= \frac{cl_{nl}}{4\omega n_{2\omega}^{(0)} R_{in}^2}, & D_{\tau 1} &= \frac{\beta_\omega l_{nl}}{2\tau_{in}^2}, \\ D_{\tau 2} &= \frac{\beta_{2\omega} l_{nl}}{2\tau_{in}^2}, & D_{q1} &= \frac{2\pi\omega l_{nl}}{cn_\omega^{(0)} \bar{a}_\omega^2} \chi_\omega^{(0)}, & D_{q2} &= \frac{4\pi\omega l_{nl}}{cn_{2\omega}^{(0)} \bar{a}_{2\omega}^2} \chi_{2\omega}^{(0)}, \end{aligned}$$

$\gamma = \frac{\alpha_{2\omega}}{\alpha_\omega}$. Вводя, приведенные выше безразмерные параметры, получим:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial \bar{z}} &= D_{q1} p_1(\bar{x}) \bar{A}_1 - D_{\tau 1} \frac{\partial^2 \bar{A}_1}{\partial \bar{\tau}^2} + \bar{A}_1^* \bar{A}_2 + D_{x1} \frac{\partial^2 \bar{A}_1}{\partial \bar{x}^2}, \\ i \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial \bar{z}} &= D_{q2} p_2(\bar{x}) \bar{A}_2 - D_{\tau 2} \frac{\partial^2 \bar{A}_2}{\partial \bar{\tau}^2} + \gamma \bar{A}_1^2 + D_{x2} \frac{\partial^2 \bar{A}_2}{\partial \bar{x}^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= a_{\omega, 2\omega}^{-2} \left[1 - \exp \left(-\frac{(x - x_w)^2}{a_{\omega, 2\omega}^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \exp \left(-\frac{(x + x_w)^2}{a_{\omega, 2\omega}^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Пробное решение, которое подавалось на вход среды, выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} A_1(z=0) &= E_{11} \exp \left(-(x - x_w)^2 - (\tau - \tau_{10})^2 + i\varphi_{11} \right) + \\ &+ E_{12} \exp \left(-(x + x_w)^2 - (\tau - \tau_{20})^2 + i\varphi_{12} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$A_2(z=0) = E_{21} \exp(-(x-x_w)^2 - (\tau-\tau_{10})^2 + i\varphi_{21}) + \\ + E_{22} \exp(-(x+x_w)^2 - (\tau-\tau_{20})^2 + i\varphi_{22}).$$

Здесь $E_{11,12}$ и $E_{21,22}$ определяют начальные значения амплитуды для пучков на основной и удвоенной частотах, соответственно. Параметры $\varphi_{11,12}$ и $\varphi_{21,22}$ — задают начальные соотношения фаз между импульсами, а $\tau_{10,20}$ за временную задержку между ними. За положение центров волноводов отвечает параметр x_w , который также входит в выражение для функции профилей волноводов (3).

Вид волноводной функции (3) обеспечивает минимумы показателя преломления волновода вблизи $x = \pm x_w$. Оптический пучок удерживается вблизи центра волновода, однако его хвостовые части проникают в зону между ними, обеспечивая связь пар импульсов-пучков. Характерная ширина волноводов равна $a_{\omega,2\omega}$.

Численные расчеты проводятся на основе метода, разработанного в работе [12], который обеспечивает сохранение интегралов движения, присущих системе уравнений (2). Проверка сохранения интегралов во время расчета гарантирует точность результатов.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для исследования процесса формирования и распространения импульсов-пучков в квадратично-нелинейной среде с двумя планарными волноводами нами было проведено численное моделирование системы (2) с граничным условием (4). Распространение импульсов происходило в режиме ГВГ, когда $E_{21,22} = 0$, то есть на вход подавались только пучки основной частоты. Для того чтобы проследить за влиянием начального соотношения фаз на распространение пары импульсов-пучков, мы изменяли $\varphi_{11,12}$, причем сигналы могли иметь как одинаковую фазу ($\varphi_{11} = \varphi_{12} = 0$), так и различную, когда φ_{12} плавно изменялось в диапазоне от 0 до π . Помимо этого, сигналы могли иметь временную задержку между собой, когда $\tau_{10} \neq \tau_{20}$.

Коэффициенты дифракции при расчете принимались равными $D_{x1} = 0.1$, $D_{x2} = 0.05$. Дисперсионные коэффициенты были равны $D_{\tau1} = 0.05$, $D_{\tau2} = 0.1$, что соответствует нормальной дисперсии ($D_{\tau1,2} > 0$). Коэффициент нелинейности положили равным $\gamma = 0.5$. Параметры, отвечающие за характеристики волноводов, принимались равными $a_{\omega} = a_{2\omega} = 2$, $D_{q1} = 10$, $D_{q2} = 10$. Параметр, отвечающий за положение центров волноводов x_w , мог изменяться во время расчета. Значения безразмерных параметров, задающих характеристики моделируемой среды, оставались постоянными для всех расчетов.

Основываясь на результатах работы [13], было получено солитоноподобное решение для па-

ры импульсов-пучков. Данное решение не являются в точности солитонными, поскольку не обладают постоянными характеристиками, но меняет свои пространственные и временные размеры, а также интенсивность периодически, что иногда называют «дыханием». Однако оно является локализованным, так как большая часть интенсивности ограничена в небольшой области пространства-времени.

Солитонная пара формируется не сразу, а только после завершения процесса перекачки энергии между основной и второй гармониками в каждом волноводе, что примерно соответствует прохождению парой сигналов расстояния, равного 20 нелинейным длинам. Полученная «дышащая» импульсная пара распространялась на расстояние в 600 нелинейных длин с сохранением пространственно-временной формы, что можно пронаблюдать на рис. 1а. Профиль сигнала на левой границе моделируемого кристалла сохраняет свою форму и в конце дистанции распространения, но теряет в интенсивности, что можно увидеть на рис. 1з–1е. Однако основная потеря интенсивности происходит на начальном этапе, когда происходит перекачка энергии во вторую гармонику, и кроме того, часть энергии, еще не захваченная в солитон, отделяется от основного пучка. Сравнение профилей на дистанциях $z = 100$ и $z = 200$ (рис. 1д,е) показывает, что на этом этапе максимальная интенсивность не только не упала, но и несколько возросла за счет фокусировки. Анализ пиковой интенсивности на рис. 1а показывает, что данное солитоноподобное решение в целом сохраняется вплоть до $z = 600$.

Также стоит отметить, что в области между волноводами наблюдается ненулевой уровень интенсивности на протяжении всей дистанции распространения. Как было упомянуто ранее, часть энергии просачивается сквозь стенки волновода, что говорит о взаимодействии импульсов в отдельных волноводах между собой. На рис. 1б и 1в показана зависимость положения пространственного и временного центров пары импульсов-пучков от дистанции распространения. Видно, что на рис. 1в положение максимумов импульсов вдоль оси вплоть до x осциллирует с небольшой амплитудой около центра волновода. Временные максимумы вместе с распространением отдаляются от заданного начального положения, что значит, что импульсы отталкиваются друг от друга.

На рис. 2 показаны данные расчетов для пары импульсов, запущенных с задержкой $\tau_{10} = 0.5$, $\tau_{20} = -0.5$, где в граничном условии постепенно изменяется фаза импульса во втором волноводе φ_{12} в диапазоне от 0 до π с шагом 0.1π . Изменение фазы не влияет на дистанцию распространения, пара импульсов распространяется стабильно на 600 нелинейных длин, как и в первом расчете для сигналов с одинаковой фазой. Влияние началь-

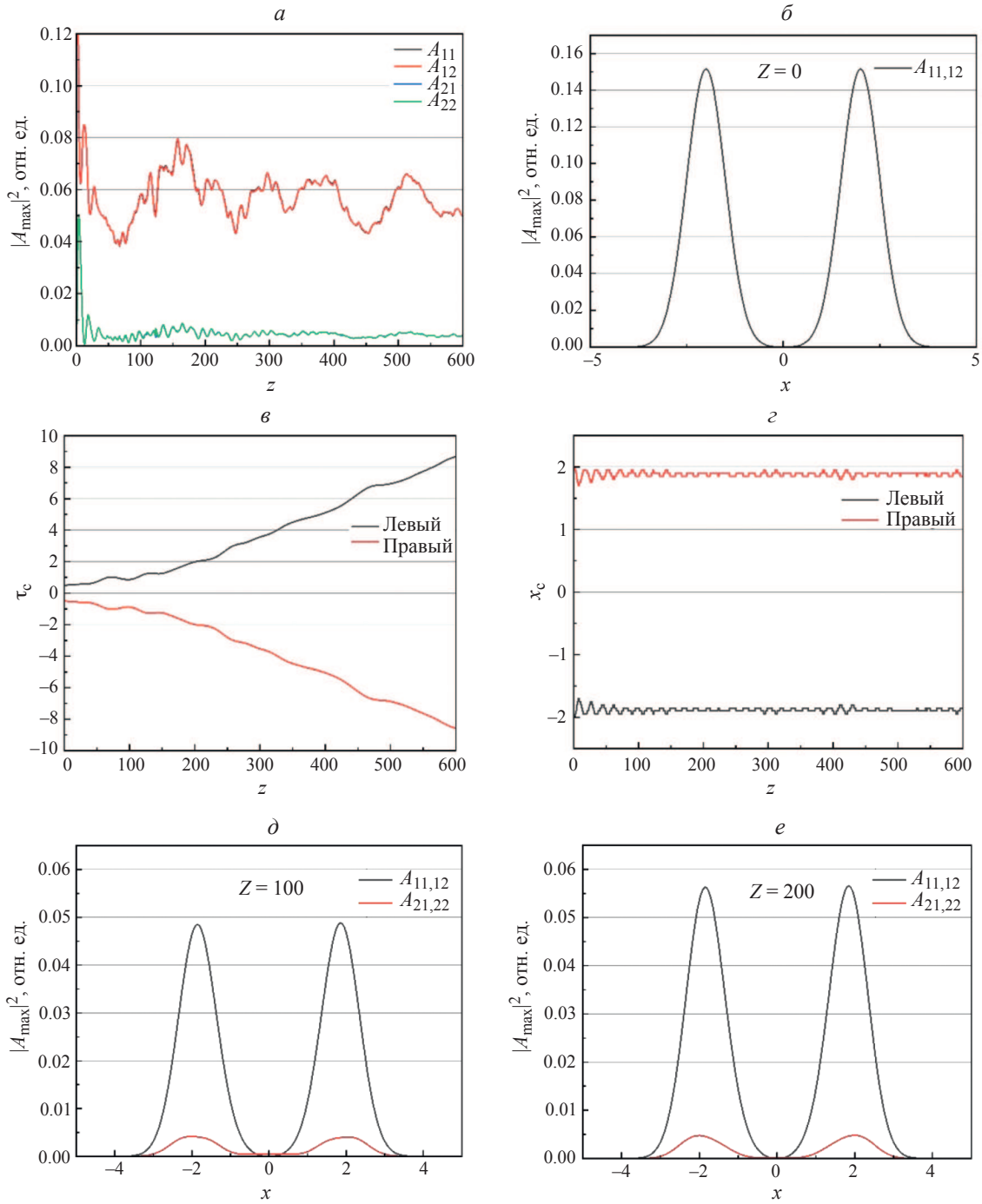


Рис. 1. Генерация пары связанных солитонов несинхронными ($\tau_{10} = -0.5$, $\tau_{20} = 0.5$) синфазными ($\varphi_{11} = \varphi_{12} = 0$) пучками основной частоты $E_{11} = 0.5$, $E_{12} = 0.5$, $E_{21} = 0$, $E_{22} = 0$. Пиковые интенсивности (а) основной частоты (черный и красный для левого и правого волноводов соответственно) и второй гармоники (синий и зеленый для левого и правого волноводов соответственно). Поперечные профили пучков при $\tau = 0$ основной частоты (красный) и второй гармоники (синий) для $z = 0$ (б), $z = 100$ (д), $z = 200$ (е). Зависимость положений пространственного (б) и временного (в) центров от дистанции распространения. Параметры волновода $x_w = 2$, $a_w = a_{2w} = 2$, $D_{q1} = 10$, $D_{q2} = 10$. Коэффициенты дифракции $D_{x1} = 0.1$, $D_{x2} = 0.05$, коэффициенты дисперсии $D_{\tau1} = 0.05$, $D_{\tau2} = 0.1$, коэффициент нелинейности $\gamma = 0.5$.

го соотношения фаз заключается в изменении характера движения временных центров импульсов, а также характера их взаимодействия, что можно увидеть на рис. 2а и 2б. При постепенном увеличении фазы φ_{12} от 0 до π импульсная пара посте-

пенно переходит от взаимного отталкивания при $\varphi_{11} = \varphi_{12} = 0$ к взаимному притяжению при $\varphi_{11} = 0$, $\varphi_{12} = \pi$. В промежуточном режиме при $\varphi_{12} \approx 0.6\pi$ временной центр осциллирует около положения равновесия до $z = 300$. После чего, в зависимости

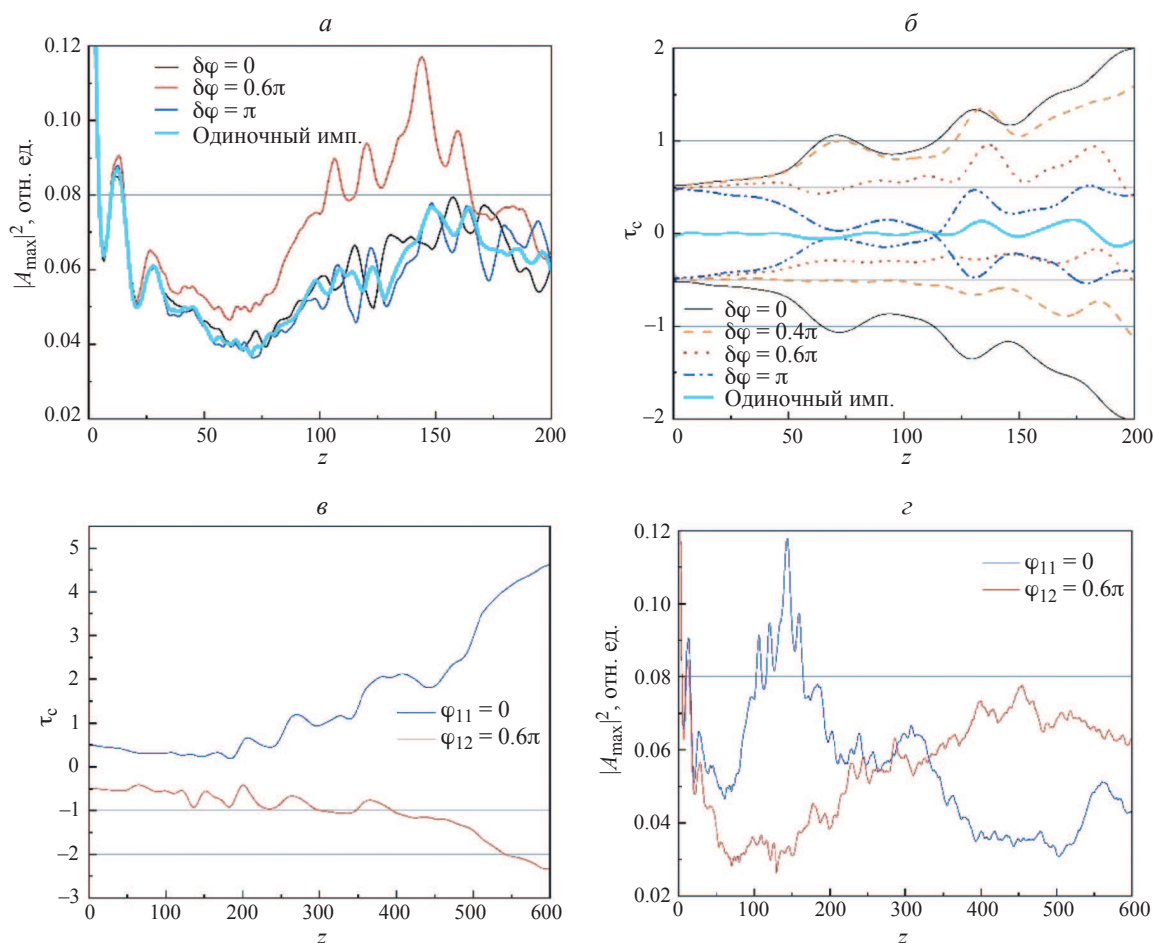


Рис. 2. Генерация пары связанных солитонов несинхронными ($\tau_{10} = -0.5$, $\tau_{20} = 0.5$) пучками основной частоты $E_{11} = 0.5$, $E_{12} = 0.5$, $E_{21} = 0$, $E_{22} = 0$. Пиковые интенсивности (а) основной частоты в правом волноводе и положение временных центров импульсной пары (б) в зависимости от расстояния z для разных начальных фаз. Пиковые интенсивности (в) пары импульсов основной частоты и положение их временных центров (г) для случая $\varphi_{11} = 0$, $\varphi_{12} = 0.6\pi$. Параметры волновода $a_\omega = a_{2\omega} = 2$, $D_{q1} = 10$, $D_{q2} = 10$. Коэффициенты дифракции $D_{x1} = 0.14$, $D_{x2} = 0.05$, коэффициенты дисперсии $D_{\tau1} = 0.05$, $D_{\tau2} = 0.1$, коэффициент нелинейности $\gamma = 0.5$.

от начального соотношения фаз и значения фазы каждого импульса, временные центры импульсов на основной частоте начинают отталкиваться, как в случае с одинаковой фазой, но в данном случае движение центров происходит с разными скоростями (рис. 2в). У сигнала с меньшей начальной фазой центр движется быстрее, в то время как центр второго импульса движется медленнее. Момент начала движения центров импульсов по временной оси совпадает с завершением полупериода процесса перекачки энергии между импульсами, который стал особенно выражен при подобранном соотношении фаз ($\varphi_{11} = 0$, $\varphi_{12} = 0.6\pi$), что можно увидеть на рис. 2в и 2г. Стоит отметить, что временная задержка была введена для того, чтобы эффект притягивания и отталкивания временных центров импульсов можно было отчетливо наблюдать. При синхронном запуске импульсов эффект сохраняется, но для рассматриваемых расстояний отклонение центров импульсов очень мало и станет заметным только на достаточно большой дистанции распространения.

Результаты, полученные при исследовании влияния положения волноводов на режим распространения солитоноподобного решения, показаны на рис. 3. С помощью изменения параметра x_w , который входит как в начальное решение (4), так и в безразмерную функцию, задающую профиль волновода (3), мы меняли положение центров градиентных волноводов. На рис. 3 можно увидеть, что при параметре $x_w = 1.9$ ($a_{\omega,2\omega} = 2$) волноводы начинают частично перекрываться, что увеличивает влияние импульсов в разных волноводах друг на друга. Это проявляется в увеличенной амплитуде осцилляции пространственных центров импульсов по сравнению с результатами для неперекрывающихся волноводов при $x_w = 2.0$. Энергия «хвостов» импульсов, которая ранее просачивалась в область между волноводами, начинает скапливаться в области перекрытия, что можно увидеть на рис. 3в на графиках для профилей сигналов при различных значениях дистанции распространения z . При дальнейшем сближении волноводов амплитуда осцилляций пространственных центров продолжает

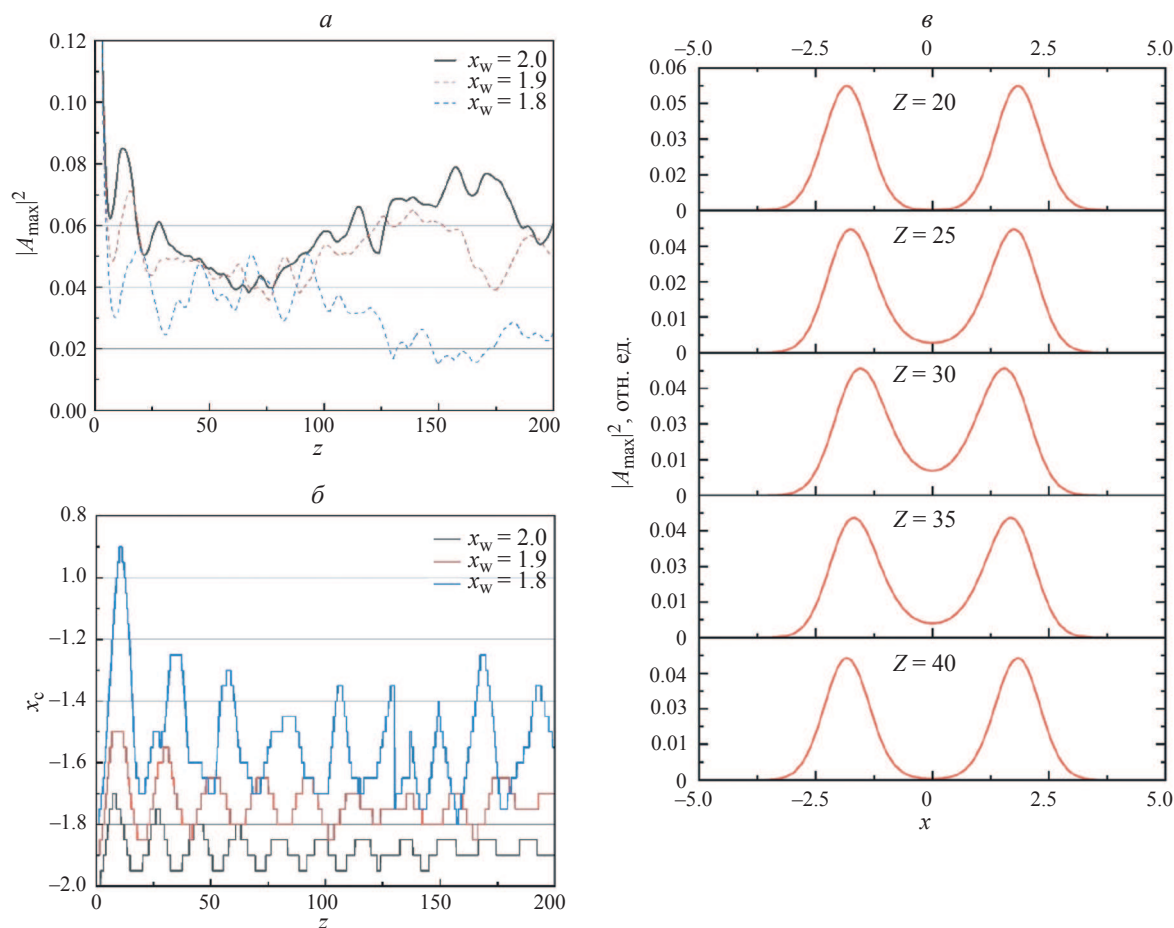


Рис. 3. Генерация пары связанных солитонов несинхронными ($\tau_{10} = -0.5$, $\tau_{20} = 0.5$) синфазными ($\omega_{11} = \omega_{12} = 0$) пучками основной частоты $E_{11} = 0.5$, $E_{12} = 0.5$, $E_{21} = 0$, $E_{22} = 0$. Пиковые интенсивности (а) основной частоты и положение пространственных центров (б) в зависимости от расстояния z для $x_w = 1.8, 1.9, 2.0$. Поперечные профили пучков при $\tau = 0$ и при $x_w = 1.9$ для основной частоты в промежутке от $z = 20$ до $z = 40$ с шагом $z = 5$ (в). Параметры волновода $a_\omega = a_{2\omega} = 2$, $D_{q1} = 10$, $D_{q2} = 10$. Коэффициенты дифракции $D_{x1} = 0.1$, $D_{x2} = 0.05$, коэффициенты дисперсии $D_{\tau1} = 0.05$, $D_{\tau2} = 0.1$, коэффициент нелинейности $\gamma = 0.5$.

нарастать, и при достижении $x_w = 1.7$ солитоноподобный режим нарушается: импульсная пара распадается на расстоянии в 40 нелинейных длин.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, рассмотрен процесс формирования и распространения солитоноподобного решения в паре связанных оптических волноводов в плоском квадратично-нелинейном кристалле при изменении параметров, связанных с положением центров волноводов и соотношением фаз между импульсами. Было обнаружено, что от начального соотношения фаз зависит характер взаимодействия импульсов. При определенной начальной разнице фаз ($\delta\phi = 0.6\pi$) наблюдается перекачка энергии между волноводами, которая занимает около 600 нелинейных длин. Перекрытие волноводами друг друга ($x_w = 1.9$) усиливает связь между волноводами, что также влияет на пространственное положение сигналов во время распространения, добавляя заметную осцилляцию центров им-

пульсов вдоль пространственной оси. Пиковая интенсивность при этом снижается, так как часть энергии импульсов начинает просачиваться в область перекрытия волноводами друг друга, задерживаясь в ней.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кившарь Ю.С., Агравал Г.П. Оптические солитоны: от волоконных световодов к фотонным кристаллам. Москва: Физматлит, 2005.
2. Chiao R.Y., Garmire E., Townes C.H. // Phys. Rev. Lett. 1964. V. 13. P. 479.
3. Bergé L. // Phys. Reports. 1998. V. 303. P. 259.
4. Kuznetsov E.A., Dias F. // Phys. Reports. 2011. V. 507. P. 43.
5. Muniyappan A., Parasuraman E., Seadawy A.R., Ramkumar S. // Opt. Quantum Electron. 2024. V. 56. No. 3. Art. No. 440.
6. Sudipta Das, Dey K.K., Sekh G.A. // Optik. 2021. V. 247. Art. No. 167865.

7. *Sazonov S.V., Kalinovich A.A., Komissarova M.V., Zakharova I.G.* // Phys. Rev. A. 2019. V. 100. No. 3. Art. No. 033835.
8. *Longhi S.* // Opt. Lett. 2015. V. 40. P. 1117.
9. *Malomed B.A.* // Photonics. 2021. V. 8. No. 9. P. 353.
10. *Sakaguchi H., Malomed B.A.* // J. Opt. Soc. Amer. B. 2012. V. 29. P. 2741.
11. *Kartashov Y.V., Malomed B.A., Konotop V.V. et al.* // Opt. Letters. 2015. V. 40. No. 6. P. 1045.
12. *Калинович А.А., Захарова И.Г.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2023. Т. 87. № 12. С. 1701; *Kalinovich A.A., Zakharova I.G.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2023. V. 87. No. 12. P. 1785.
13. *Kalinovich A.A., Komissarova M.V., Sazonov S.V. et al.* // PLoS One. 2019. V. 14. No. 8. Art. No. e0220840.

(2+1)D soliton pairs in a planar quadratic nonlinear crystal with inhomogeneity

B. S. Bryantsev*, A. A. Kalinovich

Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia

**e-mail: brisbryantsev@mail.ru*

The process of propagation and formation of pulse pairs in a quadratically nonlinear crystal with two waveguides is investigated when parameters related to the position of the waveguides relative to each other, delay and phase ratio between pulses change. A change in the pulse propagation mode during the approach of waveguides and the dependence of the nature of the interaction between the pulses on the initial phase ratio were found.

Keywords: optical solitons, quadratic nonlinearity, two-dimensional pulses, inhomogeneity, nonlinear optics

УДК 535.2

МИКРОРЕЗОНАТОРЫ И ВРЕМЕННЫЕ ФОТОННЫЕ КРИСТАЛЛЫ, СОЗДАВАЕМЫЕ ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ ПОЛУЦИКЛОВЫХ СВЕТОВЫХ ИМПУЛЬСОВ В РЕЗОНАНСНОЙ СРЕДЕ

© 2025 г. Р. М. Архипов^{1, *}, М. В. Архипов¹, А. В. Пахомов², О. О. Дьячкова^{1, 2},
Н. Н. Розанов¹

¹Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Физико-технический институт имени А. Ф. Иоффе Российской академии наук», Санкт-Петербург, Россия

²Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет», Санкт-Петербург, Россия

*e-mail: arkhipovrostislav@gmail.com

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

Рассмотрены последние исследования авторов в области создания и сверхбыстрого управления светоиндуцированными динамическими микрорезонаторами и временными фотонными кристаллами, возникающими при столкновении полуцикловых импульсов в среде. Показана возможность наведения микрорезонаторов при столкновении субцикловых импульсов самоиндуцированной прозрачности, имеющих одинаковую полярность.

Ключевые слова: униполярные импульсы, полуцикловые импульсы, динамические микрорезонаторы, временные фотонные кристаллы, решетки атомных населенностей, когерентные эффекты

DOI: 10.31857/S0367676525010125, EDN: DAUMXG

ВВЕДЕНИЕ

Униполярные, полуцикловые, предельно короткие импульсы (ПКИ) являются пределом сокращения длительности электромагнитных импульсов в заданном спектральном диапазоне [1]. Они содержат полуволну поля одной полярности и могут обладать ненулевой электрической площадью, определяемой как интеграл от напряженности электрического поля $\vec{E}(t)$ по времени t в заданной точке пространства [2–4]:

$$\vec{S}_E = \int \vec{E}(t) dt. \quad (1)$$

Интерес к получению подобных импульсов активно возрос в последнее время в связи с их возможными многочисленными применениями для сверхбыстрого управления свойствами квантовых систем, голографии со сверхвысоким временным разрешением и др. приложений, см. обзоры [1, 5–8] и монографию [9]. Так, полуцикловые квазиуниполярные импульсы аттосекундной длительности (порядка сотен аттосекунд) в оптическом диапазоне могут быть получены при когерентном сложении монохроматических составляющих широкополосной накачки [10], а также при быстром тормо-

жении пучка релятивистских электронов в тонких мишенях [11, 12]. В терагерцовом диапазоне униполярные импульсы могут быть получены при различных нелинейных процессах в плазме [13–16], сверхизлучении остановленной поляризации [17] и др. способами, см. обзоры [1, 5–9].

Для одноцикловых и полуцикловых ПКИ импульсов такой малой длительности по-иному выглядят особенности когерентного распространения и взаимодействия с резонансными средами, в отличие от случая длинных многоцикловых импульсов [10, 18–22]. Изучение взаимодействия ПКИ с веществом привело к предсказанию ряда новых явлений в оптике, таких как самокомпрессия импульса [23], расталкивание полуволн противоположной полярности [24], самоостановка света [25] и др. Использование последовательности ПКИ, когерентно распространяющихся в резонансной среде, когда длительность импульсов короче времени релаксации поляризации среды T_2 , приводит к созданию и сверхбыстрому управлению решетками разности населенностей и волнами поляризации среды на временах порядка длительности импульсов [26–42].

При этом также возможно создание так называемых динамических микрорезонаторов, когда пара предельно коротких импульсов сталкивается в среде [43–45]. В этом случае разность населенностей в области перекрытия импульсов имеет почти постоянное значение, а по краям от нее возникает решетка разности населенностей. Также возможно, что разность населенностей имеет другое постоянное значение, отличное от значения в области перекрытия импульсов. Таким образом, возникает микрорезонатор с размером порядка длины волны резонансного перехода. Интерес к таким структурам связан с активным изучением в последнее время так называемых временных и пространственно-временных фотонных кристаллов, то есть сред, показатель преломления которых быстро меняется во времени или в пространстве и во времени соответственно [46–49].

В данной работе приводится обзор последних исследований авторов в области создания и управления решетками населенностей и динамических микрорезонаторов с помощью последовательности предельно коротких импульсов, когерентно взаимодействующих со средой и сталкивающихся в среде. Приводится анализ динамики микрорезонаторов при столкновении 2π подобных импульсов самоиндуцированной прозрачности (СИП). При этом в отличие от ранних исследований, в которых было показано, что динамические резонаторы не возникают при столкновении импульсов одной полярности, в данной работе показано, что данное ограничение снимается при добавлении к импульсу заднего фронта противоположной полярности.

СОЗДАНИЕ РЕШЕТОК НАСЕЛЕННОСТЕЙ ПРИ КОГЕРЕНТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПРЕДЕЛЬНО КОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ СО СРЕДОЙ

Возможность создания решеток атомных населенностей при когерентном взаимодействии световых импульсов со средой была обнаружена довольно давно в первых экспериментах по фотонному эху [26, 27]. Однако в этих исследованиях использовались длинные многоцикловые импульсы света наносекундной длительности, которые одномоментно не перекрывались в среде [28, 29]. Очевидно использование длинных многоцикловых импульсов не позволяет осуществить сверхбыстрое управление решетками разности населенностей. Созданные таким образом решетки использовались в эхолографии [30, 31] и для измерения времени релаксации поляризации среды T_2 [32].

Другой альтернативный, более распространенный способ создания решеток основан на интерференции длинных монохроматических лазерных полей, перекрывающихся в среде [50]. В таком способе очевидно также нельзя осуществить сверхбыст-

рое управление решетками, например, их стирание или мультиплицирование пространственной частоты.

Создание и сверхбыстрое управление решетками можно осуществить с помощью предельно коротких импульсов — одноцикловых и полумоноцикловых, когерентно взаимодействующих со средой. Впервые данная возможность была показана теоретически в работах авторов [33–40], когда импульсы не перекрываются в среде [33–36] и перекрываются в среде [37, 39, 40], см. также обзоры [41, 42]. Создание таких решеток происходит за счет интерференции волн поляризации среды, наведенных предыдущим импульсом, с последующим импульсом.

Альтернативное объяснение создания таких решеток, справедливое при малых амплитудах возбуждающих импульсов и в разреженной среде, когда среда слабо возбуждена, основано на интерференции площадей импульсов или интерференции амплитуд связанных состояний среды [51]. Обзор последних результатов этих исследований приведен в [41, 42], и мы не будем на этом останавливаться.

ДИНАМИЧЕСКИЕ МИКРОРЕЗОНАТОРЫ И ВРЕМЕННЫЕ ФОТОННЫЕ КРИСТАЛЛЫ ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ ПРЕДЕЛЬНО КОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ В СРЕДЕ

В работе [43] впервые была показана возможность формирования так называемых динамических микрорезонаторов, возникающих при столкновении $\pi/2$ подобных униполярных импульсов прямоугольной формы в двухуровневой резонансной среде. При этом, как показали численные расчеты, в области перекрытия импульсов разность населенностей имеет постоянное значение — «светоиндуцированный канал», а вне этой области меняется скачком и имеет другое значение. В этом смысле можно говорить о формировании динамического микрорезонатора в среде. Размер такой структуры порядка пространственного размера импульса (длины волны резонансного перехода).

В последующей работе [44] была рассмотрена динамика такого микрорезонатора при столкновении уже 2π подобных импульсов СИП прямоугольной формы и длительности порядка 1 фс. Численные расчеты показали возможность формирования и управления динамическими микрорезонаторами при увеличении числа столкновений импульсов в среде. Подробные исследования, проведенные в работе [45] показали, что форма и параметры резонатора существенно зависят от формы сталкивающихся импульсов и от крутизны фронтов — чем круче фронты, тем больше глубина модуляции микрорезонатора. Эти исследования проводились, когда среда моделировалась в двухуровневом приближении. Численные расчеты, проведенные в работе [52], показали возможность наведения мик-

рорезонаторов при столкновении униполярных импульсов прямоугольной и треугольной формы в трехуровневой среде.

В упомянутых исследованиях сталкивающиеся импульсы были униполярными. Возможность создания микрорезонаторов с брэгговскими зеркалами была показана в статье [53]. В этой работе пара одноцикловых аттосекундных импульсов, состоящих из двух полуволн противоположной полярности, сталкивались в центре среды. Параметры импульсов были подобраны так, чтобы импульсы действовали подобно 4π импульсам СИП. Численные расчеты показали, что в центре среды, где импульсы сталкиваются, среда остается практически невозбужденной. А по краям от этой области формируются квазипериодические решетки населенностей, длиной всего в несколько периодов и локализованные в окрестности области перекрытия импульсов.

Пространственная частота данных структур возрастала с ростом числа столкновений импульсов. Таким образом, в среде возникал локальный микрорезонатор с брэггopodobными зеркалами. Оценки показали, что коэффициент отражения таких структур на длине волны, соответствующей максимуму брэгговского отражения, составлял порядка 30%.

Детальный анализ динамики таких микрорезонаторов, возникающих при столкновении полуцикловых аттосекундных импульсов, был проведен на основе численного решения системы уравнений Максвелла—Блоха в двух- и трехуровневой среде в работе [54]. В работе [55] показана возможность создания временных фотонных кристаллов при столкновении пары полуцикловых аттосекундных импульсов в трехуровневой среде. Практическая реализация таких сред с быстро меняющимся показателем преломления трудно осуществима на практике за счет обычных нелинейно-оптических механизмов, так как они очень медленные [56]. Для этой цели разработаны ряд экзотических материалов с необычными свойствами [56, 57]. Однако, приведенные нами исследования показывают возможность реализации пространственно-временных фотонных кристаллов в двух- и многоуровневых резонансных средах с помощью последовательности предельно коротких импульсов, так как при этом происходит создание решеток населенностей, т. е. изменение показателя преломления среды в пространстве и во времени.

Упомянутые исследования динамики таких структур проводились за счет численного решения системы уравнений для матрицы плотности совместно с волновым уравнением для напряженности электрического поля. Какое-либо аналитическое описание отсутствовало. В работе [58] был предложен простой аналитический подход, показывающий возможность создания таких мик-

рорезонаторов. Он основан на приближенном решении временного уравнения Шредингера в приближении внезапных возмущений, когда длительность импульса считалась малой по сравнению с периодом резонансного перехода среды. Амплитуда поля возбуждающих импульсов также считалась малой. В таком подходе среда считалась разреженной и слабо возбужденной, динамика волн поляризации не учитывалась.

Более подробный подход вне рамок приближения внезапных возмущений был описан в [59]. Результаты данного анализа показывают возможность создания микрорезонаторов с брэггopodobными зеркалами (разность населенностей меняется в пространстве по гармоническому закону слева и справа от области перекрытия импульсов) на каждом резонансном переходе среды. В случае униполярных импульсов необычной формы (прямоугольной) в работе [52] также была показана возможность наведения микрорезонаторов.

Детально аналитический подход, показывающий создание таких микрорезонаторов, основанный на приближенном решении уравнения Шредингера с помощью теории возмущений, представлен в работе [60]. Результаты расчетов населенностей (добротности микрорезонатора), выполненные с помощью данного подхода, согласуются с результатами численного решения системы уравнений для матрицы плотности среды, когда амплитуда возбуждающих импульсов мала.

Обсудим кратко основную идею данного подхода. Он основан на приближенном решении уравнения Шредингера в приближении слабого поля, когда применима теория возмущений. Среда считается разреженной, при этом влиянием соседних атомов друг на друга и изменением формы падающих импульсов при распространении в среде можно пренебречь. Также в указанных приближениях, как показано ранее [36–41], задачу о взаимодействии последовательности предельно коротких импульсов с протяженной средой, можно свести к задаче о взаимодействии этих импульсов с единичной квантовой системой при изменении задержки между импульсами. В первом порядке теории возмущений выражение для населенности связанных состояний с номером k после прохождения импульса имеет вид [61]

$$w_k = \frac{d_{1k}^2}{\hbar} \left| \int E(t) e^{i\omega_{1k}t} dt \right|^2.$$

В этом выражении, d_{1k} — дипольный момент перехода, ω_{1k} — частота резонансного перехода среды. Для простоты считаем, что на среду воздействует пара полуцикловых импульсов (задним фронтом противоположной полярности пренебрегаем), следующих с задержкой Δ : $E(t) = E_{01} \exp[-t^2/\tau_1^2] + E_{02} \exp[-(t - \Delta)^2/\tau_2^2]$. Тогда выражение для

населенности в указанных выше приближениях может быть записано в виде (при условии: $\omega_{1k}\tau_{1,2} \ll 1$ [36, 41, 58–60]):

$$\omega_k = \frac{d_{1k}^2 S_{E,1}^2}{\hbar^2} + \frac{d_{1k}^2 S_{E,2}^2}{\hbar^2} + 2 \frac{d_{1k}^2}{\hbar^2} S_{E,1} S_{E,2} \cos \omega_{1k} \Delta, \quad (2)$$

в котором $S_{E,1,2} = E_{01,2} \tau_{1,2} \sqrt{\pi}$ — электрические площади импульсов.

В случае протяженной среды задержка $\Delta \propto z/c$ (c — скорость света) пропорциональна моменту времени, когда второй импульс приходит в точку среды, имеющую координату z [36, 41]. Если импульсы сталкиваются в какой-либо точке среды, то для расчета населенностей в этой точке (и вблизи нее) надо положить задержку $\Delta = 0$ в выражении (2), что приводит к соотношению $\omega_k = \frac{d_{1k}^2}{\hbar^2} (S_{E,1} + S_{E,2})^2$. Оно показывает, что в этой области населенности определяются квадратом суммарной электрической площади импульсов.

Вне области перекрытия импульсов для расчета населенностей надо пользоваться общим соотношением (2). Из него видно, что выражение для населенности ω_k представляет собой сумму квадратов электрических площадей импульсов и содержит «интерференционный член» $2 \frac{d_{1k}^2}{\hbar^2} S_{E,1} S_{E,2} \cos \omega_{1k} \Delta$, т. е. периодически зависит от задержки между импульсами Δ . В этом смысле, как показано в работе [36], можно говорить о том, что воздействие пары униполярных импульсов в приближении слабого поля определяется интерференцией электрических площадей импульсов.

Также это выражение показывает возникновение периодической решетки населенностей гармонической формы вне области перекрытия импульсов. Несмотря на простоту, результаты данного подхода имеют эвристическую силу, так как они предсказывают возможность формирования микрорезонатора с брэггоподобными зеркалами в виде решеток населенностей гармонической формы (2) на каждом резонансном переходе многоуровневой среды. Глубина модуляции этих решеток определяется квадратом электрической площади импульсов. Физически возникновение данных решеток связано с интерференцией электрических площадей импульсов в приближении слабого поля.

В сильных полях и плотных средах, когда становится не применимы указанные выше приближения, необходимо рассматривать более сложные модели, основанные на материальных уравнениях для многоуровневой среды совместно с волновым уравнением для напряженности электрического поля. При этом обычно для описания среды используют двухуровневое приближение, которое может оказаться не пригодным в случае предель-

но коротких импульсов. Данный вопрос обсуждался в работах [62–64]. Численные расчеты, проведенные в этих работах, показали, что эффект возникновения решеток, форма которых близка к гармонической, как предсказывают результаты, полученные в рамках теории возмущений, сохраняется и в трехуровневой среде. При этом в численных расчетах параметры трехуровневой среды соответствовали атомам Rb87 [63], а также атомарному водороду [54, 64], что показывает возможность наблюдения эффекта в реальных системах. Также результаты численного решения временного уравнения Шредингера для одномерной квантовой ямы с учетом ионизации показали сохранение решеток [65].

С практической точки зрения возникновение решеток хорошего качества (например, по форме, близкой к гармонической) возможно, когда основное состояние среды несильно опустошается, т. е. среда не сильно возбуждается и ионизация не значительна. В этом случае среда должна не сильно возбуждаться под действием импульсов. Такой критерий легко установить в случае, когда длительность полуволнового импульса τ короче характерного времени T_g , связанного с энергией основного состояния E_1 , $\tau < T_g = 2\pi\hbar/E_1$. Среда будет несильно возбуждаться и ионизация незначительна, если электрическая площадь падающего импульса S_E меньше характерной атомной меры площади $S_E < S_{at} = \hbar/e r$, где e — заряд электрона, r — характерный размер квантовой системы [22]. В численных расчетах, проведенных в работе [64] для параметров, соответствовавших атому водорода, данное условие было выполнено.

Физически сохранение эффекта решеток и микрорезонаторов в многоуровневой среде легко понять, если вспомнить физический механизм их формирования [34–36, 41]. Проходящий по среде предельно короткий импульс оставляет после себя среду в суперпозиционном квантовом состоянии, в котором когерентность среды (поляризация среды), т. е. недиагональные элементы матрицы плотности осциллируют на каждом резонансном переходе среды. Это приводит к появлению волн поляризации среды, которые существуют в течение времени релаксации T_2 . Эти колебания поляризации существуют всегда независимо от того, сколько уровней среды учитывается два или более. Последующий импульс будет когерентно управлять этими осцилляциями дипольного момента, что приведет к возникновению решетки разности населенностей на каждом резонансном переходе среды, как отмечалось выше. Поэтому, приближение двухуровневой среды представляется оправданным в подобных задачах. Поэтому, ниже мы будем использовать для простоты двухуровневое приближение.

В случае большой амплитуды поля динамика микрорезонаторов изучалась с помощью численного решения системы уравнений Максвелла-Блоха для двухуровневой среды [60]. В расчетах использовались полностью униполярные импульсы гауссовой формы длительностью сотни аттосекунд. При этом импульсы действовали подобно 2π импульсам СИП. Результаты численных расчетов показали невозможность создания микрорезонаторов, когда сталкивающиеся импульсы имели одинаковую полярность. Когда импульсы имели противоположную полярность, в области перекрытия импульсов возникал локальный микрорезонатор. Пространственный период наводимых решеток возрастал с ростом числа столкновений. Более сложная динамика микрорезонаторов возникала при столкновении 4π импульсов.

Результаты этих исследований [60] показывают, что формирование микрорезонаторов возможно, когда сталкивающиеся импульсы имеют разную полярность. Снять указанные ограничения можно, если использовать не полностью униполярный импульс, как в работе [60], а квазиуниполярный субцикловый импульс, содержащий мощную полуволну поля и задние фронты противоположной полярности. Сказанное иллюстрируется результатами численного расчета, представленного в следующем разделе.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для изучения динамики решеток разности населенностей при столкновении последовательно 2π -подобных импульсов СИП в резонансной среде проводилось численное решение системы уравнений Максвелла-Блоха, включающей в себя материальные уравнения для недиагонального элемента матрицы плотности ρ_{12} , разности населенностей среды (инверсии) $n = \rho_{11} - \rho_{22}$ двухуровневой среды, ее поляризации P и напряженности электрического поля E [66, 67]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{12}(z, t)}{\partial t} = & -\frac{\rho_{12}(z, t)}{T_2} + i\omega_0 \rho_{12}(z, t) - \\ & -\frac{i}{\hbar} d_{12} E(z, t) n(z, t), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(z, t)}{\partial t} = & -\frac{n(z, t) - n_0(z)}{T_1} + \\ & + \frac{4}{\hbar} d_{12} E(z, t) \operatorname{Im} \rho_{12}(z, t), \end{aligned} \quad (4)$$

$$P(z, t) = 2N_0 d_{12} \operatorname{Re} \rho_{12}(z, t), \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P(z, t)}{\partial t^2}. \quad (6)$$

Данная система уравнений (3)–(6) содержит следующие параметры (значения некоторых из них приведены в таблице 1): z — продольная координата, c — скорость света в вакууме, t — время, N_0 — концентрация двухуровневых атомов, \hbar — приведенная постоянная Планка, ω_0 — частота резонансного перехода среды ($\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$ — длина волны резонансного перехода), d_{12} — матричный элемент дипольного момента резонансного перехода среды, n_0 — разность населенностей среды при отсутствии электрического поля, причем $n_0 = 1$ для поглощающей среды. Возможность применения двухуровневого приближения в подобных задачах обсуждалась выше и в работах [36, 41, 52–55, 58–60, 62–65].

Для создания последовательности импульсов использовались нулевые граничные условия на концах области интегрирования, которая имела длину $L = 12\lambda_0$. Двухуровневая среда помещалась в центре области интегрирования между точками с координатами $z_1 = 4\lambda_0$ и $z_2 = 8\lambda_0$. В начальный момент времени в среду слева направо и справа налево из вакуума запускалась пара субцикловых импульсов, выражение для которых имеет вид:

$$E(0, t) = E_{01} e^{-\frac{(t-\tau_1)^2}{\tau^2}} \cos(\omega_0 [t - \tau_1]), \quad (7)$$

$$E(L, t) = E_{02} e^{-\frac{(t-\tau_2)^2}{\tau^2}} \cos(\omega_0 [t - \tau_2]). \quad (8)$$

Здесь $\tau_{1,2}$ — задержки, которые регулируют момент встречи импульсов. Импульсы действовали подобно 2π импульсам СИП и имели одну полярность, но содержали задние фронты противоположной полярности. Одномерное распространение полуволновых импульсов на большие расстояния может быть реализовано в коаксиальных волноводах [68].

В таком случае импульсы сталкивались в центре среды, затем выходили из нее. На границах

Таблица 1. Параметры задачи, использованные в численном моделировании

Длина волны резонансного перехода среды	$\lambda_0 = 700$ нм
Дипольный момент перехода	$d_{12} = 20$ Д
Время релаксации разности населенностей	$T_1 = 10$ пс
Время релаксации поляризации	$T_2 = 5$ пс
Концентрация атомов	$N_0 = 10^{18}$ см ⁻³
Амплитуда поля	$E_{01} = E_{02} = 259\,000$ ед. СГС
Длительность импульса возбуждения τ	$\tau = 580$ ас
Параметры задержки	$\tau_1 = \tau_2 = 3\tau$

области интегрирования размещались идеальные зеркала. Импульсы отражались от них и вновь возвращались в среду. Проводилось численное решение системы уравнений (2)–(5) при параметрах, указанных в таблице ниже, с начальными условиями в виде импульсов (6)–(7). Строились и анализировались пространственно-временные зависимости поляризации и разности населенностей среды. Параметры численного моделирования указаны в таблице. Длина волны перехода в сотни нанометров могут быть реализованы, например в атомных парах или квантовых точках. Однако, результаты теоретического рассмотрения на основе уравнения Шредингера, проведенного выше, показывают возможность формирования решеток и резонаторов и носят общий характер. Концентрация частиц влияет на отражательную способность решеток, и их форма может искажаться при ее больших значениях [53, 54, 60].

На рис. 1 представлена пространственно-временная динамика разности населенностей и поляризации. После первого столкновения импульса около момента времени порядка 23 фс среда остается в слабо возбужденном состоянии. Микрорезонатор начинает формироваться после 2-го столкновения, произошедшего в районе момента времени 50 фс, разность населенностей в центре почти постоянна, а по краям изменяется скачком. Вне области перекрытия импульсов среда остается в невозбужденном состоянии со значением инверсии $n = 1$. После последующих столкновений в моменты времени 75, 100, 125 фс и т.д. форма микрорезонатора становится более выраженной. Отдельный интерес представляет формирова-

ние сложных структур поляризации, образующихся в области микрорезонатора, см. рис. 1б. Такие структуры поляризации существуют в течение времени T_2 и могут излучать световые волны в разных направлениях.

Результаты расчетов, когда импульсы имели противоположную полярность, $E_{01} = -E_{02}$, представлены на рис. 2. Остальные параметры такие же, как на рис. 1. Видно, что смена полярности одного из импульсов влияет на динамику системы. В этом случае микрорезонатор формируется уже сразу после первого столкновения импульсов. В центре среды, в точке $z = 6\lambda_0$, система находится в невозбужденном состоянии, а по краям от нее разность населенности изменяется скачком. С ростом числа столкновений пространственная частота решеток увеличивается. При этом в области локализации микрорезонатора образуются сложные структуры поляризации в виде стоячих волн. Взаимодействие падающих импульсов возбуждения с этими колебаниями поляризации является причиной увеличения пространственной частоты решеток населенностей [34, 35]. Похожее поведение разности населенностей наблюдалось в [60] при столкновении полностью униполярных импульсов противоположной полярности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование взаимодействия полуцикловых импульсов с резонансными средами привело к предсказанию и детальному исследованию нового явления — возможности формирования и сверхбыстрого управления динамическими микрорезонаторами, возникающих при столк-

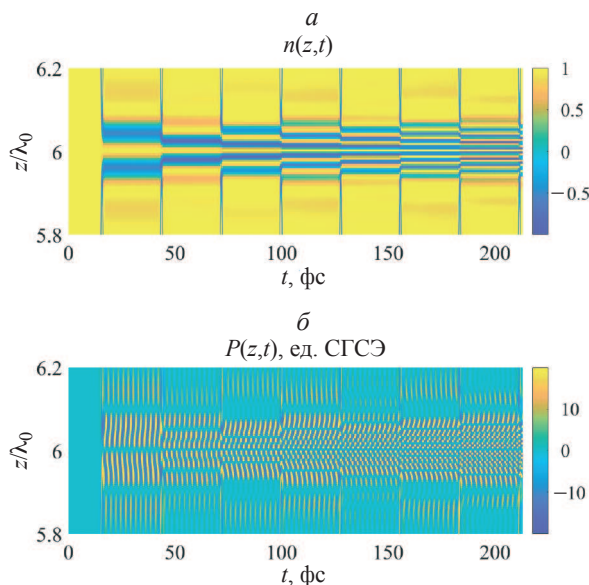


Рис. 1. Динамика разности населенностей $n(z, t)$ (а); динамика поляризации $P(z, t)$ при столкновении пары субцикловых импульсов СИП одинаковой полярности (б), $E_{01} = E_{02}$, в центре среды в точке $z = 6\lambda_0$. Параметры расчета указаны в табл. 1.

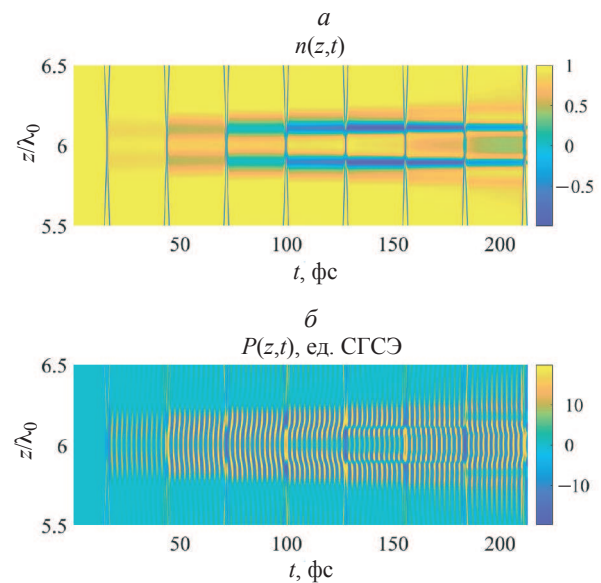


Рис. 2. Динамика разности населенностей $n(z, t)$ (а); динамика поляризации $P(z, t)$ при столкновении пары субцикловых импульсов СИП противоположной полярности (б), $E_{01} = -E_{02}$, в центре среды в точке $z = 6\lambda_0$. Параметры расчета указаны в табл. 1.

новении предельно коротких импульсов в среде. С ростом числа столкновений импульсов параметрами данного микрорезонатора можно управлять. Показано, что микрорезонатор может возникать, когда сталкивающиеся 2π подобные субцикловые импульсы СИП имеют как одинаковую, так и противоположную полярность, в отличие от результатов ранних исследований [60].

Исследованный эффект представляет интерес для остановки и хранения импульсов света в среде [25], создания сверхбыстрых аттосекундных оптических переключателей [69], голографии со сверхвысоким временным разрешением [70], создания пространственно-временных фотонных кристаллов нового типа с управляемыми параметрами [46–49], а также в физике фотонных кристаллов [71–73]. Полученные результаты открывают новые направления исследований в аттосекундной физике и оптике предельно коротких импульсов и показывают возможность сверхбыстрого управления состоянием среды на сверхкоротких временных масштабах с помощью субцикловых световых импульсов.

Исследование поддержано грантом Российского научного фонда в рамках проекта № 23-12-00012 (создание динамических резонаторов) и Государственным заданием ФТИ им. А. Ф. Иоффе, тема 0040-2019-0017 (создание решеток разности населенностей).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Архипов Р.М., Архипов М.В., Розанов Н.Н. // Квант. электрон. 2020. Т. 50. С. 801; Arkhipov R.M., Arkhipov M.V., Rosanov N.N. // Quantum Electron. 2020. V. 50. No. 9. P. 801.
- Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965. 702 с.; Jackson J.D. Classical Electrodynamics. N.Y.: Wiley, 1962.
- Бессонов Е.Г. // ЖЭТФ. 1981. Т. 80. С. 852; Bessonov E.G. // Sov. Phys. JETP. 1981. V. 53. P. 433.
- Розанов Н.Н. // Опт. и спектроск. 2009. Т. 107. № 5. С. 761; Rosanov N.N. // Opt. Spectrosc. 2009. V. 107. No. 5. P. 768.
- Сазонов С.В. // Опт. и спектроск. 2022. Т. 130. № 12. С. 1846; Sazonov S.V. // Opt. Spectrosc. 2022. V. 130. No. 12. P. 1573.
- Розанов Н.Н., Архипов Р.М., Архипов М.В. // УФН. 2018. Т. 188. С. 1347; Rosanov N.N., Arkhipov R.M., Arkhipov M.V. // Phys. Usp. 2018. V. 61. P. 1227.
- Архипов Р.М., Архипов М.В., Пахомов А.В. и др. // Письма в ЖЭТФ. 2023. Т. 117. № 1. С. 10; Arkhipov R.M., Arkhipov M.V., Pakhomov A.V. et al. // JETP Lett. 2023. V. 117. No. 1. P. 8.
- Розанов Н.Н. // УФН. 2023. Т. 193. С. 1127; Rosanov N.N. // Phys. Usp. 2023. V. 66. P. 1059.
- Розанов Н.Н., Архипов М.В., Архипов Р.М. и др. Терагерцовая фотоника. М.: РАН, 2023. 360 с.
- Hassan M.T., Luu T.T., Moulet A. et al. // Nature. 2016. V. 530. P. 66.
- Wu H.-C., Meyer-ter Vehn J. // Nature Photon. 2012. V. 6. P. 304.
- Xu J., Shen B., Zhang X. et al. // Sci. Reports. 2018. V. 8. P. 2669.
- Bogatskaya A.V., Volkova E.A., Popov A.M. // Phys. Rev. E. 2021. V. 104. Art. No. 025202.
- Богачук А.В., Волкова Е.А., Попов А.М. // Изв. РАН. Сер. физ. 2024. Т. 88. № 1. С. 74; Bogatskaya A.V., Volkova E.A., Popov A.M. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2024. V. 88. No. 1. P. 61.
- Ilyakov E., Shishkin B.V., Efimenko E.S. et al. // Opt. Express. 2022. V. 30. P. 14978.
- Сазонов С.В. // Изв. РАН. Сер. физ. 2022. Т. 86. № 6. С. 766; Sazonov S.V. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2024. V. 88. No. 1. P. 643.
- Pakhomov A., Arkhipov M., Rosanov N. et al. // Phys. Rev. A. 2022. V. 106. No. 5. Art. No. 053506.
- Bucksbaum P.H. // AIP Conf. Proc. 1994. V. 323. No. 1. P. 416.
- Dimitrovski D., Solov'ev E.A., Briggs J.S. // Phys. Rev. A. 2005. V. 72. Art. No. 043411.
- Moskalenko A.S., Zhu Z.-G., Berakdar J. // Phys. Reports. 2017. V. 672. P. 1.
- Arkhipov R., Arkhipov M., Babushkin I. et al. // J. Opt. Soc. Amer. B. 2021. V. 38. P. 2004.
- Rosanov N., Tumakov D., Arkhipov M. et al. // Phys. Rev. A. 2021. V. 104. No. 6. Art. No. 063101.
- Arkhipov R., Arkhipov M., Demircan A. et al. // Opt. Express. 2021. V. 29. P. 10134.
- Архипов Р.М., Архипов М.В., Федоров С.В. и др. // Опт. и спектроск. 2021. Т. 129. № 10. С. 1286; Arkhipov R.M., Arkhipov M.V., Fedorov S.V. et al. // Opt. Spectrosc. 2021.
- Arkhipov M., Arkhipov R., Babushkin I. et al. // Phys. Rev. Lett. 2022. V. 128. Art. No. 203901.
- Abella I.D., Kurnit N.A., Hartmann S.R. // Phys. Rev. 1966. V. 141. P. 391.
- Штырков Е.И., Лобков В.С., Ярмухаметов Н.Г. // Письма в ЖЭТФ. 1978. Т. 27. № 12. С. 685; Shtyrkov E.I., Lobkov V.S., Yarmukhametov N.G. // JETP Lett. 1978. V. 27. No. 12. P. 648.
- Моисеев С.А., Штырков Е.И. // Квант. электрон. 1991. Т. 18. № 4. С. 447; Moiseev S.A., Shtyrkov E.I. // Sov. J. Quant. Electron. 1991. V. 21. No. 4. P. 403.
- Штырков Е.И., Самарцев В.В. // Опт. и спектроск. 1976. Т. 40. № 3. С. 392.
- Shtyrkov E.I., Samartsev V.V. // Phys. Stat. Sol. A. 1978. V. 45. P. 647.
- Штырков Е.И. // Опт. и спектроск. 2013. Т. 114. № 1. С. 105; Shtyrkov E.I. // Opt. Spectrosc. 2013. V. 114. No. 1. P. 96.

32. *Szczurek M., Kusnierz M.* // Opt. Commun. 1989. V. 74. P. 121.
33. *Архипов Р.М., Архипов М.В., Бабушкин И. и др.* // Опт. и спектроск. 2016. Т. 121. С. 810; *Arkhipov R.M., Arkhipov M.V., Babushkin I. et al.* // Opt. Spectrosc. 2016. V. 121. P. 758.
34. *Arkhipov R.M., Arkhipov M.V., Babushkin I. et al.* // Opt. Letters. 2016. V. 41. P. 4983.
35. *Arkhipov R.M., Arkhipov M.V., Babushkin I. et al.* // Sci. Reports. 2017. V. 7. Art. No. 12467.
36. *Arkhipov R., Pakhomov A., Arkhipov M. et al.* // Sci. Reports. 2021. V. 11. Art. No. 1961.
37. *Rosanol N.N., Semenov V.E., Vysotina N.V.* // Laser Phys. 2007. V. 17. P. 1311.
38. *Pusch A., Hamm J.M., Hess O.* // Phys. Rev. A. 2010. V. 82. No. 2. Art. No. 023805.
39. *Архипов Р.М., Архипов М.В., Пахомов А.В. и др.* // Опт. и спектроск. 2017. Т. 123. С. 600; *Arkhipov R.M., Arkhipov M.V., Pakhomov A.V. et al.* // Opt. Spectrosc. 2017. V. 123. P. 610.
40. *Архипов Р.М., Архипов М.В., Пахомов А.В. и др.* // Опт. и спектроск. 2018. Т. 124. С. 510; *Arkhipov R.M., Arkhipov M.V., Pakhomov A.V. et al.* // Opt. Spectrosc. 2018. V. 124. P. 541.
41. *Архипов Р.М.* // Письма в ЖЭТФ. 2021. Т. 113. С. 636; *Arkhipov R.M.* // JETP Lett. 2021. V. 113. P. 611.
42. *Архипов Р.М., Архипов М.В., Пахомов А.В. и др.* // Изв. вузов. Радиофиз. 2023. Т. 66. № 4. С. 317; *Arkhipov R.M., Arkhipov M.V., Pakhomov A.V. et al.* // Radiophys. Quantum Electron. 2024. V. 66. No. 4. P. 286.
43. *Архипов Р.М., Архипов М.В., Пахомов А.В. и др.* // Опт. и спектроск. 2022. Т. 130. № 11. С. 1707; *Arkhipov R.M., Arkhipov M.V., Pakhomov A.V. et al.* // Opt. Spectrosc. 2022. V. 130. No. 11. P. 1443.
44. *Diachkova O.O., Arkhipov R.M., Arkhipov M.V. et al.* // Opt. Commun. 2023. V. 538. Art. No. 129475.
45. *Arkhipov R.M., Diachkova O.O., Arkhipov M.V. et al.* // Appl. Phys. B. 2024. V. 130. P. 52.
46. *Lustig E., Sharabi Y., Segev M.* // Optica. 2018. V. 5. No. 11. P. 1390.
47. *Galiffi E., Tirole R., Yin S. et al.* // Adv. Photonics. 2022. V. 4. No. 1. Art. No. 014002.
48. *Sharabi Y., Dikopoltsev A., Lustig E. et al.* // Optica. 2022. V. 9. No. 6. P. 585.
49. *Boltasseva A., Shalaev V.M., Segev M.* // Opt. Mater. Expr. 2024. V. 14. No. 3. P. 592.
50. *Eichler H.J., Günter P., Pohl D.W.* Laser-induced dynamic gratings. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer-Verlag, 1981.
51. *Arkhipov R., Arkhipov M., Pakhomov A. et al.* // Laser Phys. 2022. V. 32. No. 6. Art. No. 066002.
52. *Архипов Р.М.* // Квант. электрон. 2024. Т. 54. № 2. С. 77.
53. *Arkhipov R., Pakhomov A., Diachkova O. et al.* // Opt. Letters. 2024. V. 49. No. 10. P. 2549.
54. *Diachkova O., Arkhipov R., Pakhomov A. et al.* // Opt. Commun. 2024. V. 565. P. 130666/.
55. *Arkhipov R.* // arXiv:2402.16122. 2024.
56. *Lustig E., Segal O., Saha S. et al.* // Nanophotonics. 2023. V. 12. P. 1.
57. *Saha S., Segal O., Fruhling C. et al.* // Opt. Express. 2023. V. 31. No. 5. P. 8267.
58. *Архипов Р.М., Розанов Н.Н.* // Опт. и спектроск. 2024. Т. 132. № 5. С. 532.
59. *Архипов Р.М., Дьячкова О.О., Архипов М.В. и др.* // Опт. и спектроск. 2024. Т. 132. № 9. С. 918.
60. *Arkhipov R., Pakhomov A., Diachkova O. et al.* // JOSA B. 2024. V. 41. No. 8. P. 1721.
61. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974; *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Quantum mechanics: non-relativistic theory. V. 3. Elsevier, 2013.
62. *Arkhipov R.* // Laser Phys. 2024. V. 34. 36. Art. No. 065301.
63. *Архипов Р.М., Архипов М.В., Розанов Н.Н.* // Опт. и спектроск. 2024. Т. 132. № 4. С. 434.
64. *Arkhipov R., Arkhipov M., Pakhomov A. et al.* // Phys. Rev. A. 2024. V. 109. Art. No. 063113.
65. *Архипов Р.М., Дьячкова О.О., Белов П.А. и др.* // ЖЭТФ. 2024. Т. 166. № 2(8). С. 1.
66. *Аллен Л., Эберли Дж.* Оптический резонанс и двухуровневые атомы. М.: Мир, 1978. 223 с; *Allen L., Eberly J.H.* Optical resonance and two-level atoms. N.Y., Wiley, 1975.
67. *Ярив А.* Квантовая электроника. М.: Советское радио, 1980. 488 с; *Yariv A.* Quantum Electronics. N.Y.: Wiley, 1975.
68. *Розанов Н.Н.* // Опт. и спектроск. 2019. Т. 127. С. 960; *Rosanol N.N.* // Opt. Spectrosc. 2019. V. 127. P. 1050.
69. *Hassan M.T.* // ACS Photonics. 2024. V. 11. No. 2. P. 334.
70. *Архипов Р.М., Архипов М.В., Розанов Н.Н.* // Письма в ЖЭТФ. 2020. Т. 111. С. 586; *Arkhipov R.M., Arkhipov M.V., Rosanol N.N.* // JETP Lett. 2020. V. 111. P. 484.
71. *Манцызов Б.* Когерентная и нелинейная оптика фотонных кристаллов. М.: Физматлит, 2013. 149 с.
72. *Двуужилова Ю.В., Двуужиллов И.С., Шилов Т.Б. и др.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2022. Т. 86. № 12. С. 1708; *Dvuzhilova Yu.V., Dvuzhilov I.S., Shilov T.B. et al.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2022. V. 86. No. 12. P. 1454.
73. *Двуужилова Ю.В., Двуужиллов И.С., Белоненко М.Б.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2024. Т. 88. № 1. С. 80; *Dvuzhilova Yu.V., Dvuzhilov I.S., Belonenko M.B.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2024. V. 88. No. 1. P. 66.

Microcavities and photonic time crystals formed by collision of half-cycle light pulses in a resonant medium

R. M. Arkhipov^{a, *}, M. V. Arkhipov^{a, *}, A. V. Pakhomov^{a, b}, O. O. Diachkova^{a, b}, N. N. Rosanov^a

^a*Ioffe Institute, Saint-Petersburg, 194021 Russia*

^b*St. Petersburg State University, Saint-Petersburg, 199034 Russia*

^{*}*e-mail: arkhipovrostislav@gmail.com*

We discussed the authors' recent research into the generation and ultrafast control of light-induced dynamic microcavities and photonic time crystals created by the collision of half-cycle pulses in a medium. The possibility of guiding microcavities during the collision of self-induced transparency half-cycle pulses of the same polarity has been demonstrated.

Keywords: unipolar pulses, half-cycle pulses, dynamic microcavities, photonic time crystals, population density gratings, coherent effects

О ДИНАМИКЕ ПАРАМЕТРОВ ИМПУЛЬСОВ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В СРЕДЕ В ОБЛАСТИ АНОМАЛЬНОЙ ДИСПЕРСИИ ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ

© 2025 г. В. А. Халяпин^{1, 2, *}, А. Н. Бугай³

¹Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта», Калининград, Россия

²Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Калининградский государственный технический университет», Калининград, Россия

³Международная межправительственная научно-исследовательская организация «Объединенный институт ядерных исследований», Дубна, Россия

*e-mail: slavasxi@gmail.com

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

На основе метода моментов построена система уравнений на параметры импульса, распространяющегося в изотропной среде с дисперсией в виде интеграла Дюамеля. Найден критерий для параметров импульса и среды, разделяющий режимы распространения солитоноподобных импульсов.

Ключевые слова: дисперсия, нелинейность, световой импульс

DOI: 10.31857/S0367676525010139, **EDN:** DAQQAW

ВВЕДЕНИЕ

При выводе модельных уравнений, описывающих распространение лазерных импульсов в нелинейных диспергирующих средах, часто используют два хорошо известных приближения. Распространение квазимонохроматических импульсов в среде с керровской нелинейностью в области прозрачности диэлектрика можно описать нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) для огибающей импульса [1]. При этом соответствующий критерий большого числа осцилляций поля задается выражением $(\omega_0 \tau_p)^2 \gg 1$, где ω_0 — центральная частота импульса, τ_p — его длительность. Для описания импульсов, включающих в себя всего несколько колебаний светового поля $\omega_0 \tau_p \sim 1$ (предельно короткие импульсы), используют уравнения, записанные непосредственно для электрического поля импульса или его спектра [2–8]. Для таких импульсов приближение медленно меняющейся огибающей (ММО) становится неприменимо. В обоих случаях, когда спектр импульса лежит в области оптической прозрачности, соответствующее условие можно записать в виде $|\omega_0 - \omega_R| \tau_p \gg 1$, где ω_R — характерная частота линии резонансного поглощения. При этом выражение для дисперсионного отклика можно разложить в ряд. Нетруд-

но видеть, что для квазимонохроматических импульсов данное соотношение совпадает с условием ММО при существенном удалении несущей частоты импульса от резонанса. Однако, в случае материалов с несколькими узкими линиями поглощения, например, молекулярных газов, условие оптической прозрачности может нарушаться даже когда импульс содержит достаточно большое число осцилляций поля, хотя существенного поглощения при этом не происходит и материал можно с хорошей степенью точности считать прозрачным. Теоретическому анализу уравнений, описывающих распространение импульсов в указанных случаях, и нахождению условий солитоноподобных режимов и посвящена настоящая работа.

МЕТОД МОМЕНТОВ

Уравнение, описывающее однонаправленное распространение оптических импульсов в нелинейной среде с дисперсией, имеет вид

$$\frac{\partial E(z, \tau)}{\partial z} = -\frac{2\pi}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \times \left(\int_0^\infty \chi(\tau') E(z, \tau - \tau') d\tau' + \frac{\chi^{(3)}}{4\pi} E^3(z, \tau) \right). \quad (1)$$

где $\tau = t - z/c$, z — координата, вдоль которой распространяется сигнал, $\chi(\tau) = \Theta(\tau)2e^2 \times \sum_{l,j} N_l A_{lj} \sin \omega_{lj} \tau / m \omega_{lj}$ — функция импульсного отклика, связанная с диэлектрической восприимчивостью среды преобразованием Фурье

$$\chi(\omega) = \int_0^\infty \chi(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{n_0 - 1}{2\pi}, \quad (2)$$

$$n_0(\lambda) = 1 + \frac{4\pi e^2}{m\omega_0^2} \sum_{l,j} N_l A_{lj} \frac{\lambda_{lj}^2}{\lambda_0^2 - \lambda_{lj}^2},$$

$\Theta(\tau)$ — функция Хевисайда, e — заряд электрона, N_l — концентрация атомов или молекул сорта l , A_{lj} — величина, пропорциональная силе осциллятора j -го резонанса, ω_{lj} — частота соответствующего резонанса, c — скорость света в вакууме, λ_0 — центральная длина волны импульса, $\chi^{(3)} = \sum_l N_l \chi_l^{(3)} / \sum_l N_l$ — результирующая кубическая восприимчивость среды, $n_2 = \sum_l N_l n_{2,l} / \sum_p N_l$ — результирующий нелинейный показатель преломления, $\chi_l^{(3)}$, $n_{2,l}$ — кубическая восприимчивость и нелинейный показатель преломления атомов или молекул сорта l . Представим электрическое поле E в виде

$$E(z, \tau) = \frac{1}{2} \psi(z, \tau) \exp(-i\omega_0 \tau) + \text{к.с.} \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial z} = & -\frac{2\pi}{c} \int_0^\infty \frac{\partial \chi(\tau')}{\partial \tau'} \psi(z, \tau - \tau') \times \\ & \times e^{i\omega_0 \tau'} d\tau' + i\gamma \psi |\psi|^2 - \frac{\gamma}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial \tau} (\psi |\psi|^2). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь ψ является огибающей электрического поля, $\gamma = 3\chi^{(3)}\omega_0/8c = n_0^2\omega_0 n_2/8\pi$ — коэффициент кубической нелинейности, $n_0 \approx 1 + 2\pi\chi$ — показатель преломления среды, ω_0 — центральная частота сигнала. При переходе от уравнения (1) к (4) мы пренебрегли генерацией гармоник. В частности, в работе [9] было показано, что для импульсов, включающих в себя порядка одного-двух колебаний поля кубическая нелинейность обуславливает генерацию четвертой гармоники. Соответствующий эффект генерации нечетных гармоник в среде с квадратичной нелинейностью был описан в работе [10]. Отметим, что уравнение (1) описывает как квази-монохроматические импульсы, так и предельно короткие [11–13].

Анализ динамики параметров импульса проводится на основе метода моментов [14]. Пробное решение выберем в виде

$$\psi = B \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\tau - T^2}{\tau_p}\right)^2 (1 + iC) + i(\phi + \Omega(\tau - T))\right), \quad (5)$$

где B — амплитуда сигнала, C — параметр, определяющий частотную модуляцию, ϕ — фаза, Ω —

сдвиг частоты. Все параметры зависят от координаты z . Определим моменты импульса в виде

$$W = \int_{-\infty}^\infty |\psi|^2 d\tau, \quad (6)$$

$$\tau_p^2 = \frac{2}{W} \int_{-\infty}^\infty (\tau - T)^2 |\psi|^2 d\tau, \quad (7)$$

$$C = \frac{i}{W} \int_{-\infty}^\infty (\tau - T) \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial \tau} \right) d\tau, \quad (8)$$

$$T = \frac{i}{W} \int_{-\infty}^\infty \tau |\psi|^2 d\tau, \quad (9)$$

$$\Omega = -\frac{i}{2W} \int_{-\infty}^\infty \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial \tau} \right) d\tau, \quad (10)$$

фазу найдем из следующего выражения

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \psi^* - \frac{\partial \psi^*}{\partial \tau} \psi \right) d\tau = & -2i \sum_{l,j} D_{lj} \times \\ & \times \text{Im} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \psi^*(\tau) \psi(\tau - \tau') e^{i(\omega_0 - \omega_{lj})\tau'} d\tau d\tau' + \\ & + 2i\gamma \int_{-\infty}^\infty |\psi|^4 d\tau - i\frac{\gamma}{\omega_0} \text{Im} \int_{-\infty}^\infty |\psi|^2 \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя метод моментов, получаем

$$W = W_0 \exp\left(2 - \text{Im} \int_0^z k_s dz\right), \quad (12)$$

$$\frac{\partial \tau_p}{\partial z} = \text{Im} \left[\frac{(1 + iC)^2}{2\tau_p} \frac{\partial^2 k_s}{\partial \omega_0^2} \right], \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial z} = & \text{Re} \left[\frac{(1 + C^2)(1 + iC)}{\tau_p^2} \frac{\partial^2 k_s}{\partial \omega_0^2} \right] + \\ & + \frac{\gamma W}{\sqrt{2\pi}\tau_p} \left(1 - \frac{\Omega}{\omega_0}\right), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \text{Re} \left[(1 + iC) \frac{\partial k_s}{\partial \omega_0} \right] + \frac{3\gamma W}{2\sqrt{2\pi}\omega_0\tau_p}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = \text{Im} \left[\frac{(1 + C^2)}{\tau_p^2} \frac{\partial k_s}{\partial \omega_0} \right] - \frac{\gamma W C}{2\sqrt{2\pi}\omega_0\tau_p^3}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z} = & \text{Re} \left[k_s + \frac{(1 + iC)^2}{4\tau_p^2} \frac{\partial^2 k_s}{\partial \omega_0^2} \right] + \\ & + \frac{\gamma W}{4\sqrt{2\pi}\tau_p} \left(5 + \frac{\Omega}{\omega_0}\right) + \Omega T_z. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $k_s = i \sum_{l,j} D_{lj} \tau_p (2iF(\zeta_{lj}) + \sqrt{\pi} \exp(-\zeta_{lj}^2)) \div \sqrt{1 + C^2}$ назовем солитонным волновым числом, $\zeta_{lj} = \tau_p \Delta\omega_{lj} / \sqrt{1 + C^2}$, $\Delta\omega_{lj} = \omega_0 - \Omega - \omega_{lj}$, $D_{lj} =$

$= 2\pi e^2 N_l A_{ij} / mc$, $W = B^2 \tau_p \sqrt{\pi}$, $W_0 = B_0^2 \tau_0 \sqrt{\pi}$, B_0 , τ_0 — начальные значения соответствующих параметров $F(\xi) = \exp(-\xi^2) \int_0^\xi \exp(t^2) dt$ — функция Доусона.

СОЛИТОНОПОДОБНЫЙ РЕЖИМ РАСПРОСТРАНЕНИЯ

В качестве среды будем рассматривать воздух, который на 21% состоит из кислорода O_2 и на 79% из азота N_2 . На аргон Ar , водяные пары H_2O и углекислый газ CO_2 приходится меньше одного процента от концентрации всех молекул. Показателем преломления воздуха представлен в работе [15]. Рассмотрим окно прозрачности воздуха, принадлежащее диапазону от 3.5–4.1 мкм, в котором дисперсия групповой скорости β_2 аномальна. Основной вклад в аномальную дисперсию воздуха дают две резонансные длины волны углекислого газа $\lambda_1 = 4.223$ мкм, $\lambda_2 = 4.291$ мкм, и поэтому в выражении для коэффициента групповой дисперсии $\beta_2 = (\lambda_0^3 / 2\pi c^2) d^2 n_0(\lambda_0) / d\lambda^2 = \partial^2 k / \partial \omega_0^2$ (где $k = \omega_0 n_0 / c$ — волновое число) можно учитывать только эти слагаемые.

В нелинейный показатель преломления воздуха дает наибольший вклад кислород и азот [16]

$$n_2 = 0.79 n_{2,N_2} + 0.21 n_{2,O_2},$$

$$n_{2,O_2,N_2} = \frac{P_{O_2,N_2}^{-1}}{\lambda_{O_2,N_2}^{-2} - \lambda_0^{-2}}. \quad (18)$$

Здесь $P_{N_2} = 14.63$ ГВт, $\lambda_{N_2} = 0.3334$ мкм для азота и $P_{O_2} = 14.62$ ГВт, $\lambda_{N_2} = 0.3360$ мкм для кислорода. Аппроксимация (18) справедлива в диапазоне 1–4 мкм.

Для рассмотрения солитоноподобного режима положим $C = 0$, $\partial C / \partial z = 0$. Кроме того, будем рассматривать предел

$$\Delta \omega \tau_p \geq 2.67, \quad (19)$$

где $\Delta \omega = \omega_0 - \omega_1$, ω_1 — ближайшая к центральной частоте импульса резонансная частота среды. В этом пределе справедливо асимптотическое разложение функции Доусона в ряд [17]

$$F(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^3} + \frac{3}{8x^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2n-1)}{2^{n+1} x^{2n+1}}. \quad (20)$$

Из системы (12)–(17) получаем

$$W = B_0^2 \tau_0 \sqrt{\pi} = 8\pi I_0 \tau_0 \sqrt{\pi} / cn_0, \quad \Omega = 0,$$

$$I_0 = \frac{c\sqrt{2}}{\tau_0^2 \omega_0 n_0 n_2} \left| \frac{\partial^2 k_{sR}}{\partial \omega_0^2} \right|, \quad (21)$$

$$T = \left(\frac{\partial k_{sR}}{\partial \omega_0} + \frac{3n_0 n_2 I_0}{2\sqrt{2}c} \right) z, \quad (22)$$

$$\varphi = \left(k_{sR} + \frac{1}{4\tau_0} \frac{\partial^2 k_{sR}}{\partial \omega_0^2} + \frac{5n_0 n_2 \omega_0 I_0}{4\sqrt{2}c} \right) z. \quad (23)$$

$k_{sR} = \text{Re } k_s$ — действительная часть солитонного волнового числа, величину $\partial^2 k_{sR} / \partial \omega_0^2$ можно назвать солитонным коэффициентом групповой дисперсии. Зависимость интенсивности импульса от его длительности, описываемая выражением (21), представлена на рис. 1а и 1б. Для рис. 1а условие (19) выполняется если $\tau_p > 35$ фс, а для рис. 1б — если $\tau_p > 72$ фс.

Из уравнения (4) можно получить уравнение с дисперсией в виде ряда, если разложить подынтегральную функцию $\psi(z, \tau - \tau')$ в ряд и восполь-

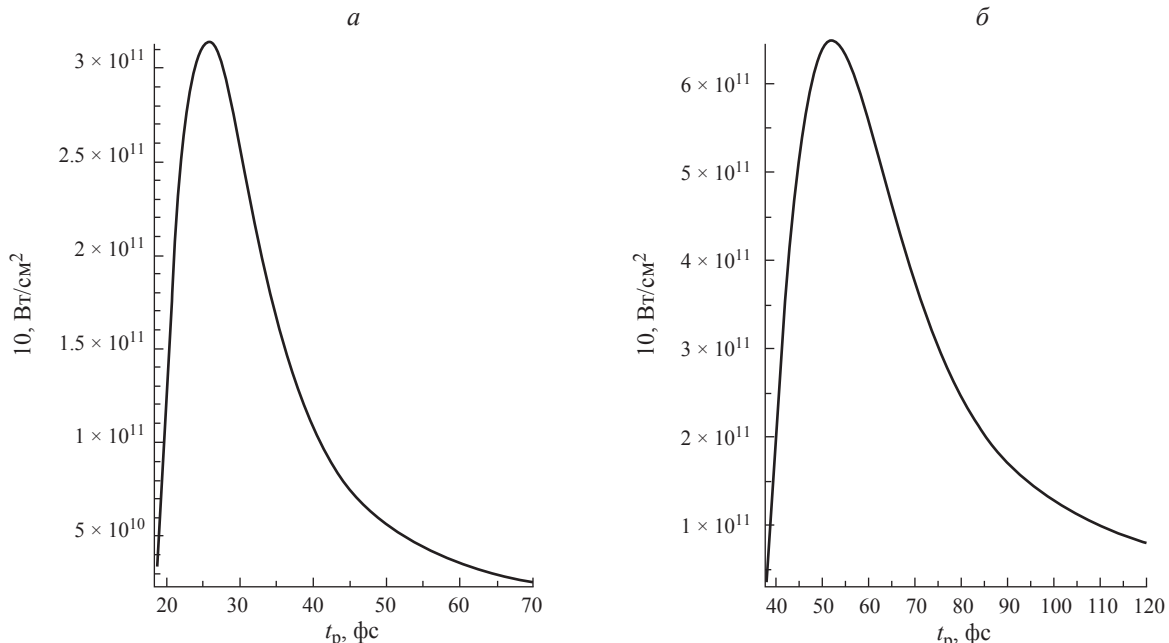


Рис. 1. Зависимость интенсивности импульса от его длительности на центральной длине волны сигнала $\lambda = 3.6$ (а), 3.9 мкм (б).

зоваться преобразованием Фурье $\partial^n \chi(\omega)/\partial \omega^n = (i)^n \int_0^\infty \tau^n \chi(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$.

Выполнив преобразования, получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = i \left(k - \frac{\omega_0}{c} \right) \psi - \sum_n \frac{(i)^{n-1}}{n!} \beta_n \frac{\partial^n \psi}{\partial \tau^n} + i\gamma \psi |\psi|^2 - \frac{\gamma}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial \tau} (\psi |\psi|^2). \quad (24)$$

Здесь $\beta_1 = \partial k / \partial \omega_0 - 1/c$, $\beta_n = \partial^n k / \partial \omega_0^n$ ($n \geq 2$), $k = n_0 \omega_0 / c$. Решение этого уравнения совпадает с (21)–(23), если функцию Дуусона представить в виде асимптотического ряда (20). Таким образом, разложение дисперсии (24) справедливо, если выполняется условие (19). В противном случае для описания динамики импульсов нужно рассматривать уравнения (1) или (4).

Определим пределы применимости пробного решения (5) с помощью правила сохранения электрической площади [18]

$$\int_{-\infty}^{\infty} E(\tau, z) d\tau = \text{const}. \quad (25)$$

Очевидно, что если электрическое поле импульса можно представить в виде производной по времени $E = \partial \Phi / \partial \tau$ от функции, убывающей на бесконечности, то условие (25) выполняется и площадь импульса равна нулю [4]. Представим функцию Φ в виде [19]

$$\Phi(\tau, z) = -\frac{\psi}{2i\omega_0} \exp(-i\omega_0\tau) + \text{к.с.}, \quad (26)$$

тогда

$$E(\tau, z) = \frac{1}{2} \left(\psi \exp(-i\omega_0\tau) - \frac{1}{i\omega_0} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \exp(-i\omega_0\tau) + \text{к.с.} \right). \quad (27)$$

Вклад второго слагаемого в (27) пропорционален $1/\omega_0 \tau_p$ и им можно пренебречь, если импульс включает в себя порядка пяти и более осцилляций поля [19]. В этом случае (27) переходит в (3) с огибающей в виде (5). Таким образом, правило сохранения площади импульса накладывает ограничения на применимость пробного решения вида (5). Следует отметить, что приближение однонаправленного распространения следует применять с осторожностью, поскольку оно может приводить к нарушению правила сохранения электрической площади [20–22].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью метода моментов аналитически описано распространения солитоноподобных импульсов в воздухе. Вклад дисперсии учтен посредством интеграла Дюамеля. Найден критерий (19), отделяющий два режима распространения сигнала. Показано, что и для импульсов, включающих в себя порядка десяти колебаний поля, может быть неприменимо приближение ММО, если спектр импуль-

са лежит вблизи резонанса среды. Для этих случаев получена система уравнений на параметры импульса. Найдено частое решение этой системы.

Работа Халыпина В.А. выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства науки и высшего образования РФ № 075-02-2024-1430.

Авторы благодарят профессора С.В. Сазонова за полезные обсуждения в ходе подготовки работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kivshar Yu.S., Agrawal G.P. Optical solitons: from fibers to photonic crystals. New York: Academic Press Inc, 2003. 540 p.
2. Brabec T., Krausz F. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. P. 3282.
3. Беленов Э.М., Назаркин А.В. // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 51. С. 252; Belenov E.M., Nazarkin A.V. // JETP Lett. 1990. V. 51. P. 252.
4. Козлов С.А., Сазонов С.В. // ЖЭТФ. 1997. Т. 111. С. 404; Kozlov S.A., Sazonov S.V. // JETP. 1997. V. 84. P. 221.
5. Sazonov S.V., Ustinov N.V. // Phys. Rev. A. 2020. V. 100. P. 508.
6. Sazonov S.V., Ustinov N.V. // Rom. Rep. Phys. 2020. V. 72. P. 508.
7. Сазонов С.В. // Письма в ЖЭТФ. 1991. Т. 53. С. 400; Sazonov S.V. // JETP Lett. 1991. V. 53. P. 420.
8. Сазонов С.В. // Письма в ЖЭТФ. 2021. Т. 114. С. 160; Sazonov S.V. // JETP. Lett. 2021. V. 114. P. 132.
9. Drozdov A.A., Kozlov S.A., Sukhorukov A.A., Kivshar Y.S. // Phys. Rev. A. 2012. V. 86. Art. No. 053822.
10. Sazonov S.V. // J. Russ. Laser Res. 2018. V. 39. No. 3. P. 252.
11. Калинович А.А., Сазонов С.В. // Изв. РАН. Сер. физ. 2024. Т. 88. № 1. С. 60; Kalinovich A.A., Sazonov S.V. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2024. V. 88. No. 1. P. 49.
12. Кошкин К.В., Сазонов С.В., Калинович А.А., Комиссарова М.В. // Изв. РАН. Сер. физ. 2024. Т. 88. № 1. С. 68; Koshkin K.V., Sazonov S.V., Kalinovich A.A., Komissarova M.V. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2024. V. 88. No. 1. P. 56.
13. Кошкин К.В., Сазонов С.В., Калинович А.А., Комиссарова М.В. // Изв. РАН. Сер. физ. 2023. Т. 87. № 12. С. 1713; Koshkin K.V., Sazonov S.V., Kalinovich A.A., Komissarova M.V. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2023. V. 87. No. 12. P. 1796.
14. Santhanam J., Agrawal G. // Opt. Commun. 2003. V. 222. P. 413.
15. Voronin A.A., Zheltikov A.M. // Sci. Reports. 2017. V. 7. P. 46111.
16. Fedorov V.Yu., Stortzakakis S. // Sci. Appl. 2020. V. 9. P. 186.

17. *Fedorov U.A. et al.* // Acta Universitaria. 2019. V. 29. P. 1.
18. *Розанов Н.Н.* // Опт. и спектроск. 2009. Т. 107. С. 761; *Rosanol N.N.* // Opt. Spectrosc. 2009. V. 107. P. 721.
19. *Сазонов С.В., Халяпин В.А.* // Опт. и спектроск. 2003. Т. 95. С. 429; *Sazonov S.V., Khalyapin V.A.* // Opt. Spectrosc. 2003. V. 95. P. 401.
20. *Пахомов А.В., Розанов Н.Н., Архипов М.В., Архипов Р.М.* // Письма в ЖЭТФ. 2024. Т. 119. № 2. С. 100; *Pakhomov A.V., Rosanol N.N., Arkhipov M.V., Arkhipov R.M.* // JETP. Lett. 2024. V. 119. No. 2. P. 94.
21. *Богатская А.В., Волкова Е.А., Попов А.М.* // Laser Phys. Lett. 2024. V. 21. Art. No. 015401.
22. *Богатская А.В., Попов А.М.* // Письма в ЖЭТФ. 2023. Т. 188. № 4. С. 291; *Bogatskaya A.V., Popov A.M.* // JETP. Lett. 2023. V. 118. No. 4. P. 296.

On the dynamics of the parameters of pulses propagating in the medium with anomalous dispersion of the group velocity

V. A. Khalyapin^{a, b, *}, A. N. Bugay^c

^a*Immanuel Kant Baltic Federal University,
Kaliningrad, 236016 Russia*

^b*Kaliningrad State Technical University,
Kaliningrad, 236001 Russia*

^c*Joint Institute for Nuclear Research,
Dubna, 141980 Russia*

*e-mail: tereshchenko.ia19@physics.msu.ru

We analyzed the mutual influence of simultaneous processes of second harmonic generation and parametric down conversion within the framework of a fully quantum approach. The effect of depletion of quantum pumping has been revealed. The effect of establishing a balance between the processes under consideration and achieving an equilibrium number of photons in the field modes is found. The generation of a strongly entangled two-mode field is demonstrated.

Keywords: quantum optics, non-classical light, parametric down conversion, squeezed vacuum, second harmonic generation, entangled field state

УДК 537.86:535.016

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ РАДИОФОТОНИКИ В ПРОЕКТИРОВАНИИ ПРИЕМНЫХ УСТРОЙСТВ СВЧ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ И РЕГИСТРАЦИИ РАДИОГОЛОГРАММ

© 2025 г. Д. Буркитбаев^{1, *}, В. В. Кулагин², Р. В. Рыжук³, В. В. Валуев³, В. А. Черепенин⁴

¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», Москва, Россия

²Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», Государственный астрономический институт имени П. К. Штернберга, Москва, Россия

³Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия

⁴Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова Российской академии наук», Москва, Россия

*e-mail: daurendo@mail.ru

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

Предложена схема реализации радиофотонного приемного устройства СВЧ сигналов для формирования и регистрации радиоголограмм. Численно и экспериментально исследована работа такого приемного устройства. Предложен метод обработки данных для определения координат объекта в случае сферичности отраженной волны при недостаточном удалении приемника от объекта.

Ключевые слова: микроволновая фотоника, радиофотонный приемный канал, оптическое гетеродинирование

DOI: 10.31857/S0367676525010147, EDN: DAMALI

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время все более востребованной становится технология радиовидения в радиофотонных радарх, для осуществления которой необходимо создавать радиопортрет «блестящих точек» удаленного объекта в СВЧ диапазоне [1–4]. Такие радары могут быть использованы применительно к ситуациям, когда окружающее пространство требует точного контроля — в аэропортах, морских портах, в густонаселенных городах, на крупных автодорогах и др. Для реализации этой технологии необходимо создание приемных устройств с высокой разрешающей способностью. При этом использование приемных устройств СВЧ, построенных на исключительно радиоэлектронной компонентной базе, не всегда может подходить для решения такой задачи из-за ограничений по рабочей полосе частот. В то же время более высокая разрешающая способность по дальности может быть достигнута с помощью использования широкополосных и сверхширокополосных импульсов в качестве локационных сигналов [5–7]. Высокое разрешение

по углу поступления сигнала на приемную антенну может быть получено с помощью голографического метода, где для формирования радиоголограммы к отраженной волне добавляется опорная СВЧ волна и регистрируется результат интерференции двух волн, т.е. записывается электронная радиоголограмма, которая затем может быть оцифрована и подвергнута спектральному анализу для извлечения информации о местоположении удаленного объекта [8, 9]. Приемные устройства, спроектированные на основе радиофотонных технологий, позволяют реализовать алгоритм формирования и регистрации радиоголограмм [10–12].

СХЕМА ПРИЕМНОГО УСТРОЙСТВА

Схема приемного устройства для формирования и регистрации радиоголограммы представлена на рис. 1. Она разработана для решения одномерной задачи определения угла прихода отраженного сигнала на приемную антенну от удаленного объекта. Решение этой задачи требует формирования и регистрации радиоголограммы отраженной

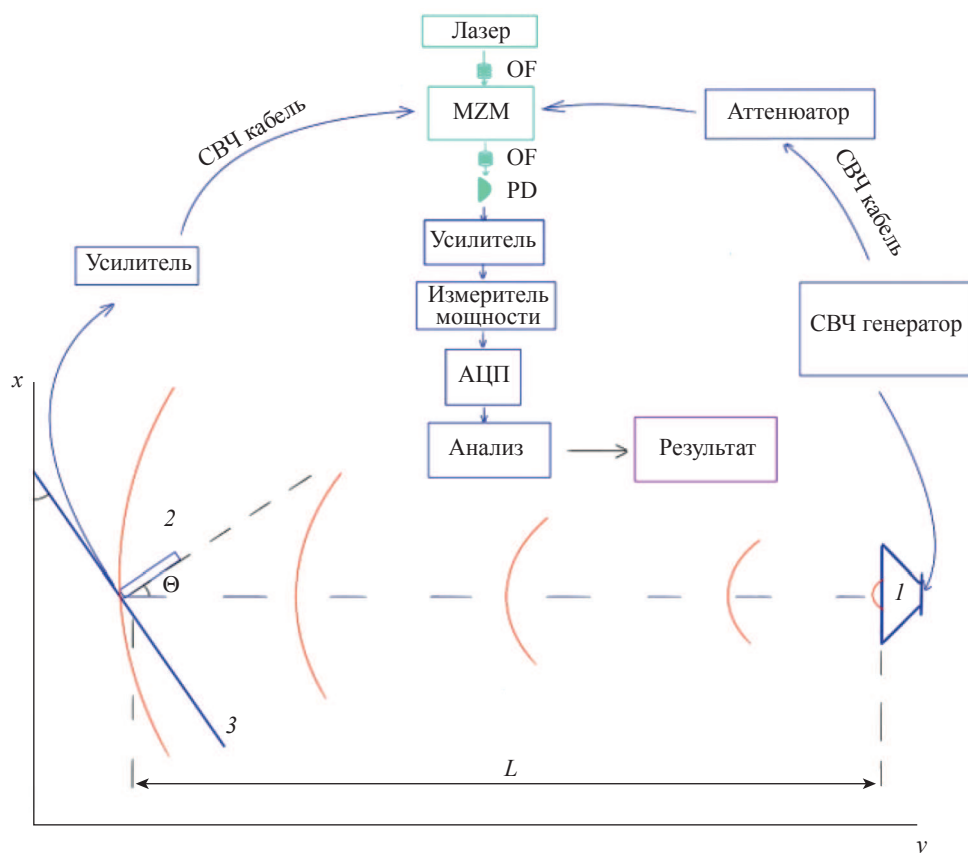


Рис. 1. Схема приемного устройства: 1 — излучающая антенна, 2 — приемная антенна, 3 — линия передвижения приемной антенны, θ — угол, L — расстояние между излучающей и приемной антеннами, OF — оптоволокну, MZM — двойной параллельный электрооптический модулятор Маха–Цандера, PD — фотодетектор, Анализ — анализ с помощью пакета программ, Результат — выходные данные.

от объекта волн СВЧ. Для этого опорная волна в радиофотонном блоке обработки, состоящем из волоконного лазера, двойного параллельного электрооптического модулятора и фотодетектора, смешивалась с входным сигналом каждого приемника линейной антенной решетки. В результате этого формировалась интерференционная картина взаимодействия отраженной и опорной волн, т. е. происходил учет фазовой информации фронта отраженной волны. Затем полученная интерференционная картина подвергалась спектральному анализу, в ходе которого определялся угол поступления отраженной волны на приемную антенну.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ СХЕМЫ С ПОМОЩЬЮ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

С помощью численных моделирований в среде MatLab была исследована работа такой системы. Волна, отраженная от объекта, рассматривалась как излучение с синусоидальной зависимостью от времени с плоским фронтом (дальняя зона). В таком случае разность фаз между сигналами СВЧ, регистрируемыми соседними приемниками, является постоянной. После смешивания отраженного и опорного сигналов в двойном парал-

лельном модуляторе Маха–Цандера и последующего их фотодетектирования формируется сигнал, содержащий сведения об интенсивности интерференционной картины отраженной и опорной волн I_{p-r} в точке нахождения отдельного приемника. При этом все оптические частотные компоненты оказываются отфильтрованными. При условии постоянства разности фаз сигналов между соседними приемниками I_{p-r} является синусоидальной функцией, аргументом которой является номер приемника в решетке или его координаты вдоль решетки. То есть на решетке формируется пространственная волна с частотой, зависящей от угла падения отраженной волны на решетку (угол падения отсчитывается от вертикали к середине линейной антенной решетки). Поэтому угол падения можно определять, вычисляя преобразование Фурье и находя частотный максимум интерференционной картины I_{p-r} .

При проведении численных моделирований использовались следующие параметры схемы: длина волны СВЧ 3 см, длина решетки 1.5 м, количество приемников 100, расстояние между соседними приемниками линейной антенной решетки 1.5 см. Фаза опорной волны соответствовала случаю нормального падения (угол θ градусов от вер-

тикали к линейной антенной решетке) при смешивании отраженного и опорного сигналов в модуляторе Маха—Цандера. На рис. 2а продемонстрирована I_{p-r} в результате усреднения по времени для случая одиночного отражающего объекта (шум предполагался малым), на рис. 2б показан ее спектр. В рассматриваемом случае отраженная волна падала на антенную решетку под углом 50 градусов от нормали. Различие формы I_{p-r} от синусоидальной функции связано с относительно малой частотой расположения приемников на длине пространственной волны. Однако расстояние между приемниками на периоде пространственной волны выбрано с учетом того, чтобы при скользящем падении отраженной волны на периоде находилось не менее двух точек оцифровки для сохранения информации. В случае низкого уровня шума угол падения волны определяется с достаточной точностью и составляет 50 градусов. В случае увеличенных шумов точность определения угла будет детерминирована полушириной спектрального пика, т.е. линейным размером антенной решетки. Если рассматривать полуширину спектрального пика по уровню половинной мощности, то она оказывается порядка одного градуса, что соответствует дифракционной ширине луча.

На рис. 2в изображена I_{p-r} в случае двух отражающих объектов, расположенных под углами 25 и 50 градусов от нормали. На рис. 2г отображен ее спектр. Направления на два объекта хорошо определяются, несмотря на более сложный вид I_{p-r} , связанный с биением двух близких частот отраженных сигналов. На рис. 2д продемонстрирован спектр I_{p-r} для случая двух близкорасположенных по углу объектов (объекты расположены под углами 20 и 21 градус от нормали). Объекты могут быть разрешены, что подтверждает сделанную выше оценку.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СХЕМЫ

В качестве источника отраженной волны в схеме экспериментального макета приемника для определения угла падения сигнала (рис. 1) используется рупорная антенна. Излучение СВЧ генератора, настроенного на частоту 7.5 ГГц, разделяется на 2 канала. Первый канал ведет к рупорной антенне, излучающей сигнал, второй — через аттенюатор (ослабление 20 дБ) к одному из плеч двойного параллельного модулятора Маха—Цандера, предварительно настроенного на квадратурную рабочую точку (середина линейного участка передаточной функции). Приемная антенна в виде отрезка прямоугольного волновода, перемещаемая вдоль линии 3, регистрирует падающие волны со сферическим фронтом, излучаемые рупорной антенной. Сигнал с приемной антенны поступает на малошумящий СВЧ усилитель (26 дБ). Затем усилен-

ная волна поступает на второе плечо двойного параллельного электрооптического модулятора. Оптические поля, промодулированные СВЧ сигналами, поступившими на оба плеча модулятора, суммируются и поступают на фотодетектор по оптическому волокну. СВЧ поле, полученное в результате фотодетектирования, поступает на измеритель мощности через усилитель (23 дБ). Данные о замеренной мощности оцифровываются и затем анализируются с помощью пакета программ в среде MatLab.

В схеме использованы следующие компоненты:

- Agilent N1912A — измеритель мощности СВЧ;
- IXblue MXIQ-LN-30 — двойной параллельный модулятор Маха—Цандера с полосой 30 ГГц;
- Pure Photonics PPCL550 — малошумящий непрерывный одномодовый лазер с длиной волны излучения 1.5 мкм;
- НПФ Дилаз ДФДШМ40 — широкополосный InGaAs PIN фотодетектор;
- Agilent аттенюаторы 3 и 10 дБ;
- Малошумящий усилитель с полосой частот 1–18 ГГц.

Экспериментальные данные, полученные на макете, результаты их обработки, а также сравнение их с теоретической моделью представлены на рис. 3. Интерференционная картина, полученная в ходе эксперимента для угла прихода сигнала 30.8°, показана на рис. 3а (красная кривая 1). Ее форма аналогична кривой на рис. 2а, полученной в результате численного моделирования схемы. На рис. 3а также помещена кривая, демонстрирующая результат интерференции в случае поля сферической волны (синяя кривая 2), когда отраженный объект находится на недостаточном удалении от приемной антенны. Разность фаз двух кривых являлась свободным параметром и была выбрана из условия максимально близкого соответствия кривых. Можно заключить, что теория дает достаточно хорошее совпадение с экспериментом.

На рис. 3б продемонстрированы угловые спектры, полученные в результате Фурье-анализа интерференционных картин. Оценка угла, проведенная по середине экспериментального распределения (по уровню –3 дБ), составляет 30.8°. Это значение совпадает с истинным углом в эксперименте и является близким к углу 30.2°, полученному по середине теоретического спектра. Точность вычисления угла определяется шириной распределения, полученного в результате Фурье-анализа. В рассматриваемом случае ширина спектра значительная и составляет около 20°. Это обусловлено тем, что расстояние до источника сигнала является недостаточно большим, поэтому падающая волна является не плоской, а сферической. В результате величина периода пространственной волны изменяется нелинейно вдоль линии перемещения

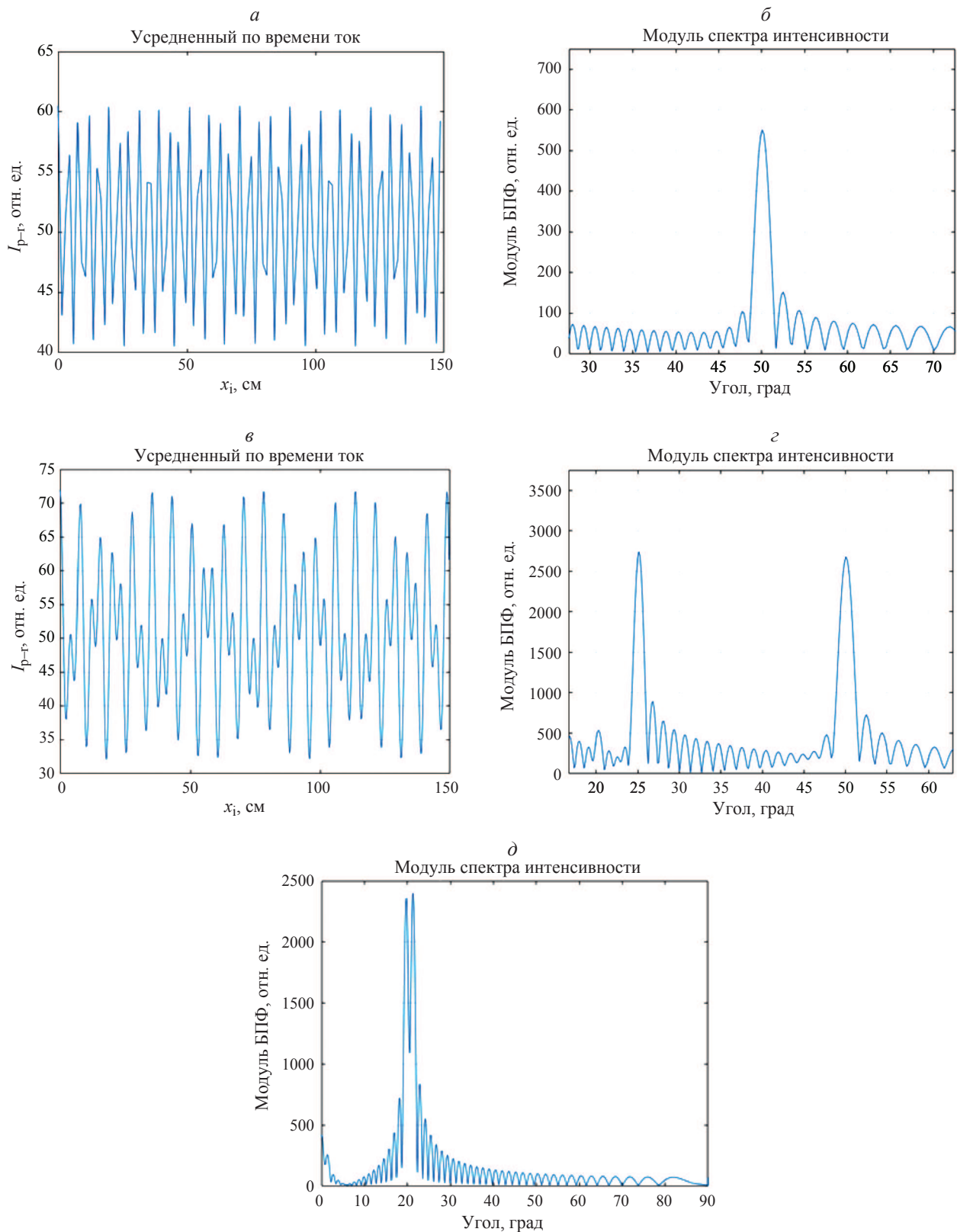


Рис. 2. Сигнал на выходе фотодетектора для одиночного отражающего объекта, расположенного под углом 50 градусов от нормали: усредненная по времени интенсивность интерференционной картины I_{p-r} (а); спектральный вид I_{p-r} (б). Сигнал на выходе фотодетектора в случае двух отражающих объектов: усредненная по времени I_{p-r} для объектов, расположенных под углами 25 и 50 градусов от нормали (в) и ее спектральный вид (г); спектральный вид I_{p-r} (д) в случае двух близкорасположенных целей под углами 20 и 21 градус.

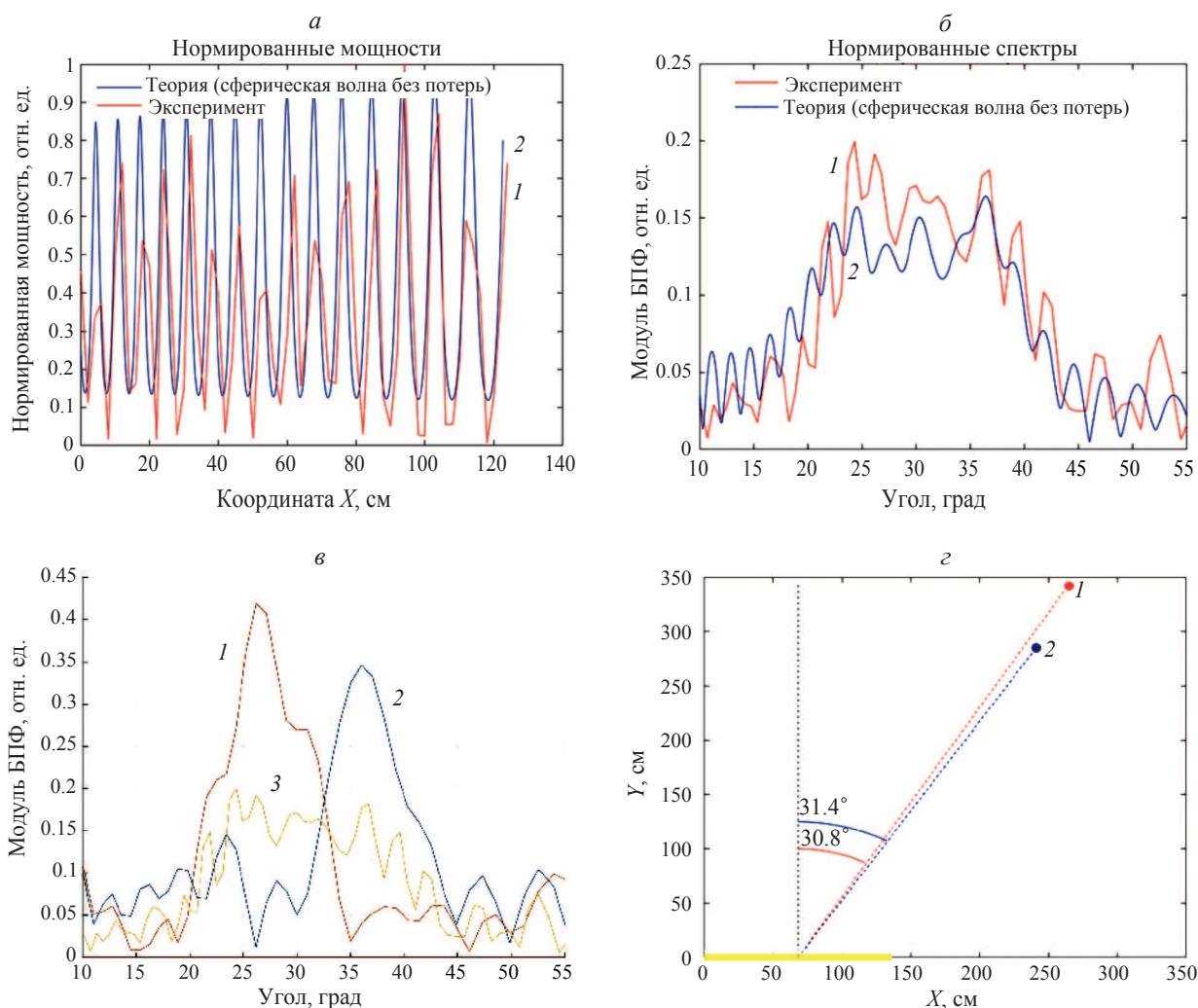


Рис. 3. Экспериментальные данные и результаты их обработки. Сравнение экспериментальных и теоретических интерференционных картин (а) и угловых спектров (б): 1 — эксперимент, 2 — теория (сферическая волна). Предложенный алгоритм обработки экспериментальных данных (в): 1, 2 — спектры данных, полученных с правой и левой половин антенной решетки, 3 — полный спектр для сравнения. Исходные и восстановленные координаты цели (г): 1 — истинное положение источника, 2 — восстановленное положение, желтая линия — антенная решетка.

приемной антенны (линейной антенной решеткой). Для небольших уровней шума (отношение сигнал/шум более 10–12 дБ) такой метод оценки угла прихода сигнала может быть приемлемым, однако для более зашумленных данных алгоритм обработки должен быть модифицирован.

Путем к определению истинных координат источника может служить решение уравнений максимального правдоподобия с использованием метода последовательных приближений. Первое приближение может быть получено путем деления массива данных интерференционной картины на две равные части, соответствующие правой и левой половинам антенной решетки. В ходе регистрации излучения каждая часть решетки обнаруживает источник под своим углом. В рассматриваемом случае эти углы составляют 26° и 36° согласно спектрам 1 и 2 на рис. 3в. Точка пересечения прямых линий, проходящих через середины половин антенной решетки под найденными углами, дает све-

дения о положении источника в первом приближении (рис. 3г). В рассматриваемом случае обработки данных измеренное значение угла поступления сигнала составляет 31.4 градуса. Таким образом, ошибка по углу оказывается менее 1°, а координаты x и y истинного (265,342) и восстановленного (241,285) источников различаются в пределах 10% и 20% соответственно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача определения угла прихода отраженной волны на линейную антенную решетку. Предложена схема радиопотонного приемного устройства СВЧ для формирования и регистрации радиоголограмм. Проведено численное и экспериментальное исследования такого устройства. Предложен алгоритм обработки интерференционной картины для определения координат отражающего объекта в случае сферичности отраженной волны при недостаточном удалении приемника

от объекта. Массив данных с антенной решетки делится на две части для определения угла падения на каждую из них. Точка пересечения прямых, проходящих через середины половин антенной решетки под найденными углами, может быть использована в качестве первого приближения к истинным координатам отражающего объекта, которое может быть уточнено с использованием метода максимального правдоподобия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dong J., Zhang F., Jiao Z., Li W. // Optics Express. 2020. V. 28. No. 13. Art. No. 19113.
2. Pan S., Ye X., Zhang Y. et al. // IEEE J. Microwaves. 2021. V. 1. No. 1. P. 176.
3. Dong J., Sun Q., Jiao Z. et al. // Photonics Res. 2022. V. 10. No. 7. P. 1679.
4. Pan S., Zhang Y. // J. Light. Technol. 2020. V. 38. P. 5450.
5. Кулагин В.В., Валуев В.В., Конторов С.М. и др. // Изв. РАН. Сер. физ. 2021. Т. 85. № 1. С. 91;
6. Кулагин В.В., Валуев В.В., Конторов С.М. и др. // Изв. РАН. Сер. физ. 2022. Т. 86. № 6. С. 895;
7. Кулагин В.В., Валуев В.В., Буркитбаев Д. и др. // Изв. РАН. Сер. физ. 2023. Т. 87. № 1. С. 49;
8. Fan B., Zhang F., Ma C. et al. // IEEE Photonics Technol. Lett. 2020. V. 32. No. 21. P. 1397.
9. Zhang F., Guo Q., Wang Z. et al. // Opt. Express. 2017. V. 25. No. 14. Art. No. 16274.
10. Wang A., Wo J., Luo X. et al. // Optics Express. 2018. V. 26. No. 16. Art. No. 20708.
11. Valuev V.V., Kulagin V.V., Ryzhuk R.V. et al. // 5th Int. Conf. TERA-2023. (Moscow, 2023). P. 125.
12. Кулагин В.В., Валуев В.В., Каргин Н.И. и др. // В сб. тр. «Мокеровские чтения». М.: НИЯУ МИФИ, 2023. 39 с.

Application of microwave photonics methods in the design of microwave receiving devices for the formation and registration of radio holograms

D. Burkitbayev^{a, *}, V. V. Kulagin^b, R. V. Ryzhuk^c, V. V. Valuev^c, V. A. Cherepenin^d

^aLomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia

^bLomonosov Moscow State University, Sternberg State Astronomical Institute, Moscow, 119991 Russia

^cNational Research Nuclear University MEPhI, Moscow, 115409 Russia

^dKotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 125009

*e-mail: daurendo@mail.ru

A scheme for implementing a microwave photonics receiving device for microwave signals for the formation and registration of radio holograms is proposed. The operation of such a receiving device was studied numerically and experimentally. A data processing method is proposed to reduce the error in determining the source coordinates.

Keywords: microwave photonics, radio-photonics receiving channel, optical heterodyning

УДК 621.385.69

ГЕНЕРАЦИЯ СУБТЕРАГЕРЦОВОГО ХАОТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В СИЛЬНОТОЧНОМ РЕЛЯТИВИСТСКОМ ГИРОТРОНЕ В РЕЖИМЕ УМНОЖЕНИЯ ЧАСТОТЫ

© 2025 г. Н. С. Гинзбург¹, И. В. Зотова¹, А. Н. Леонтьев^{1, 2, *}, А. М. Малкин¹,
Р. М. Розенталь^{1, 2}, А. С. Сергеев¹

¹Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики имени А. В. Гапонова—Грехова Российской академии наук», Нижний Новгород, Россия

²Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского», Нижний Новгород, Россия

*e-mail: leontiev@ipfran.ru

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

Показано, что для сильноточного релятивистского гиротрона Ка-диапазона, работающего в режиме хаотической генерации на низшей моде круглого волновода $TE_{1,1}$, возможно эффективное излучение на седьмой гармонике гирочастоты на моде $TE_{7,2}$. Относительная ширина спектра хаотического субтерагерцового излучения при этом может превышать 5% при мегаваттном уровне выходной мощности.

Ключевые слова: релятивистский гиротрон, терагерцовое излучение, шумовая генерация

DOI: 10.31857/S0367676525010157, **EDN:** DAJTHA

ВВЕДЕНИЕ

В субтерагерцовом и терагерцовом диапазоне частот наиболее мощными источниками монохроматического излучения являются гиротроны, основанные на отборе энергии от винтовых электронных потоков, движущихся в вакууме. На сегодняшний день реализованы непрерывные источники излучения в диапазоне 0.5 ТГц с выходной мощностью 250 Вт [1], и в импульсном режиме в диапазоне 0.67 ТГц с выходной мощностью 200 кВт [2] и в диапазоне 1 ТГц с выходной мощностью 1–1.5 кВт [3, 4]. Одновременно, гиротроны демонстрируют и сложную хаотическую динамику, развивающуюся в условиях большой надкритичности (превышения рабочего тока над стартовым значением). Так, в работах [5, 6] было показано, что при определенных условиях в гиротронах могут быть реализованы режимы генерации шумоподобного излучения с относительной шириной спектра до 10%. Результаты этих исследований нашли экспериментальное подтверждение в работе [7], где было получено излучение Ка-диапазона с относительной шириной спектра 1.5%, что на порядок превышало значения, полученные в предшествующих эксперимен-

тальных работах [8–10]. В свою очередь, в работе [11] обсуждалась возможность создания мощного источника широкополосного хаотического излучения на основе сильноточного электронного потока. Согласно оценкам, ширина спектра такого источника в Ка-диапазоне может превышать 30 ГГц.

Вместе с тем значительный интерес представляет увеличение частоты источников хаотического излучения, что требует увеличения значения резонансного магнитного поля. Поставленная задача может быть упрощена, если использовать взаимодействие на гармониках гирочастоты. Это позволяет уменьшить рабочее значение магнитного поля пропорционально номеру гармоники. Но селективному возбуждению хаотических колебаний на гармониках гирочастоты препятствует паразитное возбуждение колебаний на основной гармонике.

В этой связи представляет интерес использование эффекта умножения частоты в гиротронах. Впервые эффект умножения был теоретически исследован в работе [12], где было показано, что максимальная мощность излучения на второй гармонике может составлять до нескольких процентов от мощности излучения на основной гармонике.

В дальнейшем в специально поставленных экспериментах было зарегистрировано одновременное излучение на второй, третьей и четвертой гармониках в гиротроне с рабочей частотой 0.13 ТГц [13]. Однако до недавнего времени подобные режимы не вызывали значительного интереса. Ситуация изменилась с выходом работ [14, 15], где за счет фильтрации низкочастотного излучения были сделаны экспериментальные измерения уровня мощности на второй гармонике гирочастоты в диапазоне 0.5 ТГц. Было показано, что отношение интенсивности второй гармоники к первой находится в диапазоне 10^{-4} – 10^{-3} , а максимальная мощность в диапазоне 0.52 ТГц близка к 10 мВт. В дальнейшем излучение этого гиротрона было использовано для проведения спектральных измерений методом радиоакустического детектирования в диапазонах 0.53, 0.79 и 1.06 ТГц, соответствующих генерации излучения на 2, 3 и 4 гармониках гирочастоты [16].

В недавней работе [17] впервые была исследована генерация хаотического излучения на второй гармонике гирочастоты в слаборелятивистском гиротроне. Была показана возможность генерации излучения диапазона 0.5 ТГц с шириной спектра около 20 ГГц и уровнем мощности порядка 0.5 мВт.

Данная работа посвящена анализу возможностей получения широкополосного шумоподобного излучения субтерагерцового диапазона в сильноточном гиротроне в режиме умножения частоты.

МОДЕЛЬ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уже в первых теоретических работах, в которых рассматривалась нестационарная динамика гиротронов на основной циклотронной гармонике, было показано, что для перехода к нестационарным режимам генерации необходимо значительное увеличение параметра тока [18]:

$$I_0 = 16 \frac{eJ_b}{mc^3} \cdot G \cdot \frac{\beta_{\parallel}}{\beta_{\perp}^6}, \quad (1)$$

где J_b — ток электронного пучка, m , e — масса и заряд электрона, G — фактор связи пучка с рабочей модой, β_{\parallel} , β_{\perp} — начальные продольная и поперечные скорости электронов, нормированные на скорость света c . При этом для получения режимов широкополосной хаотической генерации значение параметра тока должны быть $I_0 \geq 1$. Для сильноточных электронных потоков данное соотношение достаточно легко обеспечивается при взаимодействии с низшей модой электродинамической системы $TE_{1,1}$.

Известно, что для эффективного умножения излучения в гармонику с номером s необходимо выполнение двух условий [19, 20]. Если гиротрон на основной циклотронной гармонике возбуждается на моде $TE_{m,n}$, то азимутальный индекс M моды

на s -й гармонике должен удовлетворять соотношению:

$$M = s \cdot m. \quad (2)$$

Одновременно должно выполняться условие кратности критических частот,

$$\Omega_c = s \cdot \omega_c, \quad (3)$$

которое удобно переписать для значений собственных чисел мод:

$$\nu_M = \frac{R_0 \Omega_c}{c} = s \cdot \nu_m = s \frac{R_0 \omega_c}{c}, \quad (4)$$

где R_0 — радиус однородного участка резонатора гиротрона.

В гиротронах традиционно используются резонаторы в виде отрезка цилиндрического волновода круглого сечения, спектр мод которых является неэквидистантным, в силу чего одновременное точное выполнение условий (2) и (4) невозможно. Однако достаточно точно указанные условия выполняются для комбинации моды $TE_{1,1}$ на основной циклотронной гармонике и моды $TE_{7,2}$ на седьмой циклотронной гармонике.

Рассмотрим модель гиротрона в виде отрезка слабонерегулярного цилиндрического волновода радиусом R_0 , в котором винтовой электронный пучок возбуждает $TE_{1,1}$ на основной циклотронной гармонике и моду $TE_{7,2}$ на седьмой циклотронной гармонике. Будем полагать, что частота излучения на первой гармонике близка как к критической частоте моды в резонаторе $\bar{\omega}_1^c$, так и к циклотронной частоте $\omega_H = eH_0/m_c c \gamma_0$, где H_0 — величина ведущего магнитного поля. В свою очередь, частота излучения на седьмой гармонике близка к критической частоте второй моды $\bar{\omega}_7^c$ и к семикратному значению циклотронной частоты $7\omega_H$. Электрическое поле каждой из мод в рабочем пространстве может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \text{Re} (A_1(z, t) \vec{E}_1^1(r) \exp[i\omega_H t - i\varphi]), \\ \vec{E}_7 &= \text{Re} (A_7(z, t) \vec{E}_7^1(r) \exp[7(i\omega_H t - i\varphi)]), \end{aligned} \quad (5)$$

где $A_{1,7}(z, t)$ — медленно меняющиеся комплексные амплитуды волн на первой и второй гармонике, соответственно, функции $\vec{E}_1^{1,7}(r)$ описывают радиальную структуру мод, φ — азимутальный угол. Электронно-волновое взаимодействие может быть описано следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial^2 a_1}{\partial Z^2} + \frac{\partial a_1}{\partial \tau} + (i\Delta_1 + i\delta_1(Z) + \sigma_1) a_1 &= \\ = i \frac{I_1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} p d\varphi d\theta_0, & \quad (6) \\ i \frac{\partial^2 a_7}{\partial Z^2} + \frac{\partial a_7}{\partial \tau} + (i\Delta_7 + i\delta_7(Z) + \sigma_7) a_7 &= \end{aligned}$$

$$= i \frac{I_7}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} p^7 d\varphi d\theta_0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial Z} + \frac{g^2}{4} \frac{\partial p}{\partial \tau} + ip(|p|^2 - |p_0|^2) =$$

$$= i(a_1 + a_7(p^*)^6),$$

$$\text{где } a_1 = \frac{eA_1 J_0 (\nu_{11} R_b / R_0)}{mc\omega_H} \frac{1}{\gamma_0 \beta_{\perp}^3} Z, \quad a_7 =$$

$$= \frac{eA_2 J_0 (\nu_{72} R_b / R_0)}{mc\omega_H} \frac{\beta_{\perp}^3}{\gamma_0} - \text{нормированные амплитуды волн, } Z = \frac{\beta_{\perp}^2}{2\beta_{\parallel}} \frac{\omega_H}{c} z, \quad \tau = \frac{\beta_{\perp}^4}{8\beta_{\parallel}^2} \omega_H t - \text{продольная}$$

координата и время, p — нормированный на начальное значение комплексный поперечный импульс,

$$\Delta_1 = 8 \frac{\beta_{\parallel 0}^2}{\beta_{\perp 0}^4} \frac{\omega_H - \bar{\omega}_1^c}{\bar{\omega}_1^c}, \quad \Delta_7 = 392 \frac{\beta_{\parallel 0}^2}{\beta_{\perp 0}^4} \frac{7\omega_H - \bar{\omega}_7^c}{\bar{\omega}_7^c},$$

$$\delta_1(Z) = 8 \frac{\beta_{\parallel 0}^2}{\beta_{\perp 0}^4} \frac{\bar{\omega}_1^c - \bar{\omega}_1^c(Z)}{\bar{\omega}_1^c}, \quad (7)$$

$$\delta_7(Z) = 392 \frac{\beta_{\parallel 0}^2}{\beta_{\perp 0}^4} \frac{\bar{\omega}_7^c - \bar{\omega}_7^c(Z)}{\bar{\omega}_7^c}$$

циклотронная и геометрическая расстройки, $\omega_1^c(Z) = \nu_{11} c / R(Z)$, $\omega_7^c(Z) = \nu_{72} c / R(Z)$ — функции, задающие зависимости критических частот мод от продольной координаты,

$$I_1 = 16 \frac{eI_b}{m_e c^3} \frac{\beta_{\parallel}}{\gamma_0 \beta_{\perp}^6} \frac{J_0^2 (\nu_{11} R_b / R_0)}{(\nu_{11}^2 - 1) J_1^2 (\nu_{11})},$$

$$I_2 = 64 s^3 \left(\frac{s^s}{2s!} \right)^2 \frac{eI_b}{m_e c^3} \frac{\beta_{\parallel} \beta_{\perp}^6}{\gamma_0} \frac{J_0^2 (\nu_{72} R_b / R_0)}{(\nu_{72}^2 - s^2) J_7^2 (\nu_{72})} \quad (8)$$

— параметры возбуждения для пучка с радиусом инжекции R_b и током I_b , ν_{11} , ν_{72} — первый и второй корни уравнений $J_1'(\nu) = 0$ и $J_7'(\nu) = 0$, соответственно, $s = 7$ — номер циклотронной гармоники, на которой происходит взаимодействие со второй модой, $\sigma_1 = 4\beta_{\parallel}^2 / Q_1 \beta_{\perp}^4$, $\sigma_7 = 196\beta_{\parallel}^2 / Q_7 \beta_{\perp}^4$ — коэффициенты поглощения, $Q_{1,7}$ — омические добротности мод.

Будем считать, что на входе в пространство взаимодействия электроны равномерно распределены по фазам циклотронного вращения $p(Z=0) = \exp(i\theta_0)$, $\theta_0 = [0, 2\pi)$. Для амплитуд каждой из мод используются безотражательные граничные условия на левой и правой границах системы:

$$a_1(\tau, 0) - \frac{1}{\sqrt{i\pi}} \int_0^{\tau} \frac{e^{-i(\delta_1(0) + \Delta_1 - i\sigma_1)(\tau - \tau')}}{\sqrt{\tau - \tau'}} \times$$

$$\times \frac{\partial a_1(\tau', 0)}{\partial Z} d\tau' = 0,$$

$$a_1(\tau, 0) - \frac{1}{\sqrt{i\pi}} \int_0^{\tau} \frac{e^{-i(\delta_1(0) + \Delta_1 - i\sigma_1)(\tau - \tau')}}{\sqrt{\tau - \tau'}} \times$$

$$\times \frac{\partial a_1(\tau', 0)}{\partial Z} d\tau' = 0,$$

$$a_7(\tau, 0) - \frac{1}{\sqrt{2i\pi}} \int_0^{\tau} \frac{e^{-i(\delta_7(0) + \Delta_7 - i\sigma_7)(\tau - \tau')}}{\sqrt{\tau - \tau'}} \times \quad (9)$$

$$\times \frac{\partial a_7(\tau', 0)}{\partial Z} d\tau' = 0,$$

$$a_1(\tau, L) + \frac{1}{\sqrt{i\pi}} \int_0^{\tau} \frac{e^{-i(\delta_1(L) + \Delta_1 - i\sigma_1)(\tau - \tau')}}{\sqrt{\tau - \tau'}} \times$$

$$\times \frac{\partial a_1(\tau', L)}{\partial Z} d\tau' = 0,$$

$$a_7(\tau, L) + \frac{1}{\sqrt{2i\pi}} \int_0^{\tau} \frac{e^{-i(\delta_7(L) + \Delta_7 - i\sigma_7)(\tau - \tau')}}{\sqrt{\tau - \tau'}} \times$$

$$\times \frac{\partial a_7(\tau', L)}{\partial Z} d\tau' = 0,$$

где L — нормированная длина пространства взаимодействия.

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Исследуем далее динамику сильнооточного гиротрона Ка-диапазона с рабочей модой $TE_{1,1}$ на первой гармонике гирочастоты, возбуждаемом винтовым электронным пучком с энергией 500 кэВ, током 0.5 кА и питч-фактором 1.0. Для указанных параметров величина параметра тока на первой циклотронной гармонике составляет величину около 3.5.

На рис. 1 представлены зависимости средней мощности генерации и ширины спектра на первой и седьмой циклотронной гармониках гирочастоты при изменении магнитного поля. Ширина спектра вычислялась на уровне -10 дБ относительно максимального уровня спектра. При увеличении магнитного поля от 20 до 26 кЭ средняя мощность генерации на первой гармонике снижается с уровня около 8 МВт до 1 МВт. При этом средняя ширина спектра увеличивается со значений порядка 1 ГГц до значений порядка 10–15 ГГц.

В свою очередь на седьмой циклотронной гармонике наблюдается несколько иная картина. Спектр излучения сосредоточен в диапазоне более 240 ГГц (рис. 2). Средняя мощность генерации при увеличении магнитного поля от 20 до 26 кЭ нарастает со значений на уровне сотен киловатт до уровня 1–2 МВт. Уровень мощности более 1 МВт достигается при магнитном поле около 22 кЭ. В свою очередь ширина спектра хаотической генерации колеблется относительно уровня 10 ГГц. При увеличении магнитного поля выше 25 кЭ ширина спектра последовательно уменьшается, при этом в области магнитного поля 26 кЭ происходит его

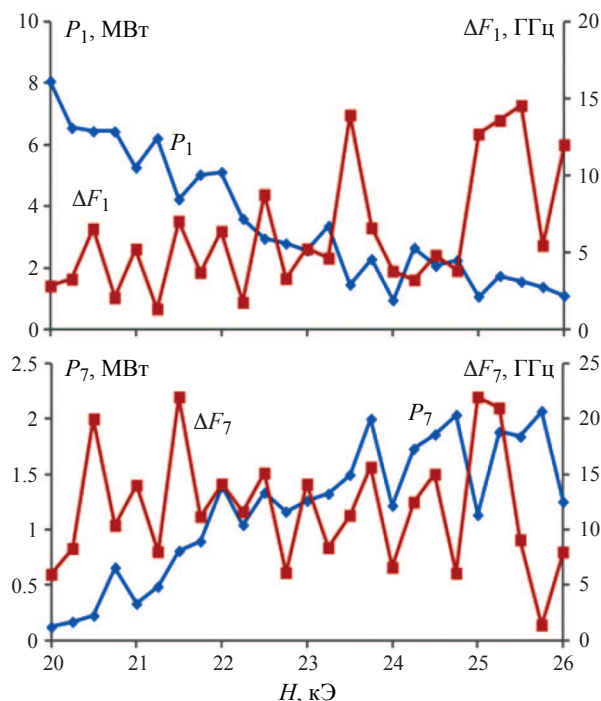


Рис. 1. Зависимость средней мощности генерации и ширины спектра на первой и seventh циклотронных гармониках от величины магнитного поля.

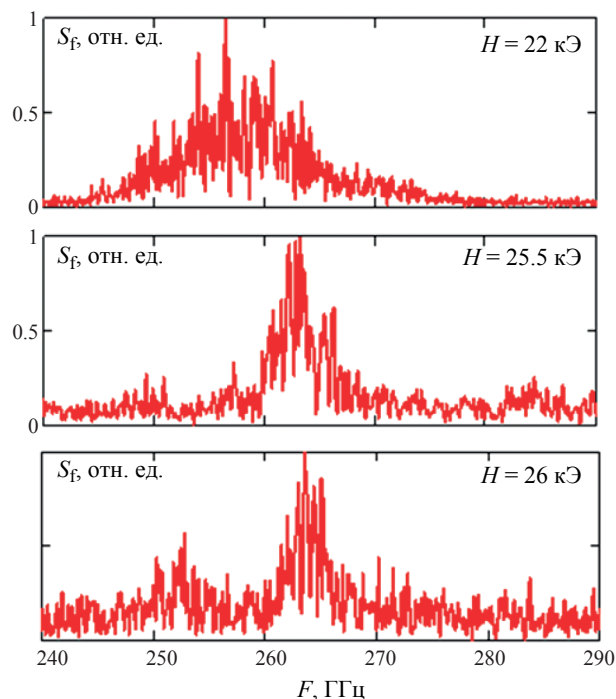


Рис. 2. Спектры выходного излучения на seventh циклотронной гармонике.

раздвоение. Таким образом, оптимальным является диапазон магнитных полей 22–25 кЭ, в котором в субтерагерцовом диапазоне наблюдается устойчивая генерация со средним уровнем мощности более 1 МВт при ширине спектра 10 и более ГГц.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Недавние экспериментальные исследования подтвердили перспективность использования режимов умножения частоты в гиротронах, возбуждаемых сильноточными электронными потоками [21]. В таких гиротронах уровень излучения на гармониках гирочастоты оказывается существенно большим, по сравнению с системами со слаборелятивистскими электронными пучками. Проведенное исследование позволяет сделать аналогичный вывод и для режимов хаотической генерации.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-12-00161).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Glyavin M.Y., Kuftin A.N., Morozkin M.V. et al. // IEEE Electron Device Lett. 2021. V. 42. No. 11. P. 1666.
2. Glyavin M.Yu., Luchinin A.G., Nusinovich G.S. et al. // Appl. Phys. Lett. 2012. V. 101. P. 153503.
3. Glyavin M.Yu., Luchinin A.G., Golubiatnikov G.Yu. // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 100. Art. No. 015101.
4. Kalynov Yu.K., Bandurkin I.V., Osharin I.V. et al. // IEEE Electron Dev. Lett. 2023. V. 44. No. 10. P. 1740.
5. Ginzburg N.S., Rozental R.M., Sergeev A.S. et al. // Phys. Rev. Lett. 2017. V. 119. Art. No. 034801.
6. Rozental' R.M., Ginzburg N.S., Sergeev A.S. et al. // Tech. Phys. 2017. V. 62. P. 1562.
7. Rozental R.M., Fedotov A.E., Ginzburg N.S. et al. // Tech. Phys. Lett. 2019. V. 45. P. 511.
8. Chang T.H., Chen C.N., Barnett L.R., Chu K.R. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. Art. No. 064802.
9. Rozental R.M., Zaitsev N.I., Kulagin I.S. et al. // IEEE Trans. Plasma Sci. 2004. V. 32. No. 2. P. 418.
10. Alberti S., Ansermet J.-Ph., Avramides K.A. et al. // Phys. Plasmas. 2012. V. 19. No. 12. Art. No. 123102.
11. Розенталь Р.М., Леонтьев А.Н., Сергеев А.С. и др. // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 2. С. 243; Rozental R.M., Leontyev A.N., Sergeev A.S. et al. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2020. V. 84. No. 2. P. 189.
12. Завольский Н.А., Нусинович Г.С., Павельев А.Б. // Изв. вузов. Радиофиз. 1988. Т. 31. № 3. С. 361; Zaval'skii N.A., Nusinovich G.S., Pavel'ev A.B. // Radiophys Quantum Electron. 1988. V. 31. No. P. 269.
13. Idehara T., Yamagishi Y., Tatsukawa T. // Int. J. Infrared Millim. THz Waves. 1997. V. 18. P. 259.
14. Румянцев В.В., Маремьянин К.В., Фокин А.П. и др. // ФТП. 2019. Т. 53. № 9. С. 1244; Rumyant-

- sev V.V., Maremyanin K.V., Fokin A.P. et al. // Semi-conductors. 2019. V. 53. No. 9. P. 1217.*
15. *Glyavin M., Zotova I., Rozental R. et al. // Int. J. Infrared Millim. THz Waves. 2020. V. 41. P. 1245.*
16. *Golubiatnikov G.Y., Koshelev M.A., Tsvetkov et al. // IEEE Trans. Terahertz. Sci. Tech. 2020. V. 10. No. 5. P. 502.*
17. *Rozental R.M., Ginzburg N.S., Malkin A.M. et al. // Int. J. Infrared Millim. THz Waves. 2023. V. 44. No. 11–12. P. 924.*
18. *Ginzburg N.S., Nusinovich G.S., Zavolsky N.A. // Int. J. Electron. 1986. V. 61. P. 881.*
19. *Denisov G.G., Zotova I.V., Malkin A.M. et al. // Phys. Rev. E. 2022. V. 106. No. 2. Art. No. L023203.*
20. *Denisov G., Zotova I., Zheleznov I. et al. // Appl. Sciences. 2022. V. 12. Art. No. 11370.*
21. *Abubakirov E.B., Denisenko A.N., Leontyev A.N. et al. // IEEE Trans. Electron Dev. 2024. V. 71. No. 4. P. 2821.*

Generation of sub terahertz chaotic radiation in a high-current relativistic gyrotron in the frequency multiplication mode

N. S. Ginzburg^a, I. V. Zotova^a, A. N. Leontyev^{a, b, *}, A. M. Malkin^a, R. M. Rozental^{a, b},
A. S. Sergeev^a

^a*Federal Research Center A. V. Gaponov—Grekhov Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences,
Nizhny Novgorod, 603950 Russia*

^b*National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
Nizhny Novgorod, 603005 Russia*

*e-mail: leontiev@ipfran.ru

It is shown that for a high-current relativistic Ka-band gyrotron operating in the chaotic generation mode on the lowest mode of a circular waveguide $TE_{1,1}$, effective radiation is possible at the seventh harmonic of the gyrofrequency on the $TE_{7,2}$ mode. The relative width of the spectrum of chaotic sub terahertz radiation can exceed 5% at a megawatt output power level.

Keywords: relativistic gyrotron, terahertz radiation, noise generation

УДК 621.385.624

ВЛИЯНИЕ ДВУМЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ГРУППИРОВАНИЕ ИНТЕНСИВНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКОВ В ШИРОКОПОЛОСНЫХ КЛИСТРОНАХ

© 2025 г. В. Е. Родякин¹, *, В. Н. Аксенов²

¹ Федеральное государственное бюджетное учреждение «Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Москва, Россия

² Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», Москва, Россия

* e-mail: vrodyakin@mail.ru

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

Представлены результаты исследования влияния двумерных процессов на группирование электронных потоков в однолучевых и многолучевых широкополосных клистро́нах. Приводятся результаты сравнительного анализа группирования с помощью одномерной и двумерной модели. Анализируются причины ошибок в определении выходных параметров широкополосных клистро́нов, полученных с помощью одномерных программ.

Ключевые слова: электронный пучок, широкополосный клистрон, усилитель, группирование электронов, скоростная модуляция, многолучевой клистрон

DOI: 10.31857/S0367676525010166, EDN: DAERAC

ВВЕДЕНИЕ

Весьма актуальной задачей остается разработка и создание мощных широкополосных усилительных клистро́нов. В настоящее время клистро́ны с полосой от 2 до 15% широко используются в передатчиках мощных РЛС различного назначения в дециметровом, сантиметровом и миллиметровом диапазонах волн. В своей основе клистрон является резонансным узкополосным прибором типа «О» с дискретным взаимодействием электронного потока с электромагнитными полями резонаторов и с полосой усиления менее 1%.

Для расширения ширины рабочей полосы частот клистро́на используют низкодобротные промежуточные резонаторы, с относительно сильной отстройкой частоты от центральной частоты рабочего диапазона усилителя. Первые несколько промежуточных резонаторов обычно настроены на частоты внутри рабочей полосы и образуют линейный усилитель, который формирует полосу усиливаемых частот и необходимый уровень усиления. Последующие промежуточные резонаторы настраиваются на частоты, выходящие за пределы правой границы полосы, и образуют нелинейный группирователь, ответственный за получение высокого КПД клистро́на и коррекцию его полосовой характеристики.

Кроме расширения естественной полосы усиления клистро́на за счет отстроек промежуточных резонаторов, для широкополосных клистро́нов важно, чтобы выходная система также имела широкую полосу. Для этого необходимо уменьшать ее нагруженную добротность, что, в свою очередь, увеличивает активную составляющую проводимости выходной резонаторной системы. Для обеспечения эффективного отбора энергии в выходной системе необходимо, чтобы проводимость электронного потока примерно равнялась проводимости выходной системы. Поэтому для увеличения проводимости электронного потока либо используют высокопереванские электронные пучки, либо многолучевые конструкции. Кроме того, для расширения полосы в качестве выходных систем широкополосных приборов используют многозазорные резонаторы.

Все эти факторы усложняют физические процессы в клистро́нах и требует при разработке их конструкции системного двумерного и трехмерного численного анализа. Применение же одномерных программ для оптимизации параметров конструктивных элементов широкополосных клистро́нов ограничено начальной стадией исследования процессов в таких приборах. В работах [1, 2] были показаны пределы применимости аналитиче-

ских и одномерных численных моделей для описания нелинейных процессов в клистронах. Там же были приведены оценки влияния на эффективность группирования со стороны поперечного расщепления пучка, вызванного радиальной неоднородностью сил пространственного заряда, провисанием потенциала, радиальной неоднородностью полей резонаторов.

В данной работе рассматриваются особенности влияния данных двумерных факторов на эффективность группирования в широкополосных клистронах на примере однолучевого и многолучевого клистронов. Поскольку воздействие на эффективность группировки электронного пучка различных нелинейных факторов происходит одновременно, определить степень влияния каждого фактора в отдельности представляется затруднительным. Поэтому для исследования их влияния будем использовать результаты сравнительного анализа эффективности группирования по различным физическим моделям.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Теория мощных электровакуумных приборов СВЧ в общем случае строится на принципах классической электродинамики и сводится к решению совместной системы уравнений Максвелла и уравнений движения заряженных частиц. Прямое решение данной системы в общей постановке требует использования нестационарных трехмерных численных моделей электронного потока и электромагнитных полей. Такое решение является весьма трудоемким, требует значительных вычислительных затрат, и применяется только в таких полных компьютерных кодах, как CST Studio Suite [3].

При анализе процессов группирования и отбора энергии в клистронах в двумерном приближении использовался программный комплекс PARS [4], разработанный авторами на основе модернизации программы «Арсенал-МГУ» [5], зарекомендовавшей себя в нашей стране и за рубежом как надежный инструмент для разработки и исследования многочисленных клистронных усилителей [6–9]. В модели электронный пучок представляется последовательностью заряженных колец, при движении которых учитываются продольная и радиальная координаты, а также все три компоненты скорости.

Для проведения сравнительных расчетов в одномерном приближении использовалась программа «Клистрон-МГУ» [10], успешно применявшаяся при разработке многочисленных клистронов в СССР. В модели электронный пучок представляется в виде последовательности заряженных дисков, при движении которых учитываются только продольная координата и продольная компонента скорости.

Помимо различия в моделях электронного пучка программы отличаются в подходах к вычислению амплитуд напряжений, возникающих в зазорах резонаторов. В одномерной программе «Клистрон-МГУ» в эквивалентной схеме резонатора вводится статическая комплексная проводимость электронного пучка $G_{\text{en}} + iB_{\text{en}}$, которая рассчитывается по аналитическим формулам в предположении, что влетающий в резонатор электронный пучок является немодулированным. Для нахождения амплитуды напряжения на зазоре резонатора используется линейное приближение, позволяющее по известному значению первой гармоники конвекционного тока I_{1n} в центре зазора резонатора вычислить значение наведенного тока:

$$I_{\text{нав } n} = M_n I_{1n}, \quad (1)$$

где M_n — коэффициент электронного взаимодействия зазора n -го резонатора. Амплитуда напряжения на зазоре n -го резонатора в линейном приближении определяется из следующего выражения:

$$V_n = \frac{I_{\text{нав } n}}{\sqrt{(G_{\text{cn}} + G_{\text{en}})^2 + (B_{\text{cn}} + B_{\text{en}})^2}}, \quad (2)$$

где $B_{\text{cn}} = \frac{1}{\rho_n} \left[1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]$ — реактивная проводимость резонатора, $G_{\text{cn}} = \frac{1}{\rho_n Q_n}$ — активная проводимость резонатора, где $\omega_n = 2\pi f$, Q_n , ρ_n , f_n , собственная добротность, волновое сопротивление и собственная частота рабочей моды резонатора.

В двумерной программе PARS для вычисления амплитуды напряжения на зазоре промежуточного резонатора применяется уже нелинейный подход, при котором используется теория Шокли–Рамо, а напряжение в зазоре резонатора определяется итерационным методом через мощность взаимодействия:

$$P(t) = \int_{V_{\text{gn}}} \vec{E}_{\text{gn}} \cdot \vec{j} dV_{\text{gn}}, \quad (3)$$

где V_{gn} — объем области взаимодействия электрического поля n -го резонатора \vec{E}_{gn} с электронным пучком, \vec{j} — вектор плотности конвекционного тока пучка. При этом на каждом периоде колебаний поля в резонаторе $T = 1/f$ проводится вычисление реальной и мнимой части комплексного наведенного тока:

$$\text{Re } \bar{I}_{\text{нав } n} = \frac{2}{Td_n} \int_0^T dt \iiint_{V_{\text{gn}}} [j_r(r, z, t) F_m(r, z) + j_z(r, z, t) F_{zn}(r, z)] \sin(\omega t + \alpha_n) dV_{\text{gn}}, \quad (4)$$

$$\text{Im } \bar{I}_{\text{нав } n} = \frac{2}{Td_n} \int_0^T dt \iiint_{V_{\text{gn}}} [j_r(r, z, t) F_m(r, z) + j_z(r, z, t) F_{zn}(r, z)] \cos(\omega t + \alpha_n) dV_{\text{gn}}, \quad (5)$$

где $F_m(r, z)$, $F_{zn}(r, z)$ — функции распределения радиальной и продольной компонент собственного электрического поля n -го резонатора. Амплитуда и фаза напряжения на $k + 1$ периоде (итерации) определяется из следующего выражения:

$$\vec{V}_n^{k+1} = \sqrt{\frac{\vec{I}_{\text{наб } n} \vec{V}_n^k}{(G_{\text{сн}} + iB_{\text{сн}})}}. \quad (6)$$

Итерации продолжаются до сходимости амплитуды и фазы напряжения на зазоре резонатора к стационарному значению. Разработанный нелинейный метод анализа позволяет учесть в квазистационарном квазитрехмерном приближении нелинейные эффекты взаимодействия интенсивных электронных потоков с электромагнитными полями в зазорах резонаторов, в том числе и выходных.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Исследовались два широкополосных импульсных усилительных клистрона С диапазона, разработанных специалистами Института электроники Китайской Академии Наук (IECAS) с помощью одномерной программы KLY6. Параметры изготовленных приборов приведены в табл. 1. Клистрон KC4083A является однолучевым и ис-

пользует электронный пучок с высоким первеансом. Система взаимодействия клистрона состоит из девяти резонаторов, последний из которых — двухззорный выходной резонатор, работающий на π -виде колебаний. Параметры резонаторов клистрона KC4083A указаны в табл. 2. Клистрон KC4079E — является многолучевым и использует электронный пучок с низким первеансом. Система взаимодействия клистрона состоит из семи резонаторов, последний из которых — двухззорный выходной резонатор, работающий на 2π -виде колебаний. Параметры резонаторов клистрона KC4079E указаны в табл. 3. В обоих клистроны используется схема с частотной отстройкой второго резонатора в левой части полосы усиления.

При испытаниях обоих клистронов специалисты IECAS столкнулись с весьма неприятной проблемой. Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) изготовленных приборов имели весьма существенные провалы недалеко от центральной частоты полосы усиления (кривые 1 на рис. 1). По просьбе китайских специалистов были проведены теоретические исследования работы изготовленных клистроны с помощью программ «Клистрон-МГУ» и «Арсенал-МГУ».

Таблица 1. Параметры клистронов

Параметр	KC4083A	KC4079E
Ускоряющее напряжение, кВ	68.2	23
Сила тока на луч, А	39.2	1.2
Микропервеанс, мкА/В ^{3/2}	2.2	0.344
Радиус трубы, см	0.43	0.175
Число лучей	1	24
Радиус пучка, см	0.32	0.105
КПД	30%	30%
Ширина полосы	7%	5.3%
Коэффициент усиления, дБ	45	35
Выходная мощность, кВт	800	200

Таблица 2. Параметры резонаторов клистрона KC4083A

№	z, см	f/f_0	ρ , Ом	Q
1	0	0.9866	100	50
2	3.4	0.9671	110	230
3	7.2	0.9971	110	120
4	10.2	1.0199	110	67
5	13.4	1.0368	110	105
6	16.6	1.046	110	210
7	19.6	1.0575	110	180
8	22	1.0699	110	3000
9	24.3	1	67.5	138

Таблица 3. Параметры резонаторов клистрона KC4079E

№	z , см	f/f_0	ρ , Ом	Q
1	0	0.991935	22	65
2	3.2	0.967742	22	250
3	6.4	1.005376	22	150
4	9.6	1.016129	22	150
5	12.8	1.031362	22	500
6	16.2	1.039427	22	500
7	17.8	1	20	30

Исследования с помощью одномерной программы «Клистрон-МГУ» (кривые 3 на рис. 1) не показали наличие провалов. Это соответствует результатам, полученным специалистами IECAS с помощью одномерной программы KLY6 (кривая 4 на рис. 1). Результаты же, полученные с помощью двумерной программы «Арсенал-МГУ» (кривые 2 на рис. 1), очень хорошо совпали с экспериментальными результатами [11].

Для того, чтобы понять причины такого отличия результатов анализа, полученных по одномерным и двумерной программам, было проведено более детальное исследование физических процессов в клистронах KC4083A и KC4079E с помощью одномерной программы «Клистрон-МГУ» и двумерной программы PARS.

На рис. 2а и 2б представлены рассчитанные по программе PARS для клистрона KC4083A мгновенные значения относительных продольных компонент импульсов заряженных частиц и их положения соответственно. Данные результаты были получены для частоты входного сигнала, имеющего отстройку от центральной частоты полосы усиления $\Delta f = -20$ МГц. Как видно из рисунков, электроны пучка модулируются по скорости электромагнитным полем входного резона-

тора. Модуляция по скорости приводит к модуляции по плотности и группированию электронов в сгустки. Электромагнитные поля последующих промежуточных резонаторов, возбуждаемые сгустками электронов, усиливают модуляцию по скорости и по плотности. Степень сжатия электронов в сгустках характеризуется амплитудой первой гармоники конвекционного тока I_1 , которая постепенно увеличивается по длине прибора.

Одной из основных особенностей широкополосных клистронов является сильная зависимость характера нарастания $I_1(z)$ от частоты входного сигнала. На рис. 2в приведены рассчитанные продольные распределения относительной первой гармоники конвекционного тока в приборе для различных значений отстройки частоты входного сигнала Δf . За счет второго и третьего резонаторов линейного усилителя клистрона, частоты которых отстроены влево от центральной частоты, нарастание амплитуды $I_1(z)$ для частот левого края полосы происходит более равномерно, чем на правом краю. Группирование же на правом краю полосы является неравномерным по длине прибора и происходит в основном за счет эффективного взаимодействия с полями резонаторов нелинейного

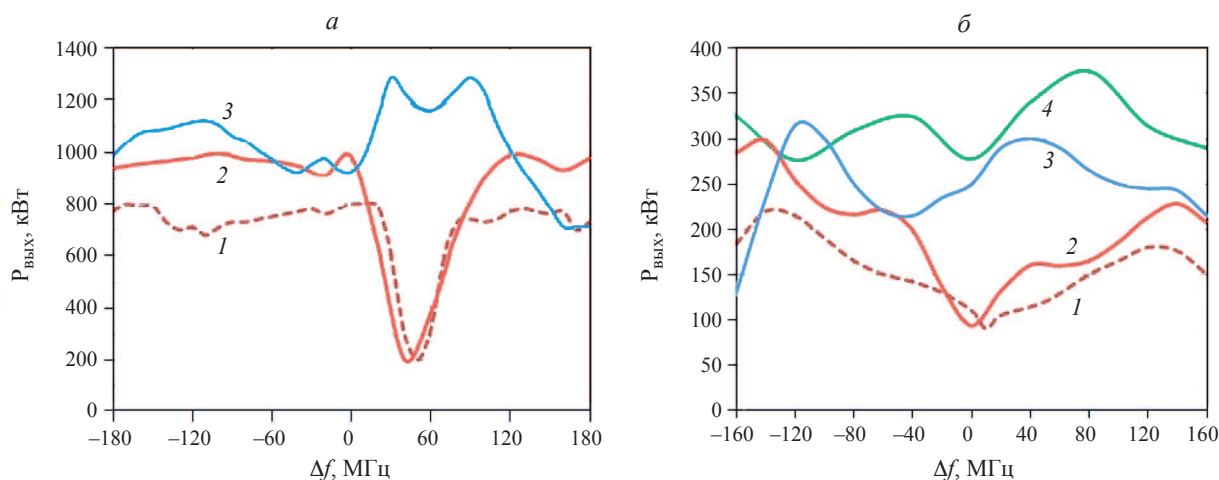


Рис. 1. АЧХ клистронов KC4083A (а) и KC4079E(б), полученные в эксперименте (кривая 1), с помощью двумерной программы «Арсенал-МГУ» (кривая 2), с помощью одномерных программ «Клистрон-МГУ» (кривая 3) и KLY6 (кривая 4).

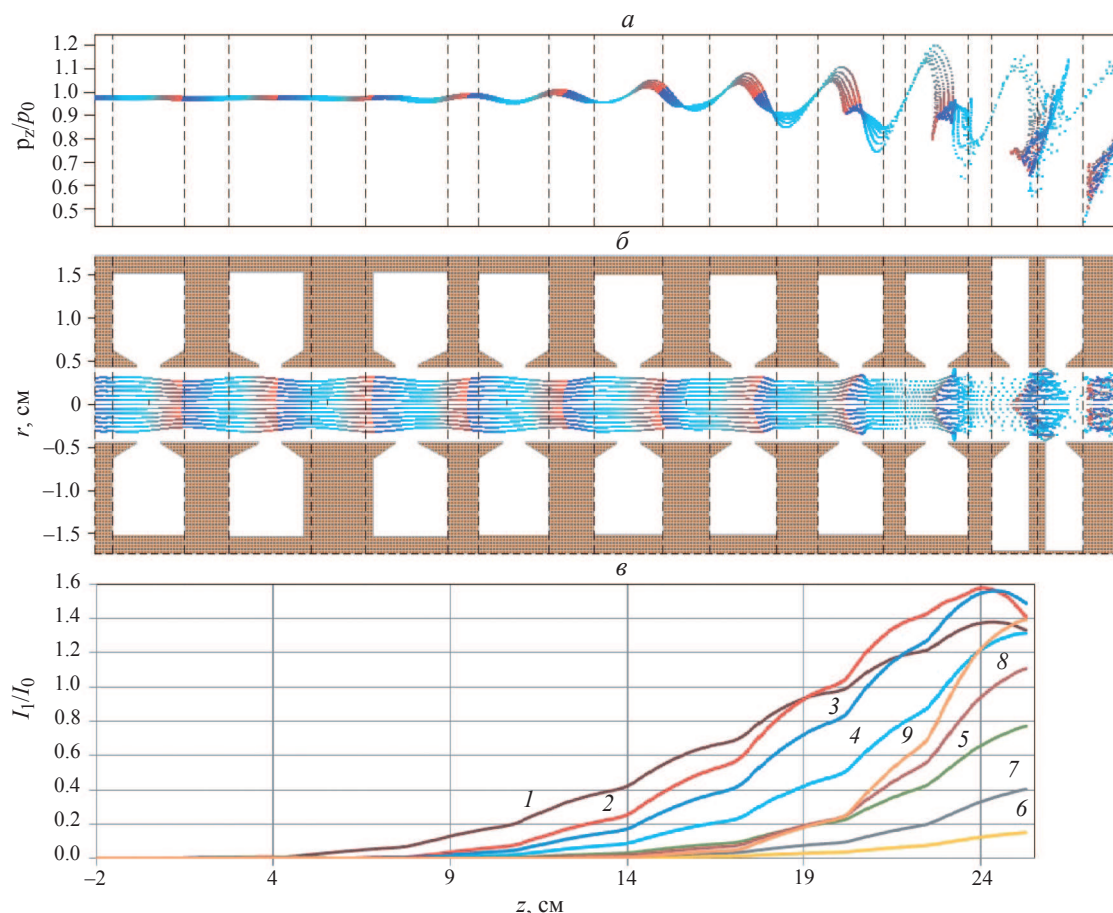


Рис. 2. Рассчитанные по программе PARS для клистрона КС4083А мгновенные значения относительных продольных компонент импульсов заряженных частиц (а), их положения (б) и продольные распределения относительной первой гармоники конвекционного тока в приборе для различных значений отстройки частоты входного сигнала от центральной частоты рабочей полосы прибора Δf , МГц: -180 (1), -40 (2), -20 (3), 0 (4), 20 (5), 40 (6), 60 (7), 100 (8), 160 (9).

группирователя. При этом на их зазорах возникают значительные амплитуды напряжения.

С помощью двумерной программы PARS были проведены исследования влияния динамической расфокусировки электронного пучка на АЧХ прибора. Было проведено сравнение результатов для случая использования экспериментальных данных для фокусирующего магнитного поля и для случая «замороженного» пучка с бесконечной величиной магнитного поля, при котором отсутствуют какие-либо радиальные пульсации электронов в пучке. Сравнение показало слабое влияние на АЧХ со стороны динамической расфокусировки в данном клистроне.

На рис. 2в распределение $I_1(z)$, соответствующее частотной отстройке провала АЧХ $\Delta f = 40$ МГц (рис. 2а), обозначено цифрой 6. Можно заметить, что низкое значение I_1 в конце группирователя вызвано слабой группировкой пучка резонаторами линейного усилителя клистрона КС4083А. Поэтому для детального сравнительного анализа процесса группирования был выбран участок клистрона КС4083А, включающего в себя первые пять резонаторов.

В расчетах по программе PARS использовался «замороженный» электронный пучок. Результаты анализа для частоты $\Delta f = 40$ МГц приведены на рис. 3. Пунктирными линиями отмечены положения центров резонаторов. Затемненные области соответствуют зонам взаимодействия электромагнитных полей резонаторов с электронным потоком. В этих областях проводится вычисление интегральных значений мощности взаимодействия в двумерной программе PARS.

На рис. 3а представлены продольные распределения $I_1(z)$, рассчитанные по одномерной модели (кривая 1) и двумерной (кривая 2). Ход кривых 1 и 2 совпадают вплоть до третьего резонатора. Амплитуда напряжения на третьем резонаторе, полученная с помощью двумерной программы, совпадает с амплитудой, рассчитанной по одномерной модели. Однако фаза напряжения, рассчитанная по двумерной программе, сильно отличается от фазы, определенной с помощью одномерной программы «Клистрон-МГУ». Причины этого можно понять из рис. 3б, где представлены продольные распределения продольной компоненты относительной первой гармоники конвекцион-

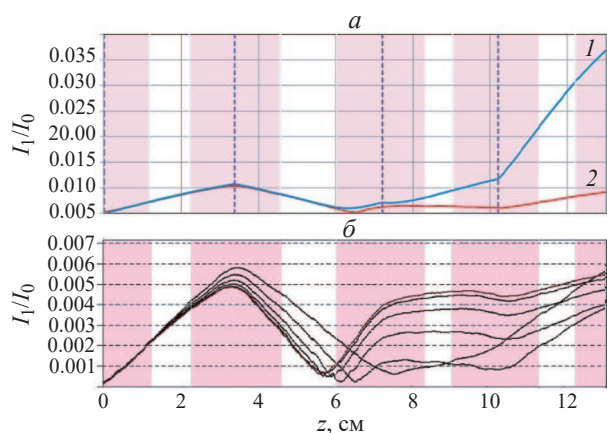


Рис. 3. Полученные для клистрона KC4083A продольные зависимости относительной первой гармоники конвекционного тока, с помощью одномерной программы «Клистрон-МГУ» (кривая 1 на рис. 3а) и двумерной программы PARS (кривая 2 на рис. 3а), а также продольные распределения относительной амплитуды первой гармоники конвекционного тока, рассчитанные по двумерной программе PARS в различных радиальных слоях электронного пучка (рис. 3б).

ного тока для различных радиальных слоев электронного пучка. Из рисунка следует, что в результате расслоения группировка различных слоев заметно различается уже во втором резонаторе, в третий резонатор электроны разных слоев попадают в различной фазе. Электроны внешних слоев продолжают демодулироваться после демодулирующего воздействия полей второго резонатора, отстроенного ниже частоты сигнала. Электроны внутренних слоев уже закончили демодулироваться и начали опять модулироваться. В результате сдвиг фаз между нелинейной проводимостью третьего резонатора и конвекционным током имеет противоположный знак относительно сдвига фаз между линейной проводимостью и конвекционным током. Это приводит к заметному отличию фазы напряжения третьего резонатора и, как следствие, к разному поведению электронов в пучке. Это хорошо видно на рис. 3а, где кривая $I_1(z)$, рассчитанная по одномерной программе, начинает опять свой рост, а кривая, полученная с помощью двумерной программы, продолжает свое падение после третьего резонатора. Как следствие, амплитуда I_1 на четвертом резонаторе, рассчитанная по двумерной программе, в 4 раза меньше, чем определенная по одномерной модели. В ходе дальнейшего усиления, погрешность одномерной программы в определении напряжения на третьем резонаторе приводят к весьма значительной накопленной ошибке в определении выходной мощности на данной частоте. Таким образом, отсутствие учета двумерного расслоения высокоперевансного электронного пучка в одномерных моделях привело к заметным ошибкам в АЧХ однолучевого клистрона KC4083A.

Для детального сравнительного анализа процесса группирования в многолучевом клистроне KC4079E был выбран участок клистрона, включающего в себя первые четыре резонатора. В расчетах по программе PARS использовался «замороженный» электронный пучок. Результаты анализа для центральной частоты ($\Delta f = 0$ МГц) приведены на рис. 4.

На рис. 4а представлены продольные распределения $I_1(z)$, рассчитанные по одномерной модели (кривая 1) и двумерной (кривая 2). Ход кривых 1 и 2 совпадают вплоть до третьего резонатора. В силу того, что в приборе используется электронный пучок с низким значением первеанса, в расчетах по программе PARS не наблюдался эффект расслоения. Поэтому фаза напряжения на третьем резонаторе, полученная с помощью двумерной программы, совпадает с фазой, рассчитанной по одномерной модели. Однако амплитуда напряжения, рассчитанная по двумерной программе, отличается от амплитуды, определенной с помощью одномерной программы «Клистрон-МГУ» на 40%. Причины этого можно понять из рис. 4б, где представлены зависимости относительного импеданса третьего резонатора, рассчитанные по линейной модели (кривая 1 на рис. 4б) и по нелинейной модели (кривая 2 на рис. 4б).

Из рисунка следует, что в области резонанса с собственной частотой третьего резонатора наблюдается падение амплитуды импеданса третьего резонатора на 40%, что приводит к соответствующему уменьшению амплитуды напряжения на третьем резонаторе. В ходе дальнейшего усиления, погрешность одномерной программы в определении напряжения на третьем резонаторе приводят к весьма значительной накопленной ошибке в определении выходной мощности на данной частоте. Таким образом, некорректный учет полной проводимости резонатора вблизи резонанса в одномерных моделях привел к заметным ошибкам в АЧХ многолучевого клистрона KC4079E с низкоперевансным электронным пучком.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате исследований было установлено, что при моделировании группирования интенсивных электронных потоков с высоким значением первеанса в широкополосных клистроны с использованием одномерных компьютерных программ в некоторых точках полосы может возникать значительная ошибка в определении выходных параметров прибора. Ошибка вызывается отсутствием учета в одномерных моделях эффекта расслоения электронного пучка.

Проведенный сравнительный анализ группирования в широкополосном многолучевом клистроне с помощью одномерной и двумерной программ показал возможность получения

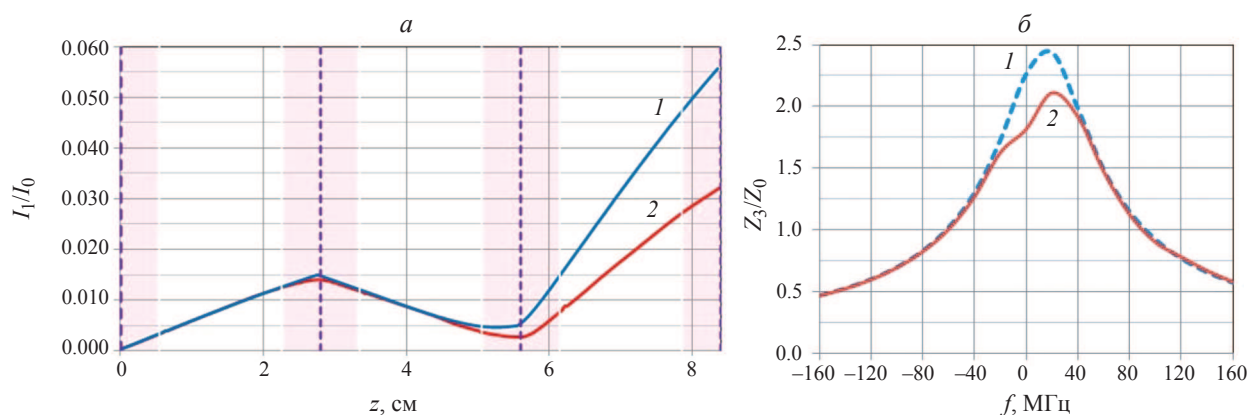


Рис. 4. Полученные для клистрона КС4079Е продольные зависимости относительной первой гармоники конвекционного тока, с помощью одномерной программы «Клистрон-МГУ» (кривая 1 на рис. 4а) и двумерной программы PARS (кривая 2 на рис. 4а), а также зависимости относительного импеданса третьего резонатора, рассчитанные по линейной модели (кривая 1 на рис. 4б) и по нелинейной модели (кривая 2 на рис. 4б).

некорректных характеристик прибора при использовании одномерных моделей, вызванных некорректным учетом электронной проводимости пучка. В точках полосы усиления вблизи резонансных частот резонаторов линейного усилителя возможно уменьшение полного импеданса резонаторов за счет влияния электронных потоков и, как следствие, уменьшение выходных параметров усилителя.

При конструировании широкополосных клистронных усилителей необходимо с осторожностью использовать оптимизацию приборов в полосе частот с помощью одномерных программ. Финальные результаты должны проверяться с помощью двумерных и трехмерных моделей.

Работа проведена в рамках выполнения государственного задания НИЦ «Курчатовский институт».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Родякин В.Е., Пикун В.М., Аксенов В.Н. // Журн. радиоэлектрон. 2020. № 12. С. 1; Rodyakin V.E., Pikunov V.M., Aksenov V.N. // J. Radio Electron. 2020. No. 12. Art. No. 14.
2. Родякин В.Е., Аксенов В.Н. // Вест. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2021. № 5. С. 70.
3. www.cst.com
4. Родякин В.Е., Пикун В.М., Аксенов В.Н. // Журн. радиоэлектрон. 2019. № 5. С. 1; Rodyakin V.E., Pikunov V.M., Aksenov V.N. // J. Radio Electron. 2019. No. 6. Art. No. 4.
5. Sandalov A.N., Pikunov V.M., Rodyakin V.E. et al. // KEK report 1/1997. P. 185.
6. Shen B., Ding Y., Zhang Z. et al. // IEEE Trans. Electron Devices. 2014. V. 61. No. 6. P. 1848.
7. Zhiqiang Zhang, Jirun Luo, Zhaochuan Zhang et al. // Progr. Electromagn. Res. C. 2020. V. 103. P. 177.
8. Родякин В.Е., Пикун В.М., Аксенов В.Н. // Изв. РАН. Сер. физ. 2021. Т. 85. № 1. С. 106; Rodyakin V.E., Pikunov V.M., Aksenov V.N. // Bull. Russ. Acad. Sci. 2021. V. 85. No. 1. P. 83.
9. Родякин В.Е., Аксенов В.Н. // Изв. РАН. Сер. физ. 2022. Т. 86. № 1. С. 88; Rodyakin V.E., Aksenov V.N. // Bull. Russ. Acad. Sci. 2022. V. 86. No. 1. P. 62.
10. Канавец В.И., Сандалов А.Н. // Электрон. техн. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1971. № 3. С. 11.
11. Ding Y., Yunshu Zhu, Xiuling Yin et al. // IEEE Trans. Electron Devices. 2007. V. 54. No. 4. P. 624.

The effect of two-dimensional phenomena on the bunching of intense electron beams in broadband klystrons

V. E. Rodyakin^{a, *}, V. N. Aksenov^b

^a*Institute on Laser and Information Technologies of Russian Academy of Sciences, National Research Centre
«Kurchatov Institute»,
Shatura, 140700 Russia*

^b*Lomonosov Moscow State University,
Moscow, 119991 Russia*

^{*}*e-mail: vrodyakin@mail.ru*

The results of a study of the effect of two-dimensional phenomena on the electron beam bunching in single-beam and multi-beam broadband klystrons are presented. The results of a comparative analysis of beam bunching using a one-dimensional and two-dimensional model are presented. The causes of errors in determining the output parameters of broadband klystrons obtained using one-dimensional programs are analyzed.

Keywords: electron beam, broadband klystron, amplifier, electron grouping, velocity modulation, multibeam klystron

УДК 537.86

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЛОСКОГО ФРОНТА УНИПОЛЯРНОГО ИМПУЛЬСА ИЗЛУЧЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ

© 2025 г. В. Н. Корниенко^{1, *}, В. В. Кулагин^{1, 2}

¹Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова Российской академии наук», Москва, Россия

²Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», Москва, Россия

* e-mail: korn@cplire.ru

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

Рассмотрена задача нестационарной дифракции монополярного ТМ-поляризованного электромагнитного импульса с плоским фронтом на тонкой щели в идеально проводящем экране. Методами вычислительного эксперимента показано, что в случае, если ширина щели много меньше пространственной длины импульса, то за экраном формируется поле в виде цилиндрического монополярного импульса, т.е. имеет место преобразование формы фронта падающего поля без изменения его характера (монополярности).

Ключевые слова: монополярный электромагнитный импульс, нестационарная дифракция, преобразование формы фронта

DOI: 10.31857/S0367676525010172, **EDN:** CZREUY

ВВЕДЕНИЕ

Проблема генерации сверхкоротких электромагнитных импульсов является актуальной уже на протяжении многих лет. Способы ее решения постоянно развиваются и зависят, в частности, от частотного диапазона.

Особо следует отметить задачу генерации электромагнитных импульсов, длительность которых составляет доли периода колебаний (см., например [1]). В литературе такие импульсы получили название уни- или монополярных (МЭМИ) [2]. Детальный обзор работ российских авторов по рассматриваемой тематике представлен в [3].

Теоретические и экспериментальные исследования МЭМИ представляют интерес как с общефизической, так и с прикладной точек зрения. Если говорить о фундаментальных проблемах генерации МЭМИ, следует упомянуть работу [4], в которой несколькими способами проведено доказательство того, что набором пространственно-ограниченных источников создать униполярный импульс в трехмерном пространстве в общем случае невозможно. Следовательно, как отмечалось, в частности, в [3], при рассмотрении МЭМИ следует указывать ту пространственную область и тот временной интервал, на котором МЭМИ существует. Например, в ра-

боте [5] рассмотрен один из способов генерации в микроволновом диапазоне пары МЭМИ противоположного знака. В качестве источника выбран пространственно-короткий электрический ток, временная зависимость которого имеет вид трапеции. Показано, что пространственно-временное разделение импульсов пары определяется длительностью временного интервала, на котором ток постоянен.

Отдельной задачей является преобразования характеристик МЭМИ, таких как изменение направления распространения, их фокусировка и т.д., которые не приводили бы к разрушению основного свойства МЭМИ: монополярности.

Так, в работе [6] приведен теоретический анализ распространения униполярного предвестника, генерируемого в результате многофотонной ионизации в электрооптическом кристалле, индуцированной ультракоротким лазерным импульсом. В этой же работе обращено внимание, что по мере распространения указанного электромагнитного образования оно теряет свойства монополярности, что еще раз подтверждает тот факт, что говорить о существовании МЭМИ можно только при рассмотрении какой-то ограниченной области пространства в ограниченный интервал времени. Результаты экспериментального наблюдения униполярного предвестника приведены в [7].

С учетом указанных пространственно-временных ограничений были рассмотрены задачи дифракции МЭМИ на простейших двумерных объектах: бесконечных цилиндре, ленте и др. [8–10]. Было указано на существенное отличие динамики поля дифракции для различных поляризаций электрического поля E падающего МЭМИ. Если вектор E был направлен параллельно объекту, то в большинстве рассмотренных методами вычислительного эксперимента случаев поле дифракции было близко к униполярному виду. Если же вектор E лежал в плоскости поперечного сечения объекта, то поле дифракции было знакопеременным.

Отметим, что в этих работах поперечные линейные размеры объектов значительно превосходили пространственную длину падающего импульса $L_{\text{имп}}$, определяемую как произведение его временной длительности на скорость света. Исходя из предложенного в указанных работах механизма формирования знакопеременного поля (за счет возбуждения на краях объектов цилиндрических волн), для задачи дифракции на щели МЭМИ, имеющего плоский фронт, можно сделать следующее предположение. Если ширина щели будет много меньше пространственной длины падающего импульса, то следует ожидать формирования поля дифракции, структура которого будет близка к монополярной. Форма же фронта поля дифракции может оказаться цилиндрической.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для проверки этого предположения рассмотрим следующую задачу.

Пусть в двумерной области G (рис. 1), электродинамические характеристики которой совпадают с характеристиками свободного пространства, в положительном направлении оси x распространяется монополярный электромагнитный импульс I , имеющий плоский фронт. Импульс имеет одну отличную от нуля компоненту электрического поля, которая на левой границе G зависит от времени t следующим образом:

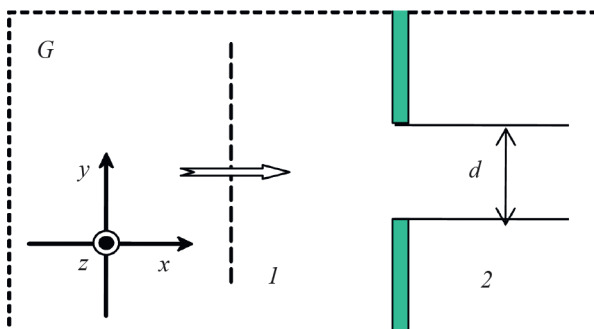


Рис. 1. К постановке задачи.

$$E_t(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ E_0 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{t}{\tau_1}\right), & 0 \leq t \leq \tau_1, \\ E_0 \exp\left(-\left(\frac{t - \tau_1}{\tau_2}\right)^2\right), & t \geq \tau_1, \end{cases} \quad (1)$$

где E_0 — амплитуда напряженности электрического поля, τ_1 — длительность переднего фронта импульса (время, за которое поле от нулевого значения достигает максимального), τ_2 — параметр, определяющий длительность заднего фронта импульса. Отметим, что $L_{\text{имп}} \approx c(\tau_1 + \tau_2)$, где c — скорость света в вакууме.

Область содержит бесконечный в направлении оси y идеально проводящий экран 2 со щелью шириной d . Экран имеет конечную толщину h (по оси x выбранной системы координат). Края экрана, образующие щель, имеют скругление, радиус которого равен $h/2$.

Найдем динамику электромагнитного поля в области G . Для этого воспользуемся системой дифференциальных уравнений Максвелла в пространственно-временном представлении [11]. Рассмотрим такую поляризацию поля, при которой вдоль оси z , перпендикулярной плоскости расположения G , отличной от нуля является только одна магнитная компонента (ТМ-поляризация). С учетом того, что в свободном пространстве диэлектрическая (ϵ) и магнитная (μ) проницаемости равны единице, покомпонентная запись уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z(x, y, t)}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu_0} \left\{ \frac{\partial E_y(x, y, t)}{\partial x} - \frac{\partial E_x(x, y, t)}{\partial y} \right\}, \\ \frac{\partial E_x(x, y, t)}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_z(x, y, t)}{\partial y}, \\ \frac{\partial E_y(x, y, t)}{\partial t} &= -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_z(x, y, t)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2)$$

где ϵ_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянная соответственно.

Предположим, что до момента $t = 0$ электромагнитное поле в G отсутствует. При $t > 0$ электрическое поле на левой границе G соответствует (1). Отражение электромагнитных волн от нижней, верхней и правой границ G отсутствует. Граничные условия на поверхности экрана соответствуют граничным условиям на идеально проводящей поверхности.

Для решения системы уравнений Максвелла с указанными начальными и граничными условиями воспользуемся численным методом, основанным на конечно-разностной аппроксимации частных производных по пространственным координатам и времени [12]. Отсутствие отражения волнового поля от границ G обеспечим внедрением абсолютно согласованного слоя [13].

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Численное моделирование рассматриваемой системы было выполнено при следующих фиксированных параметрах. Длина области G (направление x) была равна 700 см, ширина (направление y) 400 см. Экран, толщина которого составляла 5 см, был расположен на удалении 352.5 см от левой границы G . Радиус скругления краев экрана был равен 2.5 см. Падающий электромагнитный импульс имел единичную амплитуду $H_0 = 1$, $\tau_1 = 5 \cdot 10^{-10}$ с, $\tau_2 = 3 \cdot 10^{-10}$ с. Его пространственная длина $L_{\text{имп}} = 24$ см.

Изменяемым параметром в моделировании была ширина щели d , которая соответствовала расстоянию между скруглениями краев экрана. В качестве контролируемых величин были использованы зависимости значения магнитной компоненты поля от продольной координаты на прямой, проходящей через середину щели в фиксированный момент времени, а также пространственное распределение этого поля в правой части области G (за экраном).

Проведенное моделирование динамики поля показали, что при соотношении $L_{\text{имп}}/d > 5$ за экраном формируется монополярный цилиндрический импульс, амплитуда которого уменьшается с увеличением указанного соотношения.

Характерные зависимости поля дифракции приведены на рис. 2, которые были получены для $L_{\text{имп}}/d \approx 5$. Для удобства рассмотрения нача-

ло оси x совмещено с правой границей экрана. Ноль вертикальной координаты совпадает с центром щели. Момент времени $t = 0$ соответствует появлению МЭМИ на левой границе G .

На рис. 2а показаны зависимости распределения H_z от продольной координаты в моменты времени $t = 132, 148, 165, 181$ и 198 нс (кривые 1, 2, 3, 4 и 5 соответственно). Максимальные значения сформированного МЭМИ убывают с расстоянием от щели $\sim 1/\sqrt{r}$, что соответствует закону убывания амплитуды цилиндрической волны с расстоянием до ее источника. Амплитуда поля дифракции $H_0^{\text{диф}}$, а также величина наблюдаемого перегиба на заднем фронте импульса (обозначен на рис. 2а стрелкой) уменьшается с увеличением соотношения $L_{\text{имп}}/d$. Для $L_{\text{имп}}/d = 5$ величина $H_0^{\text{диф}}/H_0 \approx 0.25$. Таким образом, при стремлении ширины щели к нулю, профиль поля дифракции будет стремиться к профилю падающего импульса, однако при этом $H_0^{\text{диф}}$ также будет исчезающе малой.

На рис. 2б показаны изолинии магнитной компоненты поля дифракции, построенные в момент времени $t = 135$ нс. Отметим, что вблизи прямой $y = 0$ наблюдается область максимальных значений, а большинство изолиний имеют форму полуокружностей, что соответствует фазовым поверхностям цилиндрической волны, т. е. можно утверждать, что плоский фронт исходного МЭМИ был преобразован в цилиндрический.

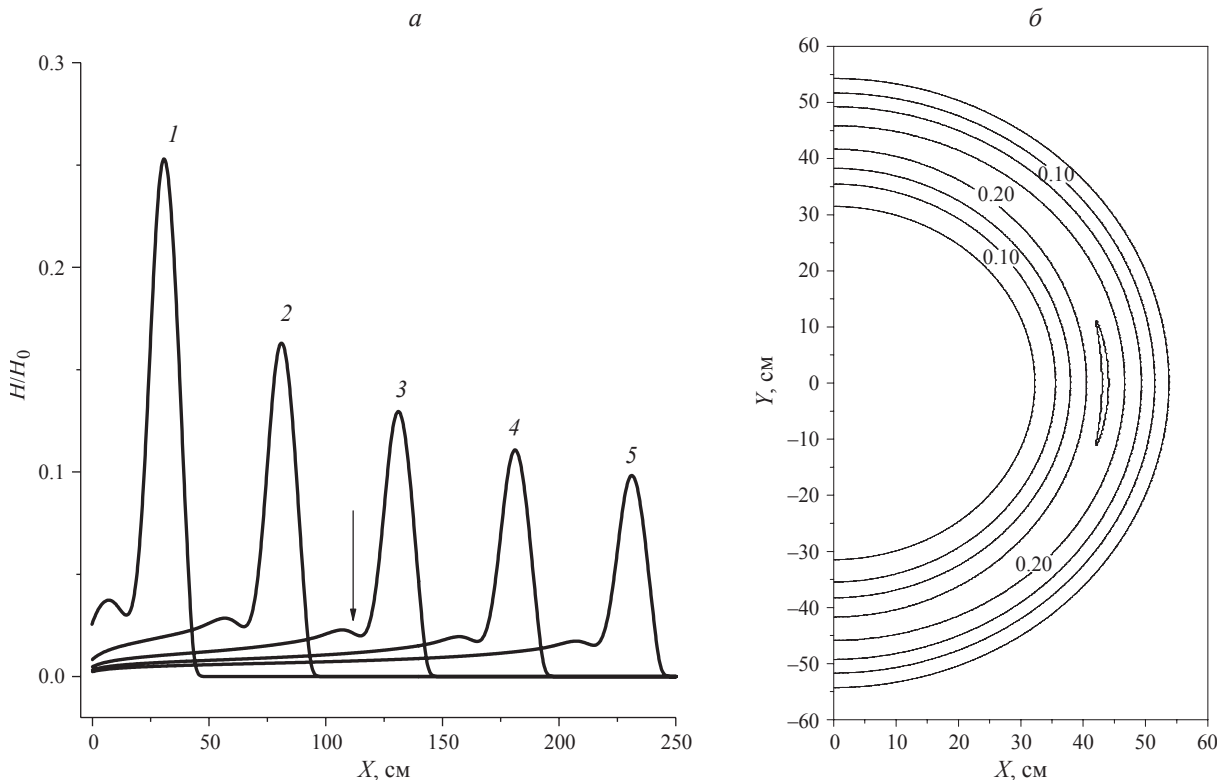


Рис. 2. Зависимость магнитного поля дифракции от продольной координаты (а) и его пространственное распределение (б).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, основываясь на результатах проведенных вычислительных экспериментов, можно считать, что поле дифракции МЭМИ с плоским фронтом на идеально проводящем экране со щелью, ширина которой удовлетворяет условию $L_{\text{имп}}/d \gg 1$, имеет вид монополярного импульса с цилиндрическим фронтом. Данное свойство может быть использовано при проведении экспериментальных работ по воздействию МЭМИ на искусственные и естественные объекты.

Работа выполнена в рамках темы государственного задания ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. You D., Jones R.R., Bucksbaum P.H. // Opt. Lett. 1993. V. 18. No 4. P. 290.
2. Архипов Р.М., Архипов М.В., Шимко А.А. и др. // Письма в ЖЭТФ. 2019. Т. 110. № 1. С. 9; Arkhipov R.M., Arkhipov M.V., Shimko A.A. et al. // JETP Lett. 2019. V. 110. No. 1. P. 15.
3. Розанов Н.Н., Архипов М.В., Архипов Р.М. и др. // Опт. и спектроск. 2023. Т. 131. № 2. С. 212; Rosanov N.N., Arkhipov M.V., Arkhipov R.M. et al. // Opt. Spectrosc. 2023. V. 131. No. 2. P. 200.
4. Kwang-Je Kim, McDonald K.T., Stupakov G.V., Zolotarev M.S. // arXiv:physics/0003064. 2000.
5. Корниенко В.Н., Румянцев Д.Р., Черепенин В.А. // Журн. радиоэлектрон. 2017. № 3. С. 1.
6. Sychugin S.A., Novokovskaya A.L., Bakunov M.I. // Phys. Rev. A. 2022. V. 105. No. 5. P. 053528.
7. Ilyakov I.E., Shishkin B.V., Efimenko E.S. et al. // Opt. Express. 2022. V. 30. No. 9. P. 14978.
8. Корниенко В.Н., Кулагин В.В. // Изв. РАН. Сер. физ. 2021. Т. 85. № 1. С. 64; Kornienko V.N., Kulagin V.V. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2021. V. 85. No. 1. P. 50.
9. Корниенко В.Н., Кулагин В.В., Гунта Д.Н. // Радиотехн. и электрон. 2021. Т. 66. № 7. С. 644; Kornienko V.N., Kulagin V.V., Gupta D.N. // J. Commun. Technol. Electron. 2021. V. 66. No. 7. P. 818.
10. Корниенко В.Н., Кулагин В.В. // Изв. РАН. Сер. физ. 2022. Т. 86. № 1. С. 84; Kornienko V.N., Kulagin V.V. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2022. V. 86. No. 1. P. 59.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988.
12. Бэдсел Ч., Ленгдон А. Физика плазмы и численное моделирование. М.: Энергоатомиздат, 1989. 452 с.
13. Taflov A. Computational electrodynamics. The finite-difference time-domain method. London: ArtechHouse, 1995. 188 p.

Conversion of a flat front of a unipolar radiation pulse into a cylindrical one

V. N. Kornienko^{a, *}, V. V. Kulagin^{a, b}

^a Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, 125009 Russia

^b Lomonosov Moscow State University,
Moscow, 119234 Russia

* e-mail: korn@cplire.ru

The problem of nonstationary diffraction of a monopolar TM-polarized electromagnetic pulse with a flat front on a thin slit in a perfectly conducting screen is considered. Using computational experiment methods, it has been shown that if the slit width is much smaller than the spatial length of the pulse, then a field is formed behind the screen in the form of a cylindrical monopolar pulse, i. e. there is a transformation of the shape of the incident field front without changing its character (monopolarity).

Keywords: monopolar electromagnetic pulse, non-stationary diffraction, front shape transformation

УДК 534.2

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НА ОСНОВЕ АППАРАТА УГЛОВЫХ ГАРМОНИК

© 2025 г. Д. И. Зотов, О. Д. Румянцева*, А. С. Черняев

Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», физический факультет, кафедра акустики, Москва, Россия

*e-mail: burov@phys.msu.ru

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

Предложена усовершенствованная численная реализация двумерного функционально-аналитического алгоритма, предназначенного для восстановления пространственных распределений скорости звука и коэффициента поглощения в области томографирования. Продемонстрирована высокая точность получаемых томограмм даже при больших волновых размерах и сложной внутренней структуре исследуемого объекта.

Ключевые слова: акустическая томография, восстановление скорости звука и поглощения, функциональный алгоритм, угловые гармоники

DOI: 10.31857/S0367676525010182, **EDN:** CZOWJO

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим строгое волновое решение обратной задачи акустического рассеяния. Требуется восстановить неоднородные пространственные распределения скорости звука $c(\vec{r})$ и амплитудного коэффициента поглощения $\alpha(\vec{r}, \omega_j)$ на заданной частоте ω_j внутри томографируемого объекта, находящегося в области \mathfrak{R} . Вне области \mathfrak{R} имеется однородная непоглощающая фоновая среда; скорость звука в ней c_0 и волновое число $k_{0j} = \omega_j/c_0$. Излучатели и приемники, используемые для получения экспериментальных данных, находятся вне области \mathfrak{R} и окружают исследуемый объект со всех сторон. Объект зондируется фиксированным падающим полем акустического давления $u_0(\vec{r})$. Попадая на объект, это поле $u_0(\vec{r})$ рассеивается на акустических неоднородностях внутри \mathfrak{R} . Тем самым, создается полное поле $u(\vec{r})$, которое регистрируется всеми приемниками. После этого изменяется направление падающего поля, и соответствующие поля $u(\vec{r})$ опять принимаются. Полный набор данных получается перебором всевозможных направлений зондирования и приема. Этот набор данных обрабатывается, т. е. решается обратная задача. В итоге восстанавливаются искомые функции $c(\vec{r})$ и $\alpha(\vec{r}, \omega_j)$ количественно. Возможность получения количественных оценок в каждой точке пространства \vec{r} является принципиальным отличием обратных акустических задач томографи-

ческого типа от обратных задач УЗИ-типа. Эта возможность обеспечивается, во-первых, за счет наличия экспериментальных данных при самых разных ракурсах и, во-вторых, за счет достаточно строгого алгоритма обработки таких данных. Ниже в целях обработки рассматривается двумерный волновой функционально-аналитический алгоритм [1–5] в монохроматическом варианте. В основе этого алгоритма лежат идеи решения обратных задач рассеяния на квантово-механических потенциалах [1–3, 6, 7].

Полное поле $u(\vec{r})$ при каждом фиксированном $u_0(\vec{r})$ подчиняется уравнению Гельмгольца $\nabla^2 u(\vec{r}) + k_{0j}^2 u(\vec{r}) = v(\vec{r}) u(\vec{r})$, где $v(\vec{r}, \omega_j) = \omega_j^2 \left(\frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(\vec{r})} \right) - i2\omega_j \frac{\alpha(\vec{r}, \omega_j)}{c(\vec{r})}$ — функция рассеивателя при временной зависимости полей $\sim \exp(-i\omega_j t)$. Сначала должна быть восстановлена функция $v(\vec{r}, \omega_j)$ [8], после чего из нее можно выделить отдельные функции $c(\vec{r})$ и $\alpha(\vec{r}, \omega_j)$ [9]. Входными данными для функционального алгоритма являются комплексные значения классической амплитуды рассеяния $f(\vec{k}, \vec{l}; \omega_j)$. Они полагаются известными для всех действительных волновых векторов $\vec{k}, \vec{l} \in \mathbb{R}^2$, где $\vec{k}^2 = \vec{l}^2 = k_{0j}^2$. Пусть падающее поле является классической плоской волной

$$u_0(\vec{r}, \vec{k}; \omega_j) = \exp(i\vec{k}\vec{r}) \quad (1)$$

с волновым вектором \vec{k} , а поле $u(\vec{r}, \vec{k}, \omega_j)$ принимается в дальней зоне в направлении, сонаправленном волновому вектору \vec{l} , т. е. $\vec{r} \uparrow \vec{l}$. Тогда значения $f(\vec{k}, \vec{l}, \omega_j)$ пропорциональны рассеянному полю $u(\vec{r}, \vec{k}; \omega_j) - u_0(\vec{r}, \vec{k}; \omega_j)$. В то же время, значения $f(\vec{k}, \vec{l}; \omega_j)$ могут быть пересчитаны из полей, принятых в ближней зоне вне области томографируемого объекта [8, 10].

ДВУМЕРНЫЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ И АППАРАТ УГЛОВЫХ ГАРМОНИК

Двумерный функциональный алгоритм восстановления функции рассеивателя $v(\vec{r}, \omega_j)$ состоит из нескольких последовательных этапов, которые приводятся ниже в терминах углов и угловых гармоник [4, 5]. А именно, угловой спектр $\tilde{g}(q)$ для произвольной периодической функции $g(\varphi)$ с периодом 2π определяется соотношениями (угловые гармоники имеют целочисленные номера $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, т. е. $q \in \mathbb{Z}$):

$$\begin{aligned} \tilde{g}(q) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \exp(-iq\varphi) d\varphi, \\ g(\varphi) &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \tilde{g}(q) \exp(iq\varphi), \quad q \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для двумерных векторов \vec{k} и \vec{l} в полярной системе координат имеем:

$$\vec{k} = \{k_{0j}, \varphi\}, \quad \vec{l} = \{k_{0j}, \varphi'\}, \quad (3)$$

тогда $f(\vec{k}, \vec{l}; \omega_j) \equiv f(\varphi, \varphi'; \omega_j)$. Сначала на основе известных значений классической амплитуды рассеяния $f(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ находятся две функции $h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ — так называемая обобщенная амплитуда рассеяния. С этой целью при каждом фиксированном значении φ решается линейная система уравнений, которая получается перебором всех углов φ' :

$$\begin{aligned} h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j) - \pi i \int_0^{2\pi} h^\pm(\varphi, \varphi''; \omega_j) \times \\ \times \theta[\pm \sin(\varphi'' - \varphi)] f(\varphi'', \varphi'; \omega_j) d\varphi'' = f(\varphi, \varphi'; \omega_j), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\theta(t) = \{1 \text{ при } t > 0; 0 \text{ при } t \leq 0\}$ — функция Хевисайда. После этого для каждой фиксированной точки \vec{r} с декартовыми координатами $\vec{r} = \{x, y\}$ строятся вспомогательные функции

$$\begin{aligned} Q^\pm(\vec{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j) &\equiv h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j) \times \\ &\times \exp[ik_{0j}\{x(\cos \varphi' - \cos \varphi) + y(\sin \varphi' - \sin \varphi)\}] \times \\ &\times \theta[\pm \sin(\varphi' - \varphi)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Вычисляется их двойной угловой спектр фурье-преобразованием по углам:

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{Q}}^\pm(\vec{r}, q, q'; \omega_j) &\equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \times \\ &\times Q^\pm(\vec{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j) \exp(-iq\varphi) \exp(-iq'\varphi'), \end{aligned} \quad (6)$$

и для всех $q' \in \mathbb{Z}$ строится функция

$$\tilde{\tilde{B}}(\vec{r}, q, q'; \omega_j) = \begin{cases} i\pi \tilde{\tilde{Q}}^-(\vec{r}, q, q'; \omega_j) & \text{при } q = 0, 1, 2, 3, \dots; \\ i\pi \tilde{\tilde{Q}}^+(\vec{r}, q, q'; \omega_j) & \text{при } q = -1, -2, \dots \end{cases} \quad (7)$$

Знание $\tilde{\tilde{B}}(\vec{r}, q, q'; \omega_j)$ позволяет найти угловые гармоники $\tilde{\mu}^{\text{cl}}(\vec{r}, q; \omega_j)$ классического поля со снятой «несущей» волной: $\mu^{\text{cl}}(\vec{r}, \vec{k}; \omega_j) \equiv \exp(-ik\vec{r})u(\vec{r}, \vec{k}; \omega_j)$. Эти угловые гармоники находятся в каждой фиксированной точке \vec{r} из системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}^{\text{cl}}(\vec{r}, q; \omega_j) + 2\pi \sum_{q'=-\infty}^{\infty} \tilde{\tilde{B}}(\vec{r}, q, -q'; \omega_j) \times \\ \times \tilde{\mu}^{\text{cl}}(\vec{r}, q'; \omega_j) = \delta_{q0}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\delta_{q0} = \{1 \text{ при } q = 0; 0 \text{ при } q \neq 0\}$. Наконец, исконая функция рассеивателя вычисляется из соотношения

$$\begin{aligned} v(\vec{r}, \omega_j) &= k_{0j} \left(i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \left\{ \tilde{\mu}^{\text{cl}}(\vec{r}, q = -1; \omega_j) + \right. \\ &+ 2i\pi^2 \sum_{q'=-\infty}^{\infty} \tilde{\tilde{Q}}^-(\vec{r}, q = -1, -q'; \omega_j) \tilde{\mu}^{\text{cl}}(\vec{r}, q'; \omega_j) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Описанный двумерный функциональный алгоритм позволяет практически строго (с точностью до эффектов, связанных с рассеянием назад) учитывать процессы многократного рассеяния волн на неоднородностях среды. При этом все решаемые системы уравнений (4) и (8) остаются линейными относительно неизвестных. Тем не менее, численная реализация алгоритма [4, 5] весьма нетривиальна. При численной реализации оказывается удобным использовать аппарат угловых гармоник, который уже применялся ранее для записи соотношений (6)–(9) данного алгоритма [4, 5], а также для коррекции экспериментальных данных в случае неидеальных позиций излучателей и приемников [11].

В предшествующих вариантах численной реализации [4, 5] обобщенная амплитуда рассеяния $h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ находилась из системы (4) непосредственно в терминах углов φ и φ' . Вспомогательные функции $Q^\pm(\vec{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j)$ формировались, согласно (5), также в терминах углов, после чего выполнялось двойное фурье-преобразование по углам (6). Последующие действия (7)–(9) выполнялись уже в терминах угловых гармоник [4, 5].

Ниже предлагается решать систему (4) и рассматривать соотношение (5) сразу с помощью угловых гармоник. Такой прием позволяет, во-первых, повысить точность численной реализации при переходе от непрерывных значений углов φ и φ' к дискретным номерам угловых гармоник q и q' . Во-вторых, в соотношениях (4) и (5) присутствуют функции Хевисайда

$$\theta^{\pm}(\varphi) \equiv \theta(\pm \sin \varphi), \quad (10)$$

которые изменяются скачкообразно от 1 до 0 в бесконечно малой окрестности нулевого значения их аргумента. Поэтому угловой шаг дискретизации для функций $\theta^{\pm}(\varphi)$ должен быть гораздо мельче, чем для $f(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ и $h^{\pm}(\varphi, \varphi'; \omega_j)$. Это взаимосвязано с тем, что угловой спектр $\tilde{\theta}^{\pm}(q) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta^{\pm}(\varphi) \exp(-iq\varphi) d\varphi$ функций $\theta^{\pm}(\varphi)$ спадает медленно:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}^{\pm}(q) &= \frac{1}{2} (\mp i)^q \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{2}q\right) \equiv \\ &\equiv \left\{ \frac{1}{2} \text{ при } q=0; \pm \frac{i}{2\pi q} \{(-1)^q - 1\} \text{ при } q \neq 0 \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

причем $\tilde{\theta}^{-}(q) = \{\tilde{\theta}^{+}(q)\}^*, \forall q$. В то же время, в (5) присутствует функция

$$E(\vec{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j) \equiv \exp[ik_{0j} \{x(\cos \varphi' - \cos \varphi) + y(\sin \varphi' - \sin \varphi)\}] \equiv \exp\{i(\vec{l} - \vec{k})\vec{r}\}, \quad (12)$$

где учтено (3). Функция $E(\vec{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j)$ осциллирует при изменении φ и φ' тем сильнее, чем больше фиксированное значение $k_{0j}|\vec{r}|$. Как следствие, угловой спектр этой функции будет иметь тем более высокие значимые угловые гармоники, чем больше $k_{0j}|\vec{r}|$. Таким образом, введение дискретных аналогов обеих функций (10) и (12) требует повышенного внимания при численной реализации рассматриваемого функционального алгоритма.

В-третьих, рассмотрение функций в терминах угловых гармоник делает удобным контроль над достаточностью объема дискретизованных значений функций, участвующих на каждом этапе процедуры восстановления. Такой контроль, начиная с объема исходных дискретизованных данных $f(\varphi, \varphi'; \omega_j)$, принципиален для обеспечения единственности, устойчивости и, в конечном счете, адекватности решения рассматриваемой обратной задачи [8]. Об этом кратко будет упомянуто на этапе численного моделирования.

Для преобразования интегрального члена уравнений (4) функции $h^{\pm}(\varphi, \varphi''; \omega_j)$ и $f(\varphi'', \varphi'; \omega_j)$ можно представить, согласно (2), как

$$\begin{aligned} h^{\pm}(\varphi, \varphi''; \omega_j) &= \sum_{q''=-\infty}^{\infty} \tilde{h}^{\pm}(\varphi, q''; \omega_j) \exp(iq''\varphi''), \\ f(\varphi'', \varphi'; \omega_j) &= \sum_{q'''=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(q''', \varphi'; \omega_j) \exp(iq''' \varphi''). \end{aligned}$$

Это приводит уравнения (4) к виду:

$$\begin{aligned} h^{\pm}(\varphi, \varphi'; \omega_j) - \pi i \sum_{q''=-\infty}^{\infty} \sum_{q'''=-\infty}^{\infty} \tilde{h}^{\pm}(\varphi, q''; \omega_j) \times \\ \times \tilde{f}(q''', \varphi'; \omega_j) 2\pi \exp[i(q'' + q''')\varphi] \times \\ \times \tilde{\theta}^{\pm}[-(q'' + q''')] = f(\varphi, \varphi'; \omega_j). \end{aligned}$$

Фурье-преобразование данного выражения по углу φ' дает:

$$\begin{aligned} \tilde{h}^{\pm}(\varphi, q'; \omega_j) - 2i\pi^2 \sum_{q''=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{q'''=-\infty}^{\infty} \tilde{\theta}^{\pm}(-q'' - q''') \times \right. \\ \times \tilde{f}(q''', q'; \omega_j) \exp(iq'''\varphi) \left. \right\} \exp(iq''\varphi) \times \\ \times \tilde{h}^{\pm}(\varphi, q''; \omega_j) = \tilde{f}(\varphi, q'; \omega_j); \quad q' \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (13)$$

Система уравнений (13), получающаяся перебором $q' \in \mathbb{Z}$, решается относительно одинарных угловых гармоник $\tilde{h}^{\pm}(\varphi, q'; \omega_j)$ при каждом фиксированном угле φ . В правой части (13) стоит одинарный угловой спектр классической амплитуды рассеяния

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\varphi, q'; \omega_j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi, \varphi'; \omega_j) \exp(-iq'\varphi') d\varphi', \\ q' \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (14)$$

а в левой части — двойной угловой спектр

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{f}}(q, q'; \omega_j) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \times \\ \times f(\varphi, \varphi'; \omega_j) \exp(-iq\varphi) \exp(-iq'\varphi'), \\ q, q' \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (15)$$

После нахождения $\tilde{h}^{\pm}(\varphi, q'; \omega_j)$ вычисляется двойной угловой спектр

$$\tilde{\tilde{h}}(q, q'; \omega_j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{h}^{\pm}(\varphi, q'; \omega_j) \exp(-iq\varphi) d\varphi. \quad (16)$$

С другой стороны, можно находить сразу двойные угловые гармоники $\tilde{\tilde{h}}^{\pm}(q, q'; \omega_j)$ из системы, которая получается фурье-преобразованием уравнений (13) по углу φ с последующей заменой переменных:

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{h}}^{\pm}(q, q'; \omega_j) - 2i\pi^2 \sum_{q''=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{q'''=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(-q''' + q - q'', q'; \omega_j) \times \right. \\ \times \tilde{\theta}^{\pm}(q''' - q) \left. \right\} \tilde{\tilde{h}}^{\pm}(q''', q''; \omega_j) = \tilde{\tilde{f}}(q, q'; \omega_j); \\ q, q' \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (17)$$

Однако в отличие от системы (13), которая решается при каждом фиксированном φ , система (17) требует нахождения $\tilde{\tilde{h}}^{\pm}(q, q'; \omega_j)$ сразу для всех значений (q, q') , т. е. ни один из аргументов q или q'

зафиксировать нельзя. Тем самым, переход от (13) к (17) не всегда целесообразен, поскольку могут возникнуть трудности из-за матриц огромной размерности при решении системы (17) — подобно ситуации, описанной в [12].

Вместо выполнения последовательности действий (5) и (6), выражение (5) можно преобразовать сразу в терминах угловых гармоник. Учитывая (1), (3) и (12), имеем: $E(\vec{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j) = \exp(-ik\vec{r}) \times \exp(i\vec{l}\vec{r}) \equiv P(\vec{r}, \varphi + \pi; \omega_j) P(\vec{r}, \varphi'; \omega_j)$. Здесь для удобства введено обозначение $u_0(\vec{r}, \vec{k}; \omega_j) \equiv P(\vec{r}, \varphi; \omega_j) = \exp(i\vec{k}\vec{r})$, и тогда

$$-\vec{k} = \{k_{0j}, \varphi + \pi\}, \quad P(\vec{r}, \varphi + \pi; \omega_j) \equiv \exp(-ik\vec{r});$$

$$\vec{l} = \{k_{0j}, \varphi'\}, \quad P(\vec{r}, \varphi'; \omega_j) \equiv \exp(i\vec{l}\vec{r}).$$

Выражение (5) переписывается как

$$Q^\pm(\vec{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j) = h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j) \exp\{i(\vec{l} - \vec{k})\vec{r}\} \times$$

$$\times \theta^\pm(\varphi' - \varphi) \equiv h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j) \times$$

$$\times P(\vec{r}, \varphi + \pi; \omega_j) P(\vec{r}, \varphi'; \omega_j) \theta^\pm(\varphi' - \varphi). \quad (18)$$

Каждая из функций h^\pm и P в (18) представляется в виде суммы угловых гармоник:

$$h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j) = \sum_{q_1=-\infty}^{\infty} \sum_{q_2=-\infty}^{\infty} \tilde{h}^\pm(q_1, q_2; \omega_j) \times$$

$$\times \exp(iq_1\varphi) \exp(iq_2\varphi'),$$

$$P(\vec{r}, \varphi + \pi; \omega_j) = \sum_{q_3=-\infty}^{\infty} \tilde{P}(\vec{r}, q_3; \omega_j) \exp\{iq_3(\varphi + \pi)\},$$

$$P(\vec{r}, \varphi'; \omega_j) = \sum_{q_4=-\infty}^{\infty} \tilde{P}(\vec{r}, q_4; \omega_j) \exp(iq_4\varphi'), \quad (19)$$

и выполняется двойное фурье-преобразование выражения (18) по углам φ и φ' , согласно (6). Это приводит (18) к виду:

$$\tilde{Q}^\pm(\vec{r}, q, q'; \omega_j) = \sum_{q_1=-\infty}^{\infty} \sum_{q_2=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{q_3=-\infty}^{\infty} (-1)^{q-q_1+q_3} \times \right.$$

$$\times \tilde{P}(\vec{r}, q - q_1 + q_3; \omega_j) \tilde{P}(\vec{r}, q' - q_2 - q_3; \omega_j) \tilde{\theta}^\pm(q_3) \left. \right\} \times$$

$$\times \tilde{h}^\pm(q_1, q_2; \omega_j). \quad (20)$$

Поскольку в полярной системе координат $\vec{r} = \{|\vec{r}|, \varphi_{\vec{r}}\}$, то

$$P(\vec{r}, \varphi; \omega_j) \equiv \exp(i\vec{k}\vec{r}) = \exp\{ik_{0j}|\vec{r}| \cos(\varphi_{\vec{r}} - \varphi)\} =$$

$$= \sum_{q=-\infty}^{\infty} i^q J_q(k_{0j}|\vec{r}|) \exp[iq(\varphi - \varphi_{\vec{r}})], \quad (21)$$

где J_q — функция Бесселя q -го порядка. Из сравнения (19) и (21) следует, что

$$\tilde{P}(\vec{r}, q; \omega_j) = i^q \exp(-iq\varphi_{\vec{r}}) J_q(k_{0j}|\vec{r}|). \quad (22)$$

Подстановка (22) в (20) приводит к окончательному выражению:

$$\tilde{Q}^\pm(\vec{r}, q, q'; \omega_j) = (-i)^{q-q'} \exp\{-i\varphi_{\vec{r}}(q + q')\} \times$$

$$\times \sum_{q_1=-\infty}^{\infty} \sum_{q_2=-\infty}^{\infty} (-i)^{q_2-q_1} \exp\{i\varphi_{\vec{r}}(q_1 + q_2)\} \times$$

$$\times \kappa^\pm(q - q_1, q' - q_2, k_{0j}|\vec{r}|) \tilde{h}^\pm(q_1, q_2; \omega_j), \quad (23)$$

где

$$\kappa^\pm(n, n', k_{0j}|\vec{r}|) \equiv \sum_{q_3=-\infty}^{\infty} (-1)^{q_3} J_{n+q_3}(k_{0j}|\vec{r}|) \times$$

$$\times J_{n'-q_3}(k_{0j}|\vec{r}|) \cdot \tilde{\theta}^\pm(q_3); \quad n, n' \in \mathbb{Z}. \quad (24)$$

Выражение для $\tilde{\theta}^\pm(q)$ приведено в (11). Оно позволяет преобразовать выражение (24) с учетом того, что $\tilde{\theta}^\pm(q) = 0$ при $|q| = 2, 4, 6, 8, \dots$:

$$\kappa^\pm(n, n', k_{0j}|\vec{r}|) = \frac{1}{2} J_n(k_{0j}|\vec{r}|) J_{n'}(k_{0j}|\vec{r}|) \pm$$

$$\pm \frac{i}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1} J_{n+2m+1}(k_{0j}|\vec{r}|) \times$$

$$\times J_{n'-2m-1}(k_{0j}|\vec{r}|); \quad n, n', m \in \mathbb{Z}. \quad (25)$$

Из (25) непосредственно видно, что $\kappa^-(n, n', k_{0j}|\vec{r}|) = \{\kappa^+(n, n', k_{0j}|\vec{r}|)\}^*, \forall n, n' \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, последовательность действий при восстановлении функции рассеивателя с помощью аппарата угловых гармоник имеет вид, представленный на схеме 1.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Проверка эффективности предложенного нового варианта численной реализации двумерного функционального алгоритма выполнялась путем восстановления модельного акустического рассеивателя. Для задания модели рассеивателя были взяты два МРТ-изображения двумерных сечений молочной железы [13]. Одно из изображений стало условно интерпретироваться как значения скорости звука $c(\vec{r})$ (рис. 1а), другое изображение — значения коэффициента поглощения $\alpha(\vec{r}, \omega_j)$ (рис. 1б). В фоновой непоглощающей среде (воде), окружающей молочную железу, полагалось $c_0 = 1500$ м/с; тогда длина волны $\lambda_0 \equiv 2\pi/k_0 = 10^{-3}$ м при выбранной частоте 1.5 МГц. Шаг дискретизации рассматриваемых изображений задавался равным $0.5\lambda_0$. При этом вся область томографирования составляла $106\lambda_0$ вдоль каждой декартовой оси, а линейный размер собственно сечения молочной железы составлял $\approx 80\lambda_0$. Количественные значения на изображениях задавались на основе характерных диапазонов $c(\vec{r})$ и $\alpha(\vec{r}, \omega_j)$ [14, 15]: полагалось 1460–1535 м/с для c и 15–34 Нп/м, т. е. 1.3–3.0 Дб/см, для α . Значения c и α наибольшие в коже, а в подкожной жировой ткани — значительно меньше.

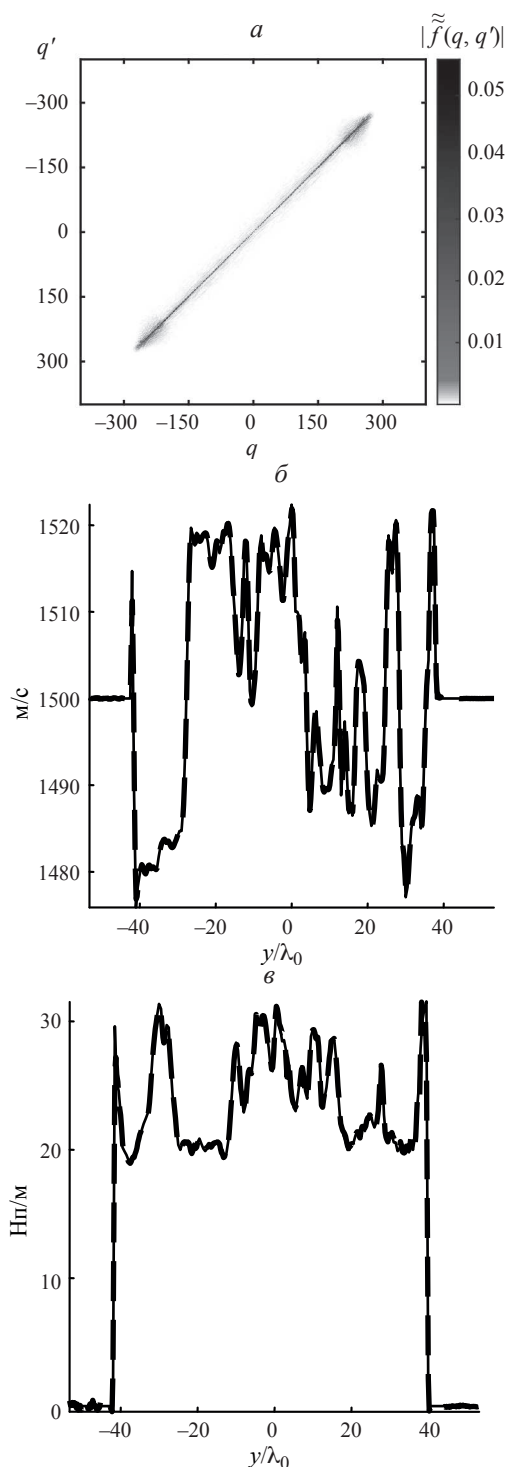


Рис. 2. Двойной угловой спектр амплитуды рассеяния (а) и результат восстановления (толстая пунктирная линия) скорости звука (б) и коэффициента поглощения (в) при $x = 0$ в сравнении с истинными значениями (сплошная тонкая линия).

новления рассеивателя требуется, в общем случае, многочастотный режим [5].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-22-00192, <https://rscf.ru/project/24-22-00192/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гриневич П.Г., Манаков С.В.* // Функцион. анализ и его прил. 1986. Т. 20. № 2. С. 14; *Grinevich P.G., Manakov S.V.* // *Funct. Anal. Appl.* 1986. V. 20. No. 2. P. 94.
2. *Novikov R.G.* // *J. Func. Analysis.* 1992. V. 103. No. 2. P. 409.
3. *Novikov R.G.* // *Phys. Lett. A.* 1998. V. 238. No. 2–3. P. 73.
4. *Буров В.А., Румянцева О.Д.* Обратные волновые задачи акустической томографии. Ч. 4: Функционально-аналитические методы решения многомерной акустической обратной задачи рассеяния. М.: ЛЕНАНД, 2024. 504 с.
5. *Буров В.А., Алексеенко Н.В., Румянцева О.Д.* // *Акуст. журн.* 2009. Т. 55. № 6. С. 784; *Burov V.A., Alekseenko N.V., Rummyantseva O.D.* // *Acoust. Phys.* 2009. V. 55. No. 6. P. 843.
6. *Faddeev L.D.* // *J. Sov. Math.* 1976. V. 5. P. 334.
7. *Novikov R.G.* // *Int. Math. Res. Papers.* 2005. V. 2005. No. 6. P. 287.
8. *Буров В.А., Румянцева О.Д.* Обратные волновые задачи акустической томографии. Ч. 2. Обратные задачи акустического рассеяния. М.: URSS, 2021. 768 с.
9. *Зотов Д.И., Румянцева О.Д., Шуруп А.С.* // *Изв. РАН. Сер. физ.* 2018. Т. 82. № 1. С. 41; *Zotov D.I., Rummyantseva O.D., Shurup A.S.* // *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.* 2018. V. 82. No. 1. P. 35.
10. *Буров В.А., Шуруп А.С., Румянцева О.Д. и др.* // *Изв. РАН. Сер. физ.* 2012. Т. 76. № 12. С. 1524; *Burov V.A., Shurup A.S., Rummyantseva O.D. et al.* // *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.* 2012. V. 76. No. 12. P. 1365.
11. *Зотов Д.И., Румянцева О.Д.* // *Изв. РАН. Сер. физ.* 2022. Т. 86. № 1. С. 122; *Zotov D.I., Rummyantseva O.D.* // *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.* 2022. V. 86. No. 1. P. 83.
12. *Зотов Д.И., Румянцева О.Д., Черняев А.С.* // *Изв. РАН. Сер. физ.* 2024. Т. 88. № 1. С. 131; *Zotov D.I., Rummyantseva O.D., Cherniaev A.S.* // *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.* 2024. V. 88. No. 1. P. 113.
13. <https://rentgenogram.ru/dicom-arhiv/molochnye-zhelezy>
14. <https://itis.swiss/virtual-population/tissue-properties/database>
15. *Li F., Villa U., Duric N., Anastasio M.A.* // *Proc. SPIE.* 2023. V. 12470. Art. No. 124700K.
16. *Malik B., Terry R., Wiskin J., Lenox M.* // *Med. Phys.* 2018. V. 45. No. 7. P. 3063.
17. *Duric N., Sak M., Fan S. et al.* // *J. Clin. Med.* 2020. V. 9. No. 2. Art. No. 367.

Reconstructing the spatial distribution of acoustic characteristics by technique of angle harmonics

D. I. Zotov, O. D. Rumyantseva*, A. S. Cherniaev

Department of Acoustics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia

**e-mail: burov@phys.msu.ru*

Improved numerical implementation of the two-dimensional functional analytical algorithm is proposed. The algorithm is designed to reconstruct spatial distributions of sound speed and absorption coefficient in a tomography region. The high accuracy of obtained tomograms is illustrated even with large wave sizes and complicated internal structure of object under study.

Keywords: acoustic tomography, sound velocity and absorption reconstruction, functional algorithm, angular harmonics

УДК 534.222

СРЕДНЕЕ ПОЛЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН С РАЗРЫВАМИ В ОДНОМЕРНОЙ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

© 2025 г. Д. М. Алексеев, В. А. Гусев*

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», физический факультет, Москва, Россия

** e-mail: vgusev@bk.ru*

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

Рассмотрены особенности построения замкнутых уравнений для среднего поля акустических волн с разрывными профилями в одномерной случайно-неоднородной среде. Проведено сравнение различных подходов к получению таких уравнений. Показано, что, несмотря на сглаживание профилей в среднем, наличие разрыва в профиле необходимо учитывать до проведения операции усреднения. Получено точное выражение для среднего поля исходной N -волны.

Ключевые слова: разрывные волны, случайно-неоднородные среды, среднее поле, усреднение, точное решение

DOI: 10.31857/S0367676525010197, **EDN:** CZMNFP

ВВЕДЕНИЕ

Проблема распространения акустических волн в случайно-неоднородных средах и необходимость расчета статистических характеристик таких волн возникает во многих случаях [1, 2], в частности при распространении звука в турбулентной атмосфере [2–7]. В этом случае параметры среды изменяются со временем, так что небольшой набор реализаций не дает полного представления о возможном характере эволюции волны. Полноценное описание возможно только на основе статистических характеристик типа распределений вероятности или, по крайней мере, средних величин, дисперсий и т. д. Отметим также задачи зондирования и восстановления параметров неоднородных сред, при реализации которых присутствующие шумы и флуктуации могут оказаться полезными [8, 9]. В настоящее время актуальными становятся вопросы распространения нелинейных волн и пучков [10] в случайно-неоднородных средах, в том числе акустических ударных волн с узким фронтом от перспективных гражданских сверхзвуковых самолетов [11, 12], а также в медицинских приложениях [13]. Поэтому необходимо развитие методов расчета статистических характеристик ударных и разрывных волн в случайно-неоднородной среде.

Построение точных динамических решений для нелинейных уравнений представляет большие трудности, тем более это относится к стохастиче-

ским уравнениям со случайными функциями. Одним из эффективных подходов к расчету статистических характеристик волновых полей является усреднение стохастических уравнений с целью получения уравнений для моментов — среднего поля, дисперсии и т. д.

Данная статья посвящена дальнейшему уточнению проведения процедуры усреднения для акустических ударных и разрывных волн с узкими ударными фронтами. Как известно [14–16], усреднение в целом приводит к появлению так называемого турбулентного затухания и, соответственно, сглаживанию ударных фронтов. Следовательно, можно было бы ожидать, что усреднение разрывных профилей не будет иметь особенностей по сравнению с усреднением гладких профилей. Однако, оказывается, что это не так, и наличие разрыва необходимо учитывать перед процедурой усреднения.

МЕТОД СРЕДНЕГО ПОЛЯ

Одним из распространенных методов получения замкнутых уравнений для усредненных характеристик является метод среднего поля, имеющий давнюю историю [17]. Он достаточно хорошо зарекомендовал себя при решении линейных задач. При рассмотрении нелинейных задач возникает проблема замыкания нелинейных слагаемых. Согласно методу среднего поля среднее

значение квадрата акустического поля (например, давления), заменяется на произведение средних значений. Фактически это означает пренебрежение средним квадратом флуктуаций давления, что приводит к определенным ошибкам [14, 18]. Кроме того, необходимо определить, насколько корректно он учитывает ударные фронты и разрывы в профиле волны.

В качестве исходного уравнения рассмотрим уравнение типа простых волн, включающее случайную расстройку скорости звука $\zeta(z) = \frac{c_0^2}{2}(c^{-2}(z) - c_0^{-2})$, вызванную флуктуациями параметров среды распространения:

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\zeta(z)}{c_0} \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{\varepsilon}{\rho c_0^3} p \frac{\partial p}{\partial \tau} = 0, \quad (1)$$

где p — акустическое давление, z — координата, $\tau = t - \frac{z}{c_0}$ — время в сопровождающей системе координат, $c(z)$ — случайная локальная скорость звука, c_0 — характерная средняя скорость звука, ε — нелинейный параметр, ρ — плотность среды.

Применяя к уравнению (1) метод среднего поля, получим уравнение Бюргерса для среднего давления:

$$\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{\rho c_0^3} \langle p \rangle \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2c_0^2} \frac{\partial^2 \langle p \rangle}{\partial \tau^2}. \quad (2)$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по ансамблю, σ^2 имеет смысл дисперсии флуктуаций расстройки скорости (конкретно задается корреляционная функция $\langle \zeta(z_1)\zeta(z_2) \rangle = \sigma^2 \delta(z_2 - z_1)$). Как видно, усреднение привело к появлению так называемого турбулентного затухания, т. е. в среднем поле затухает. Уравнение (2) замечательно тем, что заменой Хопфа–Коула $V = 2\Gamma \frac{\partial}{\partial \theta} \ln U$ оно сводится к линейному уравнению:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \Gamma \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}.$$

Здесь введены безразмерные переменные

$$V = \frac{\langle p \rangle}{p_0}, \quad \theta = \frac{\tau}{\tau_0}, \quad x = \frac{z}{z_{nl}}, \quad z_{nl} = \frac{\rho c_0^3 \tau_0}{\varepsilon p_0}, \quad \Gamma = \frac{\sigma^2}{2c_0^2} \frac{z_{nl}}{\tau_0^2}, \quad (3)$$

где p_0 и τ_0 — характерные амплитуда и длительность импульса.

В качестве исходного сигнала будем рассматривать N -волну,

$$p(z=0, \tau) = F(\tau) = \begin{cases} -\frac{p_0 \tau}{\tau_0}, & |\tau| < \tau_0, \\ 0, & |\tau| > \tau_0, \end{cases} \quad (4)$$

представляющую модельный вариант характерных профилей, зарегистрированных от сверхзвуковых самолетов [3, 5]. Для начального профиля (4) полу-

чим решение уравнения Бюргерса в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} \frac{\langle p \rangle}{p_0} = 2\Gamma \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \left\{ 1 + \frac{1}{2} \Phi \left(\frac{\theta - 1}{2\sqrt{\Gamma x}} \right) - \frac{1}{2} \Phi \left(\frac{\theta + 1}{2\sqrt{\Gamma x}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \exp \left(\frac{x+1-\theta^2}{4\Gamma(x+1)} \right) \times \right. \\ \left. \times \left[\Phi \left(\frac{x+1+\theta}{2\sqrt{\Gamma x}\sqrt{x+1}} \right) - \Phi \left(\frac{\theta-x-1}{2\sqrt{\Gamma x}\sqrt{x+1}} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$ — интеграл ошибок.

Из формулы (5) можно увидеть динамику полученного фронта — происходит расплывание ударных фронтов, пропорциональное как дисперсии флуктуаций фазы, так и пройденному расстоянию. В частности, даже разрывные профили в рамках этой модели сглаживаются и не содержат особенностей, на чем и основывается предположение о применимости стандартных подходов к усреднению волн с разрывами. Характерные профили решения (5) представлены на рис. 1 для значения $\Gamma = 0.05$. Происходит расплывание фронта волны, причем как за счет диффузионного расплывания ширины начального фронта, так и за счет определенного среднеквадратичного сноса среднего положения ударного фронта. Хотя в решении (5) и содержится значительная информация о нелинейности среды, оно всё равно неудовлетворительно описывает среднее поле, поскольку основано на приближенной модели усреднения [14, 18].

УСРЕДНЕНИЕ ТОЧНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Чтобы оценить точность описанных выше методов, вернемся к уравнению (1). Оно удобно для анализа тем, что удастся построить его точное аналитическое решение даже при наличии флуктуаций. Усреднение этого решения покажет точность и близость к верному результату решений, полученных приближенными методами.

Сделаем замену переменных

$$\tau_1 = \tau + \frac{1}{c_0} \int_0^z \zeta(z') dz'$$

и приведем уравнение (1) к стандартному уравнению простых волн:

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{\rho c_0^3} p \frac{\partial p}{\partial \tau_1} = 0. \quad (6)$$

Решение уравнения (6) с произвольным начальным профилем задается в неявном виде:

$$p = F \left(\tau_1 + \frac{\varepsilon}{\rho c_0^3} p z \right). \quad (7)$$

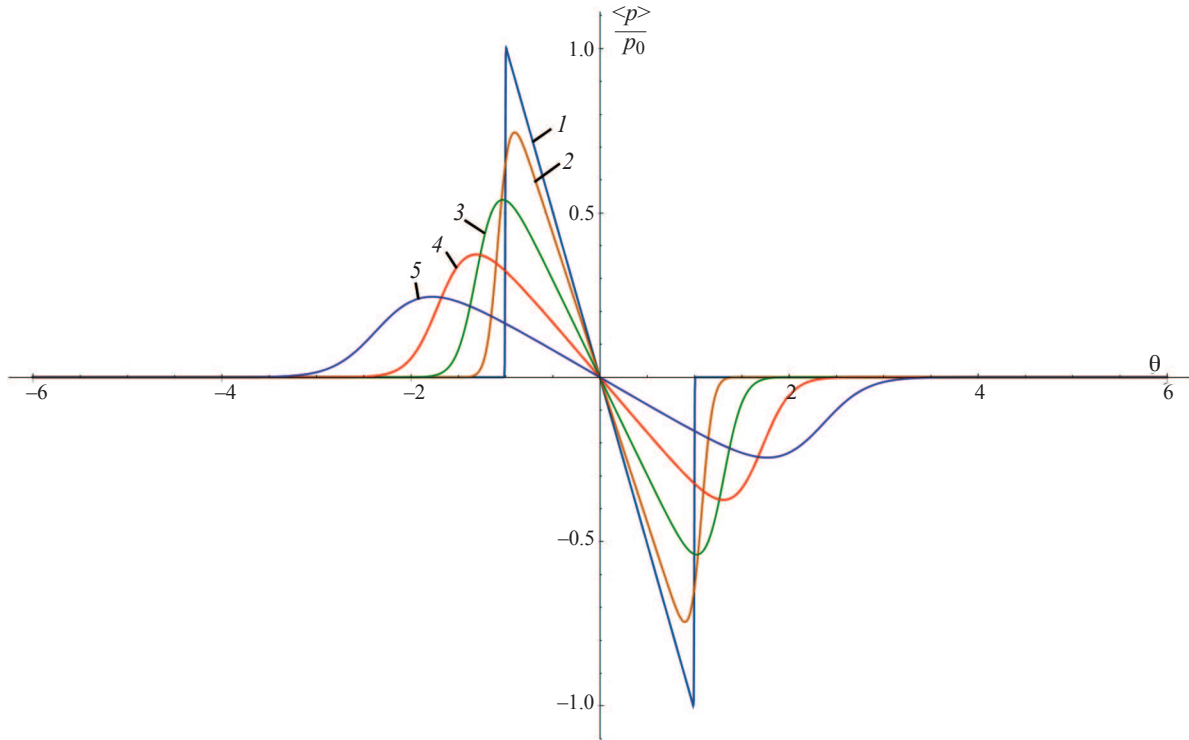


Рис. 1. Временные профили среднего давления, полученные методом среднего поля для значения дисперсии фазы $\Gamma = 0.05$ на расстояниях $x = 0.0001, 0.15, 0.7, 2, 5$ (кривые 1–5).

Введя обозначение $\eta = \frac{1}{c_0} \int_0^z \zeta(z') dz'$, решение уравнения (1), содержащего флуктуации, запишем в следующем виде:

$$p = F\left(\tau + \eta + \frac{\varepsilon}{\rho c_0^3} p z\right). \quad (8)$$

Решение (8) задано в неявном виде и не позволяет непосредственно его усреднить. Поэтому перейдем к спектру волны и усредним его, а затем найдем профиль усредненной волны. Известно, что до образования разрыва спектр простой волны (7) описывается разложением Бесселя–Фубини [19]. Проведя аналогичные расчеты для решения (8), получим выражение для его спектра:

$$S(\omega) = \frac{1}{i\omega (\varepsilon/\rho c^3) z} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(T+\eta)} \left(e^{i\omega \frac{\varepsilon}{\rho c^3} z F} - 1 \right) dT.$$

Учтем, что дисперсия величины η равна $\langle \eta^2 \rangle = \frac{2}{c_0^2} \int_0^z (z-s) K_\zeta(s) ds$, и при δ -коррелированности флуктуаций $K_\zeta(s) = D\delta(s)$, $\langle \eta^2 \rangle = \frac{Dz}{c_0^2}$. Среднее значение $\langle \eta \rangle = 0$, если среднее значение флуктуаций скорости равно нулю. Если флуктуации ζ являются гауссовским процессом, то η также будет гауссовским процессом. Тогда можно записать выражение для характеристической функции $\langle e^{-i\omega\eta} \rangle =$

$e^{-\frac{\omega^2}{2} \langle \eta^2 \rangle} = e^{-\frac{\omega^2}{2} \frac{Dz}{c_0^2}}$. Теперь усредненный спектр равен:

$$\langle S(\omega) \rangle = \frac{1}{i\omega (\varepsilon/\rho c^3) z} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega T - \frac{\omega^2}{2} \langle \eta^2 \rangle} \left(e^{i\omega \frac{\varepsilon}{\rho c^3} z F} - 1 \right) dT. \quad (9)$$

Применяя обратное преобразование Фурье, находим среднее поле:

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle S(\omega) \rangle e^{-i\omega\tau} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i\omega (\varepsilon/\rho c^3) z} e^{-\frac{\omega^2}{2} \langle \eta^2 \rangle} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(\tau-T)} \left(e^{i\omega \frac{\varepsilon}{\rho c^3} z F} - 1 \right) dT d\omega. \end{aligned} \quad (10)$$

В (10) удобно сначала вычислить производную от среднего поля

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial \tau} &= \frac{1}{2\pi (\varepsilon/\rho c^3) z} \sqrt{\frac{2\pi}{\langle \eta^2 \rangle}} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left(-\frac{1}{2\langle \eta^2 \rangle} \left(\tau - T + \frac{\varepsilon}{\rho c^3} z F(T)\right)^2\right) - \right. \\ &\left. - \exp\left(-\frac{(\tau - T)^2}{2\langle \eta^2 \rangle}\right) \right\} dT. \end{aligned} \quad (11)$$

Для N -волны (4) решение (10) в безразмерных переменных (3) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\langle p \rangle}{p_0} = \frac{\beta}{2x} \left\{ \frac{1}{1+x} \left[\frac{\theta + (1+x)}{\beta} \Phi \left(\frac{\theta + (1+x)}{\beta} \right) - \right. \right. \\ \left. - \frac{\theta - (1+x)}{\beta} \Phi \left(\frac{\theta - (1+x)}{\beta} \right) \right] + \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{(\theta + (1+x))^2}{\beta^2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{(\theta - (1+x))^2}{\beta^2} \right) \right] + \\ + \frac{\theta - 1}{\beta} \Phi \left(\frac{\theta - 1}{\beta} \right) - \frac{\theta + 1}{\beta} \Phi \left(\frac{\theta + 1}{\beta} \right) + \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(\theta-1)^2}{\beta^2}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(\theta+1)^2}{\beta^2}} \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{где } \beta = \beta(z) = \frac{\sqrt{2\langle \eta^2 \rangle}}{\tau_0} = \frac{\sqrt{2Dz}}{c_0 \tau_0} \equiv D_0 \sqrt{x}.$$

Однако полученное решение (10) неверно описывает эволюцию N -волны (4). В этом легко убедиться, рассмотрев в (12) предельный переход к отсутствию флуктуаций при $\beta \rightarrow 0$ ($D \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} \frac{\langle p \rangle}{p_0} = \frac{1}{2x} \left\{ \frac{1}{1+x} [|\theta + 1 + x| - |\theta - 1 - x|] + \right. \\ \left. + |\theta - 1| - |\theta + 1| \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Временные профили решения (13) построены на рис. 2 для различных расстояний. Видно, что полученное решение описывает распывание ударного фронта, что не соответствует динамике ударного импульса N -образной формы в нелинейной среде. Таким образом, при усреднении волн с разрывами необходимо предварительно получить явное разрывное решение для профиля.

УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ РАЗРЫВА В СРЕДЕ С ФЛУКТУАЦИЯМИ

Проанализируем динамику движения разрыва в волне, описываемой уравнением (1). Для N -волны решение (8) можно записать в явном виде для обратной функции:

$$\tau = -\frac{\tau_0}{p_0} p - \frac{\varepsilon}{\rho c^3} p z - \eta + \tau_0.$$

Определим положение переднего фронта при распространении волны. Введем обозначения: p_1 — минимальное значение давления в разрыве, p_2 — максимальное. Тогда для переднего фронта можно записать:

$$p_1 = 0, \quad \tau_2 = -\frac{\tau_0}{p_0} p_2 - \frac{\varepsilon}{\rho c^3} p_2 z - \eta + \tau_0. \quad (14)$$

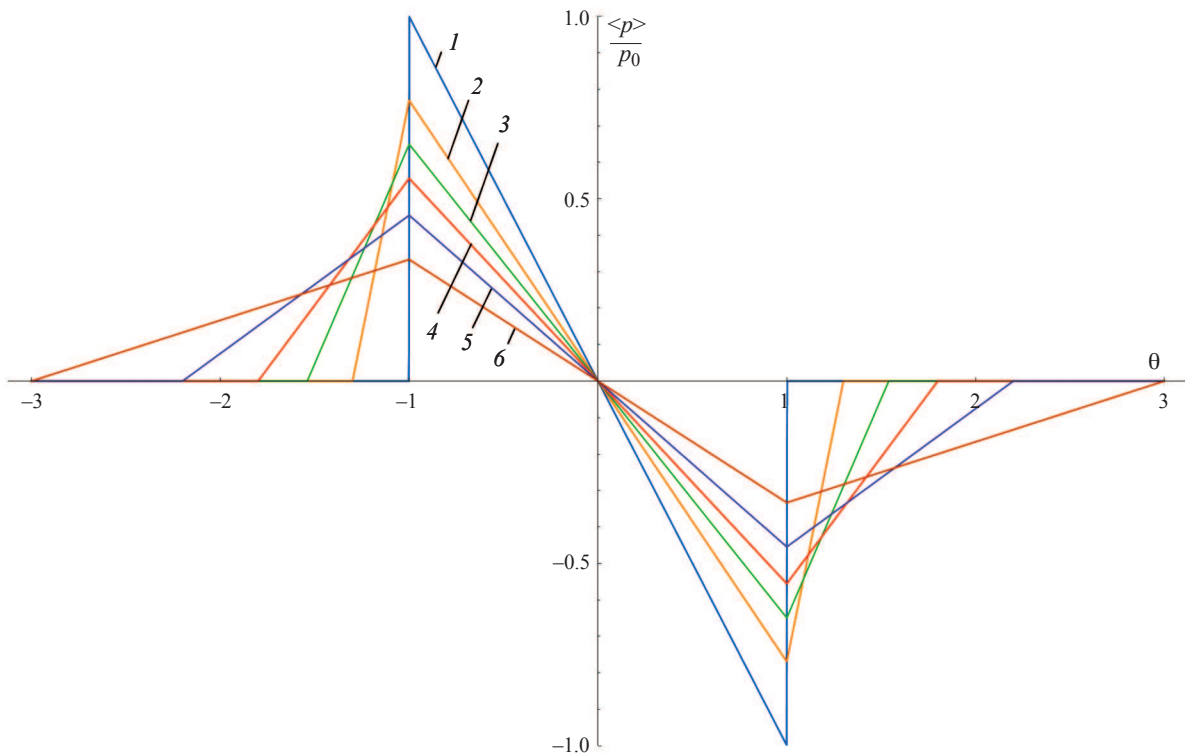


Рис. 2. Предельные профили при исчезающе малых флуктуациях среды, полученные при усреднении спектрального разложения. Кривые 1–6 соответствуют расстояниям $x = 0.001, 0.3, 0.54, 0.8, 1.2, 2$.

Уравнение движения координаты разрыва τ_p можно получить из закона сохранения импульса:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \int_{p_1}^{p_2} (\tau(p) - \tau_p) dp &= 0, \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{p_1}^{p_2} \frac{d\tau}{dz} dp &= (p_2 - p_1) \frac{d\tau_p}{dz}. \end{aligned} \quad (15)$$

Вычисляем:

$$\frac{d\tau}{dz} = -\frac{d\tau}{dp} \frac{dp}{dz} = -\frac{d\tau}{dp} \left(\frac{\varepsilon}{\rho c^3} p \frac{dp}{d\tau} + \varsigma \frac{dp}{d\tau} \right) = -\frac{\varepsilon}{\rho c^3} p - \varsigma,$$

и из (15) получаем:

$$\frac{d\tau_p}{dz} = -\frac{\varepsilon}{2\rho c^3} (p_2 + p_1) - \varsigma. \quad (16)$$

Уравнения (14) и (16) полностью описывают движение разрыва. Решая их совместно, получаем выражения для амплитуды и положения разрыва:

$$p_2 = \frac{p_0}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon p_0}{\rho c^3 \tau_0}}}, \quad \tau_p = -\tau_0 \sqrt{1 + \frac{\varepsilon p_0}{\rho c^3 \tau_0}} - \eta + \tau_0.$$

Окончательно, получаем явное решение для профиля N-волны:

$$p = \begin{cases} -\frac{p_0}{\tau_0} \frac{\tau + \eta}{1 + x}, & -T(x) - \eta < \tau < T(x) - \eta, \\ 0, & -T(x) - \eta > \tau, \tau > T(x) - \eta, \end{cases} \quad (17)$$

где $T(x) = \tau_0 \sqrt{1 + x}$, расстояние x определено в (3). Выражение (17) позволяет правильно усреднить решение для волны с разрывом. Используя спектральное представление решения (17), получим выражение для среднего поля:

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T(z)}^{T(z)} p(\tau') d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\langle \eta^2 \rangle}{2} \omega^2 + i\omega(\tau - \tau')} d\omega = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle \eta^2 \rangle}} \int_{-T(z)}^{T(z)} p(\tau') \exp\left(-\frac{(\tau - \tau')^2}{2\langle \eta^2 \rangle}\right) d\tau'. \end{aligned} \quad (18)$$

Для N-волны в безразмерных переменных окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\langle p \rangle}{p_0} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{1 + x} \left[\theta \left(\Phi \left(\frac{\theta + \sqrt{1 + x}}{D_0 \sqrt{x}} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \Phi \left(\frac{\theta - \sqrt{1 + x}}{D_0 \sqrt{x}} \right) \right) + \frac{D_0 \sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\exp \left(-\frac{(\theta - \sqrt{1 + x})^2}{D_0^2 x} \right) - \exp \left(-\frac{(\theta + \sqrt{1 + x})^2}{D_0^2 x} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

При $D_0 \rightarrow 0$ получаем следующее решение:

$$\frac{\langle p \rangle}{p_0} = -\frac{1}{2} \frac{\theta}{1 + x} \left[\operatorname{sgn}(\theta + \sqrt{1 + x}) - \operatorname{sgn}(\theta - \sqrt{1 + x}) \right]. \quad (20)$$

Выражение (20) правильно описывает эволюцию N-волны в однородной нелинейной среде.

Таким образом, наличие разрыва в профиле волны необходимо учитывать до проведения процедуры усреднения несмотря на то, что она сама по себе вносит турбулентное затухание и сглаживает ударные фронты. Однако это сглаживание не учитывает уширение длительности импульса за счет нелинейных эффектов, а приводит только к расплыванию ударного фронта в области его начального положения. На самом деле происходит конкуренция двух процессов — нелинейного уширения и турбулентного затухания.

ЭВОЛЮЦИЯ ИСХОДНОГО ТРЕУГОЛЬНОГО ИМПУЛЬСА

Интересно также проследить динамику исходного треугольного импульса, в котором разрыв еще отсутствует:

$$F(\tau) = \begin{cases} p_0 \frac{\tau + \tau_0}{\tau_0}, & -\tau_0 \leq \tau \leq 0, \\ p_0 \frac{-\tau + \tau_0}{\tau_0}, & 0 < \tau \leq \tau_0, \\ 0, & |\tau| > \tau_0. \end{cases} \quad (21)$$

Воспользуемся формулами (10) и (11), полученными на основе усреднения спектрального представления. Подставляя в них профиль (21), найдем:

$$\begin{aligned} \frac{\langle p \rangle}{p_0} &= \frac{1}{2x} \left\{ -D_0 \sqrt{\frac{x}{\pi}} \exp\left(-\frac{(\theta + 1)^2}{D_0^2 x}\right) - \right. \\ &\quad \left. - (\theta + 1) \Phi\left(\frac{\theta + 1}{D_0 \sqrt{x}}\right) + D_0 \sqrt{\frac{x}{\pi}} \exp\left(-\frac{(\theta - 1)^2}{D_0^2 x}\right) + \right. \\ &\quad \left. + (\theta - 1) \Phi\left(\frac{\theta - 1}{D_0 \sqrt{x}}\right) + \left[\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[D_0 \sqrt{\frac{x}{\pi}} \exp\left(-\frac{(\theta + x)^2}{D_0^2 x}\right) + (\theta + x) \Phi\left(\frac{\theta + x}{D_0 \sqrt{x}}\right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{x - 1} \left[(\theta + 1) \Phi\left(\frac{\theta + 1}{D_0 \sqrt{x}}\right) - D_0 \sqrt{\frac{x}{\pi}} \exp\left(-\frac{(\theta + 1)^2}{D_0^2 x}\right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{x + 1} \left[(\theta - 1) \Phi\left(\frac{\theta - 1}{D_0 \sqrt{x}}\right) - D_0 \sqrt{\frac{x}{\pi}} \exp\left(-\frac{(\theta - 1)^2}{D_0^2 x}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Профиль решения (22) (22), рассчитанный при исчезающей вязкости, имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\langle p \rangle}{p_0} &= \frac{1}{2x} \left\{ (\theta - 1) \operatorname{sgn}(\theta - 1) - (\theta + 1) \operatorname{sgn}(\theta + 1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(x + \theta) \operatorname{sgn}(x + \theta) - (\theta + 1) \operatorname{sgn}(\theta + 1)}{x - 1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(x + \theta) \operatorname{sgn}(x + \theta) - (\theta - 1) \operatorname{sgn}(\theta - 1)}{x + 1} \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Профиль (23) изображен на рис. 3 для различных расстояний. Как видно, на расстояниях до

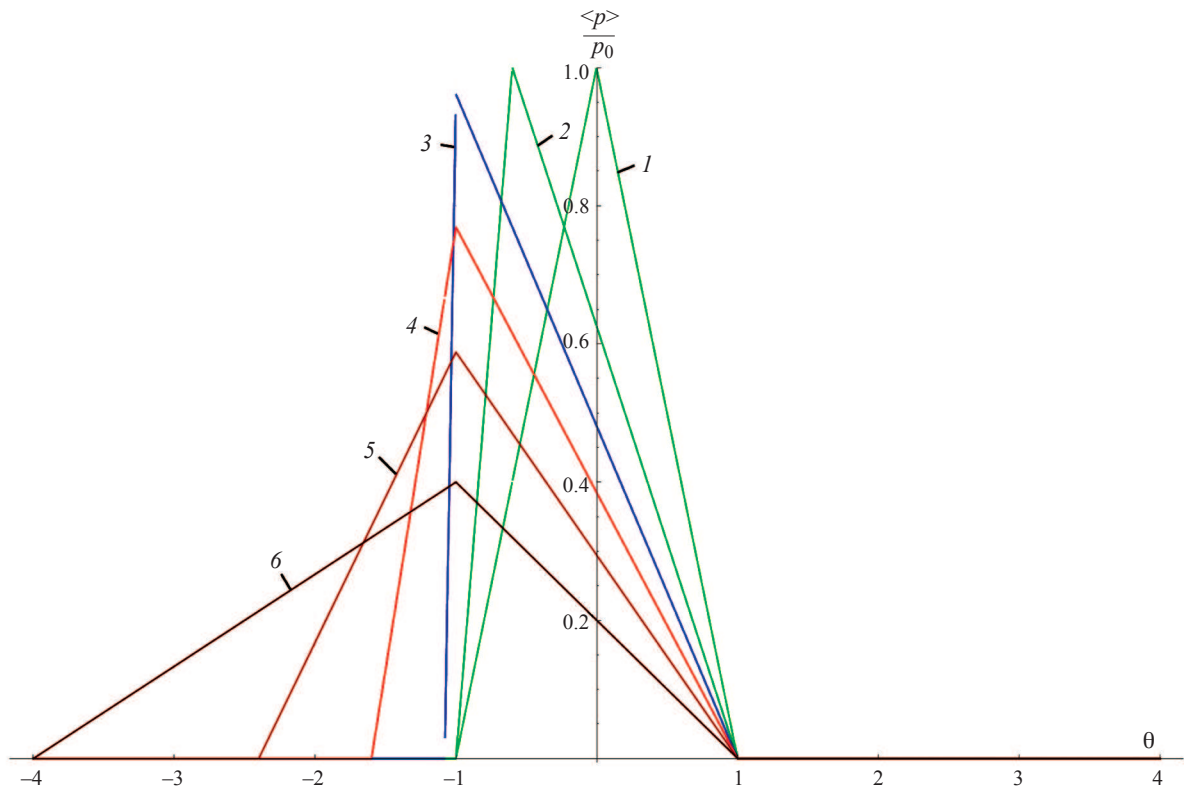


Рис. 3. Пределные профили исходного треугольного импульса при исчезающе малых флуктуациях среды, полученные при усреднении спектрального разложения для расстояний $x = 0.001, 0.3, 0.54, 0.8, 1.2, 2$ (кривые 1–6).

образования разрыва искажение профиля соответствует законам нелинейной акустики (кривые 1–3). После образования разрыва расчет профиля на основе спектрального представления неверно описывает динамику ударного фронта — он расплывается вместо того, чтобы сдвигаться.

Усредненные профили для треугольного импульса после образования разрыва на основе выражения для правильно усредненного поля приведены на рис. 4. Здесь нужно обратить также внимание на форму импульса. При относительно небольшой дисперсии флуктуаций (рис. 4а) импульс имеет характерную форму с укручением и явно заметным ударным фронтом, соответствующую его уширению за счет нелинейных эффектов. На эту форму накладывается сглаживающее воздействие турбулентного затухания. Таким образом, мы действительно получаем усредненные профили волны с разрывом. При увеличении дисперсии (рис. 4б) это укручение пропадает и профиль оказывается сглаженным. Если вернуться к рис. 1 для профилей, получаемых методом среднего поля, то можно заметить, что укручение на ударных фронтах выражено слабо при сравнимых значениях дисперсии с графиками на рис. 4а.

Таким образом, можно заключить, что метод среднего поля неточно описывает самую существенную часть усредненного профиля — ударный фронт и степень его крутизны, занижая данные величины. Тем самым, оценки на его основе мо-

гут дать заниженные значения ожидаемых акустических полей в турбулентной атмосфере, что может негативно сказаться на состоянии окружающей среды.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, рассмотрены методы получения замкнутых уравнений для средних полей акустических волн в случайно-неоднородных средах и результаты расчетов для волновых профилей с разрывами. Показано, что метод среднего поля неточно описывает трансформацию ударного фронта в условиях сильной нелинейности. При этом усреднение точного динамического решения также требует аккуратности, вначале необходимо определить положение разрыва в профиле.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руденко О.В. // УФН. 1986. Т. 149. № 3. С. 413; Rudenko O.V. // Sov. Phys. Usp. 1986. V. 29. No. 3. P. 620.
2. Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Тюрина А.В. // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 5. С. 554; Gurbatov S.N., Rudenko O.V., Tyurina A.V. // Acoust. Phys. 2018. V. 64. No. 5. P. 555.
3. Blanc-Benon P., Lipkens B., Dallois L. et al. // J. Acoust. Soc. Amer. 2002. V. 111. No. 1. P. 487.
4. Гусев В.А., Руденко О.В. // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 1. С. 30; Gusev V.A., Rudenko O.V. // Acoust. Phys. 2006. V. 52. No. 1. P. 24.

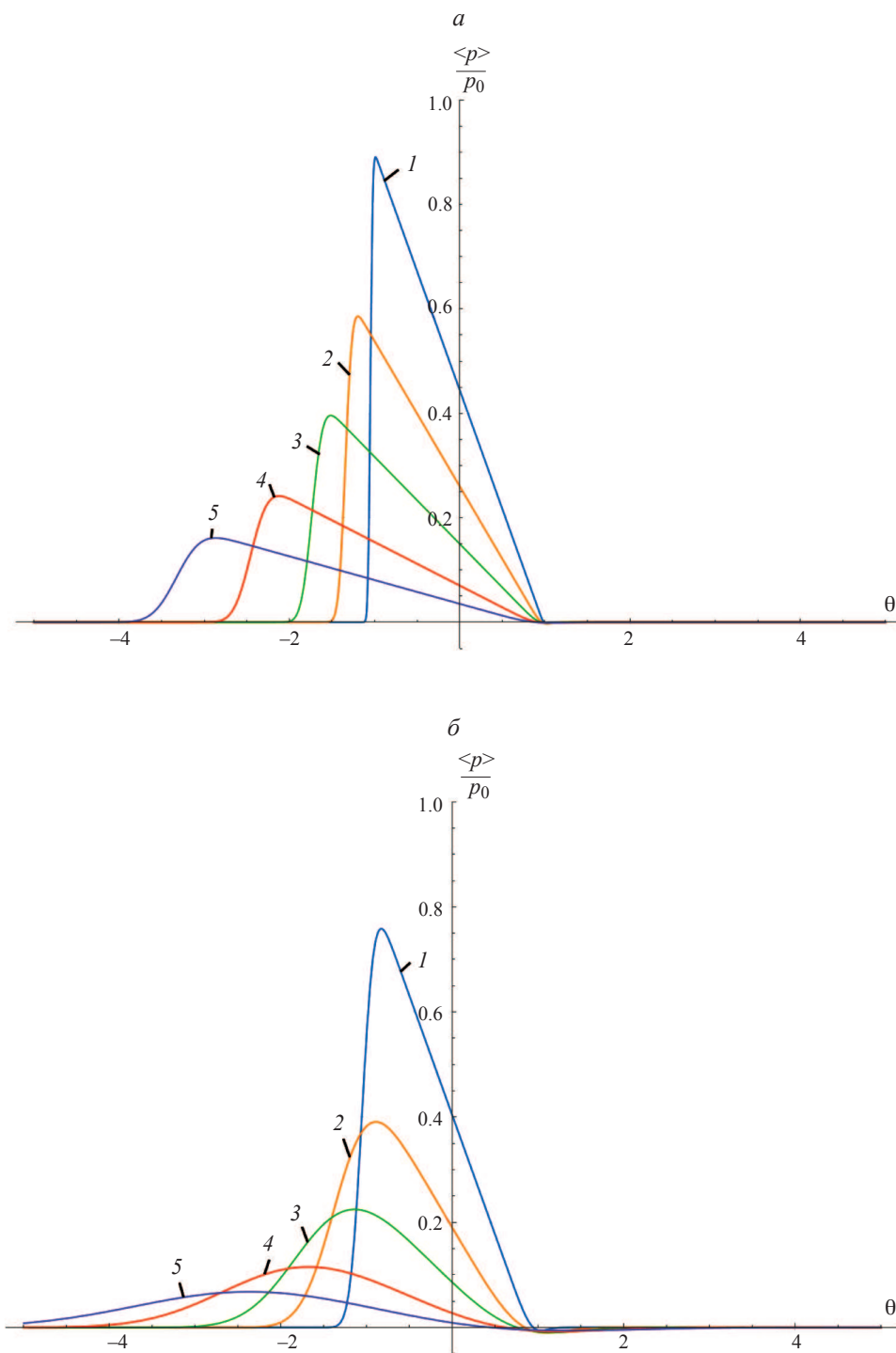


Рис. 4. Усредненные профили исходного треугольного импульса для значений дисперсии флуктуаций $D_0 = 0.1$ (а), 0.5 (б) на расстояниях $x = 0.1, 0.8, 2, 5, 10$ (кривые 1–5).

5. Руденко О.В., Маков Ю.Н. // Акуст. журн. 2021. Т. 67. № 1. С. 3; Rudenko O.V., Makov Yu.N. // Acoust. Phys. 2021. V. 67. No. 1. P. 1.
6. Косяков С.И., Куличков С.Н., Чхетиани О.Г., Цыбульская Н.Д. // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 6. С. 816; Kosyakov S.I., Kulichkov S.N., Chkhetiani O.G., Tsybul'skaya N.D. // Acoust. Phys. 2019. V. 65. No. 6. P. 731.
7. Курдяева Ю.А., Кшевецкий С.П. // Изв. РАН. Сер. физ. 2022. Т. 86. № 3. С. 422; Kurdyayeva Y.A., Kshevetskii S.P. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2022. V. 86. No. 3. P. 343.
8. Иванов М.А., Муханов П.Ю., Шуруп А.С. // Изв. РАН. Сер. физ. 2024. Т. 88. № 1. С. 119; Ivanov M.A., Mukhanov P.Yu., Shurup A.S. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2024. V. 88. No. 1. P. 103.

9. *Дмитриев К.В.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2023. Т. 87. № 1. С. 79; *Dmitriev K.V.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2023. V. 87. No. 1. P. 66.
10. *Гусев В.А., Жарков Д.А.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2023. Т. 87. № 4. С. 604; *Gusev V.A., Zharkov D.A.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2023. V. 87. No. 4. P. 524.
11. *Korunov A.O., Gusev V.A., Gorbovskey V.S.* // Acoust. Phys. 2024. V. 70. No. 4.
12. *Lonzaga J.B.* // J. Acoust. Soc. Amer. 2023. V. 154. No. 5. P. 3078.
13. *Пестова П.А., Юлдашев П.В., Хохлова В.А., Карзова М.М.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2024. Т. 88. № 1. С. 125; *Pestova P.A., Yuldashev P.V., Khokhlova V.A., Karzova M.M.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2024. V. 88. No. 1. P. 108.
14. *Гурбатов С.Н., Пелиновский Е.Н., Саичев А.И.* // Изв. вузов. Радиофиз. 1978. Т. 21. № 10. С. 1485.
15. *Гусев В.А., Руденко О.В.* // Вест. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2001. № 6. С. 37.
16. *Gusev V.A.* // Proc. Int. Symp. Nonlinear Acoustics ISNA-16. V. 1. (Moscow, 2002). P. 315.
17. *Канер Э.А.* // Изв. вузов. Радиофиз. 1959. Т. 2. С. 827.
18. *Бенилов Е.С., Пелиновский Е.Н.* // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. № 1. С. 175.
19. *Гурбатов С.Н., Руденко О.В.* Акустика в задачах. М.: Физматлит, 2009.

Mean field of acoustic waves with discontinuities in randomly inhomogeneous media

D. M. Alekseev, V. A. Gusev*

Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia

**e-mail: vgusev@bk.ru*

The features of the construction of closed equations for the mean field of acoustic waves with discontinuous profiles in a randomly inhomogeneous medium are considered. Different approaches to obtaining such equations are compared. It is shown that, despite the smoothing of profiles in the average, the presence of a discontinuity in the profile should be considered before the averaging operation. An exact expression for the mean field of the initial N -wave is obtained.

Keywords: discontinuous waves, random inhomogeneous media, mean field, averaging, exact solution

УДК 536.7

МОДИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЯ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЖИДКОЙ ВОДЫ

© 2025 г. А. А. Волков, С. В. Чучупал*

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Федеральный исследовательский центр «Институт общей физики им. А. М. Прохорова Российской академии наук», Москва, Россия

*e-mail: MirrorMan@yandex.ru

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

В представлении о жидкой воде как о реальном газе уравнение состояния Ван-дер-Ваальса модифицируется для описания изотерм, изохор и изобар жидкой воды в широком диапазоне давлений и температур. Новое уравнение обеспечивает стандартный переход к термодинамике с воспроизведением внутренней энергии U , свободной энергии F , теплоемкости C_V и энтропии S .

Ключевые слова: жидкая вода, фазовая диаграмма, термодинамические параметры

DOI: 10.31857/S0367676525010204, EDN: CZHNFN

ВВЕДЕНИЕ

Уравнение состояния Ван-дер-Ваальса (ВдВ), написанное в 1873 г. [1], укоренилось в курсах молекулярной физики, физической химии, термодинамики и статистической физики как базовое для изучения газов и жидкостей [2–5]. Оно постулирует связь между величинами, характеризующими реальный газ: внешним и внутренним давлениями P и P_i , объемом V и температурой T . Простое уравнение предсказывает важное явление — возникновение в веществе фазового перехода жидкость — газ. Эффект возникает вследствие кубичности изотерм Ван-дер-Ваальса: кубическая парабола $P(V)$ имеет петлю, положение которой на фазовой диаграмме по давлению P и развертка по температуре T определяют кривую испарения. Кривая обрывается в так называемой критической точке, за которой переход жидкость — газ перестает существовать.

Кубическое поведение изотерм $P(V)$ оказалось удачным для описания процесса конденсации в самых разных веществах: от простых газов до сложных углеводородов. Кубические уравнения как усовершенствования уравнения ВдВ образуют большой класс [6–10]. В силу простоты они допускают физический анализ параметров и развитие молекулярной теории жидкостей и газов в парадигме ВдВ. Попытки расширить область применения уравнения ВдВ и повысить точность описания данных продолжают третье столетие [11]. По теме конденсации написаны десятки и сотни более сложных уравнений состояния: вириальных, полиномиальных, многопараметрических — с устоявшимся обо-

значением EoS (equation of state), которые в конкретных приложениях имеют свои преимущества и недостатки. Они используются применительно к большим базам данных и имеют широкий спектр приложений, связанных с балансом вещества в состоянии жидкость — газ [11–17]. Темы разнообразны: от вязкости нефтепродуктов [18] до формирования морских облаков [19, 20] и ударных волн при взрыве [21, 22]. Некоторые из прикладных задач решаются с помощью сравнительно простого уравнения Тейта [22, 23]. Оно носит чисто эмпирический характер и на базовом физическом уровне не интерпретируется.

Самый известный баланс жидкость — газ присущ воде. Он лежит в основе множества природных и технологических процессов и в значительной степени определяет картину окружающего мира. Казалось бы, как жизненно важное и простое по химическому составу соединение, вода могла бы стать излюбленным объектом применения модели ВдВ и источником информации о строении вещества. Однако этого не произошло. Опыт показывает, что уравнение ВдВ плохо применимо к воде. Проходящая через критическую точку парабола ВдВ в жидкой фазе очень далека от реальности [24, 25]. Этот факт — давно привычный, в литературе детально не анализируется. Редкий разбор по теме проводится в работе [25]. По инерции в учебниках предлагается большое количество задач, связанных с приложениями уравнения ВдВ к воде, но все они рассматриваются для частных случаев и ограниченных условий [26]. Полного и физически ясного уравнения

состояния для воды не существует [24], его поиски продолжаются [9].

Отсутствие удовлетворительного описания термодинамических свойств жидкой воды сопровождается непониманием ее микроскопических свойств. Молекулярный механизм фазового перехода жидкость — газ остается спорным. Какие микроскопические механизмы скрываются за критическим поведением? Является ли жидкость реальным газом? Приходится спорить об одних и тех же вещах, которые на первый взгляд кажутся простыми и обыденными [27, 28].

В настоящей работе мы актуализируем вопрос о применимости модели ВдВ к жидкой воде в связи с неожиданным выводом, следующим из анализа ее широкодиапазонных диэлектрических спектров [29, 30]. Описание спектров оказывается более успешным в представлении о воде, связанной кулоновскими полями однозарядных ионов H_3O^+ и OH^- , чем, как принято считать [31, 32], водородными связями. В нашей ион-молекулярной модели (ИМ модели) молекулы и ионы свободны, совершают тепловое столкновительное движение и образуют среду, представляющую собой реальный газ ВдВ. Мы видим возможным описать свойства такой среды максимально простым, специфичным для воды уравнением состояния. Методом проб (сравнением результатов расчета со справочными данными) мы находим модификацию уравнения ВдВ, которая с удовлетворительной точностью позволяет рассчитать термодинамические параметры жидкой воды. Из согласия расчетных данных со справочными данными мы делаем вывод, что газовый подход для жидкой воды корректен, а ИМ модель перспективна для дальнейшего изучения.

ТЕПЛОВОЕ УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ

Мы стартуем от уравнения ВдВ в исходной форме — для давления P , температуры T и объема V для одного моля молекул газа:

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}, \quad (1)$$

где $R = 8.314$ Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная, $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана, b — исключенный объем (недоступный для движения молекул) и a — коэффициент притяжения (межмолекулярных сил и сил со стороны молекул пограничного слоя среды). Расчеты проводим для массы $M = 1000$ кг (55.5 кмоль) в системе СИ.

Коэффициенты a и b — визитная карточка уравнения ВдВ. Они выводятся из критической температуры и давления так, что по определению от температуры не зависят. Для воды приняты $a = 5.53$ бар·(м³/кмоль²) и $b = 0.03$ м³/кмоль [33], одинаковые во всех книгах и обзорах. Расчетные

изотермы ВдВ с этими параметрами представлены на рис. 1а. Они показаны тонкими линиями справа и, как видно, располагаются далеко от находящихся слева опорных точек, взятых из базы данных IAPWS [12]

Задаемся целью совместить модельные линии с опорными точками. Для этого внутреннее давление P_i (второе слагаемое в формуле (1)) предполагаем зависящим от температуры. Задаем второй числитель в биномиальной форме относительно T и изменяем показатель степени знаменателя с 2 на 1.4. Этот вариант модификации не единственный, но простейший из опробованных. Методом последовательных приближений аппроксимируем новое уравнение к справочным данным из базы данных IAPWS [12] и приходим к оптимальной формуле

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{CT - BT^2}{V^{1.4}} \text{ [МПа]}, \quad (2)$$

где b , C и B — оптимальные параметры, представленные в табл. 1. Работа формулы (2) для изотерм и изохор показана на рис. 1. Зависимости $P(V)$ и $P(T)$ рассчитаны методом последовательных фиксаций T и V в уравнении (2). Как видно, кривые хорошо ложатся на массив опорных точек, огром-

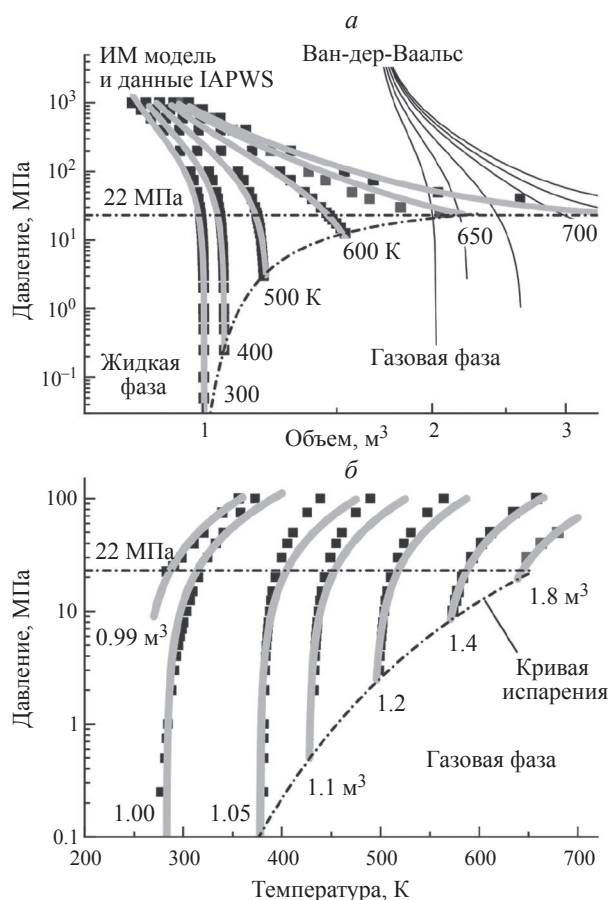


Рис. 1. Изотермы (а) и изохоры (б) жидкой воды. Тонкие линии сверху справа — расчет по модели ВдВ (1). Точки — справочные данные IAPWS [12], линии поверх точек — расчет по модифицированной модели (2).

Таблица 1. Параметры исходного уравнения ВдВ (1) [26] и модифицированной версии (2).

Параметр	ВдВ [26]	Модифицированная версия
R , Дж/(кг·К)	460	460 (<i>const</i>)
b , дм ³ /кг	1.7	0.74 (<i>const</i>)
a , МПа·м ⁶ /кг ²	1700	–
Показатель степени	2	1.4 (<i>const</i>)
B , Дж/(кг·К ²)·(дм ³ /кг) ^{0.4}	–	2.5 ± 0.3
C , Дж/(кг·К)·(дм ³ /кг) ^{0.4}	–	2500 ± 300

ный по количеству и разбросу абсолютных величин. Изобары $V(T)$ также хорошо передаются формулой (2) (графически не показаны) с той особенностью, что в силу присущей жидкой воде слабой сжимаемости при температурах от тройной до критической точки они лежат на одной общей кривой. Для удобства расчетов задаем эту зависимость упрощенной формулой

$$V(T) = \frac{73}{700 - T} + 0.82 \text{ [м}^3\text{]}, \quad (3)$$

передающей поведение изобар с отклонениями от справочных данных в пределах 5% для давлений до 25 МПа (см. рис. 3а в работе [34]).

КАЛОРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

Тепловое уравнение (2), как и исходное уравнение ВдВ (1), с учетом первого и второго законов термодинамики допускает хрестоматийный переход к термодинамике [4, 5]. Он предполагает проведение серии дифференциально-интегральных операций с термическим уравнением состояния вида $P(V, T)$ (выражение для давления) для получения энергетических (калорических) уравнений состояния вида $E(V, T)$ (выражения для свободной F и внутренней U энергий).

Проводим с уравнением (2) процедуру по схеме из учебников [4, 5]:

1) принимаем давление P как сумму теплового и внутреннего давлений

$$P = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \quad (4)$$

и как частную производную свободной энергии

$$P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T; \quad (5)$$

2) учитываем связь между внутренней энергией U и теплоемкостью C_V

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V, \quad (6)$$

связь между свободной энергией F и энтропией S

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_P \quad (7)$$

и связь между свободной F и внутренней U энергиями:

$$U = F + TS. \quad (8)$$

Получаем систему уравнений (4)–(8), в отношении которой ставим задачу выразить термодинамические величины U , F , C_V и S через найденные для уравнения (2) параметры b , B и C .

Транспонирование зависимостей $V(T)$ и $T(V)$ в уравнении (3) позволяет манипулировать уравнениями (4)–(8) (интегрировать, дифференцировать и строить графики) в двух вариантах по отдельности: когда величины U , F , C_V и S зависят только от давления P и когда они зависят только от температуры T . В этих условиях из теплового уравнения (2) прямо следуют три калорических уравнения состояния для U , F и TS с константами интегрирования $c_U(V, T)$ и $c_F(V, T)$:

$$U = - \frac{2.5BT^2}{V^{0.4}} + c_U, \quad (9)$$

$$F = -RT \ln(V - b) + 2.5 \frac{BT^2 - CT}{V^{0.4}} + c_F, \quad (10)$$

$$TS = RT \ln(V - b) - 2.5 \frac{2BT^2 - CT}{V^{0.4}} + c_U - c_F, \quad (11)$$

а также выражения для теплоемкости C_V и энтропии S :

$$C_V = - \frac{5BT}{V^{0.4}} + \frac{\partial c_U}{\partial T}, \quad (12)$$

$$S = R \ln(V - b) - 2.5 \frac{2BT - C}{V^{0.4}} + \frac{c_U - c_F}{T}. \quad (13)$$

Подгонка уравнений (9)–(13) к справочным данным из базы данных IAPWS [12] дает константы интегрирования, которые в биномиальном выражении представлены в табл. 2 и 3. Иллюстративный материал подгонки представлен на рис. 2 и 3. Расчетные зависимости находятся в хорошем согласии со справочными данными.

Наличие в константах интегрирования $c_U(V, T)$ и $c_F(V, T)$ сдвигового параметра Z дает возможность расчета энергетического спектра жидкой воды в абсолютном выражении путем распределения энергетических кривых, привязанных к тройной точке 0 °С на рис. 2а, по вертикали относительно

Таблица 2. Константы интегрирования c_U и c_F для зависимостей $U(T)$ и $F(T)$: 1) привязанных к тройной точке 0°C ; 2) откалиброванных по уравнению (15).

	1. Отн. 0°C	2. Абс. из уравнения (15)
c_U , кДж/кг	$XT^2 + YT - Z$	$XT^2 + YT + 1050$
c_F , кДж/кг	$-3.7XT^2 + YT$	$-3.7XT^2 + YT + 1250$
$c_U - c_F$, кДж/кг	$4.7XT^2 - Z$	$4.7XT^2 - 200$

Таблица 3. Коэффициенты констант интегрирования c_U и c_F , представленных в табл. 2.

X , кДж/(кг·К ²)	0.0027 ± 0.0002
Y , кДж/(кг·К)	6.5 ± 0.2
Z , кДж/кг	1450 ± 100

абсолютной температуры 0 К на рис. 2б. Используем факт, обнаруженный нами ранее, что энергия испарения $E_{\text{исп}}$ однозначно связана с плотностью ρ [34, 36]:

$$E_{\text{исп}} = \frac{q\rho\rho^{5/3}}{2^{4/3}\pi\epsilon_0 m^{5/3}} \left[\text{кДж} \cdot \text{кг}^{-1} \right], \quad (14)$$

где $m = 3.1 \cdot 10^{-26}$ кг и $p = 6.14 \cdot 10^{-30}$ Кл·м — масса и дипольный момент молекулы H_2O , $q = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл — элементарный заряд, $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф·м⁻¹ — диэлектрическая проницаемость вакуума. На рис. 2а видно, что зависимость $F(T)$, сдвинутая вверх на 1250 кДж/кг хорошо, в пределах погрешности $\pm 5\%$, ложится на кривую $1/2 E_{\text{исп}}(T)$. На этом основании устанавливаем

$$F = \frac{E_{\text{исп}}}{2}, \quad (15)$$

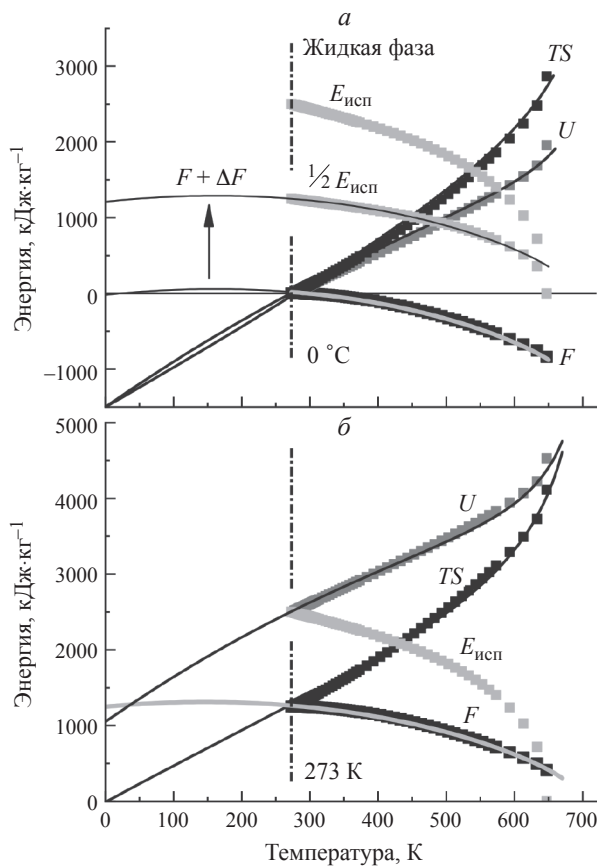


Рис. 2. Температурные зависимости внутренней энергии жидкой воды U , энтропийной части TS , энергии испарения $E_{\text{исп}}$ и свободной энергии F : а) привязанных к тройной точке 0°C и б) в абсолютном выражении (распределенные в спектр по вертикали). Точки — справочные данные IAPWS [12], линии — расчет по формулам (9–11).

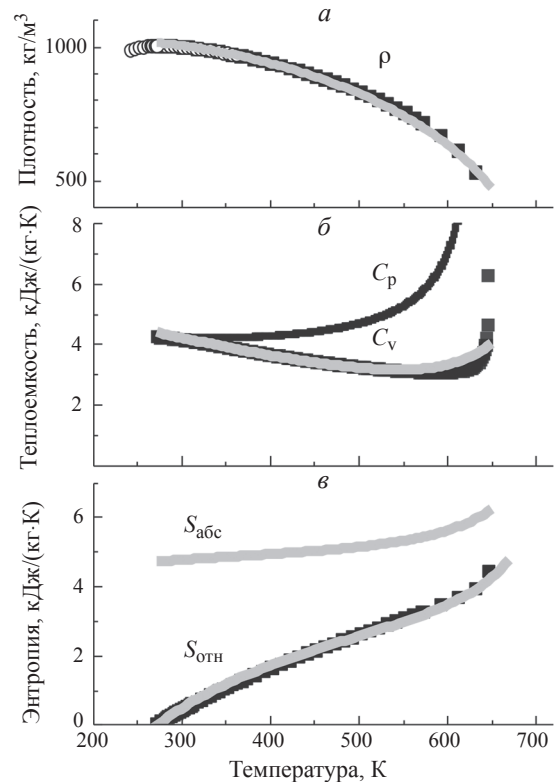


Рис. 3. Температурные зависимости плотности ρ (а), изохорной теплоемкости C_v (б) и энтропии S (в) жидкой воды. Точки — справочные данные [12, 35], линии — расчет по формулам (16), (12) и (13) соответственно. Для полноты картина также приведена изобарная теплоемкость C_p (б).

а энергию 1250 кДж/кг назначаем нулевым уровнем для всех энергетических кривых. Соответственно, пересчитываем константы c_U и c_F первого столбца табл. 2, содержащие параметр Z , в константы второго столбца. Кривые с новыми c_U и c_F , выраженные в абсолютных единицах, представлены на рис. 26. Пересчитанная энтропийная кривая $S(T)$ в абсолютном выражении показана на рис. 3в.

Из уравнений (10), (14) и (15) следует выражение для плотности ρ жидкой воды:

$$\rho = 4m \left(\frac{10^6 \pi \epsilon_0 F}{q\rho} \right)^{3/5} [\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}]. \quad (16)$$

В графическом представлении оно с учетом уравнения (3) показано на рис. 3а. Как видно, расчетная кривая с высокой точностью соответствует опорным точкам.

Преобразование уравнения (1) в уравнения (2) дает новое аналитическое выражение для внутреннего давления P_i (второе слагаемое). Сравнение нового P_i с общепринятым [37] представлено на рис. 4. Как видно, кривые $P_i(T)$ близки в диапазоне промежуточных температур 400–600 К, но зависимость $P_i(T)$ уравнения (2) уходит далее вправо за критическую точку и предоставляет возможность расчета изохор уже в газовой фазе. Расчетная фазовая диаграмма качественно близка к эталонной и полностью совпадает с ней при низких давлениях.

ОБСУЖДЕНИЕ

Центральный результат настоящей работы заключается в том, что использованный газовый подход, простой на фоне других методов исследования, дает определенно положительный результат — возможность прогнозировать тепловые и калорические характеристики жидкой воды простыми ал-

гебраическими выражениями, исходящими из одной общей формулы (2). Уравнение (2) оказывается простым и всеобъемлющим.

Впервые для описания свойств жидкой воды применена гипотеза (15), исходящая из теоремы вириала [38]. Повод для применения этой теоремы мы получили из анализа диэлектрических спектров жидкой воды [30, 34]. Мы обнаружили, что жидкую воду можно считать состоящей из свободных частиц (молекул и ионов), совершающих тепловое столкновительное движение и стягивающихся в объем V электростатическим ион-дипольным взаимодействием. Картина отвечает требованиям вириальной теоремы, согласно которой при внутренней связи частиц в ограниченном пространстве средняя кинетическая энергия частиц $E_{\text{кин}}$ соотносится со средней потенциальной энергией $E_{\text{пот}}$ как $E_{\text{кин}} = n/2 \cdot E_{\text{пот}}$, где n — степень потенциальной энергии как однородной алгебраической функции координат [39]. Когда, например, $n = 2$, средняя кинетическая энергия равна средней потенциальной энергии, а каждая из них равна половине полной энергии, — это результат для линейного осциллятора.

Для жидкой воды потенциальную энергию ее частиц $E_{\text{пот}}$ надежно демонстрирует температурная кривая испарения (разложения) воды $E_{\text{исп}}$ [2]. Функциональное выражение $E_{\text{исп}}(T)$ в виде уравнения (14) мы установили ранее в работах [34, 36]. Теперь половину энергии распада $E_{\text{исп}}$ мы принимаем за энергию взаимного притяжения молекул. Эта энергия, конкурируя с энергией термического расширения молекул $\sim k_B T$, обеспечивает устойчивое состояние жидкой воды: свободная энергия $F(T)$ в форме (10) имеет фундаментально требуемый минимум (графически его не демонстрируем). В пользу правомерности использования вириальной теоремы в приложении к воде свидетельствует точное описание (без дополнительной подгонки) плотности жидкой воды $\rho(T)$ посредством модельной кривой (16), как показано на рис. 3а. Уравнение (16) особенно ценно тем, что связывает плотность жидкой воды $\rho(T)$ с микроскопическими параметрами частиц: массой m , зарядом q и дипольным моментом p .

Совпадение расчетной кривой $\rho(T)$ на рис. 3а со справочными данными распространяется на широкий диапазон температур 300–630 К, но знаменитую аномалию плотности в районе 4 °С модель не передает. К этому следует сказать, что хотя аномалия благодаря своей жизненной важности хрестоматийна [40–42], она разворачивается в очень узком температурном интервале (менее ± 1 К) и может быть правильно интерпретирована только при понимании широкомасштабного хода всей зависимости $\rho(T)$.

Гипотеза (15) позволяет построить энергетический спектр жидкой воды в абсолютном

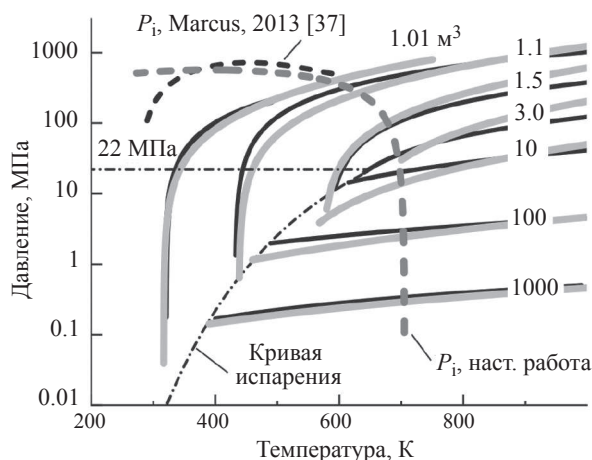


Рис. 4. Фазовая диаграмма воды в изохорном представлении. Пунктиры — внутреннее давление $P_i(T)$ по формуле (2) и из работы [37]. Сплошные темные линии — справочные данные IAPWS [12], светлые линии — расчет по формуле (2).

выражении, как показано на рис. 2б. Модельные кривые естественным образом ведут себя в пределе низких температур: энтропийная часть свободной энергии TS стремится к нулю, а значения U и F выравниваются [4]. Сдвиг $\Delta F = 1250$ кДж/кг дает два пересечения кривых, оба при 0°C . Температура 0°C оказывается точкой равенства двух частей внутренней энергии. Эта же температура становится точкой равенства кинетической и потенциальной энергий, а также начала их изменения с повышением температуры.

В модифицированном уравнении (2) внутреннее давление P_i (второе слагаемое) по сравнению с P_i в исходном уравнении (1) принимает новую аналитическую форму. Величина P_i имеет самостоятельное важное значение, поскольку непосредственно связана с другими свойствами воды: изобарной расширяемостью, изотермической сжимаемостью, поверхностным натяжением [4]. На рис. 4 найденная зависимость $P_i(T)$ сравнивается с общепринятой [37]. Две зависимости близки в промежуточном температурном интервале 400–600 К, но новая проходит на фазовой диаграмме дальше вправо за критическую точку. Это позволяет по уравнению (2) рассчитать картину изохор, которая, как видно, качественно схожа с эталонной. Интересно, что, хотя моделирование выходит за рамки исходных предположений (нарушается уравнение (3)), предсказательная способность уравнения (2) сохраняется.

На рис. 1б в области высоких давлений кривые заметно отклоняются от опорных точек. Согласие можно улучшить увеличением константы R в уравнении (2), но мы этого не делаем, оставляя первое слагаемое чисто «газовым», ван-дер-ваальсовым, чтобы уйти от известной проблемы различия газовой константы R для критической и комнатной температур [26, 43]. Вторая для воды в полтора раза больше первой. Это интерпретируют следующим образом: поскольку величина R по определению пропорциональна числу «структурных единиц» в моле вещества, то в критическом состоянии (в сильно сжатом газе при высокой температуре) молекулы воды частично связаны в комплексы [43]. Проблема надмолекулярного структурирования жидкой воды — кластеризации, льдо-подобности, сосуществования фаз высокой — низкой плотности и т. п. — обширна и остро дискуссионна [44–49]. Она самостоятельна, и в настоящей работе мы ее не обсуждаем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящей работой мы продолжили дискуссию о целесообразности применения газового ион-молекулярного подхода к изучению свойств жидкой воды. Центральным результатом работы стал сам факт успешного предсказания справочных данных моделью реального газа. Газовый под-

ход в отношении жидкой воды принципиально нов. Он открывает простой алгебраический доступ к термодинамике, возможность быстрого и системного обращения с мириадами табличных данных, возможность слежения за зашифрованными в них параметрами. Нами предложены алгебраические соотношения, которые последовательно и адекватно передают термодинамические параметры жидкой воды. Формулы удобны для дальнейшего моделирования и подробного анализа выявленных закономерностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Van der Waals J.D.* Over de Continuïteit van den Gas-en Vloeistoftoestand (On the Continuity of the Gas and Liquid State). Doctoral. diss. Leiden: Univer. Leiden, 1873. 135 p.
2. *Мелвин-Хьюз Э.А.* Физическая химия. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962. 1148 с.
3. *Матвеев А.Н.* Молекулярная физика. М.: Высшая школа, 1981. 400 с.
4. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Том II. Термодинамика и молекулярная физика. М.: Физматлит, 2005. 544 с.
5. *Эткинс П., де Паула Дж.* Физическая химия. Ч. 1. Равновесная термодинамика: пер. с англ. М.: Мир, 2007. 494 с.
6. *Kontogeorgis G.M., Economou I.G.* // J. Supercrit. Fluids. 2010. V. 55. No. 2. P. 421.
7. *Петрик Г.Г.* // Вестн. Новгород. гос. ун-та. 2017. № 5(103). С. 36.
8. *Петрик Г.Г.* // Мониторинг. Наука и технологии. 2020. № 1(43). С. 54.
9. *Kontogeorgis G.M., Liang X., Arya A., Tsivvintzelis I.* // Chem. Engin. Sci. X. 2020. V. 7. Art. No. 100060.
10. *König M., Weber Sutter M.* // Chem. Ing. Tech. 2022. V. 94. No. 4. P. 493.
11. *Kontogeorgis G.M., Privat R., Jaubert J.-N.* // J. Chem. Engin. Data. 2019. V. 64. No. 11. P. 4619.
12. *Wagner W., Pruß A.* // J. Phys. Chem. Ref. Data. 2002. V. 31. No. 2. P. 387.
13. *Нигматулин Р.И., Болотнова Р.Х.* // Теплофиз. высок. темпер. 2011. Т. 49. № 2. С. 310; *Nigmatulin R.I., Bolotnova R.Kh.* // High Temp. 2011. V. 49. No. 2. P. 303.
14. *Guo T., Hu J., Mao S., Zhang Z.* // Phys. Earth Planet. Inter. 2015. V. 245. P. 88.
15. *Du G., Hu J.* // Int. J. Greenhouse Gas Control. 2016. V. 49. P. 94.
16. *Giglio F., Landolfi G., Martina L., Moro A.* // J. Phys. A. Math. Theor. 2021. V. 54. No. 40. Art. No. 405701.
17. *Mishima O., Sumita T.* // J. Phys. Chem. B. 2023. V. 127. No. 6. P. 1414.
18. *Quiñones-Cisneros S.E., Zéberg-Mikkelsen C.K., Stenby E.H.* // Fluid Phase Equilib. 2000. V. 169. No. 2. P. 249.

19. Мингалев И.В., Орлов К.Г., Мингалев В.С. // Изв. РАН. Сер. физ. 2022. Т. 86. № 3. С. 445; *Mingalev I.V., Orlov K.G., Mingalev V.S.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2022. V. 86. No. 3. P. 364.
20. Feistel R., Hellmuth O. // Oceans. 2024. V. 5. No. 2. P. 312.
21. Moro A. // Ann. Physics. 2014. V. 343. P. 49.
22. Lozano E., Aslam T., Petr V., Jackson G.S. // AIP Conf. Proc. 2020. V. 2272. No. 1. Art. No. 070030.
23. Dymond J.H., Malhotra R. // Int. J. Thermophys. 1988. V. 9. No. 6. P. 941.
24. Анисимов М.А., Рабинович В.А., Сычев В.В. Термодинамика критического состояния индивидуальных веществ. М.: Энергоатомиздат, 1990. 190 с.
25. Powers J.M. Lecture Notes on Thermodynamics. Notre Dame: University of Notre Dame, 2024. 438 p.
26. Шиллинг Г. Статистическая физика в примерах. М.: Мир, 1976. 432 с.
27. Brazhkin V.V., Trachenko K. // Phys. Today. 2012. V. 65. No. 11. P. 68.
28. Henderson D., Holovko M., Nezbeda I., Trokhymchuk A. // Cond. Matter Phys. 2015. V. 18. No. 1. Art. No. 10101.
29. Volkov A.A., Artemov V.G., Pronin A.V. // EPL. 2014. V. 106. No. 4. Art. No. 46004.
30. Volkov A.A., Chuchupal S.V. // J. Molec. Liquids. 2022. V. 365. Art. No. 120044.
31. Stillinger F.H. // Science. 1980. V. 209. No. 4455. P. 451.
32. Zhao L., Ma K., Yang Z. // Int. J. Mol. Sci. 2015. V. 16. No. 4. P. 8454.
33. Moran M.J., Shapiro H.N., Boettner D.D., Bailey M.B. Fundamentals of Engineering Thermodynamics. Hoboken: John Wiley & Sons, 2011. 1004 p.
34. Volkov A.A., Chuchupal S.V. // Int. J. Mol. Sci. 2023. V. 24. No. 6. Art. No. 5630.
35. Kell G.S. // J. Chem. Engin. Data. 1975. V. 20. No. 1. P. 97.
36. Volkov A.A., Chuchupal S.V. // Ferroelectrics. 2021. V. 576. No. 1. P. 148.
37. Marcus Y. // Chem. Rev. 2013. V. 113. No. 8. P. 6536.
38. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1988. 216 с.
39. Слэтер Дж. Электронная структура молекул. М.: Мир, 1965. 588 с.
40. https://water.lsbu.ac.uk/water/water_anomalies.html
41. Cho C.H., Singh S., Robinson G.W. // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. No. 10. P. 1651.
42. Bandyopadhyay D., Mohan S., Ghosh S.K., Choudhury N. // J. Phys. Chem. B. 2013. V. 117. No. 29. P. 8831.
43. Алешикевич В.А. Курс общей физики. Молекулярная физика. М.: Физматлит, 2016. 312 с.
44. Von Röntgen W.C. // Ann. Phys. Chem. 1892. V. 281. No. 1. P. 91.
45. Frank H.S., Wen W.-Y. // Discuss. Faraday Soc. 1957. V. 24. P. 133.
46. Nilsson A., Pettersson L.G.M. // Nature Commun. 2015. V. 6. Art. No. 8998.
47. Ansari N., Dandekar R., Caravati S. et al. // J. Chem. Phys. 2018. V. 149. No. 20. Art. No. 204507.
48. Da Cruz V.V., Gel'mukhanov F., Eckert S. et al. // Nature Commun. 2019. V. 10. Art. No. 1013.
49. Волков А.А., Чучупал С.В. // Изв. РАН. Сер. физ. 2023. Т. 87. № 10. С. 1468; Volkov A.A., Chuchupal S.V. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2023. V. 87. No. 10. P. 1498.

Modification of the Van der Waals equation for describing the thermodynamic properties of liquid water

A. A. Volkov, S. V. Chuchupal*

Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russia

*e-mail: MirrorMan@yandex.ru

In the point of view of liquid water as a real gas, the Van der Waals equation of state is modified for describing isotherms, isochores, and isobars of liquid water in a wide range of pressures and temperatures. The new thermal equation provides a standard transition to thermodynamics with the reproduction of internal energy U , free energy F , heat capacity C_V and entropy S .

Keywords: liquid water, phase diagram, thermodynamic parameters

УДК 532.5.031

НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

© 2025 г. А. А. Очиров*, К. Ю. Лапшина

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского Российской академии наук», Москва, Россия

**e-mail: otchirov@mail.ru*

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

Исследовано потенциальное волновое движение вдоль свободной поверхности глубокой идеальной жидкости. Получены точные решения уравнений движения с физически обоснованными граничными условиями на свободной поверхности. Исследована форма свободной поверхности в зависимости от амплитуды и выделены характеристики поверхности. Исследованы характеристики волн в зависимости от параметра нелинейности.

Ключевые слова: идеальная жидкость, потенциальное течение, волновое движение, W-функция Ламберта, нелинейные волны, характеристики волн

DOI: 10.31857/S0367676525010214, **EDN:** CZERZE

ВВЕДЕНИЕ

Человечество на протяжении довольно длительного времени привлекает исследование волн на поверхности жидкости. Еще Леонардо да Винчи в пятнадцатом веке в своих трудах упоминал поверхностные волны. С появлением математического аппарата исследования от простых наблюдений переходят к аналитическому описанию, а развитие техники эксперимента привело к качественно новым экспериментальным описаниям разнообразнейших явлений, возникающих на поверхности жидкости. Исследования поверхностных волн находят свое место и в классических трактатах и учебниках [1–4] и в специализированных монографиях, посвященных волновым движениям жидкости [5–8].

В современных работах часто решается линеаризованная задача о расчете характеристик инфинитезимальных поверхностных периодических течений в жидкости в различных постановках [9–11]. Наряду с линеаризованными задачами в теоретических работах объектом исследования становятся нелинейные волны, и исследователи в самых разнообразных постановках задачи получают точные решения нелинейных уравнений Эйлера, Кортевега–де Фриза, Шредингера, Хопфа [12–16]. Интерес к изучению поверхностных волн не угас до сих пор, и они становятся предметом как теоретического [12, 13, 16] так и экспериментального [17–21] изучения. Интерес связан с необходимо-

стью изучения параметров морских волн, описанных в учебных пособиях по океанографии [22, 23] для подробного описания и предсказания поведения волновых и многих смежных явлений в океане. Несмотря на давнюю историю вопроса до сих пор не разработана полная теория, позволяющая по измеренным характеристикам предсказывать поведение волн. В последние годы активизировалась работа по теоретическому и экспериментальному описанию. Также происходит развитие экспериментальных методов контроля поверхностных волн (см. например, [24]).

Для изучения и предсказания поведения волн на поверхности моря необходима регистрация элементов, характеристик и параметров волн. В настоящей работе предлагается структуризация элементов волн на поверхности глубокого океана, описываемых функциями Ламберта. Решение задачи в виде функций Ламберта впервые получено и обсуждалось в [16]. Настоящая работа направлена на исследование влияния амплитуды волны на ее различные характеристики и измеряемые в эксперименте параметры.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим распространение периодических потенциальных волновых движений вдоль свободной поверхности идеальной глубокой жидкости, занимающей нижнее полупространство $z < 0$ в декартовой системе координат. В простейшем слу-

чае в приближении постоянной плотности $\rho = \text{const}$ без учета поверхностного натяжения в двумерной постановке математическая формулировка задачи включает в себя уравнения Эйлера и неразрывности и дополняется стандартными граничными условиями на свободной поверхности. При переходе в систему координат $O\xi z$, движущуюся вместе с волной со скоростью c , учитывая связь между горизонтальными координатами $\xi = x - ct$, математическая формулировка задачи записывается следующим образом:

$$z < \zeta: \quad \rho(-c\partial_\xi \vec{u} + (\vec{u}\nabla)\vec{u}) = -\nabla P + \rho \vec{g}, \quad (1)$$

$$\partial_t \rho + \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad (2)$$

$$z = \zeta: \quad P = P_0, \quad w - u\partial_\xi \zeta = -c\partial_\xi \zeta. \quad (3)$$

Здесь функция $\zeta = \zeta(\xi)$ описывает отклонение свободной поверхности от равновесного положения $z = 0$, ускорение свободного падения $\vec{g} = (0, -h)$ направлено вертикально вниз против направления оси Oz , переменными u и w обозначены горизонтальная и вертикальная компоненты скорости \vec{u} , а давление P складывается из атмосферного P_0 , гидростатического и динамического давления \tilde{P} :

$$P(\xi, z) = P_0 + \rho g(\zeta - z + \tilde{P}(\xi, z)). \quad (4)$$

Для жидкости с постоянной плотностью уравнение неразрывности сводится к условию несжимаемости, и в двумерной постановке можно ввести функцию тока ψ такую, что $\vec{u} = (u, w) = (\partial_z \psi - \partial_x \psi)$. Решение для функции тока ищется в виде представления, определяющего экспоненциальное затухание волнового движения с удалением от свободной поверхности и обобщенное для волнового пакета представление, выглядит следующим образом:

$$\psi(\xi, z) = \int_0^\infty \exp(k(z - \zeta(\xi))) \phi(k, \xi) dk, \quad (5)$$

Из кинематического граничного условия (3) и (5) получим для функции тока:

$$\psi(\xi, z) = c(\zeta + a) \int_0^\infty \exp(k(z - \zeta(\xi))) f(k) dk, \quad (6)$$

$$\int_0^\infty f(k) dk = 1.$$

Не вдаваясь в особенности решения, которое не является основным интересом настоящего рассмотрения и подробно рассмотрено, и описано в работе [13], отметим, что для функции, описывающей отклонение свободной поверхности от равновесного значения получается выражение:

$$\zeta(\xi, A) = -\frac{1}{k} \left(W\left(-\frac{kA}{2} \exp(ik\xi)\right) + W\left(-\frac{kA}{2} \exp(-ik\xi)\right) \right). \quad (7)$$

Здесь символом A обозначена амплитуда волнового движения, а $W(x) - W$ — функция Ламберта.

В [16] показано, что функция $f(k)$ в выражении (6) является дельта-функцией Дирака $\delta(k - k_*)$ и в таком случае, применяя свойство функции Ламберта $W(x) \exp(W(x))$ можно записать для функции тока:

$$\psi_\pm(\xi, z) = -\frac{c}{k_*} W(-k_* A e^{\pm ik_* \xi}) \times \exp\left(W(-k_* A e^{\pm ik_* \xi})\right) e^{k_* z} = c A e^{\pm ik_* \xi} e^{k_* z}. \quad (8)$$

Настоящая работа посвящена анализу формы и некоторых характеристик свободной поверхности, в задаче о распространении поверхностных волн, точное решение которой определяется волнами Ламберта.

АНАЛИЗ ФОРМЫ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Проанализируем поведение формы свободной поверхности (7). Для инфинитезимальных волн $kA \ll 1$ и выражение, описывающее форму свободной поверхности (7), принимая во внимание разложение функции Ламберта по малому параметру $W(x) = x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 + o(x^3)$ при $|x| \ll 1$, принимает вид:

$$\begin{aligned} \zeta(\xi, A) &= -\frac{1}{k} \left(W\left(-\frac{kA}{2} \exp(ik\xi)\right) + W\left(-\frac{kA}{2} \exp(-ik\xi)\right) \right) = \\ &= -\frac{1}{k} \left(-\frac{kA}{2} \exp(ik\xi) - \frac{kA}{2} \exp(-ik\xi) \right) = A \cos(k\xi). \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, при малых амплитудах форма свободной поверхности близка к гармонической. Выполним построение формы свободной поверхности для различных параметров нелинейности $\varepsilon = A\omega^2/g$, характеризующего отношение амплитуды волнового движения A к длине волны. С ростом параметра нелинейности гребень волны вытягивается и при некотором критическом значении $\varepsilon_{cr} = 2/e$ на вершине волны возникает сингулярность и форма поверхности перестает быть гладкой. Волны, удовлетворяющие условию $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$ будем называть гладкими или докритическими волнами, а волны, удовлетворяющие $\varepsilon \geq \varepsilon_{cr}$ будем называть острыми или закритическими. На рис. 1а представлены типичные формы поверхности для докритических и закритических волн. Поверхностные волны характеризуются большим набором параметров, которые можно отслеживать в экспериментальных исследованиях. На рис. 1б и 1в представлены формы поверхности для гладкой и острой волны с указанием характеристик поверхностного волнового движения, оценка которых может быть получена при обработке оптических данных волн на поверхности жидкости. В табл. 1 перечислены характеристики и приведено их описание.

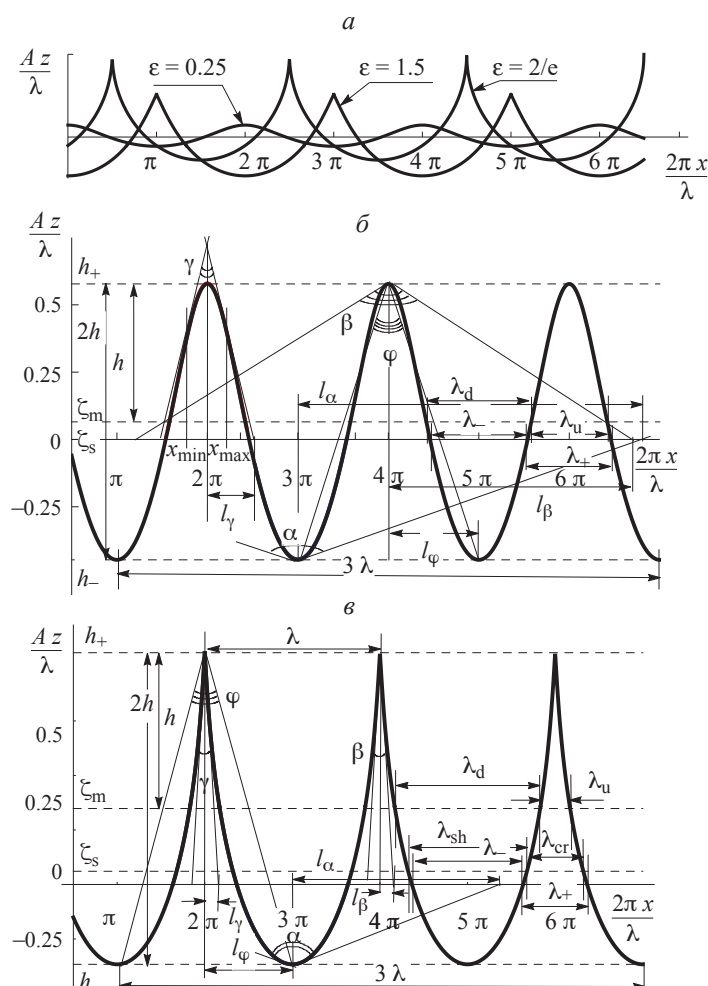


Рис. 1. Профили поверхностных волн: общий вид для различных параметров нелинейности докритического, критического и закритического (а); волна с докритическим параметром нелинейности с указанием характеристик волнового движения (б); волна с закритическим параметром нелинейности с указанием характеристик волнового движения (в).

Таблица 1. Характеристики поверхностного волнового возмущения

Обозначение	Характеристика
λ	Длина волны
A	Амплитуда волны
h_+, h_-	Возвышение и заглубление волны
ζ_s	Серединный уровень волны, уровень, отсекающий равные площади и характеризующий положение центра масс
ζ_m	Средний уровень, определяющий положение, равноудаленное от вершины и подошвы
$\lambda_{sh}, \lambda_{cr}$	Длительность ложбины и гребня волны
λ_d, λ_u	Длительность участка ниже и выше среднего уровня волны ζ_m
λ_-, λ_+	Длительность участка волны ниже и выше равновесного положения $z = 0$
α	Угол при подошве волны
β	Угол при вершине волны
γ	Угол между линиями с максимальной крутизной фронта и среза
φ	Угол между линиями, соединяющими вершину и соседние подошвы, характеризующий крутизну волны
x_{max}, x_{min}	Значения абсцисс, при которых достигается максимальная крутизна фронта и среза волны

Интересно, что некоторые параметры при переходе от докритической к закритической области теряют свой смысл, а некоторые наоборот — проявляются явственнее. В качестве примера можно выделить угол между линиями наибольшей крутизны среза и фронта волны γ и уровень срединной линии ζ_s , определяющий положение выше и ниже которого площади, заметаемые волной одинаковы. Угол γ для закритических волн совпадает с углом β при вершине гребня волны, а для докритических волн эти углы различны. Положение срединной линии ζ_s для докритических волн близко к положению равновесия $z = 0$, однако, для закритических волн этот уровень заметно превышает равновесный.

Рассмотрим, как влияет увеличение амплитуды волны на некоторые характеристики поверхностных волн. На рис. 2 построены зависимости длительности участка волны, отнесенные к ее длине, превышающих равновесный уровень (имеющих положительные значения абсцисс) $\lambda_{\lambda_+} = \lambda_+/\lambda$, не превышающих (имеющих отрицательные значения абсцисс) $\lambda_{\lambda_-} = \lambda_-/\lambda$ и их разность $\Delta\lambda_\lambda = \lambda_{\lambda_-} - \lambda_{\lambda_+} = (\lambda_- - \lambda_+)/\lambda$. Для удобства построения выполнены в величинах, отнесенных к длине волны для различных параметров нелинейности ϵ . При малых амплитудах длительности волны над и под равновесным уровнем практически совпадают, однако, с увеличением амплитуды участок над равновесным уровнем укорачивается по сравнению с участком под равновесным уровнем. Несмотря на то, что длительность λ_{λ_+} уменьшается с увеличением амплитуды, длина свободной поверхности волны ведет себя нелинейным образом. Длина свободной поверхности вместе с положением уровня ζ_s характеризует потенциальную энергию: увеличение этих величин приводит к увеличению потенциальной энергии волнового движения.

На рис. 3 изображены зависимости от параметра нелинейности длины поверхностей участков

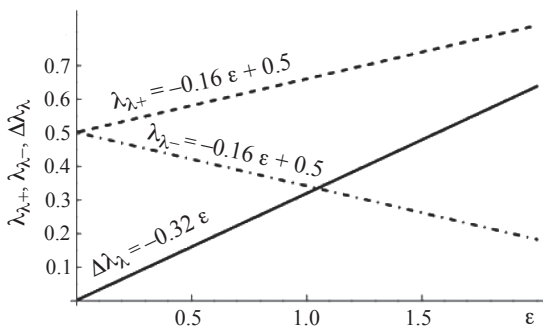


Рис. 2. Отнесенная к длине волны длительность участка волны в зависимости от параметра нелинейности над равновесным уровнем λ_{λ_+} , под равновесным уровнем λ_{λ_-} и разности длительности под равновесным уровнем и над равновесным уровнем $\Delta\lambda_\lambda = \lambda_{\lambda_-} - \lambda_{\lambda_+}$.

волны, отнесенные к длине волны для участка превышающей равновесный уровень L_+/λ (рис. 3а), не превышающей равновесный уровень L_-/λ (рис. 3б) и общая длина свободной поверхности $L/\lambda = (L_+ + L_-)/\lambda$. Видно, что для докритических гладких волн с увеличением амплитуды происходит плавный незначительный рост длины поверхности участка волны, находящегося под равновесным уровнем и относительно резкий рост длины поверхности участка над равновесным уровнем. С превышением критического значения параметра нелинейности происходит менее резкое уменьшение длины свободной поверхности этого участка. Вблизи критического значения параметра нелинейности существует область параметров, для которых длина свободной поверхности верхней части волны превышает длину свободной поверхности в нижней части волны. Эта же область характеризуется наибольшей длиной поверхности волны (см. рис. 3в) и, следовательно, наибольшей доступной поверхностной потенциальной энергией.

Рассмотрим углы, характеризующие свободную поверхность волны. На рис. 4 представлены зависимости углов, характеризующих различные участки волны в зависимости от параметра нелинейности. На рис. 4а представлена зависимость угла при подошве волны α . С увеличением амплитуды волны угол при подошве практически не меняется и близок к 180° . Для угла при вершине волны β (см. рис. 4б) похожая тенденция наблюдается только для гладких докритических волн, однако с приближением параметра нелинейности к критическому значению происходит резкое уменьшение значения угла и последующий плавный рост с увеличением амплитуды для закритических волн. Угол между линиями с максимальной крутизной фронта и среза γ для закритических волн совпадает с углом при вершине β , а в области докритических значений параметра нелинейности происходит более плавное по сравнению с углом β уменьшение значения. Угол, образованный линиями, соединяющими вершину волны с двумя соседними подошвами φ (или между линиями, соединяющими подошву с двумя соседними вершинами) также уменьшается с увеличением амплитуды в области докритических значений параметра нелинейности, при критическом значении достигает минимального значения (около 100°) и для закритических волн плавно растет с увеличением амплитуды.

Описанные характеристики, а также другие величины, изображенные на рис. 1б,в можно отслеживать при постановке экспериментов для определения параметров волнового движения, точное решение которого описывается функциями Ламберта.

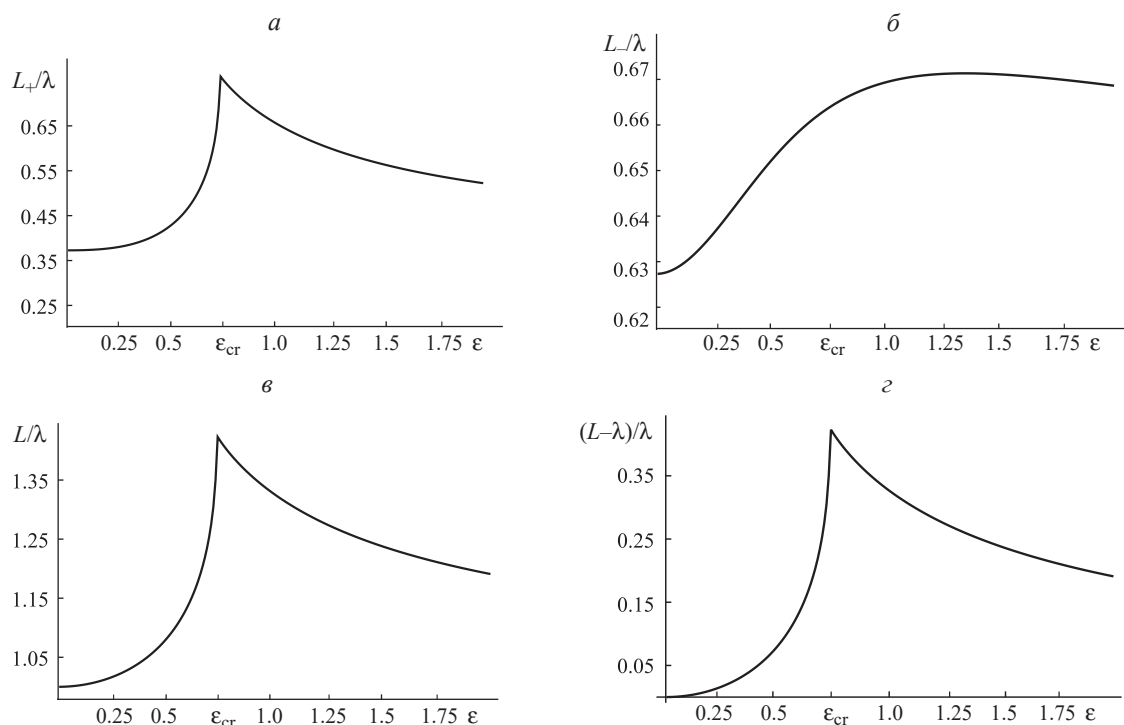


Рис. 3. Отнесенная к длине волны участка волны в зависимости от параметра нелинейности над равновесным уровнем L_+/λ (*a*); под равновесным уровнем L_-/λ (*б*). Суммарная длина участка поверхности L/λ (*в*); относительное удлинение свободной поверхности $(L - \lambda)/\lambda$ (*г*).

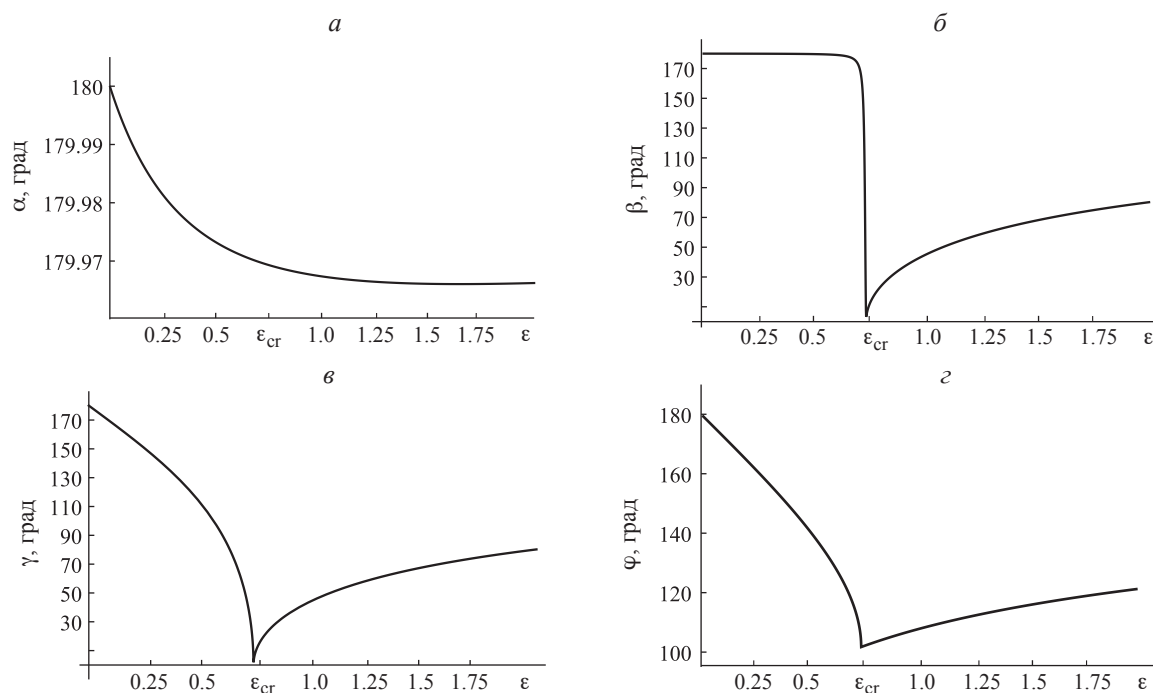


Рис. 4. Характерные углы волны в зависимости от параметра нелинейности: угол при подошве α (*a*), угол при вершине β (*б*), угол между линиями с максимальной крутизной фронта и среза γ (*в*), угол между линиями, соединяющими вершину и соседние подошвы φ (*г*).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено решение нелинейной задачи о распространении гравитационных волн вдоль свободной поверхности идеальной глубокой несжимаемой жидкости. Построены параметры волн, кото-

рые возможно использовать в эксперименте, чтобы характеризовать волны. С увеличением амплитуды волнового движения происходит заострение вершин волн и при некотором критическом значении амплитуды на вершине возникает особая точка. Критическое значение амплитуды разграничи-

вает плавные докритические волны от заостренных закритических. Исследовано влияние изменения амплитуды волнового движения на длительность и длину поверхности участков волн Ламберта для докритических и закритических амплитуд. Исследованы углы, образующиеся касательными к свободной поверхности на вершине, подошве волны, а также в точках на срезе и фронте волны, характеризующимися максимальными значениями крутизны. Получены координаты этих положений и показано, что для закритических волн эти координаты совпадают с координатами вершины волны. Предложенное описание приведено в наблюдаемых и возможных для фиксирования в эксперименте величинах.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ 124012500442-3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лэмб Г. Гидродинамика. М.-Л.: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1947.
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Л.-М.: Гостехиздат, 1948.
3. Уизем Д. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
4. Филлипс О.М. Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеиздат, 1980.
5. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
6. Меоте Б.Л. Введение в гидродинамику и теорию волн на воде. Л.: Гидрометеиздат, 1974.
7. Монин А.С., Каменкович В.М., Корт В.Г. Изменчивость мирового океана. Л.: Гидрометеиздат, 1974.
8. Зубов Н.Н. Динамическая океанология. М.-Л.: Гидрометеиздат, 1947.
9. Белоножко Д.Ф. // Изв. РАН. Сер. физ. 2024. Т. 88. № 1. С. 148; *Belonozhko D.F.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2024. V. 88. No. 1. P. 127.
10. Очиров А.А. // Изв. РАН. Сер. физ. 2023. Т. 87. № 1. С. 94; *Ochirov A.A.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2024. V. 88. No. 1. P. 79.
11. Очиров А.А. // Изв. РАН. Сер. физ. 2024. Т. 88. № 1. С. 154; *Ochirov A.A.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2024. V. 88. No. 1. P. 132.
12. Абрашкин А.А., Пелиновский Е.Н. // УФН. 2022. Т. 192. № 5. С. 491; *Abrashkin A.A., Pelinovsky E.N.* // Phys. Usp. 2022. V. 65. No. 5. P. 453.
13. *Kistovich A.V., Chashechkin Yu.D.* // Water Resources. 2016. V. 43. No. 1. P. 144.
14. *Zhuravleva E.* // Phys. Fluids. 2023. V. 35. No. 1. Art. No. 117104.
15. *Zubarev N.M.* // Mathematics. 2023. V 11. No. 9. Art. No. 1999.
16. *Kistovich A.V., Chashechkin Y.D.* // Water Resources. 2018. V. 45. P. 719.
17. *Kalinichenko A.V.* // IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Engin. 2021. V. 1191. No. 1. Art. No. 012005.
18. Ильиных А.Ю. // Изв. РАН. Сер. физ. 2023. Т. 87. № 1. С. 99; *Ilinykh A.Yu.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2023. V. 87. No. 1. P. 83.
19. Запечалов А.С., Гармашов А.В. // Морск. гидрофиз. журн. 2024. Т. 40. № 1(235). С. 78.
20. Кориненко А.Е., Малиновский В.В. // Морск. гидрофиз. журн. 2023. Т. 39. № 6(234). С. 814.
21. Мельникова О.Н., Плаксина Ю.Ю., Уваров А.В. и др. // Изв. РАН. Сер. физ. 2022. Т. 86. № 7. С. 1026; *Melnikova O.N., Plaksina Yu.Yu., Uvarov A.V. et al.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2022. V. 86. No. 1. P. 852.
22. Лаппо Д.Д., Стрекалов С.С., Завьялов В.К. Нагрузки и воздействия ветровых волн на гидротехнические сооружения Теория. Инженерные методы. Расчеты. Л.: ВНИИГ, 1990.
23. Безруков Ю.Ф. Океанология. Ч. 2. Динамические явления и процессы в океане. Симферополь: ТНУ им. В.И. Вернадского, 2006.
24. *Sterlyadkin V.V., Kulikovskiy K.V., Kuzmin A.V. et al.* // J. Atmos. Ocean. Technol. 2021. V. 38. No. 8. P. 1415.

Some characteristics of nonlinear potential surface waves in an ideal liquid

A. A. Ochirov*, K. Yu. Lapshina

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, 119526 Russia*

**e-mail: otchirov@mail.ru*

The potential wave motion along the free surface of a deep ideal liquid is studied. Exact solutions of the equations of motion with physically justified boundary conditions on a free surface are obtained. The shape of the free surface is studied depending on the amplitude and the characteristics of the surface are highlighted. The characteristics of waves depending on the nonlinearity parameter are investigated.

Keywords: ideal fluid, potential flow, wave motion, Lambert W function, nonlinear waves, characteristics of wave motion

УДК 537.6/.8

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ СПИНОВЫХ ВОЛН ВОЗДЕЙСТВИЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА ДОМЕННУЮ СТЕНКУ В МАГНИТНЫХ ПЛЕНКАХ С НЕОДНОРОДНЫМ МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

© 2025 г. Н. В. Мясников*, А. П. Пятаков

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», Москва, Россия

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «МИРЭА — Российский технологический университет», Москва, Россия

*e-mail: miasnikov.nv16@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

Выполнено моделирование динамики воздействия электрического поля на доменную стенку в магнитных пленках с неоднородным магнитоэлектрическим взаимодействием. Показано, что воздействие как однородного, так и неоднородного электрического поля на доменные стенки Блоха и Нееля приводит к возбуждению спиновых волн.

Ключевые слова: микромагнетизм, неоднородное магнитоэлектрическое взаимодействие, спиновые волны

DOI: 10.31857/S0367676525010228, **EDN:** CYUQDG

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в мире активно развиваются новые отрасли электроники такие как спинтроника [1] и магноники [2]. В рамках спинтроники рассматривают все возможные устройства электроники, связанные с управлением магнитным моментом. Это управление может принимать форму переноса спина за счет создания спин-поляризованных токов, или форму переключения магнитного момента за счет спин-поляризованного тока или электрического поля. В области магноники основным предметом исследования являются спиновые волны, т. е. волны прецессии магнитного момента. Такие волны в качестве переносчика информации обладают рядом преимуществ: для спиновых волн как коллективных возбуждений магнитной подрешетки невозможна утечка в окружающее пространство, не обладающее упорядоченной магнитной структурой; короткие спиновые волны могут способствовать миниатюризации устройств вплоть до размера элементарной ячейки; даже при комнатной температуре спиновые волны в ферритах графитах могут проходить тысячи своих длин [2].

Управление магнитным моментом с помощью электрического поля в ферромагнетиках может быть осуществлено за счет неоднородного маг-

нитоэлектрического взаимодействия. Это взаимодействие, на микроскопическом уровне обеспечиваемое взаимодействием Дзялошинского—Мория [3–5], способствует появлению у микромагнитных структур в среде с неоднородным распределением намагниченности (например, у доменных стенок) электрической поляризации [6, 7]. Поскольку взаимодействие Дзялошинского—Мория является анизотропной поправкой к изотропному обменному взаимодействию, возникающей за счет спин-орбитального взаимодействия, неоднородное магнитоэлектрическое взаимодействие может проявляться в ферро-, ферри-, антиферромагнетиках. Таким образом, доменная стенка — переходная область между двумя магнитными доменами, где вектор намагниченности претерпевает разворот, — может реагировать на внешнее электрическое поле [8]. Неоднородное магнитоэлектрическое взаимодействие позволяет также создавать цилиндрические магнитные домены со 180° и 90° ориентацией доменных стенок [9, 10]. Важным аспектом является то, что в работах [7–9] для анализа эффектов не применяются динамические модели. Моделирование движения доменной стенки во внешнем электрическом поле представляет интерес, так как, с одной стороны, относится

к области спинтроники и магнитоэлектрического эффекта, а с другой стороны, движение доменной стенки во внешнем электрическом поле может рассматриваться в рамках магноники как способ возбуждения спиновых волн по аналогии с обсуждаемым способом возбуждения спиновых волн за счет продвижения доменной стенки во внешнем магнитном поле [11]. Кроме того, из классической литературы известно, что теоретический анализ динамики движения доменной стенки является отдельной и сложной задачей [12, 13]. В данной работе теоретически и численно исследуется простейший случай динамики движения ферромагнитной доменной стенки во внешнем электрическом поле, приводящий к возбуждению спиновых волн.

ТЕОРИЯ

Для расчета динамики намагниченности в микромагнитном приближении использовалось уравнение Ландау–Лифшица–Гильберта:

$$\frac{\partial \vec{m}}{\partial t} = -\gamma [\vec{m} \times \vec{H}^{\text{eff}}] + \alpha \left[\vec{m} \times \frac{\partial \vec{m}}{\partial t} \right], \quad (1)$$

где \vec{m} — безразмерное векторное поле намагниченности, имеющее в каждой точке модуль, равный единице, \vec{H}^{eff} — эффективное магнитное поле, γ — гиромагнитное отношение, α — показатель затухания для данного материала. В дальнейшем подразумевается, что уравнение (1) используется для описания динамики намагниченности в ферромагнитном материале, характеризуемом параметрами пленок феррита граната, которые являются популярными элементами в возможных устройствах магноники [14, 15], поэтому все параметры задачи (например, намагниченность насыщения M_s) характеризуют (по порядку величины) именно пленки феррита граната. Ферриты граната являются ферримагнетиками, но наиболее сильное обменное взаимодействие связывает в них две магнитные подрешетки [12] и делает магнитные моменты подрешеток коллинеарными в статике. Поэтому для наглядности мы используем статические параметры пленок ферритов граната. Эффективное магнитное поле определяется как отрицательная вариационная производная свободной энергии по вектору намагниченности:

$$\vec{H}^{\text{eff}} = -\frac{1}{M_s} \frac{\delta F(\vec{m})}{\delta \vec{m}}. \quad (2)$$

Свободная энергия неоднородного электрического взаимодействия описывается следующим выражением [5, 6]:

$$F_{\text{ме}} = -\gamma_{\text{ме}} (\vec{E} \cdot (\vec{m}(\nabla \cdot \vec{m}) + [\vec{m} \times [\nabla \times \vec{m}]])), \quad (3)$$

где $\gamma_{\text{ме}}$ — магнитоэлектрическая постоянная, \vec{E} — электрическое поле внутри материала, задаваемое внешним источником. В выражении (3) сомножитель, скалярно умножаемый на вектор электрического поля, играет роль электрической поляриза-

ции, наведенной неоднородным распределением намагниченности. Энергии $F_{\text{ме}}$ соответствует в согласии с выражением (2) эффективное магнитное поле со следующими компонентами в декартовой системе координат [6]:

$$(H_{\text{ме}}^{\text{eff}})_i = \gamma_{\text{ме}} (2E_i \partial_\beta m_\beta - 2E_\beta \partial_i m_\beta + m_\beta \partial_\beta E_i - m_\beta \partial_i E_\beta). \quad (4)$$

Поскольку речь идет о влиянии электрического поля на намагниченность \vec{m} , которая характерна для доменной стенки, нужно задать энергию обменного взаимодействия и энергию магнитной анизотропии. Для анализа была выбрана простейшая модель, в которой справедливы следующие выражения для плотности энергии обменного взаимодействия и магнитной анизотропии соответственно:

$$F_{\text{ex}} = A \sum_{i=1,3} (\nabla m_i \cdot \nabla m_i) \quad (5)$$

$$F_{\text{an}} = -K_u m_z^2, \quad (6)$$

где $A = 1 \cdot 10^{-7}$ эрг/см — константа обменного взаимодействия, $K_u = 1000$ эрг/см³ — константа одноосной магнитной анизотропии. Геометрия задачи приведена на рис. 1а. Для суммы энергий (5), (6) известно классическое одномерное решение

$$m_x = \sin(\theta_w(y)) \cos(\varphi_w), \quad (7)$$

$$m_y = \sin(\theta_w(y)) \sin(\varphi_w), \quad (8)$$

$$m_z = \cos(\theta_w(y)), \quad (9)$$

$$\theta_w(y) = 2 \arctg \left(\exp \left(\frac{y}{\Delta_w} \right) \right), \quad (10)$$

описывающее доменную стенку Блоха [12, 16] при $\varphi_w = 0$, $\varphi_w = \pi$ и доменную стенку Нееля при $\varphi_w = \pi/2$, $\varphi_w = 3\pi/2$. Здесь $\Delta_w = \sqrt{A / (K_u + 2\pi M_s^2 (\sin \varphi_w)^2)}$ — параметр, определяющий ширину доменной стенки, φ_w — угол, определяющий положение намагниченности в плоскости пленки. Заметим, во-первых, что в классической доменной стенке Блоха с энергетической точки зрения различные состояния с $\varphi_w = 0$ и $\varphi_w = \pi$ неразличимы и, во-вторых, что доменная стенка Блоха в статике не дает вклада в неоднородный магнитоэлектрический эффект, так как выражение (3) для структуры (7) при $\varphi_w = 0$ и $\varphi_w = \pi$ равно нулю.

Прежде чем обращаться к численному моделированию, следует провести аналитические выкладки, насколько это возможно. Будем рассматривать аналитически одномерную доменную стенку, к которой прикладывается однородное электрическое поле. Важно отметить, что выражение (3) содержит вектор электрического поля, которое может быть как неоднородным, так и однородным. Здесь, в аналитическом рассмотрении, используется однородное электрическое поле с целью сохранить возмож-

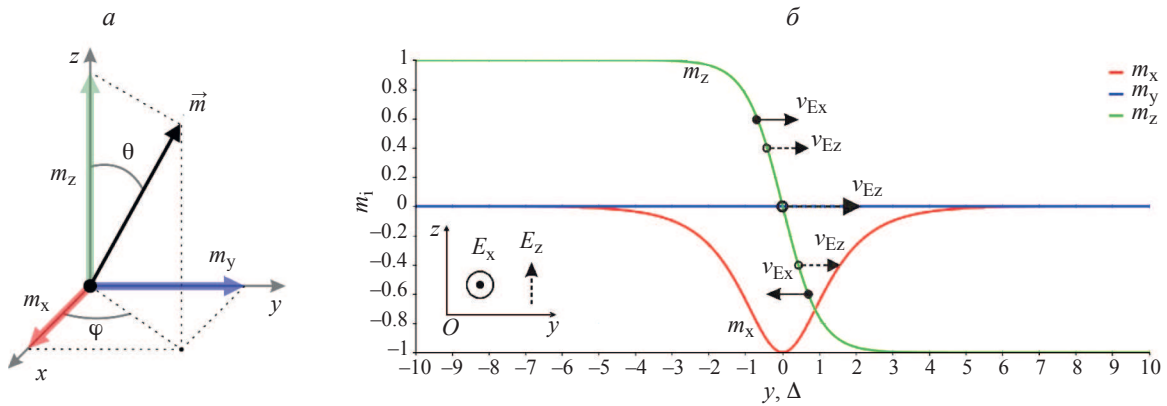


Рис. 1. Геометрия задачи и структура доменной стенки Блоха: геометрия задачи с отмеченными компонентами намагниченности m_x , m_y , m_z и углами θ , φ , задающими нормированный вектор намагниченности (а); структура доменной стенки Блоха (б): линиями отмечены зависимости компонент вектора намагниченности от координаты; стрелками отмечены скорости, сообщаемые однородным электрическим полем (E_x или E_z) доменной стенке в первый момент динамики. Координата отсчитывается в единицах ширины доменной стенки $\Delta = \sqrt{A/K_u} = 100$ нм.

ность сделать простые выводы и сравнить их с результатами численного эксперимента. В состоянии равновесия доменной стенки, которое описывается выражениями (7–10), перед приложением электрического поля суммарное эффективное магнитное поле обменного взаимодействия и магнитной анизотропии равно нулю, поэтому в первый момент времени после приложения электрического поля доменная стенка находится в эффективном поле $\vec{H}_{\text{ме}}^{\text{eff}}$. Уравнение (1) может быть записано для угла θ [12, 13], который определяет положение намагниченности относительно оси Oz (здесь и далее она совпадает с нормалью к поверхности магнитной пленки). Эффективное поле (4) приводит к следующему дифференциальному уравнению для угла θ , описывающего намагниченность в произвольной доменной стенке, при однородном электрическом поле E_x , направленном по оси Ox :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -v_{E_x} \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad (11)$$

где $v_{E_x} = 2\gamma\gamma_{\text{ме}}E_x \cos(\theta)/M_s$. Для случая однородного поля E_z справедливо следующее уравнение:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = v_{E_z} \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad (12)$$

где $v_{E_z} = 2\gamma\gamma_{\text{ме}}E_z \sin(\theta) \cos(\varphi)/M_s$, φ — азимутальный угол, задающий положение намагниченности в плоскости пленки (см. рис. 1а). Уравнения (11), (12) относятся к классу уравнений переноса с известным решением вида $f(t - y/v(\theta))$, где $v(\theta)$ — коэффициент при производной по пространственной координате, имеющий размерность скорости. Важно отметить, что из уравнения (12) следует важный вывод о том, что неоднородное магнитоэлектрическое взаимодействие приводит к различной динамике доменной стенки Блоха с положительной и отрицательной компонентами m_x , поскольку скорость сдвига v_{E_z} пропорциональна $\cos(\varphi)$, который при $\varphi = 0, \pi$ задает струк-

туру разворота намагниченности. Другими словами, две доменные стенки Блоха с различным знаком m_x в однородном электрическом поле E_z будут двигаться в противоположных направлениях. На рис. 1б приведена зависимость компонент вектора намагниченности от координаты в доменной стенке Блоха, описываемой выражениями (7–10), и соответствующие направления скоростей из выражений (11) и (12), сообщаемых доменной стенке электрическим полем в начальный момент времени после включения электрического поля. В соответствии с (7–10) $v_{E_z} \sim m_x$ и имеет постоянный знак по ширине доменной стенки Блоха, в то время как $v_{E_x} \sim m_z$ и меняет знак по ширине доменной стенки Блоха. Отсюда следует, что однородное электрическое поле E_x не сдвигает доменную стенку как целое, но приводит на ранних этапах динамики к сжатию или уширению доменной стенки — в зависимости от знака E_x . При этом однородное электрическое поле E_z приводит в динамике к сдвигу доменной стенки Блоха как целого. Также из уравнения (12) следует, что доменная стенка Нееля ($\varphi = \pi/2, 3\pi/2$) не будет реагировать на электрическое поле, направленное по нормали к пленке, но будет изменять свою ширину в электрическом поле E_x подобно доменной стенке Блоха. Строго говоря, уравнения (11), (12) являются применимыми только в начальный момент времени после приложения электрического поля ступенькой, поскольку баланс между энергиями магнитной анизотропии и обменного взаимодействия нарушается в последующие моменты времени. Поэтому нужно решать уравнение (1) численно.

Для возможного сравнения следует также привести закон дисперсии для обменных спиновых волн с малой амплитудой, распространяющихся в ферромагнитном материале без доменных стенок [17]:

$$\omega^2 = (\omega_a + \omega_{ex}) \left(\omega_a + \omega_{ex} + \omega_M \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right),$$

$$\omega_{an} = \gamma \frac{2K_u}{M_s}, \quad (13)$$

$$\omega_{ex} = \gamma \frac{2A}{M_s} k^2,$$

$$\omega_M = 4\pi\gamma M_s,$$

где $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ — квадрат модуля волнового вектора, ω_{an} , ω_{ex} , ω_M — частоты, задаваемые соответственно магнитной анизотропией, изотропным обменным взаимодействием, полями размагничивания. Таким образом, частота прецессии пропорциональна квадрату волнового вектора. Следует отметить, что выражения (13) получены в приближении малой и неизменной со временем амплитуды прецессии. В случае $k = 0$ магнитные моменты прецессируют синхронно в эффективном магнитном поле магнитной анизотропии. Это поле при заданных параметрах задачи имеет величину 500 Э, что соответствует частоте ферромагнитного резонанса $\omega_{an}/(2\pi) = 1.4$ ГГц.

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА

Численное решение уравнения Ландау–Лифшица–Гильберта проводилось с помощью метода конечных элементов на основе библиотеки FEniCS [18, 19]. В одномерной модели на отрезок, соответствующий одной ширине доменной стенки $\Delta = \sqrt{A/K_u}$, приходилось 30 узлов вычислительной сетки, в двумерной — 7 узлов. Расчет выполнялся с учетом размагничивающих полей: в случае одномерной модели использовалось дополнительное энергетическое слагаемое $F_M = 2\pi M_s^2 m_y^2$, в случае двумерной модели структура размагничивающих полей вычислялась из уравнения Пуассона для скалярного потенциала $\Delta u = 4\pi M_s \operatorname{div} \vec{m}$. Вычисления проводились при коэффициенте затухания $\gamma = 0.0001$, $M_s = 4$ Гс, напряженности электрического поля 3 МВ/см. Электрическое поле подавалось в систему ступенькой во времени. Такая величина электрического поля необходима для наглядности результатов и возможности рассматривать свойства спиновых волн.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В этом разделе обсуждаются результаты численного моделирования. На протяжении всего раздела они сравниваются с выводами, следующими из уравнений (11), (12), но речь идет о численном решении уравнения Ландау–Лифшица–Гильберта (1) и графическом представлении этого решения. В одномерной модели на основе уравнения (1) с начальным условием (7–10) была получена зависимость вектора намаг-

нитненности в доменной стенке Блоха от времени. Результаты расчета для различного направления однородного электрического поля приведены на рис. 2. При приложении электрического поля E_z доменная стенка за время 565 пс из своего начального состояния (рис. 2а) сдвигается вправо (рис. 2б) в соответствии с выводом, следующим из уравнения (12), при этом по ходу движения доменной стенки возникают спиновые волны. Кроме того, при изменении в начальном состоянии доменной стенки знака компоненты m_x на противоположный за тот же период времени доменная стенка Блоха смещается в противоположном направлении (рис. 2в). При приложении электрического поля $-E_x$ за время 847.5 пс доменная стенка как целое не испытывает сдвига (рис. 2г), как и следует из уравнения (11), но слева и справа от доменной стенки возникают спиновые волны. Доменная стенка Нееля, стабилизированная внешним магнитным полем, превышающим поле размагничивания в два раза, при приложении электрического поля $-E_x$ испытывает схожую динамику — она как целое остается на месте, но на периферии возникают спиновые волны (рис. 3а,б). При этом численный расчет показывает, что доменная стенка Нееля не реагирует на однородное электрическое поле e_z (рис. 3в), как и утверждалось в предыдущем разделе.

Для того, чтобы проанализировать свойства возбуждаемых таким образом спиновых волн для каждого направления электрического поля был выбран фрагмент зависимости m_y (для стенки Блоха) и m_x (для стенки Нееля) от координат и времени, содержащий несколько длин волн. Для доменной стенки Нееля такой фрагмент приведен на рис. 3г. На рис. 3д приведена зависимость модуля амплитуды спектра функции $m_x(t, y)$ по времени от частоты и координаты фрагмента. Данная зависимость показывает, что характерная частота спиновых волн в случае доменной стенки Нееля и электрического поля $-E_x$ составляет 7.5 ГГц. Также на рис. 3д видно, что с ростом координаты частота прецессии увеличивается. Это может быть объяснено тем, что нелинейность динамики приводит к тому, что прецессия намагнитненности не является изохронной, т. е. частота прецессии зависит от ее амплитуды. Можно выделить как минимум один фактор, задающий характер этой связи. На данном участке наиболее сильное эффективное магнитное поле, задающее свойства прецессии плоскостных компонент намагнитненности, создает магнитная анизотропия. Это эффективное поле, как следует из (2) и (6), пропорционально m_z . Поскольку на рис. 3д с удалением от доменной стенки амплитуда плоскостных компонент m_x , m_y естественным образом падает, компонента m_z растет, а следовательно большее по величине эффективное магнитное поле задает более высокую частоту прецессии. Конечно,

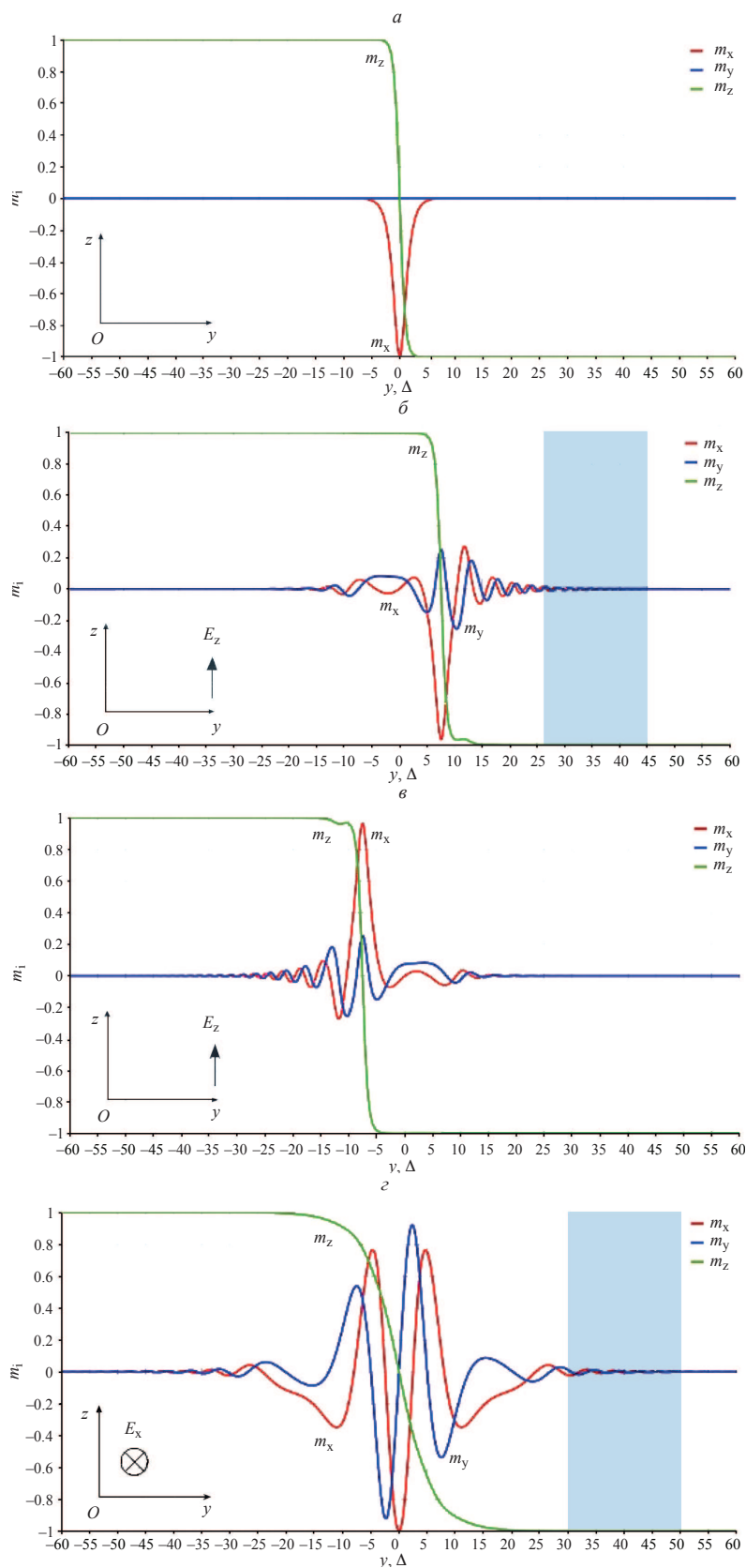


Рис. 2. Результат численного моделирования доменной стенки Блоха: начальное состояние (а); с изначально отрицательной компонентой m_x через $t = 565$ пс при однородном поле E_z (б); с изначально положительной компонентой m_x через $t = 565$ пс при однородном поле E_z (в); через $t = 847.5$ пс при однородном поле $-E_x$ (г). Координата отсчитывается в единицах ширины доменной стенки $\Delta = \sqrt{A/K_u} = 100$ нм. Синей заливкой показаны области, выбранные для вычисления спектральных характеристик.

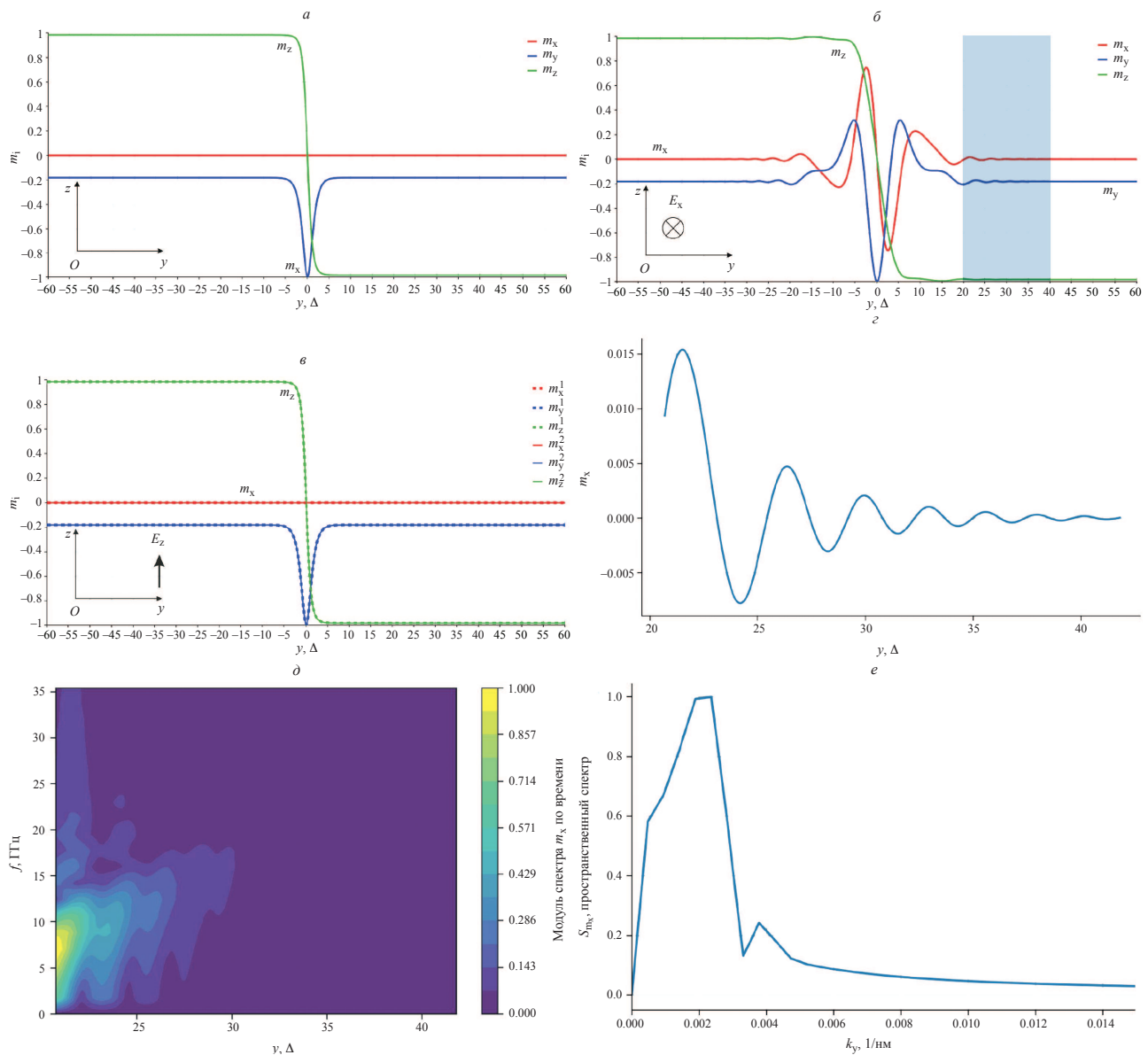


Рис. 3. Результат численного моделирования доменной стенки Нееля: начальное состояние (а); структура в момент времени $t = 565$ пс после приложения однородного электрического поля $-E_x$ (б), синей заливкой показана область, выбранная для вычисления спектральных характеристик; структура, которая не реагирует на однородное электрическое поле E_z (численный расчет) (в), верхними индексами отмечено начальное и конечное состояния; компонента намагниченности m_x в момент времени $t = 565$ пс в выбранной области (г); зависимость спектра функции $m_x(t, y)$ по времени для каждой координаты фрагмента (д); спектр функции $m_x(y)$ по координате в момент времени $t = 565$ пс (е).

для рассматриваемой модели такое соображение является очень простым, но оно показывает, что рост частоты спиновых волн с отдалением от доменной стенки не является неожиданным. Более строгое рассмотрение в перспективе можно получить на основе анализа влияния всех взаимодействий на дисперсионные соотношения для спиновых волн. На рис. 3е приведена зависимость модуля спектра функции $m_x(t, y)$ по пространственной координате от пространственной частоты для момента времени $t = 565$ пс. Эта зависимость показывает, что характерная длина спиновой волны составляет 500 нм. Аналогичным образом, для доменной стенки Блоха были выбраны фрагменты рис. 1, вы-

деленные синей заливкой. Для случаев однородного электрического поля E_z и $-E_x$, прикладываемого к доменной стенке Блоха, характерные частоты и длины волн составляют 15 ГГц, 200 нм и 7.5 ГГц, 500 нм соответственно.

В двумерной модели также происходит возбуждение спиновых волн при воздействии электрического поля точечного заряда. На рис. 4а приведено начальное состояние доменной стенки Блоха и положение точечного заряда. За время 170 пс после приложения электрического поля ступенькой доменная стенка искривляется и сдвигается (рис. 4б). В данном случае компонента электрического поля по оси Oz имеет отрицательный знак,

а компонента m_x положительный знак ($\cos(\varphi) > 0$). При такой конфигурации уравнение (12) описывает направление смещения доменной стенки, соответствующее рис. 4б. Электрическое поле вызывает помимо сдвига доменной стенки возбуждение спиновых волн, которые отражены в распределении компоненты m_x на рис. 4б и в распределении компонент m_x, m_y (рис. 4в), построенных вдоль конкретного направления, отмеченного на рис. 4б. На рис. 4г приведен спектр компоненты m_y по времени для каждой точки фрагмента. Отсюда следует, что характерная частота возбуждаемых спиновых волн составляет 12.5 ГГц. Из пространственного спектра на рис. 4д следует, что характерная длина спиновой волны в двумерной модели составляет 300 нм.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, с помощью микромагнитного моделирования на основе уравнения Ландау–Лифшица–Гильберта для ферромагнитного материала показано, что в пленках с неоднородным магнитоэлектрическим взаимодействием приложение как однородного, так и неоднородного электрического поля к доменным стенкам Блоха и Нееля приводит к возбуждению спиновых волн с характерными частотами около 10 ГГц и длинами волн порядка 100 нм. Полученный набор пар частот и длин волн (15 ГГц, 200 нм), (7.5 ГГц, 500 нм), (12.5 ГГц, 300 нм) качественно

удовлетворяет дисперсионному соотношению (13): чем меньше длина волны, тем больше частота. Также показано, что на основе приближенных уравнений переноса (11), (12) оказывается возможным делать вывод о наличии или отсутствии сдвига доменной стенки, о связи его знака с полярностью электрического поля и структурой доменной стенки. Здесь важно отметить, что в отличие от статической модели динамическая модель допускает возможность воздействия электрического поля на доменную стенку Блоха. Данные выводы предполагают дальнейшую экспериментальную работу по детектированию спиновых волн, проверке связи направления электрического поля со свойствами сдвига доменной стенки. С теоретической точки зрения, важным является вопрос о влиянии электрического поля на дисперсионное соотношение для возбуждаемых спиновых волн, а также вопрос о зависимости свойств спиновых волн от амплитуды электрического поля. Также возникает вопрос о применимости результатов работы к случаю ферримагнитных материалов. Известно [12], что в ферримагнетиках возможны два типа прецессии магнитных моментов двух подрешеток: низкочастотная (характерные частоты сравнимы с частотами для ферромагнетика), когда магнитные моменты подрешеток остаются коллинеарными, и высокочастотная, когда коллинеарность нарушается. Второй тип прецессии позволяет использовать ферримагнетики

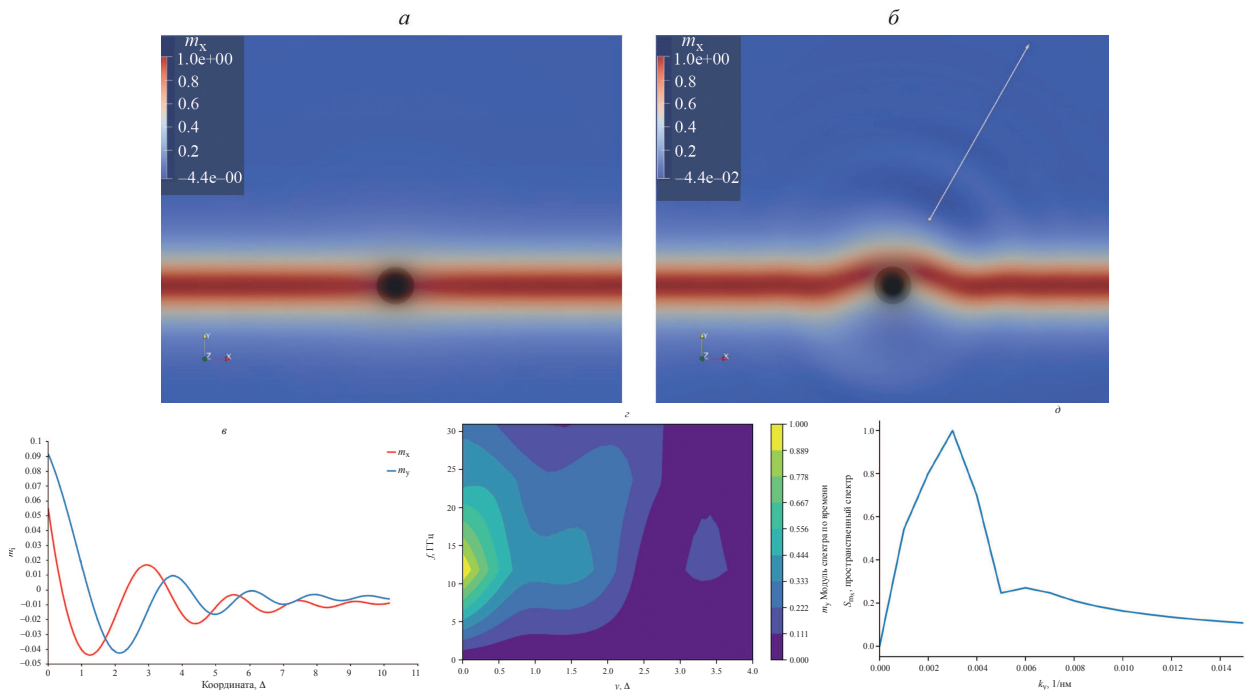


Рис. 4. Двумерное численное моделирование возбуждения спиновых волн электрическим полем: зависимость компоненты m_x в доменной стенке Блоха от координат в начальный момент времени и положение точечного электрического заряда, показанное затемненным кругом (а); зависимость компоненты m_x в доменной стенке Блоха от координат в момент времени $t = 170$ пс (б); зависимость плоскостных компонент намагниченности от координаты вдоль линии, отмеченной на рисунке б, в момент времени $t = 170$ пс (в); спектр функции $m_y(t, y)$ по времени для каждой координаты фрагмента (г); спектр функции $m_y(r)$ по координате в момент времени $t = 170$ пс (д).

для возбуждения спиновых волн в терагерцовом диапазоне [2]. В случае пленок ферритов граната обменное взаимодействие между подрешетками является наиболее сильным, в то время как взаимодействие Дзялошинского—Мория носит поправочный характер из-за малости константы спин-орбитального взаимодействия. Поэтому при невысоких прикладываемых электрических полях неоднородное магнитоэлектрическое взаимодействие не будет способно нарушить коллинеарность магнитных подрешеток и возбудить высокочастотные волны. Для оценки малости электрического поля можно указать, что при величине электрического поля 1 МВ/см величина неоднородного магнитоэлектрического взаимодействия составляет несколько десятков процентов от поверхностной энергии доменной стенки [10], и соответственно, еще меньший процент от обменной энергии. Поэтому при величинах электрического поля, меньших 1 МВ/см, не стоит ожидать нарушения коллинеарности магнитных подрешеток в ферримагнетике. Для определения конкретных параметров прецессии и проверки высказанной гипотезы необходимо провести соответствующее моделирование. В случае антиферромагнетиков с числом магнитных подрешеток больше двух требуется отдельный расчет.

Работа была выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (грант № 075-15-2022-1131). Авторы выражают признательность Фонду развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (грант № 22-1-2-49 «Молодой ведущий ученый (Теоретическая физика)»).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bader S.D., Parkin S.S.P.* // *Ann. Rev. Cond. Matter Phys.* 2010. V. 1. No. 1. P. 71.
2. *Barman A., Gubbiotti G., Ladak S. et al.* // *J. Phys. Cond. Matter.* 2021. V. 33. Art. No. 413001.
3. *Дзялошинский И.Е.* // *ЖЭТФ.* 1957. Т. 32. №. 6. С. 1547.
4. *Moriya T.* // *Phys. Rev.* 1959. V. 120. No. 1. P. 91.
5. *Zvezdin A.K., Pyatakov A.P.* // *EPL.* 2012. V. 99. No. 5. P. 57003.
6. *Pyatakov A.P., Meshkov G.A., Zvezdin A.K.* // *J. Magn. Magn. Mater.* 2012. V. 324. No. 21. P. 3551.
7. *Хомский Д.И.* // *Письма в ЖЭТФ.* 2021. Т. 159. № 4. С. 581; *Khomsii D.I.* // *JETP Lett.* 2021. V. 132. No. 4. P. 482.
8. *Логгинов А.С., Мешков Г.А., Николаев А.В., Пятаков А.П.* // *Письма в ЖЭТФ.* 2007. Т. 86. № 2. С. 124; *Logginov A.S., Meshkov G.A., Nikolaev A.V., Pyatakov A.P.* // *JETP Lett.* 2007. V. 86. P. 115.
9. *Kulikova D.P., Gareev T.T., Nikolaeva E.P. et al.* // *Phys. Stat. Sol. (RRL).* 2018. V. 12. Art. No. 1800066.
10. *Antipin K.S., Gareev T.T., Myasnikov N.V. et al.* // *J. Appl. Phys.* 2021. V. 129. No. 2. Art. No. 24103.
11. *Yan M., Andreas C., Kákay A. et al.* // *Appl. Phys. Lett.* 2011. V. 99. Art. No. 122505.
12. *Боков В.А.* Физика магнетиков. СПб.: Невский Диалект, 2002. 272 с.
13. *Малоземов А., Слонзуски Дж.* Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами. М.: Мир, 1982. 382 с.
14. *Садовников А.В., Никитов С.А.* // *Изв. РАН. Сер. физ.* 2021. Т. 85. № 6. С. 766; *Sadovnikov A.V., Nikitov S.A.* // *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.* 2021. V. 85. No. 6. P. 595.
15. *Губанов В.А., Кругляк В.В., Садовников А.В.* // *Изв. РАН. Сер. физ.* 2023. Т. 87. № 3. С. 417; *Gubanov V.A., Kruglyak V.V., Sadovnikov A.V.* // *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.* 2023. V. 87. No. 6. P. 362.
16. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит, 2016. 656 с.
17. *Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Динамика намагниченности в условиях изменения ее ориентации. М.: Физматлит, 2019. 472 с.
18. <https://fenicsproject.org>
19. *Abert C., Exl L., Bruckner F. et al.* // *J. Magn. Magn. Mater.* 2013. V. 345. P. 29.

Simulation of spin waves excitation by the impact of an electric field on the domain wall in magnetic films with inhomogeneous magnetoelectric interaction

N. V. Myasnikov*, A. P. Pyatakov

Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia

MIREA — Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

**e-mail: miasnikov.nv16@physics.msu.ru*

We simulated the dynamics of electric field impact on the domain wall in magnetic films with inhomogeneous magnetoelectric interaction. The result of the simulation is the fact that both homogeneous electric field and inhomogeneous electric field induce excitation of spin waves.

Keywords: micromagnetism, inhomogeneous magnetoelectric interaction, spin waves

УДК 621.385.69

РАСЧЕТ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ГИРОТРОНА ДИАПАЗОНА 300 ГГц С УЧЕТОМ РЕАЛЬНОЙ ФОРМЫ ИМПУЛЬСА УСКОРЯЮЩЕГО НАПРЯЖЕНИЯ

© 2025 г. А. Н. Леонтьев*, Р. М. Розенталь, О. П. Планкин, Е. С. Семенов

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики имени А. В. Гапонова—Грехова Российской академии наук», Нижний Новгород, Россия

*e-mail: leontiev@ipfran.ru

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

Выполнены расчеты релятивистского гиротрона диапазона 300 ГГц с мощностью до 8 МВт. Для экспериментально измеренной формы импульса ускоряющего напряжения сделаны расчеты формы импульса выходной мощности с помощью трехмерного моделирования методом крупных частиц. Показано, что полная энергия излучения с рабочей частотой может превышать значение 4 Дж.

Ключевые слова: релятивистский гиротрон, терагерцовое излучение

DOI: 10.31857/S0367676525010232, **EDN:** CYVWED

ВВЕДЕНИЕ

Мощное импульсное излучение терагерцового диапазона представляет интерес для многих приложений. В свою очередь, такое излучение может быть получено на основе тех или иных схем вакуумных генераторов с электронными потоками. В частности, в настоящее время интенсивно развивается проект генерации излучения субгигаваттного уровня мощности в диапазоне 0.3–1 ТГц на основе лазеров на свободных электронах [1–4]. При этом, согласно оценкам, энергетика импульсов генерируемого излучения будет находиться в диапазоне 10–100 Дж. Сравнимые уровни мощности могут быть получены и при использовании релятивистских гиротронов. Так, в работе [5] было показано, что на основе сильноточных релятивистских электронных потоков может быть достигнута мощность порядка 80 МВт в диапазоне 0.3 ТГц. Однако сильноточные электронные потоки, как правило формируемые взрывоэмиссионными катодами, обладают существенным недостатком, связанным с малой длительностью импульсов. В этой связи представляет интерес использование термоэмиссионных катодов, способных формировать электронные потоки со стабильными параметрами с микросекундной длительностью. В работе [6] было выполнено расчеты электронно-оптической системы релятивистского гиротрона диапазона 300 ГГц на основе

магнетронно-инжекторной пушки с термокатодом. Было показано, что для указанного диапазона частот возможно формирование винтового электронного потока с током 100 и более ампер, энергией 250 кэВ и значением пичч-фактора 1.1.

На новом этапе исследований выполнены расчеты электронно-волнового взаимодействия гиротрона с рабочей модой $TE_{33,2}$.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ УСРЕДНЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

При разработке длинноимпульсных гиротронов терагерцового диапазона основной задачей является решение проблемы конкуренции мод. В этой связи привлекательным является использование мод шепчущей галереи, поля которых локализованы вблизи стенок резонатора [7]. Вследствие этого, при транспортировке электронного потока вблизи стенки резонатора, условия самовозбуждения будут выполнены только для мод шепчущей галереи. Однако при проведении экспериментальных исследований стало понятно, что селективное возбуждение мод вида $TE_{m,1}$ уже при значении числа азимутальных вариаций $m \geq 9$ возможно только при использовании дополнительных методов селекции, например — введение в резонатор коаксиального металлического стержня [8, 9]. В свою очередь, для мод вида $TE_{m,2}$ ситуация значительно лучше. В частности, на моде $TE_{22,2}$ были успеш-

но реализован гиротрон диапазона 303 ГГц [10]. Одновременно, существует верхний предел азимутального индекса рабочей моды. В работе [11] были сделаны оценки, согласно которым устойчивая генерация на модах шепчущей галереи может быть достаточно просто реализована при значениях азимутальных индексов $m \leq 30$. Оценки показывают, что для исследуемой конфигурации гиротрона оптимальным является несколько большее значение азимутального индекса $m = 33$, что соответствует рабочей моде $TE_{33,2}$. Это связано с необходимостью обеспечения максимума коэффициента электронно-волнового взаимодействия. Данный коэффициент определяется радиусом встраля электронного потока, который, в свою очередь, определяется конфигурацией электронно-оптической системы. Радиус однородного участка резонатора был выбран равным 6.65 мм, что соответствует значению критической частоты около 300.7 ГГц. Оптимизация геометрии резонатора проводилась на основе расчетов электронно-волнового взаимодействия в рамках стационарных одномодовых уравнений гиротрона с нефиксированной структурой поля.

В рамках данного подхода нормированный комплексный поперечный импульс p_c каждого электрона при движении вдоль продольной оси $z \in [z_{in}, z_{out}]$ описывается уравнением

$$\begin{aligned} \frac{dp_c}{dz} + i \frac{p_c}{p_{||}} \left(\frac{\gamma \kappa}{n} - \frac{\omega_{Ho}}{c} \right) = \kappa_{\perp} \frac{\mathcal{J}_{m,p,n}}{\mathcal{N}_{m,p}} \cdot \left\{ \left(\frac{i\gamma F}{p_{||}} + \frac{1}{\kappa} \frac{dF}{dz} \right) \times \right. \\ \times (p_c^*)^{n-1} \cdot \mathcal{B}_- + \left(\frac{i\gamma F^*}{p_{||}} + \frac{1}{\kappa} \frac{dF^*}{dz} \right) \cdot (p_c^*)^{n+1} \cdot \mathcal{B}_+ - \\ \left. - ip_c \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{F}{p_{||}} \cdot (p_c^*)^n \right) \cdot \frac{\kappa_{\perp}}{\kappa} \cdot \mathcal{B}_0 \right\} + p_c \cdot \mathcal{M}', \end{aligned} \quad (1)$$

где γ — релятивистский масс-фактор, n — номер циклотронной гармоники, c — скорость света, $\mathcal{J}_{(m,p,n)}(r, z) = s^n \cdot J_{s \cdot (m-n)} \left(\nu_{m,p} \cdot \frac{r}{R_r(z)} \right)$ — фактор связи моды $TE_{m,p}$ с электронным пучком с радиусом ведущих центров r на n -ной гармонике, $\mathcal{N}_{m,p}^2 = (\nu_{m,p}^2 - m^2) \cdot J_m^2(\nu_{m,p})$ — норма волны $TE_{m,p}$, где $s = +1$ для $m \geq 0$, либо $s = -1$ для $m < 0$, т.е. в случае противоположного вращения поля относительно ларморовского вращения электронов. $\mathcal{B}_- = \frac{J_{n-1}(\xi)}{2p_{\perp}^{n-1}}$, $\mathcal{B}_+ = \frac{J_{n+1}(\xi)}{2p_{\perp}^{n+1}}$, $\mathcal{B}_0 = \frac{J_n(\xi)}{p_{\perp}^n}$, $\mathcal{B}_1 = \frac{J'_n(\xi)}{p_{\perp}^{n-1}}$ — коэффициенты силового взаимодействия. $J'_1 \equiv \frac{dJ_1(\xi)}{d\xi}$, $\xi = \kappa_{\perp} \cdot r_L$, $r_L = p_{\perp} \cdot \frac{c}{\omega_{Ho}}$ — ларморовский радиус электронной орбиты, $p_{\perp}^2 = p_c \cdot p_c^*$. $\mathcal{M}'(z) \equiv \frac{1}{2\mathcal{M}(z)} \cdot \frac{d\mathcal{M}}{dz}$ — нормированная производная магнитного поля. В случае однородного магнитного поля полагается $\mathcal{M} = 1$, $\mathcal{M}' = 0 \forall z$.

Нерелятивистская круговая гирочастота (ларморовская, циклотронная частота) электрона про-

порциональна магнитному полю в любой точке его траектории: $\omega_{Ho} = \mathcal{M}(z) \cdot B_0 \cdot e_0/m_0$, где e_0 и m_0 — заряд (по модулю) и масса покоя электрона.

Продольная компонента нормированного импульса $p_{||}$ описывается уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{dp_{||}}{dz} = -\operatorname{Re} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{dF}{dz} \cdot (p_c^*)^2 \right) \times \\ \times \mathcal{B}_1 \cdot \frac{\kappa_{\perp}}{p_{||}} \cdot \frac{\mathcal{J}_{m,p,n}}{\mathcal{N}_{m,p}} - \frac{p_{\perp}^2}{p_{||}} \cdot \mathcal{M}', \end{aligned} \quad (2)$$

где последнее слагаемое описывает влияние неоднородного статического магнитного поля.

Уравнение, описывающее продольную структуру амплитуды высокочастотного поля F , имеет вид [12]:

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \kappa_{||}^2 F = \frac{1}{\mathcal{N}_{m,p}} \cdot \kappa \cdot \kappa_{\perp} \cdot \langle \mathcal{J}_{m,p,n} \cdot \frac{p_c^n}{p_{||}} \cdot \mathcal{B}_1 \rangle. \quad (3)$$

Начальные значения импульсов для различных фракций электронного пучка:

$$p_c(z_{in}) = p_{c,in}, \quad p_{||}(z_{in}) = p_{||,in} \quad (4)$$

определяются исходя из заданных величин напряжения U_0 , питч-фактора g и с учетом неоднородности магнитного поля.

Комплексная амплитуда поля $F(z)$ удовлетворяет граничным условиям излучения на концах интервала интегрирования $z \in [z_{in}, z_{out}]$:

$$\frac{dF(z)}{dz} = i\kappa_{||} F(z) \quad \text{при} \quad z = z_{in}, \quad (5)$$

$$\frac{dF(z)}{dz} = -i\kappa_{||} F(z) \quad \text{при} \quad z = z_{out}. \quad (6)$$

Профиль резонатора и примыкающих к нему волноводных переходов $R_r(z)$ должен быть достаточно гладким: предельные углы α наклона образующей боковой поверхности волновода по крайней мере должны удовлетворять условию $\operatorname{tg} \alpha \ll 1$. Волновое число $\kappa = \omega/c$ наравне с F_{in} является одним из собственных чисел задачи. Продольное волновое число $\kappa_{||}$ с учетом омических потерь запишем в виде

$$\kappa_{||}^2(z) = \kappa^2 - \kappa_{\perp}^2(z) \cdot \Omega(z), \quad (7)$$

где $\kappa_{\perp}(z) = \nu_{m,p}/R_r(z)$ — поперечное волновое число в данном поперечном сечении z , c — скорость света, $\nu_{m,p}$ — p -й корень производной функции Бесселя J_m .

Комплексный множитель

$$\Omega(z) = 1 + \frac{1}{Q_{ohm}} \cdot \frac{R_{reg}}{R_r(z)} \quad (8)$$

позволяет учесть потери энергии на нагрев резонатора. Здесь R_{reg} — радиус однородного участка резонатора,

$$Q_{ohm} = \left(1 - \frac{m^2}{\nu_{m,p}^2} \right) \cdot \frac{R_{reg}}{\delta_{skin}}, \quad (9)$$

— омическая добротность, $\delta_{\text{skin}} = k_{\text{skin}} \cdot \delta_{\text{idl}}$ — толщина скин-слоя, $\delta_{\text{idl}} = \sqrt{2/(Z_0 \sigma \mu_r \omega)}$ — толщина скин-слоя гладкого металла (без шероховатостей), $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 376.73$ Ом — волновое сопротивление вакуума, $\mu_r \approx 1$ — относительная магнитная проницаемость металла, σ — его удельная проводимость (обратное сопротивление) по постоянному току, зависящая от температуры; $k_{\text{skin}} \approx 1.5\text{--}3$ — коэффициент потерь, учитывающий влияние микронеровностей на поверхности резонатора [13]; в общем случае этот коэффициент зависит от частоты и температуры.

На рис. 1 показан оптимизированный профиль резонатора, длина однородного участка резонатора составляет около 10 мм. Максимальная мощность генерации в резонаторе с таким профилем достигается при магнитном поле 14.7 Тл и составляет 8 МВт, что соответствует КПД около 32%.

ТРЕХМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДОМ КРУПНЫХ ЧАСТИЦ

Моделирование процессов на фронте импульса ускоряющего напряжения осуществлялось на базе трехмерного PIC-кода KARAT [14]. На рис. 2 показана геометрия пространства взаимодействия и мгновенное положение макрочастиц. С левой границы в систему инжектировался винтовой электронный пучок с питч-фактором 1.1 и величиной начального разброса по поперечным скоростям около 30%. Магнитное поле задавалось посто-

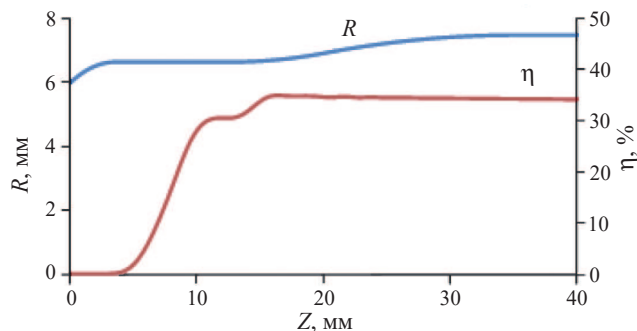


Рис. 1. Результаты расчетов по усредненным уравнениям: оптимальный профиль резонатора и зависимость КПД от продольной координаты.

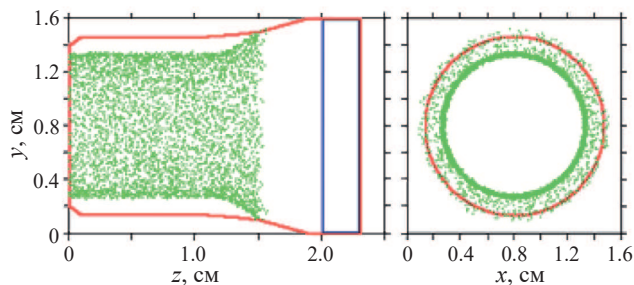


Рис. 2. Геометрия пространства взаимодействия и мгновенное положение макрочастиц в продольном и поперечном сечениях системы.

янным на протяжении однородного участка резонатора. Далее задавалось постепенное уменьшение величины продольной компоненты магнитного поля, в результате чего электронный пучок осаждался на стенку электродинамической системы. На правой границе системы устанавливался поглощающий слой с переменной проводимостью, коэффициент отражения от которого не превышал 1% по мощности. Электрическая проводимость стенок задавалась равной электрической проводимости меди.

На рис. 3 представлена экспериментально измеренная осциллограмма зависимости ускоряющего напряжения от времени. Видно, что в представленном импульсе присутствует нарастающий фронт длительностью около 1 мкс. Однако на данный момент трехмерное PIC-моделирование динамики гиротронов на таких временах будет занимать очень много реального времени. Для уменьшения времени расчетов в моделировании использовалась форма импульса ускоряющего напряжения, близкая по форме к экспериментально измеренной, но с суммарной длительностью около 350 нс.

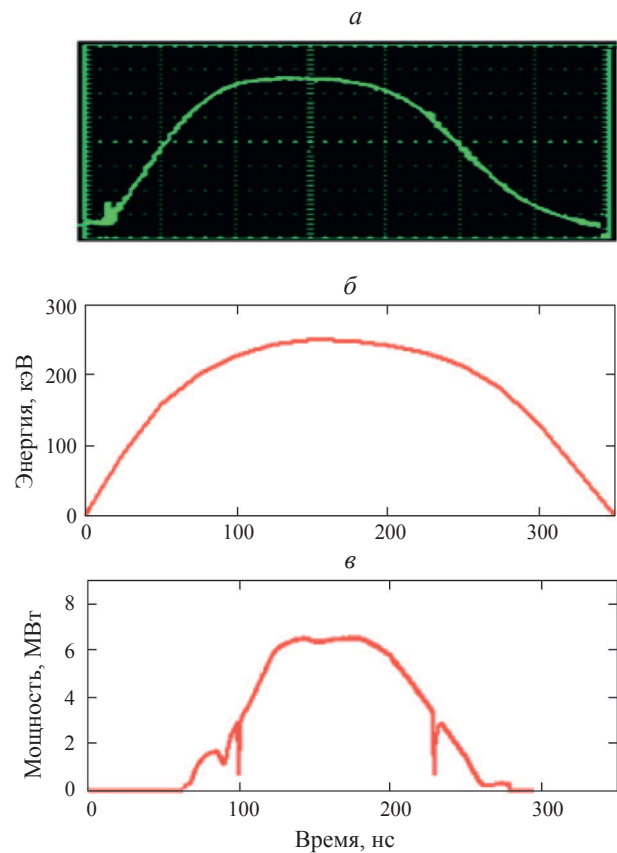


Рис. 3. Экспериментальная осциллограмма ускоряющего напряжения (а), временная масштаб одной клетки равен 500 нс; зависимость энергии электронов (б) и выходной мощности (в) в оптимальном режиме в трехмерном моделировании методом крупных частиц.

Длительность фронта ускоряющего напряжения при этом составила около 150 нс. Такое сокращение длительности фронта не должно приводить к существенному изменению динамики системы, поскольку длительность фронта значительно превышает характерные времена установления колебаний, около $Q/(2\pi f)$, где Q и f — добротность и собственная частота моды.

В силу некоторых ограничений кода KARAT, в моделировании можно было задать только дискретное изменение начального питч-фактора частиц с количеством значений не более четырех. Вследствие этого использовался следующий алгоритм моделирования сценария включения: электронный пучок представлялся в виде последовательности четырех электронных импульсов длительностью 20, 40, 40 и 60 нс. Переход между импульсами осуществлялся путем уменьшения до нулевого значения тока и энергии электронов на заднем фронте импульса и одновременного увеличения от нуля до необходимого значения тока и энергии электронов на переднем фронте следующего импульса. На протяжении каждого из импульсов питч-фактор оставался постоянным. Его значение задавалось равным среднему значению питч-фактора на данном временном интервале, вычисленное на основе расчета электронно-оптической системы. Размер счетной сетки в моделировании задавался равным $175 \times 175 \times 231$ узлов, число макрочастиц составляло около 100000.

Моделирование показало, что селективное возбуждение колебаний на моде $TE_{33,2}$ происходит в диапазоне магнитных полей от 14.6 до 15.1 Тл. Максимальная мощность генерации составила около 7 МВт, что очень близко к значению, рассчитанному на основе усредненных уравнений. Отличие частоты генерации, полученной в PIC-моделировании, от частоты генерации, рассчитанной на основе усредненных уравнений, составляет менее 2%. Это является приемлемой величиной, учитывая используемую размерность счетной сетки.

Моделирование показало, что в оптимальном режиме генерации общая длительность генерации колебаний на рабочей моде в диапазоне 300 ГГц составляет около 100 нс (рис. 3), что соответствует примерно 600 нс времени в реальной системе. Таким образом, с учетом максимальной мощности генерации порядка 7 МВт, полная энергия импульсного терагерцового излучения может превышать 4 Дж.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Гиротроны на основе релятивистских винтовых электронных потоков представляются перспективными источниками мощного излучения терагерцового диапазона. Прежде всего, следует отметить относительно высокую эффективность электронно-

волнового взаимодействия по сравнению с источниками других типов. Подтверждения возможности создания высокоэффективных релятивистских гиротронов были получены в предшествующих экспериментальных исследованиях. В частности, в гиротроне Ка-диапазона было получено излучение с микросекундной длительностью импульса с мощностью около 10 МВт и КПД около 50% [15], а в гиротроне W-диапазона излучение длительностью около 0.5 мкс с мощностью более 5 МВт и КПД около 20% [16].

В представленной работе продемонстрировано, что возможно дальнейшее увеличение рабочей частоты релятивистского гиротрона вплоть до терагерцового диапазона с сохранением эффективности электронно-волнового взаимодействия на уровне 30%. Важно отметить, что требуемые для этого значения ведущего магнитного поля (около 15 Тл), достижимы в настоящее время не только в импульсных соленоидах, но и в криомагнитах. С учетом возможности работы высоковольтных источников питания с высокой частотой повторения это открывает перспективы применения таких источников в ряде плазменных приложений [18, 18].

Исследование выполнено в рамках темы государственного задания FFUF-2022-0007.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Песков Н.Ю., Заславский В.Ю., Гинзбург Н.С. и др. // Изв. вузов. Радиофиз. 2023. Т. 66. № 7–8. С. 566; Peskov N.Yu., Zaslavsky V.Yu., Ginzburg N.S. et al. // Radiophys. Quantum Electron. 2023. V. 66. No. 7–8. P. 513.
2. Сандалов Е.С., Синицкий С.Л., Аржанников А.В. и др. // Изв. вузов. Радиофиз. 2023. Т. 66. № 7–8. С. 538; Sandalov E.S., Sinitsky S.L., Arzhannikov A.V. et al. // Radiophys. Quantum Electron. 2023. V. 66. No. 7–8. P. 489.
3. Песков Н.Ю., Аржанников А.В., Белоусов В.И. и др. // Изв. РАН. Сер. физ. 2023. Т. 87. № 5. С. 755; Peskov N.Yu., Arzhannikov A.V., Belousov V.I. et al. // Bull. Russ. Acad. Sci. 2023. V. 87. No. 5. P. 669.
4. Сандалов Е.С., Синицкий С.Л., Аржанников А.В. и др. // Изв. РАН. Сер. физ. 2023. Т. 87. № 5. С. 652; Sandalov E.S., Sinitsky S.L., Arzhannikov A.V. et al. // Bull. Russ. Acad. Sci. 2023. V. 87. No. 5. P. 573.
5. Rozental R.M., Danilov Y.Y., Leontyev A.N. et al. // IEEE Trans. Electr. Dev. 2022. V. 69. No. 3. P. 1451.
6. Данилов Ю.Ю., Леонтьев А.Н., Малкин А.М. и др. // Изв. РАН. Сер. физ. 2024. Т. 88. № 1. С. 95; Danilov Yu.Yu., Leontyev A.N., Plankin O.P. et al. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2024. V. 88. No. 1. P. 80.
7. Vainshtein L.A. Open resonators and open waveguides. Golem Press, 1969.

8. Bykov Y.V., Gol'denberg A.L., Nikolaev L.V. et al. // Radiophys. Quantum Electron. 1975. V. 18. P. 1141.
9. Gaponov A.V., Flyagin V.A., Goldenberg A.L. et al. // Int. J. Electron. 1981. V. 51. No. 4. P. 277.
10. Saito T., Tanaka S., Shinbayashi R. et al. // Plasma Fusion Res. 2019. V. 14. Art. No. 1406104.
11. Nusinovich G.S. // IEEE Trans. Plasma Sci. 1999. V. 27. No. 2. P. 313.
12. Завольский Н.А., Запевалов В.Е., Мусеев М.А. // Изв. вузов. Радиофиз. 2001. Т. 44. № 4. С. 345.
13. Запевалов В.Е., Зуев А.С., Паршин В.В. и др. // Изв. вузов. Радиофиз. 2021. Т. 64. № 4. С. 265.
14. Tarakanov V.P. // EPJ Web Conf. 2017. V. 149. Art. No. 04024.
15. Зайцев Н.И., Завольский Н.А., Запевалов В.Е. и др. // Изв. вузов. Радиофиз. 2003. Т. 46. № 10. С. 914.
16. Abubakirov E.B., Chirkov A.V., Denisov G.G. et al. // IEEE Trans. Electron Dev. 2017. V. 64. No. 4. P. 1865.
17. Сидоров А.В., Веселов А.П., Водопьянов А.В. и др. // Письма в ЖТФ. 2023. Т. 49. № 24. С. 14; Sidorov A.V., Veselov A.P., Vodopyanov A.V. et al. // Tech. Phys. Lett. 2023. V. 49. No. 12. P. 77.
18. Водопьянов А.В., Глявин М.Ю., Голубев С.В. и др. // Письма в ЖТФ. 2017. Т. 43. № 4. С. 10.

Calculation of a relativistic 300 GHz range gyrotron, considering the real shape of the accelerating voltage pulse

A. N. Leontyev*, R. M. Rozental, O. P. Plankin, E. S. Semenov

Federal Research Center A. V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences, 603950 Russia

**e-mail: leontiev@ipfran.ru*

Calculations have been performed for a relativistic gyrotron in the 300 GHz range with a power of up to 8 MW. For the experimentally measured accelerating voltage pulse shape, calculations of the output power pulse shape were made using three-dimensional modeling using the large particle method. It has been shown that the total radiation energy at the operating frequency can exceed 4 J.

Keywords: relativistic gyrotron, terahertz radiation

УДК 534.6.08

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ИМПУЛЬСНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ МИКРОСКОПИИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ГУБЧАТЫХ БИОКОМПОЗИТОВ НА ОСНОВЕ ХИТОЗАНА

© 2025 г. Ю. С. Петронюк^{1, *}, Е. А. Храмцова¹, К. Г. Антипова², С. Г. Васильева³,
А. Н. Богаченков¹, А. Е. Соловченко³, Т. Е. Григорьев^{2, 4}

¹Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт биохимической физики имени Н. М. Эмануэля Российской академии наук», Москва, Россия

²Федеральное государственное бюджетное учреждение «Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Москва, Россия

³Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», Москва, Россия

⁴Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт элементоорганических соединений имени А. Н. Несмеянова Российской академии наук», Москва, Россия

*e-mail: jps7@mail.ru

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

Предложена методика локальной оценки акустических свойств губчатых полимерных образцов, основанная на визуализации микроструктуры, измерении затухания и скорости звука. Предложенный подход является актуальным для изучения биополимерных композитных материалов и конструкций на их основе, поскольку дает возможность *in situ* наблюдать деградацию структуры под воздействием внешних факторов, а также при необходимости исследовать накопление биологических соединений.

Ключевые слова: акустическая микроскопия, губчатые материалы, биокompозиты, хитозан, Lobosphaera

DOI: 10.31857/S0367676525010246, EDN: CYREYA

ВВЕДЕНИЕ

Загрязнение окружающей среды из-за попадания в воду тяжелых металлов, молекул красителей, пестицидов, гербицидов, остатков антибиотиков и других фармацевтических препаратов могут приводить к различным опасным заболеваниям [1]. В настоящее время для очистки воды разрабатываются новые методы очистки [2], в том числе экологически безопасные пористые материалы на основе природного полимера хитозана с уникальными адсорбционными свойствами [1, 3–6]. Этот класс материалов привлекает значительное внимание благодаря нетоксичности, биосовместимости и способности к биологическому разложению. Важнейшим функциональным свойством губчатых композитов является их пористая архитектура, которая увеличивает площадь сорбирующей поверхности и обеспечивает свободную диффузию по системе микропор. Имобилизация микроорганизмов, в том числе микроводорослей

(МВ), способных к биodeградации опасных поллютантов [7], на хитозановых композитах, позволяет увеличивать эффективность процесса очистки сточных вод. Для повышения функциональных свойств, эффективности и экономичности в структуру сорбента вводят разнообразные природные наполнители [8–10], что оказывает влияние на механические и сорбционные характеристики итогового продукта. Поскольку разрабатываемый композит с иммобилизованными клетками МВ должен сохранять свою целостность при продолжительном инкубировании в водной среде, изучение его физико-химических и механических свойств является первостепенной задачей.

Самым эффективным неразрушающим методом для исследования объемной микроструктуры и упруго-механических свойств биополимерных композитов является сканирующая импульсная акустическая микроскопия (СИАМ). Метод достаточно давно и успешно применяется в материаловедении для изучения структуры и упругих

свойств неоднородных сред [11–18]. Неинвазивность метода является особенно ценной для биомедицинских исследований [18, 19], поскольку позволяет наблюдать динамику развития биообъектов *in vivo* и анализировать влияние внешних воздействий на эволюцию тканеинженерных или композитных конструкций [20–23]. Ультразвуковой контакт осуществляется с применением иммерсионной жидкости, что дает преимущества при обеспечении необходимых условий сохранения интактных биообразцов.

В данной работе метод СИАМ применялся для изучения пористых губчатых образцов на основе хитозана, сшитого глутаровым альдегидом, с функциональным наполнителем из мицелля и иммобилизованных на них клеток МВ. Помимо акустической визуализации и наблюдения микроструктуры пористого губчатого материала, исследовались скорости звука и затухание в образцах интактно и непосредственно под нагрузкой. Такой подход позволяет оценивать динамику эволюции композитных образцов с иммобилизованными на них клетками МВ, в зависимости от концентрации функциональных добавок в составе композита.

МЕТОДЫ

В акустических системах визуализации высокого разрешения применяются импульсы фокусированного ультразвука. Объемная визуализация осуществляется короткими импульсами в 1–2 периода на основной частоте 50–200 МГц [13]. Фокусировка ультразвукового зондирующего пучка определяется его угловой апертурой [25]. Для объемной ультразвуковой визуализации используют линзы с узкой апертурой, что обеспечивает оптимальное соотношение длины и диаметра фокальной перетяжки, минимизирует абберации, деформацию фоку-

са внутри образца и позволяет избежать возбуждения поверхностных упругих волн. В данной работе использовался сканирующий акустический микроскоп, разработанный в ИБХФ РАН [13]. Номинальная частота фокусирующего преобразователя соответствовала 50 МГц. Отраженный от границы подложки с объектом эхо-сигнал оцифровывался аналого-цифровым преобразователем с частотой дискретизации 500 МГц. Напряжение на входе акустического преобразователя соответствовало 20 В. Максимум амплитуды регистрируемого эхо-сигнала определялся по его огибающей. В обводненных образцах визуализация микроструктуры осуществлялась акустической линзой с углом апертуры 30°.

Количественную оценку скорости звука и затухания, а также измерение толщины образцов выполняли акустической линзой с апертурным углом 8°. Для линзы с частотой 50 МГц диаметр фокальной области составлял 0.13 мм, а ее длина — 6 мм. В этом случае волновой фронт внутри фокальной области оказывается близок к плоскому. В изотропном образце распространяются продольные упругие волны вдоль направления оси зондирующего пучка. Каустика ультразвукового пучка трансформируется слабо при переходе из контактной среды (вода) в образец (обводненная губка из хитозана), благодаря несущественной разнице в акустических импедансах контактирующих сред.

На рис. 1 показана акустическая ячейка для измерения скорости звука и затухания, которая также позволяет измерять акустические параметры для нагруженных образцов. Нагрузка и плоскопараллельность границ обеспечиваются с помощью тонкой пластинки из полистирола, который является максимально прозрачным для ультразвука: его акустический импеданс близок к иммерсии (воде).

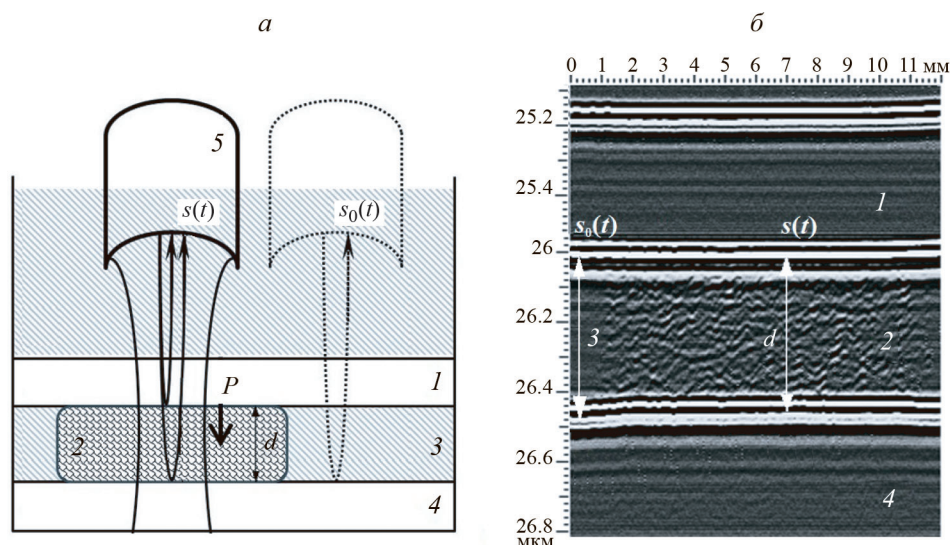


Рис. 1. Схема и акустическое изображение экспериментальной акустической ячейки: 1 и 4 — пластинка из полистирола, 2 — образец, 3 — среда для образца, 5 — излучатель, P — давление на образец.

Интakтные образцы измеряются без нагрузочной пластинки.

Принимаемый акустический сигнал $s(t)$ от нижней границы акустической ячейки между образцом и подложкой описывается выражением:

$$s(t) = A \cdot R \cdot \exp(-i\omega) \left(t - \frac{2d}{c} \right) \cdot \exp(-2d \cdot \alpha), \quad (1)$$

где A — приемопередаточная характеристика измерительной системы; d — расстояние внутри ячейки; c — скорость звука, α — коэффициент затухания в биокомпозитном образце. Амплитудный коэффициент R обусловлен эффективностью отражения и прохождения зондирующего ультразвукового импульса в слоях экспериментальной ячейки и зависит от соотношения акустических импедансов контактирующих сред [26, 27]. Из выражения (1) видно, что скорость звука в образце определяется по времени прохождения эхо-импульса продольных волн в образце $\Delta t = 2d/c$ (рис. 1). Точность измерения задержки эхо-импульсным методом зависит от выбора референсных точек внутри измеряемых сигналов. Нужно принимать во внимание, что форма эхоимпульсов может деформироваться при дефокусировании границы раздела [28, 29], а также в результате зависимости коэффициента затухания от частоты используемого звука. В нашем случае половинная частота дискретизации (250 МГц) в несколько раз превышает максимальную частоту в спектре сигнала, что позволяет выбрать более точно референтные точки внутри эхоимпульсов для увеличения разрешения сигнала.

Коэффициент затухания ультразвука в композитном образце определяется соотношением амплитуд сигналов, регистрируемых от дна акустической ячейки с образцом и без него: $\alpha = \frac{1}{2d} \cdot 20 \times \lg \frac{s}{s_0}$ [26] (рис. 1а). При этом область фокуса позиционируется на нижнюю границу образца с подложкой, длина фокуса превышает толщину образца, а его структурные неоднородности малы по отношению к его диаметру.

МАТЕРИАЛЫ

Композит изготавливался из хитозана ($M_w = 500$ кДа, Биопрогресс, Россия) в водном растворе уксусной кислоты (ООО «Компонент-Реактив», Россия) и сшиванием глутаровым альдегидом (50% водный раствор, Hubei Jinghong Chemical Co. Ltd, Китай). В качестве наполнителя использовался грибной мицелий вешенки. Иммерсионную бидистиллированную воду получали на аппарате Millipore Milli-Q Synthesis (Merck, Германия).

Исходные образцы губки были приготовлены из 2% (масс.) раствора хитозана в 2% (масс.) водном растворе уксусной кислоты (УК). Для этого к 96 г бидистиллированной воды добавляли 1.96 г УК и 2 г хитозана, и перемешивали на магнитной ме-

шалке Heidolph MR Hei-Тес в течение 48 ч при комнатной температуре.

Водно-кислую суспензию мицелия готовили, добавляя 2 г сухого порошка к 98 мл 2% (масс.) раствора уксусной кислоты. Для получения сорбентов раствор хитозана и измельченной биомассы наполнителя соединяли в пропорции 1:1, 1:3, 3:1 и размешивали в течение 1 ч. Смесь помещали в ячейки 24-луночного планшета, замораживали в морозильной камере в течение 24 ч при температуре -24°C , и подвергали сублимационной сушке на установке Martin Christ Alpha 2-4LSC (Martin Christ Gefriertrocknungsanlagen GmbH, Германия) 48 ч в режиме с глубиной вакуума 0.25 Мбар, затем 2 ч в режиме с глубиной вакуума 0.010 Мбар (температура конденсора -75°C). Дисперсия мицелия в хитозановом растворе имела низкую суспензионную устойчивость, что приводило к седиментации дисперсной фазы в процессе заморозки суспензии и образованию сорбентов с градиентом концентрации наполнителя от нижней поверхности губки к верхней. В качестве контрольных образцов по описанной методике были получены материалы без наполнителя.

В работе использовали альгологическую монокультуру микроводоросли (МВ) *Lobosphaera* IPPAS C-2047 (далее в тексте *Lobosphaera*) с ассоциированными гетеротрофными бактериями. Клетки *Lobosphaera* иммобилизовали на сорбентах и культивировали как описано ранее [30] в течение 30 сут.

Механические испытания набухших сорбентов проводили на универсальной разрывной машине Instron 5965 (Instron, США) при одноосном сжатии с постоянной скоростью деформации 50% в минуту при комнатной температуре. Давление осуществлялось с помощью цилиндрической плиты диаметром 25 мм. Измерения проводилось на воздухе на набухших образцах.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Для анализа градиента концентрации наполнителя были изготовлены продольные срезы сорбентов толщиной 1 мм, включающий все слои. В верхней части образцов, с противоположной стороны от скопления мицелия отмечали более высокую концентрацию иммобилизованных клеток *Lobosphaera* и ассоциированных с ней бактерий. Были выделены три гетерогенные области на срезе: верхняя часть с МВ, средняя гомогенная (большая часть объема образца), и нижняя часть с мицелием.

При измерении механических свойств композита применялось одноосное сжатие, образец сжимался целиком, невозможно было учесть разницу в механических свойствах отдельных зон. Акустическая микроскопия высокого разрешения позволяет успешно дифференцировать эти области и определить их упругие свойства бесконтактным

методом, а также визуализировать их микроструктуру (рис. 2).

В табл. 1 представлены количественные данные для образца 50% мицелия + 50% хитозана. Было установлено, что скорость звука и затухание варьируются в диапазоне $1496\text{--}1499\text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$ и $0.85\text{--}2.3\text{ дБ}\cdot\text{мм}^{-1}$, соответственно. При этом центральная область (зона 2) занимает больший объем, является наиболее гомогенной и определяет механические свойства композита в целом. Для дальнейших ультразвуковых исследований использовалась эта область.

Количественные оценки упруго-механических характеристик были получены для композитов с разной пропорцией наполнителя в матрице: 25, 50, 75 масс. % мицелия. На рис. 3 показаны эхоимпульсы продольных волн, отраженных от нижней границы “образец-подложка”. Для сравнения приведен импульс, отраженный от подложки в иммерсии (вода) без образца. Хорошо видно, что вре-

мя задержки импульса растет, а скорость звука соответственно уменьшается, с увеличением количества наполнителя (рис. 3а). Установлено, что при набухании структура композита, содержащего 75% наполнителя, по акустическим свойствам приближается к гидрогелю. Рост амплитуды эхосигнала с увеличением концентрации наполнителя также свидетельствует о том, что стенки губки становятся акустически более прозрачными. Предположительно, тонкие волокна мицелия интегрируются в губчатую матрицу, повышают ее гидрофильность и способствуют дополнительному набуханию. Полученные значения скорости звука и затухания в образцах разной концентрации представлены в табл. 2.

Анализ спектра полученных эхоимпульсов показывает, что ширина спектра коррелирует с количеством наполнителя в хитозане: с ростом концентрации спектр становится более широким и смещается в сторону более высоких частот (табл. 2).

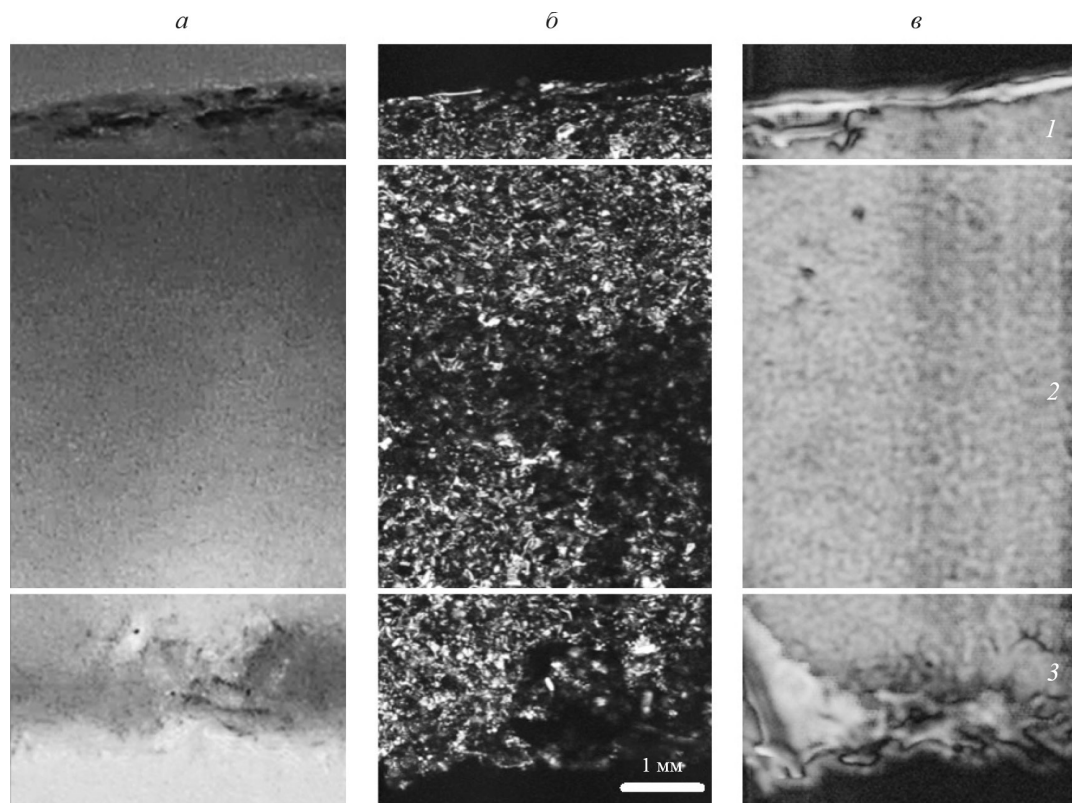


Рис. 2. Изображения структуры биокомпозита на основе хитозановой губки с мицелием (50% + 50%) и водорослями: фото поверхности (а), акустическое изображение поверхности (б), распределение амплитуды сигнала прошедшего через образец толщиной 1 мм (в). 1 — зона максимальной концентрации водорослей, 2 — однородная центральная часть губки, 3 — неоднородная зона с макровключениями мицелия.

Таблица 1. Локальные акустические параметры композита на основе хитозана с наполнителем из мицелия (50% + 50%) и водорослей

Область наблюдения	Скорость звука, м/с	Затухание, дБ/мм
1. Водоросли и бактерии	1498 ± 0.6	1.50 ± 0.13
2. Гомогенная губка с мицелием и водорослями	1496 ± 0.3	0.85 ± 0.08
3. Крупные включения мицелия	1499 ± 0.6	2.30 ± 0.2

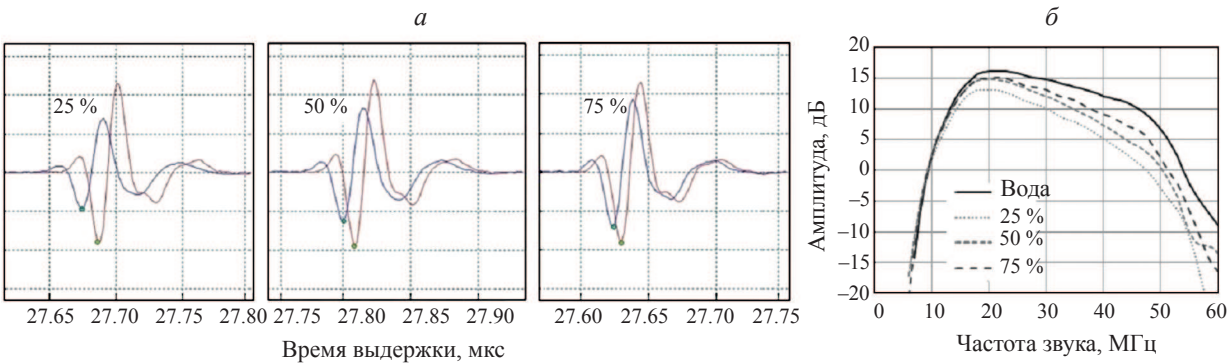


Рис. 3. Акустические измерения хитозановой губки с разным количеством наполнителя (мицелия) — 25, 50 и 75%: эхоимпульсы от нижней границы «образец-подложка» (а), соответствующие спектры принятых сигналов (б).

Таблица 2. Параметры принимаемого акустического сигнала для композита на основе хитозана с наполнителем из мицелия и водорослей

Количество наполнителя	Скорость, м/с	Затухание, дБ/мм	Максимум спектра, МГц	Полоса Δf по уровню -3 дБ, МГц
25%	1498 ± 0.6	0.94 ± 0.06	18.5 ± 0.1	16.1 ± 0.1
50%	1496 ± 1.0	0.85 ± 0.06	19.5 ± 0.1	16.4 ± 0.1
75%	1494 ± 0.6	0.60 ± 0.06	21.5 ± 0.1	18.1 ± 0.1
вода	1490 ± 0.5	0.01 ± 0.01	22.4 ± 0.1	21.8 ± 0.1

Испытания губчатых образцов на сжатие, выполненные классическим методом с помощью универсальной разрывной машины показали, что наличие добавки из мицелия существенно влияет на механические характеристики композита (рис. 4). Измеренный модуль Юнга для образца с 50% содержанием наполнителя составил 1.6 ± 0.2 кПа по сравнению с 9.3 ± 3.0 кПа для чистого хитозана. Поскольку сорбенты данного типа будут применяться для иммобилизации МВ и последующей очистки водоемов, представляется целесообразным исследовать изменения механических свойств образцов при длительном инкубировании (30 дней). Получен, что после инкубации упругий модуль снизился в 4 раза (0.4 ± 0.1 кПа). На рисунке 4б приведены значения механического напряжения для деформации композитов 45%. По-

лученные результаты свидетельствуют, что композит после биodeградации в присутствии иммобилизованных МВ при одинаковой деформации требует меньшего напряжения (0.17 ± 0.02 кПа) по сравнению с чистым хитозаном (1.30 ± 0.1 кПа) и intactным композитом (0.27 ± 0.06 кПа).

Под нагрузкой также были измерены значения скорости звука и затухания в образцах с разной концентрацией мицелия после биodeградации. Установлено, что величины скорости звука и затухания растут с увеличением приложенной нагрузки. В отличие от более хрупких образцов с низким содержанием наполнителя (25 и 50%) для композита с высоким содержанием (75%) мицелия, затухание почти не изменяется с ростом нагрузки, что может быть связано с высокой обводненностью его структуры.

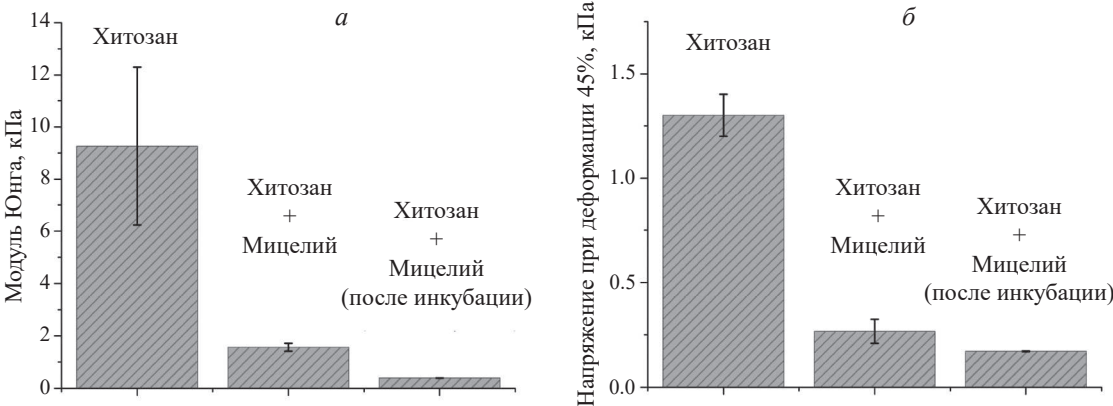


Рис. 4. Механические характеристики композита с 50% содержанием наполнителя: модуль Юнга при одноосном сжатии (а), напряжение при деформации 45% (б).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, представлены акустические изображения структуры высокопористых композитных образцов на основе хитозана с разным содержанием наполнителя из грибного мицелия, описана методика измерения скорости звука и затухания для таких образцов с помощью СИАМ метода, в том числе под нагрузкой в иммерсии.

Механические испытания позволили установить влияние концентрации наполнителя на упруго-механические характеристики хитозановой губчатой матрицы. Существенное снижение упругого модуля композита при наличии наполнителя вероятно обусловлено разной степенью набухания хитозана и мицелия. Это приводит к возникновению дополнительных напряжений на стенках пор, приводящих к ускоренной потере ими устойчивости и необратимой деформации образца при более низких нагрузках.

Акустическая микроскопия позволила определить неоднородность губчатых композитов с наполнителем, выделить гомогенную зону и измерить акустические свойства отдельных фракций в объеме композита. Также было выявлено снижение механических характеристик сорбента в результате биodeградации при длительном инкубировании (30 сут) в присутствии МВ и ассоциированных гетеротрофных бактерий. Результаты показали высокую чувствительность микроакустических измерений к изменениям упругих свойств под действием внешних факторов, таких как: наличие биоактивной компоненты, гидролиз и биodeградация, давление, механических нагрузок. Полученные данные и предложенные методики в перспективе будут служить основой для оценки типа и количества адсорбированных загрязнителей, что актуально для исследований в области зеленых технологий.

Ультразвуковые исследования образцов выполнены в рамках государственного задания ИБХФ РАН (№ 122041400112-8); изготовление сорбентов и изучение их механических свойств; иммобилизация микроводорослей и культивирование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-44-00006).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Peluso G., Petillo O., Ranieri M. et al. // Biomaterials. 1994. V. 15. P. 1215.*
2. *Магомедов К.Э., Омельянчик А.С., Воронцов С.А. и др. // Изв. РАН. Сер. физ. 2023. Т. 87. № 6. С. 819; Magomedov K.E., Omelyanchik A.S., Vorontsov S.A. et al. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2023. V. 87. No. 6. P. 720.*
3. *Fiebrig I., Harding S.E., Stokke B.T. et al. // Eur. J. Pharm. Sci. 1994. V. 2. P. 185.*
4. *Grzybek P., Jakubski Ł., Dudek G. // Int. J. Mol. Sci. 2022. V. 23. Art. No. 9932.*
5. *Wujcicki Ł., Kluczka J. // Int. J. Mol. Sci. 2023. V. 24. Art. No. 12060.*
6. *Wujcicki Ł., Mandok T., Budzinska–Lipka W. et al. // Sci. Reports. 2023. V. 13. Art. No. 13049.*
7. *Vasilieva S., Lukyanov A., Antipova C. et al. // Int. J. Mol. Sci. 2023. V. 24. No. 13. Art. No. 10988.*
8. *Kluczka J. // Int. J. Mol. Sci. 2024. V. 25. P. 554.*
9. *Kluczka J. // Polymers. 2020. V. 12. Art. No. 635.*
10. *Lingait D., Rahagude R., Gaharwar S.S. et al. // Int. J. Biol. Macromol. 2024. V. 257. Art. No. 128676.*
11. *Briggs A., Kolosov O. Acoustic microscopy. Oxford University Press, 2009. 380 p.*
12. *Yu H. // Appl. Microscopy. 2020. V. 50. No. 25. P. 3.*
13. *Zakutailov K.V., Levin V.M., Petronyuk Y.S. // Inorg. Mater. 2010. V. 46. No. 15. P. 655.*
14. *Anastasiadis P., Zinin P. // Open Neuroimag. J. 2018. V. 12. P. 69.*
15. *Levin V., Petronyuk Y., Morokov E. et al. // Phys. Stat. Sol. B. 2016. V. 253. P. 1952.*
16. *Петронюк Ю.С., Морокков Е.С., Левин В.М. // Изв. РАН. Сер. физ. 2015. Т. 79. № 10. С. 1425; Petronyuk Y.S., Morokov E.S., Levin V.M. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2015. V. 79. No. 10. P. 1268.*
17. *Петронюк Ю.С., Рыжова Т.Б., Левин В.М. // Изв. РАН. Сер. физ. 2022. Т. 86. № 1. С. 110; Petronyuk Y.S., Levin V.M., Ryzhova T.B. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2022. V. 86. No. 1. P. 74.*
18. *Khramtsova E., Morokov E., Antipova C. et al. // Polymers. 2022. V. 14. No. 17. Art. No. 3526.*
19. *Ngwa W., Luo W., Kamanyi A. et al. // J. Microscopy. 2005. V. 218. No. 3. P. 208.*
20. *Hozumi N., Yoshida S., Kobayashi K. // Ultrasonics. 2019. V. 99. Art. No. 105966.*
21. *Kim E.V., Petronyuk Y.S., Guseynov N.A. et al. // Bull. Exp. Bio. Med. 2021. V. 170. No. 3. P. 356.*
22. *Петронюк Ю.С., Трофимова Н.Н., Зак П.П. и др. // Хим. физика. 2022. Т. 41. № 2. С. 27.*
23. *Ruland A., Chen X., Khansari A. et al. // Soft Matter. 2018. V. 14. No. 35. P. 7228.*
24. *Куликова О.Р., Храмова Е.А., Антипова К.Г. и др. // Биомедицина. 2021. Т. 17. № 3Е. С. 42.*
25. *Мэзон У. Физическая акустика. Т. 1. Методы и приборы ультразвуковых исследований. М.: Мир, 1966. 592 с.*
26. *Salzer R. Biomedical imaging: principles and applications. John Wiley & Sons Inc., 2012. 441 p.*
27. *Петронюк Ю.С., Титов С.А., Богаченков А.Н. и др. // Изв. РАН. Сер. физ. 2023. Т. 87. № 1. С. 84; Petronyuk Y.S., Titov S.A., Bogachenkov A.N. et al. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2023. V. 87. No. 1. P. 70.*
28. *Petronyuk Y.S., Levin V.M., Titov S.A. // Phys. Procedia. 2015. V. 70. P. 626.*
29. *Titov S.A., Levin V.M., Petronyuk Y.S. // Acoust. Phys. 2017. V. 63. No. 6. P. 744.*
30. *Vasilieva S., Lobakova E., Grigoriev T. et al. // J. Water Proc. Engin. 2021. V. 40. Art. No. 101774.*

Application of pulsed acoustic microscopy for studying chitosan-based biocomposite sponges

Y. S. Petronyuk^{a, *}, E. A. Khramtsova^a, K. G. Antipova^b, S. G. Vasilyeva^c, A. N. Bogachenkov^a,
A. E. Solovchenko^c, T. E. Grigoriev^{b, d}

^a *Emanuel Institute of Biochemical Physics of Russian Academy of Sciences,
Moscow, 119334 Russia*

^b *National Research Centre "Kurchatov Institute",
Moscow, 123182, Russia*

^c *Lomonosov Moscow State University,
Moscow, 119991, Russia*

^d *Institute of Organoelement Compounds of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, 119334, Russia*

^{*} *e-mail: jps7@mail.ru*

We proposed a method for local assessment of acoustic properties in spongy polymer samples, based on visualizing the microstructure, measuring attenuation, and sound velocity. This approach is relevant to the study of biopolymer composite materials and their structures, as it allows for in situ observation of structural degradation under external influences, as well as investigation of the evolution of native tissue replacement, if necessary.

Keywords: acoustic microscopy, spongy materials, biocomposites, chitosan, Lobosphaera

УДК 534-16:550.34

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СХЕМЫ ПОВЕРХНОСТНО-ВОЛНОВОЙ ТОМОГРАФИИ ТРЕХМЕРНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

© 2025 г. Д. Д. Позднякова^{1, *}, Д. А. Преснов², А. С. Шуруп^{1, 2, 3}

¹ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», физический факультет, Москва, Россия

² Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт физики земли имени О. Ю. Шмидта Российской академии наук», Москва, Россия

³ Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт океанологии имени П. П. Ширшова Российской академии наук», Москва, Россия

* e-mail: d_pozdnyakova@live.ru

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

Предложена трехмерная схема поверхностно-волновой томографии неоднородностей скоростей поперечных волн, не требующая восстановления дисперсионных зависимостей поверхностных волн в исследуемой области. Приводятся результаты численного моделирования, выполненного для условий Гавайского архипелага, которые указывают на работоспособность предлагаемого подхода.

Ключевые слова: сейсмоакустическая томография, поверхностная волна, слоистая геофизическая среда

DOI: 10.31857/S0367676525010256, EDN: CYQZAI

ВВЕДЕНИЕ

Исследование вулканов является актуальной и востребованной задачей. Особый интерес вызывает мониторинг вулканической активности в густонаселенных районах. В некоторых случаях, как, например, на вулкане Мерапи в Индонезии в 2010 году [1] удалось получить точные оценки начала и интенсивности извержений, что позволило вовремя и оперативно эвакуировать местное население и спасло тысячи человеческих жизней. Успешные примеры реализаций краткосрочных прогнозов извержений на вулканах есть и у Камчатского филиала Федерального исследовательского центра «Единая геофизическая служба Российской академии наук» [2]. Сейсмоакустическая томография — ключевой метод изучения глубинных структур Земли, который позволяет идентифицировать строение и физические свойства горных пород, а также наблюдать за изменениями сейсмических параметров используя сравнительно небольшое количество данных о временах пробега волн по разным трассам, пересекающим область исследования [3]. Использование поверхностных сейсмических волн в качестве источника информации о геофизической среде привело к возникновению поверхностно-волновой то-

мографии, которая в настоящее время находит свое применение не только на суше, но и при исследованиях дна океана [4]. Тот факт, что поверхностные сейсмические волны с расстоянием затухают медленнее объемных волн, позволяет использовать их для мониторинга регионов как в глобальных, так и региональных масштабах. Другой особенностью поверхностных волн является зависимость глубины их проникновения от частоты, позволяющая получать информацию о характеристиках среды, расположенных на разных глубинах, с помощью широкополосного режима зондирования. Практическая реализация такого зондирования осуществима методами шумовой интерферометрии [5, 6], не требующей применения дорогостоящих низкочастотных излучателей. Обычно поверхностно-волновая томографическая схема состоит из двух этапов: на первом в точках исследуемой области восстанавливаются дисперсионные зависимости групповых или фазовых скоростей поверхностных волн; на втором — полученные дисперсии инвертируются в трехмерные распределения параметров среды. В настоящей работе рассматривается одноэтапная трехмерная томографическая схема, пропускающая промежуточный этап восстановления дисперсионных зависимостей. Такой подход позволяет сократить

время решения обратной трехмерной задачи, уменьшить требования к техническим возможностям используемых вычислительных систем; также становится возможным дополнительный учет гладкости характеристик среды не только на разных глубинах, но и в разных географических точках. Моделирование проводится для условий эксперимента PLUME [7] с параметрами геофизической среды, соответствующими Гавайскому архипелагу [4]. Рассматривается восстановление трёхмерного поля скорости сдвиговых волн по временам распространения поверхностных волн в различных частотных диапазонах.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предполагается, что в рассматриваемой области расположены источники и приемники, возбуждающие и регистрирующие поверхностные волны, траектории распространения которых достаточно плотно покрывают исследуемый регион (рис. 1а). На текущем этапе исследований предполагается, что в рассматриваемом частотном диапазоне влиянием водного слоя и рельефа дна можно пренебречь; рассматриваются рэлеевские волны, распространяющиеся вдоль границы плоскостной среды (рис. 1б). Возмущением времен распространения рассматриваемых поверхностных волн $\Delta t_i(f)$ считается разность между известными экспериментальными t_i^{exp} и рассчитанными теоретическими $t_i^{\text{теор}}$ временами распространения между i -ми парами источник-приемник на заданной частоте f . Теоретические значения $t_i^{\text{теор}}$ рассчитываются для априорно известного «невозмущенного» распределения скорости поперечных волн $c_s(\vec{r})$, $\vec{r} = \{x, y, z\}$ — трехмерный радиус-вектор. Требуется восстановить отклонение скорости $\Delta c_s(\vec{r})$ от ее фонового значения $c_s(\vec{r})$. Наличие $\Delta c_s(\vec{r})$ приводит к возникновению $\Delta t_i(f)$. Предполагается,

что в реальной ситуации $\Delta c_s(\vec{r})$ мало по сравнению с $c_s(\vec{r})$, что позволяет говорить о наличии близкой к линейной зависимости между $\Delta c_s(\vec{r})$ и $\Delta t_i(f)$ [8]:

$$\Delta t_i(f) = t_i^{\text{exp}} - t_i^{\text{теор}} \sim \Delta c_s(\vec{r}). \quad (1)$$

Для решения задачи восстановления $\Delta c_s(\vec{r})$ по данным $\Delta t_i(f)$ неоднородности $\Delta c_s(\vec{r})$ раскладываются по базисным функциям $\theta_j(\vec{r})$:

$$\Delta c_s(\vec{r}) = \sum_{j=1}^J x_j \theta_j(\vec{r}), \quad (2)$$

где x_j — неизвестные коэффициенты разложения по базису. Базис, используемый при решении томографических задач, должен удовлетворять, как правило, следующим требованиям [9]: с его помощью можно описать ожидаемые возмущения характеристик среды с требуемой точностью и его использование не должно накладывать дополнительных сложностей или ограничений на проводимые вычисления. В настоящей работе используется полосчатый базис, ранее разработанный и применяемый для гидроакустических приложений [9]. Этот базис был модифицирован для решения рассматриваемой задачи (рис. 1б) с целью учета особенности рассматриваемой томографической схемы — проникновение поверхностных волн на разные глубины на разных частотах позволяет осуществлять «послойное» зондирование томографируемой среды. Используются параметры модели литосферы Тихого океана (толщины слоев, плотности, скорости объемных волн в них), полученные в [4]. При построении базиса каждый слой, делится на трехмерные полосы, также поворачиваемые с равным угловым шагом (рис. 1б). Соотношение числа полос P и углов поворота U выбирается из требования взаимного пересечения периферийных частей базисных полос при одном повороте или, говоря иначе, отсутствия областей между соседними по углу полосками, не попадающих ни в одну из них:

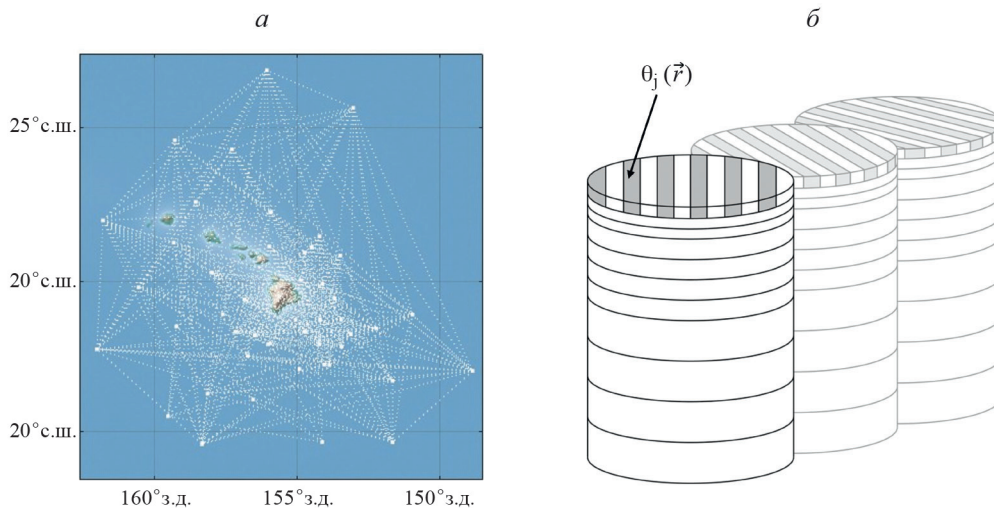


Рис. 1. Траектории распространения поверхностных волн между донными сейсмостанциями эксперимента PLUME, используемые в томографическом исследовании (а) и модифицированный полосчатый базис (б).

$$\frac{U}{P} \geq \frac{\pi}{2}. \quad (3)$$

Базисные функции $\theta_j(\vec{r})$ представляют собой «базисные» возмущения скоростей поперечных волн, локализованные в базисных полосках.

Для нахождения неизвестных коэффициентов x_j (2) рассматривается система линейных уравнений:

$$AX = \Delta T, \quad (4)$$

где экспериментально измеренные времена возмущений Δt_i формируют столбец ΔT ; A — матрица возмущений, элементами которой являются вычисляемые возмущения времен Δt_{ij} распространений поверхностных волн между i -й парой источник-приемник в среде с неоднородностью, заданной j -й базисной функцией $\theta_j(\vec{r})$; X — столбец коэффициентов разложения x_j трехмерной неоднородности $\Delta c_s(\vec{r})$ по базисным функциям $\theta_j(\vec{r})$. Система 4 подразумевает, что возмущения времен Δt_i , найденные из эксперимента и вызванные присутствием искомой неоднородности $\Delta c_s(\vec{r})$, могут быть представлены в виде линейной комбинации возмущений времен Δt_{ij} , также вызванных базисными функциями $\theta_j(\vec{r})$:

$$\Delta t_i = \sum_{j=1}^J \Delta t_{ij} x_j. \quad (5)$$

Регуляризованное МНК-решение системы (4), (5) имеет вид:

$$\hat{X} = (A^+ A + \varepsilon E)^{-1} A^+ \Delta T, \quad (6)$$

где E — единичная матрица; ε — коэффициент регуляризации Тихонова; символ «+» у матрицы возмущений A означает эрмитово сопряжение. При решении системы (4) важно, чтобы количество неизвестных $P \cdot U$, с учетом их связи (3) не превы-

шало общего количества исходных данных, которое определяется числом пар источник-приемник и количеством используемых частот. Это требование можно ослабить, если использовать дополнительную независимую информацию о типе восстанавливаемых неоднородностей, например условия гладкости неоднородностей $\Delta \hat{c}_s(\vec{r})$, подразумевающие, что в соседних пространственных точках значения восстанавливаемых функций не должны изменяться сколь угодно сильно. Найденные из (6) решения \hat{x}_j дают оценку искомых неоднородностей:

$$\Delta \hat{c}_s(\vec{r}) = \sum_{j=1}^J \hat{x}_j \theta_j(\vec{r}). \quad (7)$$

При решении обсуждаемой томографической задачи дополнительно учитывались следующие предположения. Во-первых, так как локализация поверхностных волн зависит от частоты, ожидается, что на более высоких частотах волна уже не будет проникать в более глубокие слои. Тем самым в рассматриваемой модели (рис. 2) для выбранного частотного диапазона следует исключить слои, расположенные на глубинах заметно больших длины волны. Во-вторых, при восстановлении на заданной частоте должны использоваться базисные полосы на тех глубинах, для которых возмущение скорости поперечных волн приводит к заметному изменению времени распространения поверхностной волны. Другими словами, поверхностная волна на рассматриваемой частоте должна быть «чувствительной» к возмущению восстанавливаемых параметров среды на рассматриваемой глубине. Для проверки этих предположений проводилось численное моделирование. Рассматривалась среда, состоящая из плоскопараллельных слоев. На границе

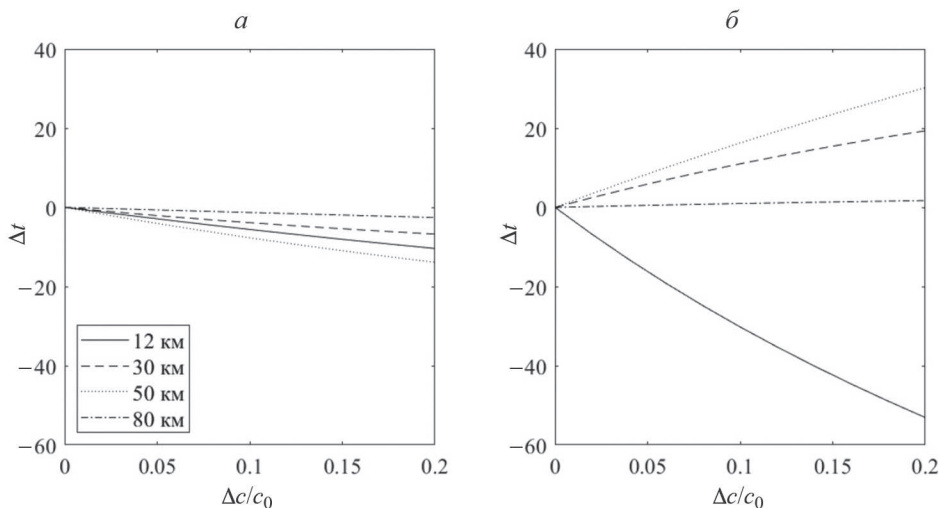


Рис. 2. Численное исследование линейной зависимости между возмущением времени распространения поверхностной волны Δt и возмущением скорости поперечной волны Δc_s на частотах 0.03 Гц (а) и 0.07 Гц (б) при фиксированном расстоянии между источником и приемником.

рассматриваемой слоистой среды на расстоянии R друг от друга располагались источник и приемник. Для выбранной частоты f в каждом слое поочередно вносилось возмущение скорости $\Delta c(z)$, после чего вычислялись возмущения времен распространения поверхностных волн Δt :

$$\Delta t(f) = R \left(\frac{1}{c_0(z) + \Delta c(z)} - \frac{1}{c_0(z)} \right), \quad (8)$$

где $c_0(z)$ — невозмущенные значения скорости поперечных волн в слоях. Примеры результатов моделирования (8) представлены на рис. 2. В соответствии с данными обработки эксперимента, полученными в [4], были рассмотрены всего 17 частот в диапазоне от 0.03 до 0.07 Гц. Проверка на самой высокой частоте 0.07 Гц показала, что использование базисных функций $\theta_j(\vec{r})$, расположенных на слоях, лежащих ниже 12 км не целесообразно, так как для них возмущение времени Δt возрастает с ростом возмущения скорости $\Delta c_s(\vec{r})$, что противоречит ранее сделанным предположениям. Тем временем на частоте 0.03 Гц имеет смысл рассматривать все слои вплоть до глубины 80 км, соответствующей самому глубокому слою. Что касается оценки чувствительности, на частоте 0.03 Гц все рассмотренные слои малочувствительны к вариациям скоростей поверхностных волн, тогда как на частоте 0.07 Гц высокую чувствительность к этим вариациям имеет единственный не отброшенный ранее слой, лежащий на глубине 12 км. Аналогичный анализ был проведен для всех рассматриваемых частот, что позволило на следующем шаге перейти к решению уже обратной задачи. Перед этим представляло интерес изучить разрешающую способность не только по глубине, но и в горизонтальной плоскости.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОМОГРАФИЧЕСКОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Проверка горизонтальной разрешающей способности обсуждаемой схемы поверхностно-волновой томографии была проведена с помощью «шахматного» теста [10]. Модель представлена чередующимися положительными и отрицательными возмущениями в виде прилегающих друг к другу квадратов со стороной 200 км и амплитудой в 10% от невозмущенной скорости поперечных волн в каждом слое, чередование по глубине отсутствует (рис. 3). Радиус исследуемой области $R \approx 800$ км. Тест проводился для двух модификаций полосчатого базиса, каждая состоит из 12 слоев, причем в первой модификации базис представлял собой $P = 8$ полос и $U = 15$ углов поворота на каждом слое, а во второй — $P = 16$, $U = 27$. На рис. 3 представлены результаты синтетического теста «шахматная доска» на примере слоя, расположенного на глубине 40 км. Из рис. 3б, в видно, что разрешающая способность схемы возрастает с увеличением числа базисных элементов. Однако увеличение количества базисных элементов ограничено имеющимся объемом исходных данных — количеством пар источников-приемников и количеством используемых частотных диапазонов.

Далее для моделирования использовалась модификация полосчатого базиса с $P = 16$, $U = 27$. Рассматривались 328 пар преобразователей, расположенных также, как в эксперименте PLUME [7]. Исходные времена распространения поверхностных волн брались на 17 частотах в диапазоне от 0.03 до 0.07 Гц. Следует отметить, что контролируемое излучение на столь низких частотах вряд ли реализуемо на практике, а выбранный частотный диапазон соответствует пассивной корреляционной обработке естественных сейсмоакустических шумов, зарегистрированных в эксперименте PLUME [4]. На рис. 4 приведен результат восстановления двух

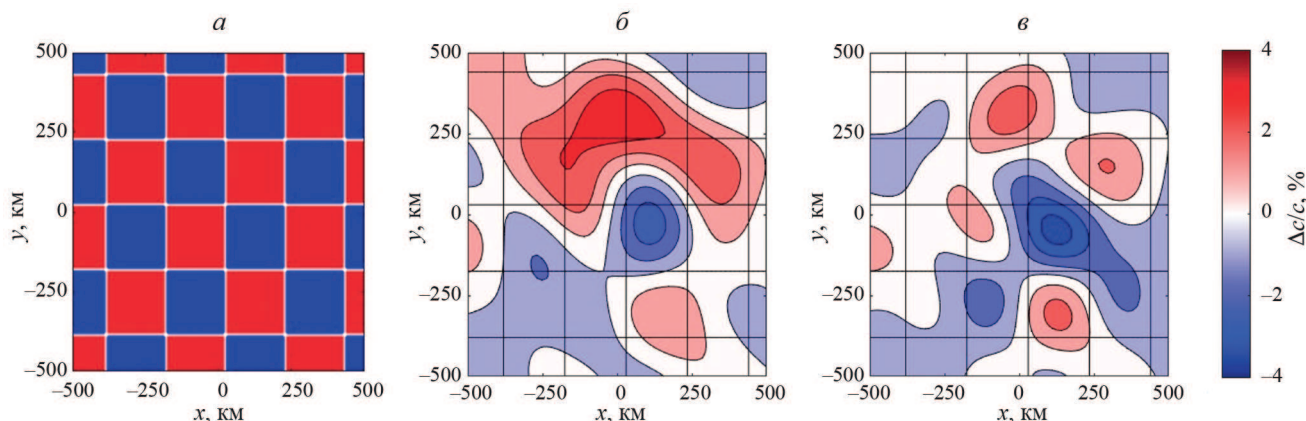


Рис. 3. Синтетическая модель «шахматный тест» с максимальным возмущением скорости поперечных волн, равным 10% от значения в невозмущенной среде (а); результат восстановления с использованием модификации полосчатого базиса, содержащей 8 полос и 15 углов поворота в слое (б); то же, что и (б), но полосчатый базис содержит 16 полос и 27 углов поворота в одном слое (в).

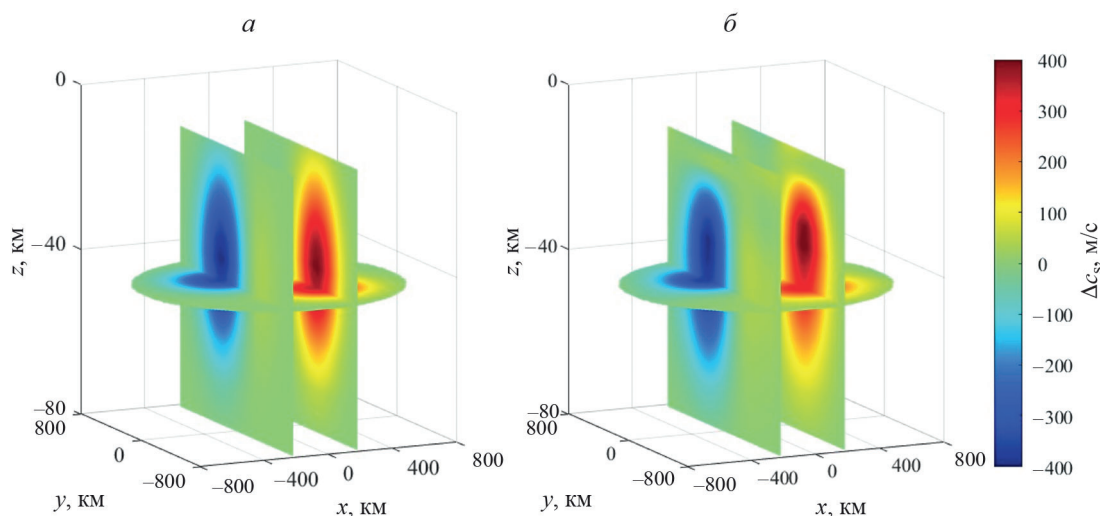


Рис. 4. Исходное распределение неоднородностей с максимальным возмущением скорости поперечных волн, равным 10% от значения в невозмущенной среде (а); результат восстановления с учетом уравнений связи и с исключением блоков матрицы возмущений со слоями и частотами, для которых приближения, используемые при решении обратной задачи, не выполняются (б).

неоднородностей с противоположными по знаку возмущениями скорости:

$$c_s(x, y, z) = c_0(z) \left\{ 1 + \sum_{i=1}^2 \Lambda^{(i)} \times \exp \left(-\frac{(x - x_0^{(i)})^2 + (y - y_0^{(i)})^2}{2\sigma_{xy}^2} \right) \times \exp \left(-\frac{(z - z_0)^2}{2\sigma_z^2} \right) \right\}, \quad (9)$$

где $x_0^{(i)}$, $y_0^{(i)}$, $i = 1, 2$, z_0 — координаты центров неоднородностей; σ_{xy} и σ_z — среднеквадратичные отклонения в горизонтальной и вертикальной плоскостях, соответственно; $\Lambda^{(i)}$, $i = 1, 2$ — коэффициент, задающий максимальное отклонение скорости относительно невозмущенного значения. Для случая, представленного на рис. 3а, $x_0^{(1)} = y_0^{(2)} = -200$ км, $x_0^{(2)} = y_0^{(1)} = 200$ км, $\sigma_{xy} = 200$ км, $\sigma_z = 15$ км, $\Lambda^{(1)} = -0.1$, $\Lambda^{(2)} = 0.1$. Решение прямой задачи основано на применении матричного метода Томсона–Хаскелла расчета дисперсионных кривых по заданной слоистой среде и последующем решении уравнения Эйконала для двумерных карт скоростей на различных частотах [8]. Возможно и волновое решение прямой задачи в горизонтальной плоскости [11], что даст улучшение разрешающей способности, но потребует привлечения существенно больших вычислительных ресурсов. Фоновая среда бралась из работы [4], где был получен вертикальный профиль скорости поперечной волны, средний для рассматриваемого региона. При восстановлении осуществлялось обнуление блоков матрицы возмущений A , относящихся к слоям, расположен-

ным на глубинах, не дающих вклад в $\Delta t_i(f)$, а также учет уравнений связи между соседними полосами, углами поворота и слоями, заданных следующим уравнением:

$$\frac{x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2}}{2h} = 0, \quad (10)$$

где x_k , x_{k-1} , x_{k-2} — коэффициенты разложения по «соседним» базисным полосам, расположенным на близлежащих слоях по глубине, или расположенным рядом в одном слое; h — коэффициент «гладкости», который задавался отдельно для контроля гладкости восстанавливаемых функций по глубине и в границах одного слоя. Соотношение (10) соответствует требованию минимизации второй производной восстанавливаемых функций по пространственным координатам.

Для оценки точности получаемых результатов численного моделирования рассчитывались невязки по решению $\eta_{\Delta c}$:

$$\eta_{\Delta c} = \sqrt{\frac{\sum_{d,l,m} |\Delta c^{\text{model}}(x_d, y_l, z_m) - \Delta c^{\text{rec}}(x_d, y_l, z_m)|^2}{\sum_{d,l,m} |\Delta c^{\text{model}}(x_d, y_l, z_m)|^2}}, \quad (11)$$

где Δc^{model} и Δc^{rec} — заданные и восстановленные возмущения скорости поперечных волн в среде в дискретизованных пространственных точках с координатами x_d, y_l, z_m .

На рис. 4 представлены результаты восстановления рассматриваемой неоднородности (9). Из рис. 4б видно, что форма неоднородностей, их расположение, а также амплитудные значения восстановлены с приемлемой точностью. Для представленного варианта реконструкции невязка по решению $\eta_{\Delta c} = 0.27$, тогда как без уравнений связи и обнуления блоков матрицы возмущений A значения невязки составляло

$\eta_{\Delta c} = 0.51$, что говорит о заметном улучшении результатов восстановления за счет учета особенностей обсуждаемой в работе томографической схемы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, представленные в работе результаты численного моделирования указывают на возможность восстановления трехмерных неоднородностей с помощью развиваемой схемы поверхностно-волновой томографии. В представленной работе рассматривалось восстановление скоростей поперечных волн, однако обсуждаемый подход может быть развит и для восстановления других характеристик среды, для которых справедливо соотношение, аналогичное (1). Отдельный интерес представляет исследование возможностей совместного восстановления различных параметров среды в обсуждаемом подходе. В ходе «шахматного» теста была продемонстрирована разрешающая способность двух модификаций полосчатого базиса, зависящая от количества используемых базисных элементов, число которых, в свою очередь, ограничено объемом исходных данных. Продемонстрированы преимущества оптимизации томографической схемы за счет уравнений связи и выбора только тех слоев, которые дают основной вклад в наблюдаемые возмущения времен распространений поверхностных волн. Предполагается, что на следующем этапе проводимых исследований представленный в данной работе подход будет использоваться для восстановления по экспериментальным данным, полученным в ходе эксперимента PLUME.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-27-00271.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jousset P., Pallister J., Boichu M. et al. // J. Volcanol. Geotherm. Res. 2012. V. 241. P. 121.
2. Кулаков И.Ю. // Геология и геофизика. 2022. Т. 63. № 11. С. 1455; Koulakov I. Yu. // Russ. Geol. Geophys. 2022. V. 63. No. 11. P. 1207.
3. Яновская Т.Б. Поверхностно-волновая томография в сейсмологических исследованиях. СПб.: Наука, 2015.
4. Тихоцкий С.А., Преснов Д.А., Собисевич А.Л., Шуруп А.С. // Акуст. журн. 2021. Т. 67. № 1. С. 107; Tikhotskii S.A., Presnov D.A., Sobisevich A.L., Shurup A.S. // Acoust. Phys. 2021. V. 67. No. 1. P. 91.
5. Дмутьев К.В. // Изв. РАН. Сер. физ. 2022. Т. 86. № 11. С. 1611; Dmitriev K.V. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2022. V. 86. No. 11. P. 1336.
6. Дмутьев К.В. // Изв. РАН. Сер. физ. 2022. Т. 86. № 1. С. 135; Dmitriev K.V. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2022. V. 86. No. 1. P. 94.
7. Laske G., Markee A., Orcutt J.A. et al. // Geophys. J. Int. 2011. V. 187. P. 1725.
8. Presnov D.A., Sobisevich A.L., Shurup A.S. // Phys. Wave Phenom. 2016. V. 24. No. 3. P. 249.
9. Буров В.А., Сергеев С.Н., Шуруп А.С. // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 3. С. 337; Burov V.A., Sergeev S.N., Shurup A.S. // Acoust. Phys. 2011. V. 57. No. 3. P. 344.
10. Koulakov I. Yu., D'Auria L., Prudencio J. et al. // J. Geophys. Res. Solid Earth. 2023. V. 128. No. 3. Art. No. e2022JB025798.
11. Зотов Д.И., Румянцева О.Д., Черняев А.С. // Изв. РАН. Сер. физ. 2024. Т. 88. № 1. С. 131; Zotov D.I., Rumyantseva O.D., Cherniaev A.S. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2024. V. 88. No. 1. P. 113.

Numerical investigation of surface wave tomography scheme for three-dimensional inhomogeneities reconstruction

D. D. Pozdnyakova^{a, *}, D. A. Presnov^b, A. S. Shurup^{a, b, c}

^aLomonosov Moscow State University,
Moscow, 119991 Russia

^bSchmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, 123242 Russia

^cShirshov Institute of Oceanology of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, 117997 Russia

*e-mail: d_pozdnyakova@live.ru

A three-dimensional tomographic scheme for reconstructing parameters of inhomogeneous geophysical media is proposed. Initial data are propagation times of surface waves in various frequency ranges. Results of numerical modeling implemented for conditions of the Hawaiian Archipelago are presented, which indicate the operability of the proposed approach.

Keywords: seismoacoustic tomography, surface wave, layered geophysical medium