

УДК 534.222

СРЕДНЕЕ ПОЛЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН С РАЗРЫВАМИ В ОДНОМЕРНОЙ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

© 2025 г. Д. М. Алексеев, В. А. Гусев*

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», физический факультет, Москва, Россия

** e-mail: vgusev@bk.ru*

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

Рассмотрены особенности построения замкнутых уравнений для среднего поля акустических волн с разрывными профилями в одномерной случайно-неоднородной среде. Проведено сравнение различных подходов к получению таких уравнений. Показано, что, несмотря на сглаживание профилей в среднем, наличие разрыва в профиле необходимо учитывать до проведения операции усреднения. Получено точное выражение для среднего поля исходной N -волны.

Ключевые слова: разрывные волны, случайно-неоднородные среды, среднее поле, усреднение, точное решение

DOI: 10.31857/S0367676525010197, **EDN:** CZMNFП

ВВЕДЕНИЕ

Проблема распространения акустических волн в случайно-неоднородных средах и необходимость расчета статистических характеристик таких волн возникает во многих случаях [1, 2], в частности при распространении звука в турбулентной атмосфере [2–7]. В этом случае параметры среды изменяются со временем, так что небольшой набор реализаций не дает полного представления о возможном характере эволюции волны. Полноценное описание возможно только на основе статистических характеристик типа распределений вероятности или, по крайней мере, средних величин, дисперсий и т. д. Отметим также задачи зондирования и восстановления параметров неоднородных сред, при реализации которых присутствующие шумы и флуктуации могут оказаться полезными [8, 9]. В настоящее время актуальными становятся вопросы распространения нелинейных волн и пучков [10] в случайно-неоднородных средах, в том числе акустических ударных волн с узким фронтом от перспективных гражданских сверхзвуковых самолетов [11, 12], а также в медицинских приложениях [13]. Поэтому необходимо развитие методов расчета статистических характеристик ударных и разрывных волн в случайно-неоднородной среде.

Построение точных динамических решений для нелинейных уравнений представляет большие трудности, тем более это относится к стохастиче-

ским уравнениям со случайными функциями. Одним из эффективных подходов к расчету статистических характеристик волновых полей является усреднение стохастических уравнений с целью получения уравнений для моментов — среднего поля, дисперсии и т. д.

Данная статья посвящена дальнейшему уточнению проведения процедуры усреднения для акустических ударных и разрывных волн с узкими ударными фронтами. Как известно [14–16], усреднение в целом приводит к появлению так называемого турбулентного затухания и, соответственно, сглаживанию ударных фронтов. Следовательно, можно было бы ожидать, что усреднение разрывных профилей не будет иметь особенностей по сравнению с усреднением гладких профилей. Однако, оказывается, что это не так, и наличие разрыва необходимо учитывать перед процедурой усреднения.

МЕТОД СРЕДНЕГО ПОЛЯ

Одним из распространенных методов получения замкнутых уравнений для усредненных характеристик является метод среднего поля, имеющий давнюю историю [17]. Он достаточно хорошо зарекомендовал себя при решении линейных задач. При рассмотрении нелинейных задач возникает проблема замыкания нелинейных слагаемых. Согласно методу среднего поля среднее

значение квадрата акустического поля (например, давления), заменяется на произведение средних значений. Фактически это означает пренебрежение средним квадратом флуктуаций давления, что приводит к определенным ошибкам [14, 18]. Кроме того, необходимо определить, насколько корректно он учитывает ударные фронты и разрывы в профиле волны.

В качестве исходного уравнения рассмотрим уравнение типа простых волн, включающее случайную расстройку скорости звука $\zeta(z) = \frac{c_0^2}{2}(c^{-2}(z) - c_0^{-2})$, вызванную флуктуациями параметров среды распространения:

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\zeta(z)}{c_0} \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{\varepsilon}{\rho c_0^3} p \frac{\partial p}{\partial \tau} = 0, \quad (1)$$

где p — акустическое давление, z — координата, $\tau = t - \frac{z}{c_0}$ — время в сопровождающей системе координат, $c(z)$ — случайная локальная скорость звука, c_0 — характерная средняя скорость звука, ε — нелинейный параметр, ρ — плотность среды.

Применяя к уравнению (1) метод среднего поля, получим уравнение Бюргерса для среднего давления:

$$\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{\rho c_0^3} \langle p \rangle \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2c_0^2} \frac{\partial^2 \langle p \rangle}{\partial \tau^2}. \quad (2)$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по ансамблю, σ^2 имеет смысл дисперсии флуктуаций расстройки скорости (конкретно задается корреляционная функция $\langle \zeta(z_1)\zeta(z_2) \rangle = \sigma^2 \delta(z_2 - z_1)$). Как видно, усреднение привело к появлению так называемого турбулентного затухания, т. е. в среднем поле затухает. Уравнение (2) замечательно тем, что заменой Хопфа–Коула $V = 2\Gamma \frac{\partial}{\partial \theta} \ln U$ оно сводится к линейному уравнению:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \Gamma \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}.$$

Здесь введены безразмерные переменные

$$V = \frac{\langle p \rangle}{p_0}, \quad \theta = \frac{\tau}{\tau_0}, \quad x = \frac{z}{z_{nl}}, \quad z_{nl} = \frac{\rho c_0^3 \tau_0}{\varepsilon p_0}, \quad \Gamma = \frac{\sigma^2}{2c_0^2} \frac{z_{nl}}{\tau_0^2}, \quad (3)$$

где p_0 и τ_0 — характерные амплитуда и длительность импульса.

В качестве исходного сигнала будем рассматривать N -волну,

$$p(z=0, \tau) = F(\tau) = \begin{cases} -\frac{p_0 \tau}{\tau_0}, & |\tau| < \tau_0, \\ 0, & |\tau| > \tau_0, \end{cases} \quad (4)$$

представляющую модельный вариант характерных профилей, зарегистрированных от сверхзвуковых самолетов [3, 5]. Для начального профиля (4) полу-

чим решение уравнения Бюргерса в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} \frac{\langle p \rangle}{p_0} = 2\Gamma \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \left\{ 1 + \frac{1}{2} \Phi \left(\frac{\theta - 1}{2\sqrt{\Gamma x}} \right) - \frac{1}{2} \Phi \left(\frac{\theta + 1}{2\sqrt{\Gamma x}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \exp \left(\frac{x+1-\theta^2}{4\Gamma(x+1)} \right) \times \right. \\ \left. \times \left[\Phi \left(\frac{x+1+\theta}{2\sqrt{\Gamma x}\sqrt{x+1}} \right) - \Phi \left(\frac{\theta-x-1}{2\sqrt{\Gamma x}\sqrt{x+1}} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$ — интеграл ошибок.

Из формулы (5) можно увидеть динамику полученного фронта — происходит расплывание ударных фронтов, пропорциональное как дисперсии флуктуаций фазы, так и пройденному расстоянию. В частности, даже разрывные профили в рамках этой модели сглаживаются и не содержат особенностей, на чем и основывается предположение о применимости стандартных подходов к усреднению волн с разрывами. Характерные профили решения (5) представлены на рис. 1 для значения $\Gamma = 0.05$. Происходит расплывание фронта волны, причем как за счет диффузионного расплывания ширины начального фронта, так и за счет определенного среднеквадратичного сноса среднего положения ударного фронта. Хотя в решении (5) и содержится значительная информация о нелинейности среды, оно всё равно неудовлетворительно описывает среднее поле, поскольку основано на приближенной модели усреднения [14, 18].

УСРЕДНЕНИЕ ТОЧНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Чтобы оценить точность описанных выше методов, вернемся к уравнению (1). Оно удобно для анализа тем, что удастся построить его точное аналитическое решение даже при наличии флуктуаций. Усреднение этого решения покажет точность и близость к верному результату решений, полученных приближенными методами.

Сделаем замену переменных

$$\tau_1 = \tau + \frac{1}{c_0} \int_0^z \zeta(z') dz'$$

и приведем уравнение (1) к стандартному уравнению простых волн:

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{\rho c_0^3} p \frac{\partial p}{\partial \tau_1} = 0. \quad (6)$$

Решение уравнения (6) с произвольным начальным профилем задается в неявном виде:

$$p = F \left(\tau_1 + \frac{\varepsilon}{\rho c_0^3} p z \right). \quad (7)$$

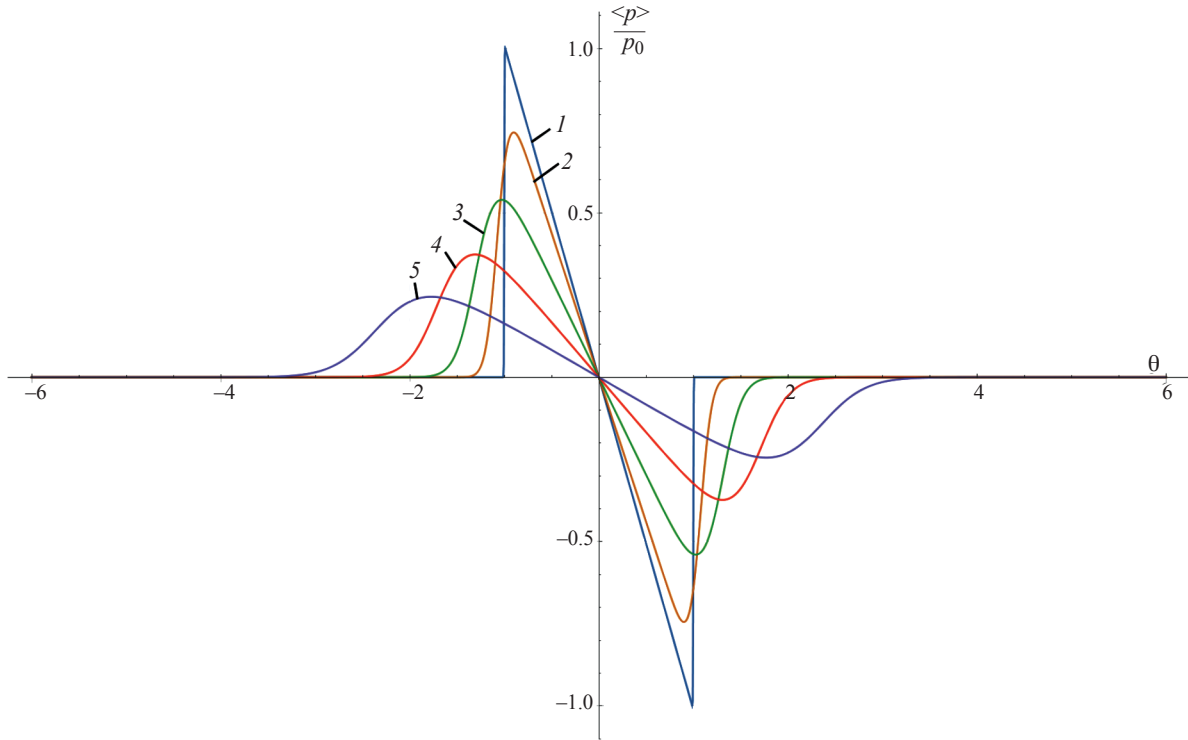


Рис. 1. Временные профили среднего давления, полученные методом среднего поля для значения дисперсии фазы $\Gamma = 0.05$ на расстояниях $x = 0.0001, 0.15, 0.7, 2, 5$ (кривые 1–5).

Введя обозначение $\eta = \frac{1}{c_0} \int_0^z \zeta(z') dz'$, решение уравнения (1), содержащего флуктуации, запишем в следующем виде:

$$p = F\left(\tau + \eta + \frac{\varepsilon}{\rho c_0^3} pz\right). \quad (8)$$

Решение (8) задано в неявном виде и не позволяет непосредственно его усреднить. Поэтому перейдем к спектру волны и усредним его, а затем найдем профиль усредненной волны. Известно, что до образования разрыва спектр простой волны (7) описывается разложением Бесселя–Фубини [19]. Проведя аналогичные расчеты для решения (8), получим выражение для его спектра:

$$S(\omega) = \frac{1}{i\omega(\varepsilon/\rho c^3)z} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(T+\eta)} \left(e^{i\omega \frac{\varepsilon}{\rho c^3} z F} - 1 \right) dT.$$

Учтем, что дисперсия величины η равна $\langle \eta^2 \rangle = \frac{2}{c_0^2} \int_0^z (z-s) K_\zeta(s) ds$, и при δ -коррелированности флуктуаций $K_\zeta(s) = D\delta(s)$, $\langle \eta^2 \rangle = \frac{Dz}{c_0^2}$. Среднее значение $\langle \eta \rangle = 0$, если среднее значение флуктуаций скорости равно нулю. Если флуктуации ζ являются гауссовским процессом, то η также будет гауссовским процессом. Тогда можно записать выражение для характеристической функции $\langle e^{-i\omega\eta} \rangle =$

$e^{-\frac{\omega^2}{2} \langle \eta^2 \rangle} = e^{-\frac{\omega^2}{2} \frac{Dz}{c_0^2}}$. Теперь усредненный спектр равен:

$$\langle S(\omega) \rangle = \frac{1}{i\omega(\varepsilon/\rho c^3)z} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega T - \frac{\omega^2}{2} \langle \eta^2 \rangle} \left(e^{i\omega \frac{\varepsilon}{\rho c^3} z F} - 1 \right) dT. \quad (9)$$

Применяя обратное преобразование Фурье, находим среднее поле:

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle S(\omega) \rangle e^{-i\omega\tau} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i\omega(\varepsilon/\rho c^3)z} e^{-\frac{\omega^2}{2} \langle \eta^2 \rangle} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(\tau-T)} \left(e^{i\omega \frac{\varepsilon}{\rho c^3} z F} - 1 \right) dT d\omega. \end{aligned} \quad (10)$$

В (10) удобно сначала вычислить производную от среднего поля

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial \tau} &= \frac{1}{2\pi(\varepsilon/\rho c^3)z} \sqrt{\frac{2\pi}{\langle \eta^2 \rangle}} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left(-\frac{1}{2\langle \eta^2 \rangle} \left(\tau - T + \frac{\varepsilon}{\rho c^3} z F(T) \right)^2\right) - \right. \\ &\left. - \exp\left(-\frac{(\tau - T)^2}{2\langle \eta^2 \rangle}\right) \right\} dT. \end{aligned} \quad (11)$$

Для N -волны (4) решение (10) в безразмерных переменных (3) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\langle p \rangle}{p_0} = \frac{\beta}{2x} \left\{ \frac{1}{1+x} \left[\frac{\theta + (1+x)}{\beta} \Phi \left(\frac{\theta + (1+x)}{\beta} \right) - \right. \right. \\ \left. - \frac{\theta - (1+x)}{\beta} \Phi \left(\frac{\theta - (1+x)}{\beta} \right) \right] + \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{(\theta + (1+x))^2}{\beta^2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{(\theta - (1+x))^2}{\beta^2} \right) \right] + \\ + \frac{\theta - 1}{\beta} \Phi \left(\frac{\theta - 1}{\beta} \right) - \frac{\theta + 1}{\beta} \Phi \left(\frac{\theta + 1}{\beta} \right) + \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(\theta-1)^2}{\beta^2}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(\theta+1)^2}{\beta^2}} \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{где } \beta = \beta(z) = \frac{\sqrt{2\langle \eta^2 \rangle}}{\tau_0} = \frac{\sqrt{2Dz}}{c_0 \tau_0} \equiv D_0 \sqrt{x}.$$

Однако полученное решение (10) неверно описывает эволюцию N -волны (4). В этом легко убедиться, рассмотрев в (12) предельный переход к отсутствию флуктуаций при $\beta \rightarrow 0$ ($D \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} \frac{\langle p \rangle}{p_0} = \frac{1}{2x} \left\{ \frac{1}{1+x} [|\theta + 1 + x| - |\theta - 1 - x|] + \right. \\ \left. + |\theta - 1| - |\theta + 1| \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Временные профили решения (13) построены на рис. 2 для различных расстояний. Видно, что полученное решение описывает распывание ударного фронта, что не соответствует динамике ударного импульса N -образной формы в нелинейной среде. Таким образом, при усреднении волн с разрывами необходимо предварительно получить явное разрывное решение для профиля.

УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ РАЗРЫВА В СРЕДЕ С ФЛУКТУАЦИЯМИ

Проанализируем динамику движения разрыва в волне, описываемой уравнением (1). Для N -волны решение (8) можно записать в явном виде для обратной функции:

$$\tau = -\frac{\tau_0}{p_0} p - \frac{\varepsilon}{\rho c^3} p z - \eta + \tau_0.$$

Определим положение переднего фронта при распространении волны. Введем обозначения: p_1 — минимальное значение давления в разрыве, p_2 — максимальное. Тогда для переднего фронта можно записать:

$$p_1 = 0, \quad \tau_2 = -\frac{\tau_0}{p_0} p_2 - \frac{\varepsilon}{\rho c^3} p_2 z - \eta + \tau_0. \quad (14)$$

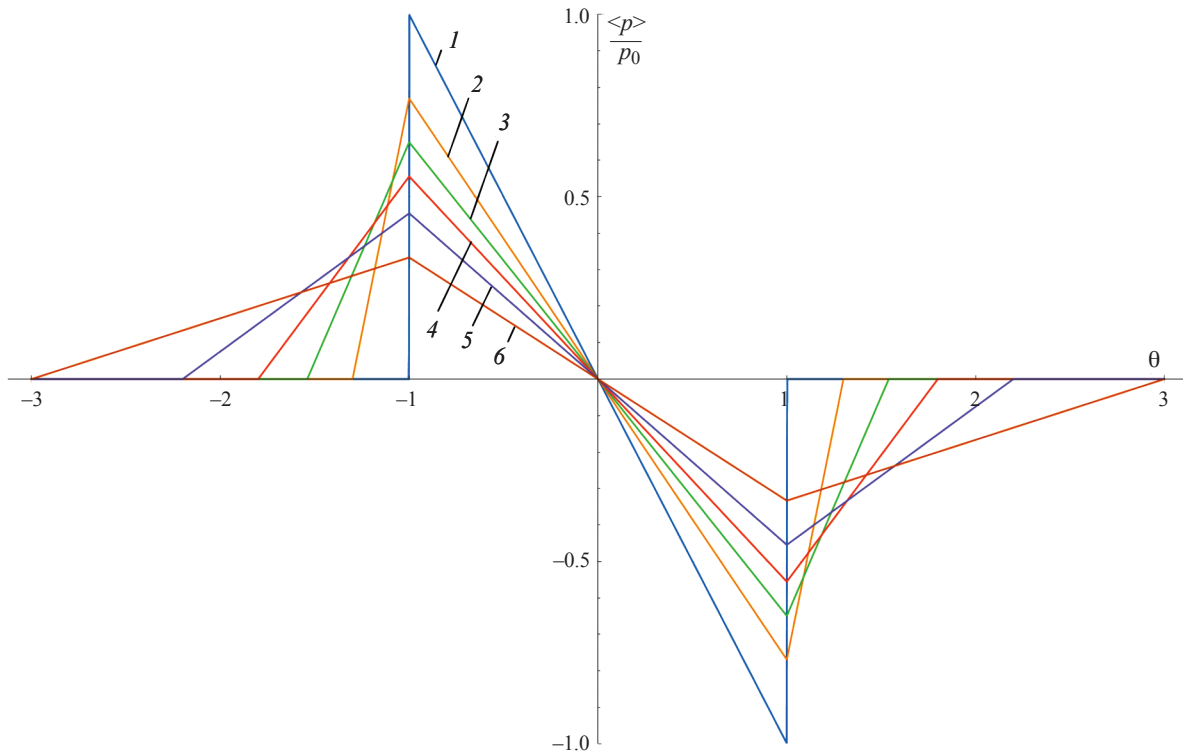


Рис. 2. Предельные профили при исчезающе малых флуктуациях среды, полученные при усреднении спектрального разложения. Кривые 1–6 соответствуют расстояниям $x = 0.001, 0.3, 0.54, 0.8, 1.2, 2$.

Уравнение движения координаты разрыва τ_p можно получить из закона сохранения импульса:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \int_{p_1}^{p_2} (\tau(p) - \tau_p) dp &= 0, \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{p_1}^{p_2} \frac{d\tau}{dz} dp &= (p_2 - p_1) \frac{d\tau_p}{dz}. \end{aligned} \quad (15)$$

Вычисляем:

$$\frac{d\tau}{dz} = -\frac{d\tau}{dp} \frac{dp}{dz} = -\frac{d\tau}{dp} \left(\frac{\varepsilon}{\rho c^3} p \frac{dp}{d\tau} + \varsigma \frac{dp}{d\tau} \right) = -\frac{\varepsilon}{\rho c^3} p - \varsigma,$$

и из (15) получаем:

$$\frac{d\tau_p}{dz} = -\frac{\varepsilon}{2\rho c^3} (p_2 + p_1) - \varsigma. \quad (16)$$

Уравнения (14) и (16) полностью описывают движение разрыва. Решая их совместно, получаем выражения для амплитуды и положения разрыва:

$$p_2 = \frac{p_0}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon p_0}{\rho c^3 \tau_0}}}, \quad \tau_p = -\tau_0 \sqrt{1 + \frac{\varepsilon p_0}{\rho c^3 \tau_0}} - \eta + \tau_0.$$

Окончательно, получаем явное решение для профиля N-волны:

$$p = \begin{cases} -\frac{p_0}{\tau_0} \frac{\tau + \eta}{1 + x}, & -T(x) - \eta < \tau < T(x) - \eta, \\ 0, & -T(x) - \eta > \tau, \tau > T(x) - \eta, \end{cases} \quad (17)$$

где $T(x) = \tau_0 \sqrt{1 + x}$, расстояние x определено в (3). Выражение (17) позволяет правильно усреднить решение для волны с разрывом. Используя спектральное представление решения (17), получим выражение для среднего поля:

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T(z)}^{T(z)} p(\tau') d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\langle \eta^2 \rangle}{2} \omega^2 + i\omega(\tau - \tau')} d\omega = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle \eta^2 \rangle}} \int_{-T(z)}^{T(z)} p(\tau') \exp\left(-\frac{(\tau - \tau')^2}{2\langle \eta^2 \rangle}\right) d\tau'. \end{aligned} \quad (18)$$

Для N-волны в безразмерных переменных окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\langle p \rangle}{p_0} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{1 + x} \left[\theta \left(\Phi \left(\frac{\theta + \sqrt{1 + x}}{D_0 \sqrt{x}} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \Phi \left(\frac{\theta - \sqrt{1 + x}}{D_0 \sqrt{x}} \right) \right) + \frac{D_0 \sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\exp \left(-\frac{(\theta - \sqrt{1 + x})^2}{D_0^2 x} \right) - \exp \left(-\frac{(\theta + \sqrt{1 + x})^2}{D_0^2 x} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

При $D_0 \rightarrow 0$ получаем следующее решение:

$$\frac{\langle p \rangle}{p_0} = -\frac{1}{2} \frac{\theta}{1 + x} \left[\operatorname{sgn}(\theta + \sqrt{1 + x}) - \operatorname{sgn}(\theta - \sqrt{1 + x}) \right]. \quad (20)$$

Выражение (20) правильно описывает эволюцию N-волны в однородной нелинейной среде.

Таким образом, наличие разрыва в профиле волны необходимо учитывать до проведения процедуры усреднения несмотря на то, что она сама по себе вносит турбулентное затухание и сглаживает ударные фронты. Однако это сглаживание не учитывает уширение длительности импульса за счет нелинейных эффектов, а приводит только к расплыванию ударного фронта в области его начального положения. На самом деле происходит конкуренция двух процессов — нелинейного уширения и турбулентного затухания.

ЭВОЛЮЦИЯ ИСХОДНОГО ТРЕУГОЛЬНОГО ИМПУЛЬСА

Интересно также проследить динамику исходного треугольного импульса, в котором разрыв еще отсутствует:

$$F(\tau) = \begin{cases} p_0 \frac{\tau + \tau_0}{\tau_0}, & -\tau_0 \leq \tau \leq 0, \\ p_0 \frac{-\tau + \tau_0}{\tau_0}, & 0 < \tau \leq \tau_0, \\ 0, & |\tau| > \tau_0. \end{cases} \quad (21)$$

Воспользуемся формулами (10) и (11), полученными на основе усреднения спектрального представления. Подставляя в них профиль (21), найдем:

$$\begin{aligned} \frac{\langle p \rangle}{p_0} &= \frac{1}{2x} \left\{ -D_0 \sqrt{\frac{x}{\pi}} \exp\left(-\frac{(\theta + 1)^2}{D_0^2 x}\right) - \right. \\ &\quad \left. -(\theta + 1) \Phi\left(\frac{\theta + 1}{D_0 \sqrt{x}}\right) + D_0 \sqrt{\frac{x}{\pi}} \exp\left(-\frac{(\theta - 1)^2}{D_0^2 x}\right) + \right. \\ &\quad \left. +(\theta - 1) \Phi\left(\frac{\theta - 1}{D_0 \sqrt{x}}\right) + \left[\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[D_0 \sqrt{\frac{x}{\pi}} \exp\left(-\frac{(\theta + x)^2}{D_0^2 x}\right) + (\theta + x) \Phi\left(\frac{\theta + x}{D_0 \sqrt{x}}\right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{x - 1} \left[(\theta + 1) \Phi\left(\frac{\theta + 1}{D_0 \sqrt{x}}\right) - D_0 \sqrt{\frac{x}{\pi}} \exp\left(-\frac{(\theta + 1)^2}{D_0^2 x}\right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{x + 1} \left[(\theta - 1) \Phi\left(\frac{\theta - 1}{D_0 \sqrt{x}}\right) - D_0 \sqrt{\frac{x}{\pi}} \exp\left(-\frac{(\theta - 1)^2}{D_0^2 x}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Профиль решения (22) (22), рассчитанный при исчезающей вязкости, имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\langle p \rangle}{p_0} &= \frac{1}{2x} \left\{ (\theta - 1) \operatorname{sgn}(\theta - 1) - (\theta + 1) \operatorname{sgn}(\theta + 1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(x + \theta) \operatorname{sgn}(x + \theta) - (\theta + 1) \operatorname{sgn}(\theta + 1)}{x - 1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(x + \theta) \operatorname{sgn}(x + \theta) - (\theta - 1) \operatorname{sgn}(\theta - 1)}{x + 1} \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Профиль (23) изображен на рис. 3 для различных расстояний. Как видно, на расстояниях до

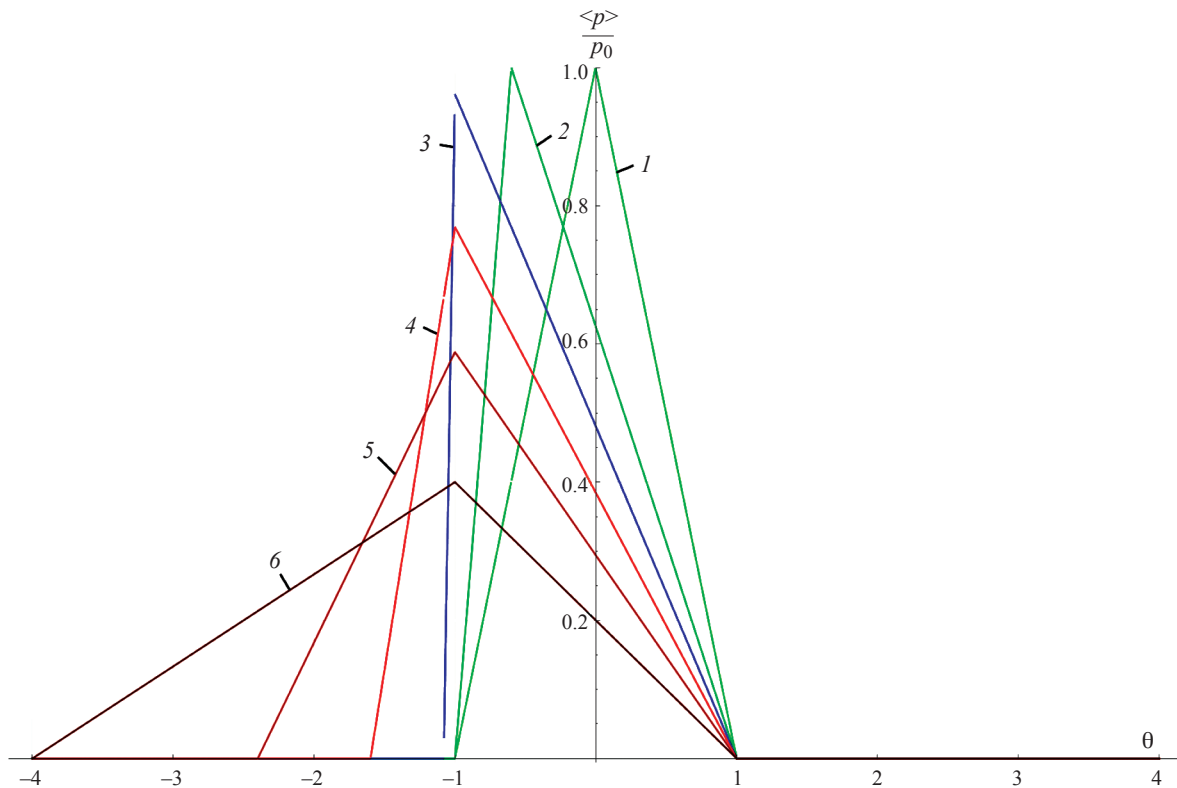


Рис. 3. Пределные профили исходного треугольного импульса при исчезающе малых флуктуациях среды, полученные при усреднении спектрального разложения для расстояний $x = 0.001, 0.3, 0.54, 0.8, 1.2, 2$ (кривые 1–6).

образования разрыва искажение профиля соответствует законам нелинейной акустики (кривые 1–3). После образования разрыва расчет профиля на основе спектрального представления неверно описывает динамику ударного фронта — он расплывается вместо того, чтобы сдвигаться.

Усредненные профили для треугольного импульса после образования разрыва на основе выражения для правильно усредненного поля приведены на рис. 4. Здесь нужно обратить также внимание на форму импульса. При относительно небольшой дисперсии флуктуаций (рис. 4а) импульс имеет характерную форму с укрупнением и явно заметным ударным фронтом, соответствующую его уширению за счет нелинейных эффектов. На эту форму накладывается сглаживающее воздействие турбулентного затухания. Таким образом, мы действительно получаем усредненные профили волны с разрывом. При увеличении дисперсии (рис. 4б) это укрупнение пропадает и профиль оказывается сглаженным. Если вернуться к рис. 1 для профилей, получаемых методом среднего поля, то можно заметить, что укрупнение на ударных фронтах выражено слабо при сравнимых значениях дисперсии с графиками на рис. 4а.

Таким образом, можно заключить, что метод среднего поля неточно описывает самую существенную часть усредненного профиля — ударный фронт и степень его крутизны, занижая данные величины. Тем самым, оценки на его основе мо-

гут дать заниженные значения ожидаемых акустических полей в турбулентной атмосфере, что может негативно сказаться на состоянии окружающей среды.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, рассмотрены методы получения замкнутых уравнений для средних полей акустических волн в случайно-неоднородных средах и результаты расчетов для волновых профилей с разрывами. Показано, что метод среднего поля неточно описывает трансформацию ударного фронта в условиях сильной нелинейности. При этом усреднение точного динамического решения также требует аккуратности, вначале необходимо определить положение разрыва в профиле.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руденко О.В. // УФН. 1986. Т. 149. № 3. С. 413; Rudenko O.V. // Sov. Phys. Usp. 1986. V. 29. No. 3. P. 620.
2. Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Тюрина А.В. // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 5. С. 554; Gurbatov S.N., Rudenko O.V., Tyurina A.V. // Acoust. Phys. 2018. V. 64. No. 5. P. 555.
3. Blanc-Benon P., Lipkens B., Dallois L. et al. // J. Acoust. Soc. Amer. 2002. V. 111. No. 1. P. 487.
4. Гусев В.А., Руденко О.В. // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 1. С. 30; Gusev V.A., Rudenko O.V. // Acoust. Phys. 2006. V. 52. No. 1. P. 24.

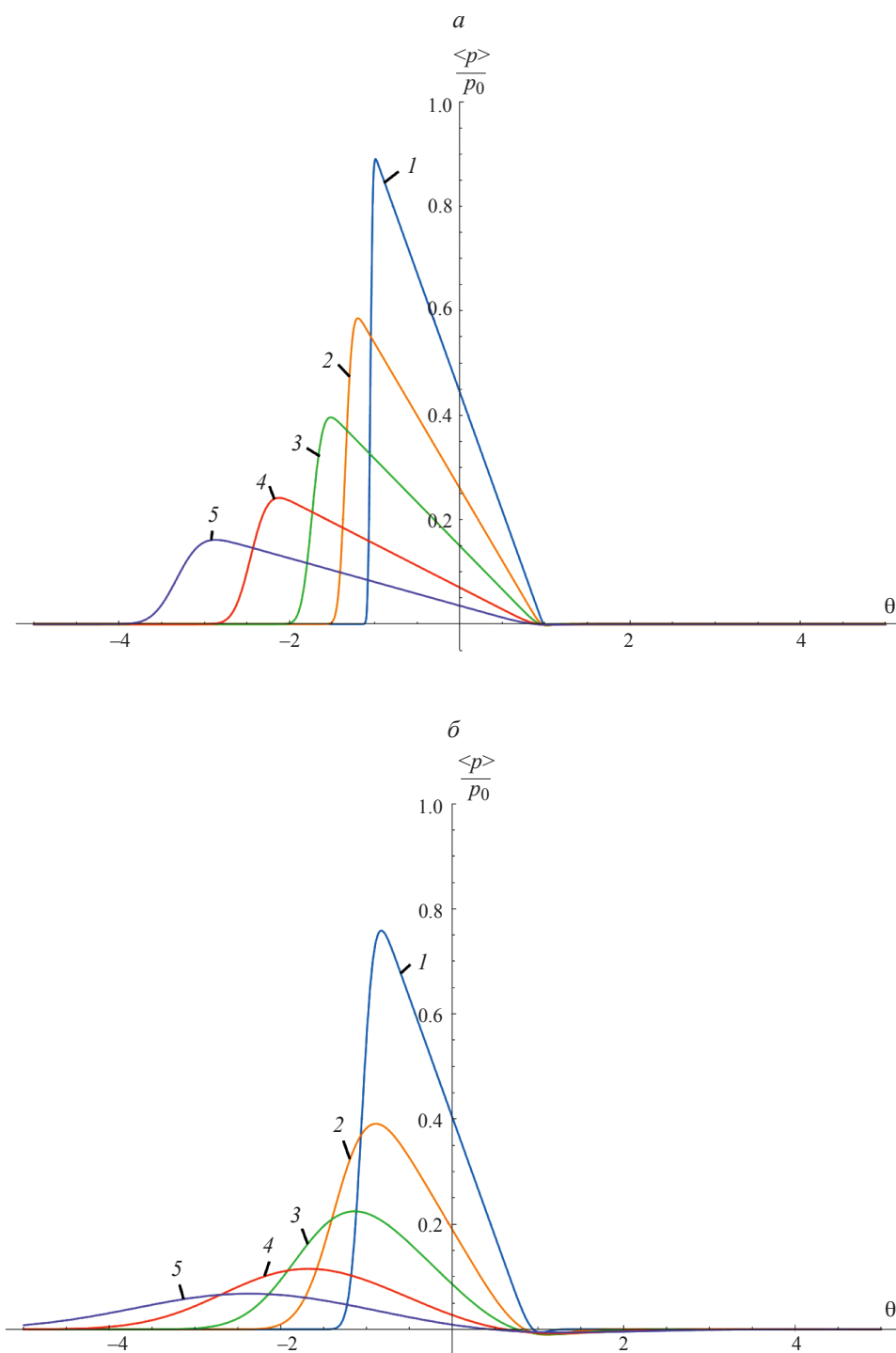


Рис. 4. Усредненные профили исходного треугольного импульса для значений дисперсии флуктуаций $D_0 = 0.1$ (а), 0.5 (б) на расстояниях $x = 0.1, 0.8, 2, 5, 10$ (кривые 1–5).

5. Руденко О.В., Маков Ю.Н. // Акуст. журн. 2021. Т. 67. № 1. С. 3; Rudenko O.V., Makov Yu.N. // Acoust. Phys. 2021. V. 67. No. 1. P. 1.
6. Косяков С.И., Куличков С.Н., Чхетиани О.Г., Цыбульская Н.Д. // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 6. С. 816; Kosyakov S.I., Kulichkov S.N., Chkhetiani O.G., Tsybul'skaya N.D. // Acoust. Phys. 2019. V. 65. No. 6. P. 731.
7. Курдяева Ю.А., Кшевецкий С.П. // Изв. РАН. Сер. физ. 2022. Т. 86. № 3. С. 422; Kurdyayeva Y.A., Kshevetskii S.P. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2022. V. 86. No. 3. P. 343.
8. Иванов М.А., Муханов П.Ю., Шуруп А.С. // Изв. РАН. Сер. физ. 2024. Т. 88. № 1. С. 119; Ivanov M.A., Mukhanov P.Yu., Shurup A.S. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2024. V. 88. No. 1. P. 103.

9. *Дмитриев К.В.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2023. Т. 87. № 1. С. 79; *Dmitriev K.V.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2023. V. 87. No. 1. P. 66.
10. *Гусев В.А., Жарков Д.А.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2023. Т. 87. № 4. С. 604; *Gusev V.A., Zharkov D.A.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2023. V. 87. No. 4. P. 524.
11. *Korunov A.O., Gusev V.A., Gorbovskey V.S.* // Acoust. Phys. 2024. V. 70. No. 4.
12. *Lonzaga J.B.* // J. Acoust. Soc. Amer. 2023. V. 154. No. 5. P. 3078.
13. *Пестова П.А., Юлдашев П.В., Хохлова В.А., Карзова М.М.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2024. Т. 88. № 1. С. 125; *Pestova P.A., Yuldashev P.V., Khokhlova V.A., Karzova M.M.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2024. V. 88. No. 1. P. 108.
14. *Гурбатов С.Н., Пелиновский Е.Н., Саичев А.И.* // Изв. вузов. Радиофиз. 1978. Т. 21. № 10. С. 1485.
15. *Гусев В.А., Руденко О.В.* // Вест. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2001. № 6. С. 37.
16. *Gusev V.A.* // Proc. Int. Symp. Nonlinear Acoustics ISNA-16. V. 1. (Moscow, 2002). P. 315.
17. *Канер Э.А.* // Изв. вузов. Радиофиз. 1959. Т. 2. С. 827.
18. *Бенилов Е.С., Пелиновский Е.Н.* // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. № 1. С. 175.
19. *Гурбатов С.Н., Руденко О.В.* Акустика в задачах. М.: Физматлит, 2009.

Mean field of acoustic waves with discontinuities in randomly inhomogeneous media

D. M. Alekseev, V. A. Gusev*

Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia

**e-mail: vgusev@bk.ru*

The features of the construction of closed equations for the mean field of acoustic waves with discontinuous profiles in a randomly inhomogeneous medium are considered. Different approaches to obtaining such equations are compared. It is shown that, despite the smoothing of profiles in the average, the presence of a discontinuity in the profile should be considered before the averaging operation. An exact expression for the mean field of the initial N -wave is obtained.

Keywords: discontinuous waves, random inhomogeneous media, mean field, averaging, exact solution