

УДК 535.13

О ДИНАМИКЕ ПАРАМЕТРОВ ИМПУЛЬСОВ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В СРЕДЕ В ОБЛАСТИ АНОМАЛЬНОЙ ДИСПЕРСИИ ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ

© 2025 г. В. А. Халяпин^{1, 2, *}, А. Н. Бугай³

¹Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта», Калининград, Россия

²Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Калининградский государственный технический университет», Калининград, Россия

³Международная межправительственная научно-исследовательская организация «Объединенный институт ядерных исследований», Дубна, Россия

*e-mail: slavasxi@gmail.com

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

На основе метода моментов построена система уравнений на параметры импульса, распространяющегося в изотропной среде с дисперсией в виде интеграла Дюамеля. Найден критерий для параметров импульса и среды, разделяющий режимы распространения солитоноподобных импульсов.

Ключевые слова: дисперсия, нелинейность, световой импульс

DOI: 10.31857/S0367676525010139, **EDN:** DAQQAW

ВВЕДЕНИЕ

При выводе модельных уравнений, описывающих распространение лазерных импульсов в нелинейных диспергирующих средах, часто используют два хорошо известных приближения. Распространение квазимонохроматических импульсов в среде с керровской нелинейностью в области прозрачности диэлектрика можно описать нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) для огибающей импульса [1]. При этом соответствующий критерий большого числа осцилляций поля задается выражением $(\omega_0 \tau_p)^2 \gg 1$, где ω_0 — центральная частота импульса, τ_p — его длительность. Для описания импульсов, включающих в себя всего несколько колебаний светового поля $\omega_0 \tau_p \sim 1$ (предельно короткие импульсы), используют уравнения, записанные непосредственно для электрического поля импульса или его спектра [2–8]. Для таких импульсов приближение медленно меняющейся огибающей (ММО) становится неприменимо. В обоих случаях, когда спектр импульса лежит в области оптической прозрачности, соответствующее условие можно записать в виде $|\omega_0 - \omega_R| \tau_p \gg 1$, где ω_R — характерная частота линии резонансного поглощения. При этом выражение для дисперсионного отклика можно разложить в ряд. Нетруд-

но видеть, что для квазимонохроматических импульсов данное соотношение совпадает с условием ММО при существенном удалении несущей частоты импульса от резонанса. Однако, в случае материалов с несколькими узкими линиями поглощения, например, молекулярных газов, условие оптической прозрачности может нарушаться даже когда импульс содержит достаточно большое число осцилляций поля, хотя существенного поглощения при этом не происходит и материал можно с хорошей степенью точности считать прозрачным. Теоретическому анализу уравнений, описывающих распространение импульсов в указанных случаях, и нахождению условий солитоноподобных режимов и посвящена настоящая работа.

МЕТОД МОМЕНТОВ

Уравнение, описывающее однонаправленное распространение оптических импульсов в нелинейной среде с дисперсией, имеет вид

$$\frac{\partial E(z, \tau)}{\partial z} = -\frac{2\pi}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \times \left(\int_0^\infty \chi(\tau') E(z, \tau - \tau') d\tau' + \frac{\chi^{(3)}}{4\pi} E^3(z, \tau) \right). \quad (1)$$

где $\tau = t - z/c$, z — координата, вдоль которой распространяется сигнал, $\chi(\tau) = \Theta(\tau)2e^2 \times \sum_{l,j} N_l A_{lj} \sin \omega_{lj} \tau / m \omega_{lj}$ — функция импульсного отклика, связанная с диэлектрической восприимчивостью среды преобразованием Фурье

$$\chi(\omega) = \int_0^\infty \chi(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{n_0 - 1}{2\pi}, \quad (2)$$

$$n_0(\lambda) = 1 + \frac{4\pi e^2}{m\omega_0^2} \sum_{l,j} N_l A_{lj} \frac{\lambda_{lj}^2}{\lambda_0^2 - \lambda_{lj}^2},$$

$\Theta(\tau)$ — функция Хевисайда, e — заряд электрона, N_l — концентрация атомов или молекул сорта l , A_{lj} — величина, пропорциональная силе осциллятора j -го резонанса, ω_{lj} — частота соответствующего резонанса, c — скорость света в вакууме, λ_0 — центральная длина волны импульса, $\chi^{(3)} = \sum_l N_l \chi_l^{(3)} / \sum_l N_l$ — результирующая кубическая восприимчивость среды, $n_2 = \sum_l N_l n_{2,l} / \sum_p N_l$ — результирующий нелинейный показатель преломления, $\chi_l^{(3)}$, $n_{2,l}$ — кубическая восприимчивость и нелинейный показатель преломления атомов или молекул сорта l . Представим электрическое поле E в виде

$$E(z, \tau) = \frac{1}{2} \psi(z, \tau) \exp(-i\omega_0 \tau) + \text{к.с.} \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial z} = & -\frac{2\pi}{c} \int_0^\infty \frac{\partial \chi(\tau')}{\partial \tau'} \psi(z, \tau - \tau') \times \\ & \times e^{i\omega_0 \tau'} d\tau' + i\gamma \psi |\psi|^2 - \frac{\gamma}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial \tau} (\psi |\psi|^2). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь ψ является огибающей электрического поля, $\gamma = 3\chi^{(3)}\omega_0/8c = n_0^2\omega_0 n_2/8\pi$ — коэффициент кубической нелинейности, $n_0 \approx 1 + 2\pi\chi$ — показатель преломления среды, ω_0 — центральная частота сигнала. При переходе от уравнения (1) к (4) мы пренебрегли генерацией гармоник. В частности, в работе [9] было показано, что для импульсов, включающих в себя порядка одного-двух колебаний поля кубическая нелинейность обуславливает генерацию четвертой гармоники. Соответствующий эффект генерации нечетных гармоник в среде с квадратичной нелинейностью был описан в работе [10]. Отметим, что уравнение (1) описывает как квази-монохроматические импульсы, так и предельно короткие [11–13].

Анализ динамики параметров импульса проводится на основе метода моментов [14]. Пробное решение выберем в виде

$$\psi = B \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\tau - T^2}{\tau_p}\right)^2 (1 + iC) + i(\phi + \Omega(\tau - T))\right), \quad (5)$$

где B — амплитуда сигнала, C — параметр, определяющий частотную модуляцию, ϕ — фаза, Ω —

сдвиг частоты. Все параметры зависят от координаты z . Определим моменты импульса в виде

$$W = \int_{-\infty}^\infty |\psi|^2 d\tau, \quad (6)$$

$$\tau_p^2 = \frac{2}{W} \int_{-\infty}^\infty (\tau - T)^2 |\psi|^2 d\tau, \quad (7)$$

$$C = \frac{i}{W} \int_{-\infty}^\infty (\tau - T) \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial \tau} \right) d\tau, \quad (8)$$

$$T = \frac{i}{W} \int_{-\infty}^\infty \tau |\psi|^2 d\tau, \quad (9)$$

$$\Omega = -\frac{i}{2W} \int_{-\infty}^\infty \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial \tau} \right) d\tau, \quad (10)$$

фазу найдем из следующего выражения

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \psi^* - \frac{\partial \psi^*}{\partial \tau} \psi \right) d\tau = & -2i \sum_{l,j} D_{lj} \times \\ & \times \text{Im} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \psi^*(\tau) \psi(\tau - \tau') e^{i(\omega_0 - \omega_{lj})\tau'} d\tau d\tau' + \\ & + 2i\gamma \int_{-\infty}^\infty |\psi|^4 d\tau - i\frac{\gamma}{\omega_0} \text{Im} \int_{-\infty}^\infty |\psi|^2 \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя метод моментов, получаем

$$W = W_0 \exp\left(2 - \text{Im} \int_0^z k_s dz\right), \quad (12)$$

$$\frac{\partial \tau_p}{\partial z} = \text{Im} \left[\frac{(1 + iC)^2}{2\tau_p} \frac{\partial^2 k_s}{\partial \omega_0^2} \right], \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial z} = & \text{Re} \left[\frac{(1 + C^2)(1 + iC)}{\tau_p^2} \frac{\partial^2 k_s}{\partial \omega_0^2} \right] + \\ & + \frac{\gamma W}{\sqrt{2\pi}\tau_p} \left(1 - \frac{\Omega}{\omega_0}\right), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \text{Re} \left[(1 + iC) \frac{\partial k_s}{\partial \omega_0} \right] + \frac{3\gamma W}{2\sqrt{2\pi}\omega_0\tau_p}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = \text{Im} \left[\frac{(1 + C^2)}{\tau_p^2} \frac{\partial k_s}{\partial \omega_0} \right] - \frac{\gamma W C}{2\sqrt{2\pi}\omega_0\tau_p^3}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z} = & \text{Re} \left[k_s + \frac{(1 + iC)^2}{4\tau_p^2} \frac{\partial^2 k_s}{\partial \omega_0^2} \right] + \\ & + \frac{\gamma W}{4\sqrt{2\pi}\tau_p} \left(5 + \frac{\Omega}{\omega_0}\right) + \Omega T_z. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $k_s = i \sum_{l,j} D_{lj} \tau_p (2iF(\zeta_{lj}) + \sqrt{\pi} \exp(-\zeta_{lj}^2)) \div \sqrt{1 + C^2}$ назовем солитонным волновым числом, $\zeta_{lj} = \tau_p \Delta\omega_{lj} / \sqrt{1 + C^2}$, $\Delta\omega_{lj} = \omega_0 - \Omega - \omega_{lj}$, $D_{lj} =$

$= 2\pi e^2 N_l A_{ij} / mc$, $W = B^2 \tau_p \sqrt{\pi}$, $W_0 = B_0^2 \tau_0 \sqrt{\pi}$, B_0 , τ_0 — начальные значения соответствующих параметров $F(\xi) = \exp(-\xi^2) \int_0^\xi \exp(t^2) dt$ — функция Доусона.

СОЛИТОНОПОДОБНЫЙ РЕЖИМ РАСПРОСТРАНЕНИЯ

В качестве среды будем рассматривать воздух, который на 21% состоит из кислорода O_2 и на 79% из азота N_2 . На аргон Ar , водяные пары H_2O и углекислый газ CO_2 приходится меньше одного процента от концентрации всех молекул. Показателем преломления воздуха представлен в работе [15]. Рассмотрим окно прозрачности воздуха, принадлежащее диапазону от 3.5–4.1 мкм, в котором дисперсия групповой скорости β_2 аномальна. Основной вклад в аномальную дисперсию воздуха дают две резонансные длины волны углекислого газа $\lambda_1 = 4.223$ мкм, $\lambda_2 = 4.291$ мкм, и поэтому в выражении для коэффициента групповой дисперсии $\beta_2 = (\lambda_0^3 / 2\pi c^2) d^2 n_0(\lambda_0) / d\lambda^2 = \partial^2 k / \partial \omega_0^2$ (где $k = \omega_0 n_0 / c$ — волновое число) можно учитывать только эти слагаемые.

В нелинейный показатель преломления воздуха дает наибольший вклад кислород и азот [16]

$$n_2 = 0.79 n_{2,N_2} + 0.21 n_{2,O_2},$$

$$n_{2,O_2,N_2} = \frac{P_{O_2,N_2}^{-1}}{\lambda_{O_2,N_2}^{-2} - \lambda_0^{-2}}. \quad (18)$$

Здесь $P_{N_2} = 14.63$ ГВт, $\lambda_{N_2} = 0.3334$ мкм для азота и $P_{O_2} = 14.62$ ГВт, $\lambda_{N_2} = 0.3360$ мкм для кислорода. Аппроксимация (18) справедлива в диапазоне 1–4 мкм.

Для рассмотрения солитоноподобного режима положим $C = 0$, $\partial C / \partial z = 0$. Кроме того, будем рассматривать предел

$$\Delta \omega \tau_p \geq 2.67, \quad (19)$$

где $\Delta \omega = \omega_0 - \omega_1$, ω_1 — ближайшая к центральной частоте импульса резонансная частота среды. В этом пределе справедливо асимптотическое разложение функции Доусона в ряд [17]

$$F(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^3} + \frac{3}{8x^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2n-1)}{2^{n+1} x^{2n+1}}. \quad (20)$$

Из системы (12)–(17) получаем

$$W = B_0^2 \tau_0 \sqrt{\pi} = 8\pi I_0 \tau_0 \sqrt{\pi} / cn_0, \quad \Omega = 0,$$

$$I_0 = \frac{c\sqrt{2}}{\tau_0^2 \omega_0 n_0 n_2} \left| \frac{\partial^2 k_{sR}}{\partial \omega_0^2} \right|, \quad (21)$$

$$T = \left(\frac{\partial k_{sR}}{\partial \omega_0} + \frac{3n_0 n_2 I_0}{2\sqrt{2}c} \right) z, \quad (22)$$

$$\varphi = \left(k_{sR} + \frac{1}{4\tau_0} \frac{\partial^2 k_{sR}}{\partial \omega_0^2} + \frac{5n_0 n_2 \omega_0 I_0}{4\sqrt{2}c} \right) z. \quad (23)$$

$k_{sR} = \text{Re } k_s$ — действительная часть солитонного волнового числа, величину $\partial^2 k_{sR} / \partial \omega_0^2$ можно назвать солитонным коэффициентом групповой дисперсии. Зависимость интенсивности импульса от его длительности, описываемая выражением (21), представлена на рис. 1а и 1б. Для рис. 1а условие (19) выполняется если $\tau_p > 35$ фс, а для рис. 1б — если $\tau_p > 72$ фс.

Из уравнения (4) можно получить уравнение с дисперсией в виде ряда, если разложить подынтегральную функцию $\psi(z, \tau - \tau')$ в ряд и восполь-

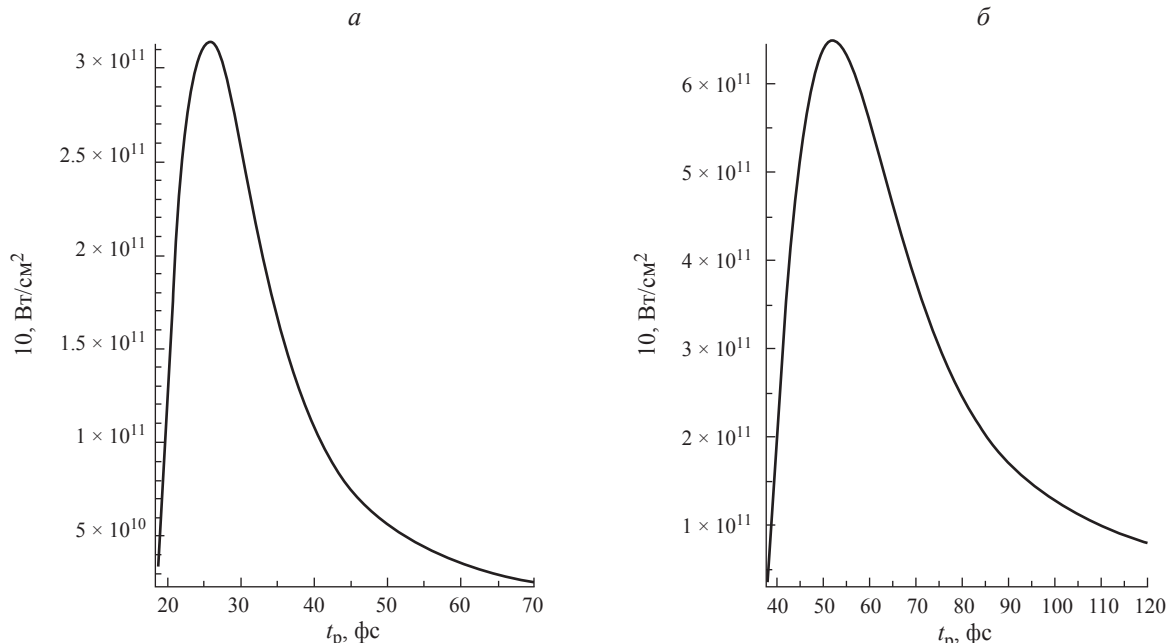


Рис. 1. Зависимость интенсивности импульса от его длительности на центральной длине волны сигнала $\lambda = 3.6$ (а), 3.9 мкм (б).

зоваться преобразованием Фурье $\partial^n \chi(\omega)/\partial \omega^n = (i)^n \int_0^\infty \tau^n \chi(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$.

Выполнив преобразования, получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = i \left(k - \frac{\omega_0}{c} \right) \psi - \sum_n \frac{(i)^{n-1}}{n!} \beta_n \frac{\partial^n \psi}{\partial \tau^n} + i\gamma \psi |\psi|^2 - \frac{\gamma}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial \tau} (\psi |\psi|^2). \quad (24)$$

Здесь $\beta_1 = \partial k / \partial \omega_0 - 1/c$, $\beta_n = \partial^n k / \partial \omega_0^n$ ($n \geq 2$), $k = n_0 \omega_0 / c$. Решение этого уравнения совпадает с (21)–(23), если функцию Дуусона представить в виде асимптотического ряда (20). Таким образом, разложение дисперсии (24) справедливо, если выполняется условие (19). В противном случае для описания динамики импульсов нужно рассматривать уравнения (1) или (4).

Определим пределы применимости пробного решения (5) с помощью правила сохранения электрической площади [18]

$$\int_{-\infty}^{\infty} E(\tau, z) d\tau = \text{const}. \quad (25)$$

Очевидно, что если электрическое поле импульса можно представить в виде производной по времени $E = \partial \Phi / \partial \tau$ от функции, убывающей на бесконечности, то условие (25) выполняется и площадь импульса равна нулю [4]. Представим функцию Φ в виде [19]

$$\Phi(\tau, z) = -\frac{\psi}{2i\omega_0} \exp(-i\omega_0\tau) + \text{к.с.}, \quad (26)$$

тогда

$$E(\tau, z) = \frac{1}{2} \left(\psi \exp(-i\omega_0\tau) - \frac{1}{i\omega_0} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \exp(-i\omega_0\tau) + \text{к.с.} \right). \quad (27)$$

Вклад второго слагаемого в (27) пропорционален $1/\omega_0 \tau_p$ и им можно пренебречь, если импульс включает в себя порядка пяти и более осцилляций поля [19]. В этом случае (27) переходит в (3) с огибающей в виде (5). Таким образом, правило сохранения площади импульса накладывает ограничения на применимость пробного решения вида (5). Следует отметить, что приближение однонаправленного распространения следует применять с осторожностью, поскольку оно может приводить к нарушению правила сохранения электрической площади [20–22].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью метода моментов аналитически описано распространения солитоноподобных импульсов в воздухе. Вклад дисперсии учтен посредством интеграла Дюамеля. Найден критерий (19), отделяющий два режима распространения сигнала. Показано, что и для импульсов, включающих в себя порядка десяти колебаний поля, может быть неприменимо приближение ММО, если спектр импуль-

са лежит вблизи резонанса среды. Для этих случаев получена система уравнений на параметры импульса. Найдено частое решение этой системы.

Работа Халыпина В.А. выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства науки и высшего образования РФ № 075-02-2024-1430.

Авторы благодарят профессора С.В. Сазонова за полезные обсуждения в ходе подготовки работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kivshar Yu.S., Agrawal G.P.* Optical solitons: from fibers to photonic crystals. New York: Academic Press Inc, 2003. 540 p.
2. *Brabec T., Krausz F.* // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. P. 3282.
3. *Беленов Э.М., Назаркин А.В.* // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 51. С. 252; *Belenov E.M., Nazarkin A.V.* // JETP Lett. 1990. V. 51. P. 252.
4. *Козлов С.А., Сазонов С.В.* // ЖЭТФ. 1997. Т. 111. С. 404; *Kozlov S.A., Sazonov S.V.* // JETP. 1997. V. 84. P. 221.
5. *Sazonov S.V., Ustinov N.V.* // Phys. Rev. A. 2020. V. 100. P. 508.
6. *Sazonov S.V., Ustinov N.V.* // Rom. Rep. Phys. 2020. V. 72. P. 508.
7. *Сазонов С.В.* // Письма в ЖЭТФ. 1991. Т. 53. С. 400; *Sazonov S.V.* // JETP Lett. 1991. V. 53. P. 420.
8. *Сазонов С.В.* // Письма в ЖЭТФ. 2021. Т. 114. С. 160; *Sazonov S.V.* // JETP. Lett. 2021. V. 114. P. 132.
9. *Drozdzov A.A., Kozlov S.A., Sukhorukov A.A., Kivshar Y.S.* // Phys. Rev. A. 2012. V. 86. Art. No. 053822.
10. *Sazonov S.V.* // J. Russ. Laser Res. 2018. V. 39. No. 3. P. 252.
11. *Калинович А.А., Сазонов С.В.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2024. Т. 88. № 1. С. 60; *Kalinovich A.A., Sazonov S.V.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2024. V. 88. No. 1. P. 49.
12. *Кошкин К.В., Сазонов С.В., Калинович А.А., Комиссарова М.В.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2024. Т. 88. № 1. С. 68; *Koshkin K.V., Sazonov S.V., Kalinovich A.A., Komissarova M.V.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2024. V. 88. No. 1. P. 56.
13. *Кошкин К.В., Сазонов С.В., Калинович А.А., Комиссарова М.В.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2023. Т. 87. № 12. С. 1713; *Koshkin K.V., Sazonov S.V., Kalinovich A.A., Komissarova M.V.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2023. V. 87. No. 12. P. 1796.
14. *Santhanam J., Agrawal G.* // Opt. Commun. 2003. V. 222. P. 413.
15. *Voronin A.A., Zheltikov A.M.* // Sci. Reports. 2017. V. 7. P. 46111.
16. *Fedorov V.Yu., Stortzakis S.* // Sci. Appl. 2020. V. 9. P. 186.

17. *Fedorov U.A. et al.* // Acta Universitaria. 2019. V. 29. P. 1.
18. *Розанов Н.Н.* // Опт. и спектроск. 2009. Т. 107. С. 761; *Rosanol N.N.* // Opt. Spectrosc. 2009. V. 107. P. 721.
19. *Сазонов С.В., Халяпин В.А.* // Опт. и спектроск. 2003. Т. 95. С. 429; *Sazonov S.V., Khalyapin V.A.* // Opt. Spectrosc. 2003. V. 95. P. 401.
20. *Пахомов А.В., Розанов Н.Н., Архипов М.В., Архипов Р.М.* // Письма в ЖЭТФ. 2024. Т. 119. № 2. С. 100; *Pakhomov A.V., Rosanol N.N., Arkhipov M.V., Arkhipov R.M.* // JETP. Lett. 2024. V. 119. No. 2. P. 94.
21. *Богатская А.В., Волкова Е.А., Попов А.М.* // Laser Phys. Lett. 2024. V. 21. Art. No. 015401.
22. *Богатская А.В., Попов А.М.* // Письма в ЖЭТФ. 2023. Т. 188. № 4. С. 291; *Bogatskaya A.V., Popov A.M.* // JETP. Lett. 2023. V. 118. No. 4. P. 296.

On the dynamics of the parameters of pulses propagating in the medium with anomalous dispersion of the group velocity

V. A. Khalyapin^{a, b, *}, A. N. Bugay^c

^a*Immanuel Kant Baltic Federal University,
Kaliningrad, 236016 Russia*

^b*Kaliningrad State Technical University,
Kaliningrad, 236001 Russia*

^c*Joint Institute for Nuclear Research,
Dubna, 141980 Russia*

*e-mail: tereshchenko.ia19@physics.msu.ru

We analyzed the mutual influence of simultaneous processes of second harmonic generation and parametric down conversion within the framework of a fully quantum approach. The effect of depletion of quantum pumping has been revealed. The effect of establishing a balance between the processes under consideration and achieving an equilibrium number of photons in the field modes is found. The generation of a strongly entangled two-mode field is demonstrated.

Keywords: quantum optics, non-classical light, parametric down conversion, squeezed vacuum, second harmonic generation, entangled field state