

УДК 535.8

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ СПЕКЛОВ В ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2025 г. Р. Т. Кубанов¹, А. М. Зотов^{1, 2}, П. В. Короленко^{1, 2, *}, А. Ю. Мишин¹

¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», Москва, Россия

²Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Физический институт имени П. Н. Лебедева Российской академии наук», Москва, Россия

*e-mail: p.v.korolenko@rambler.ru

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

Рассмотрено дифракционное преобразование волновых фрактальных полей. Показано, что при распространении световых пучков со спекловой структурой в оптических системах и в свободном пространстве их фрактальные свойства обладают высокой степенью устойчивости.

Ключевые слова: спеклы, фрактал, оптическая система, фурье-преобразование

DOI: 10.31857/S0367676525010072, **EDN:** DBRFMC

ВВЕДЕНИЕ

Проводимые в рамках фрактальной оптики исследования свойств фрактальных спекловых полей дали возможность найти решение ряда важных вопросов фундаментального характера. Уточнено применительно к спекловым структурам понятие скейлинга (масштабной инвариантности) [1], дана оценка фрактальности расположения дислокационных образований [2], рассмотрены особенности перехода от релеевской статистики распределения интенсивности к нерелеевской [3]. Весьма значимыми оказались и прикладные аспекты выполненных исследований. К ним в первую очередь следует отнести биомедицинские приложения. Так, фрактальная спекловая технология позволила разработать новые диагностические методы [4–6], повысить информационную емкость систем связи [7], дала возможность улучшить лечебные методики в офтальмологии [8–11] и арт-терапии [12–15].

Как правило, на практике световой пучок со спекловой структурой проходит некоторое расстояние от начальной плоскости, где формируется спекловая структура, до плоскости, где фиксируется с целью того или иного применения поперечное распределение интенсивности. Однако в литературе нет полноценной информации о характере и степени трансформации амплитудно-фазовых, скейлинговых и статистических характеристик излучения в процессе его распространения. Целью данной работы является оценка самосогласованных изменений указанных характеристик в зависи-

мости от изначально задаваемых параметров. При этом особое внимание уделяется нахождению степени адекватности начального поля его изображению в оптической системе.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД ЕЕ РЕШЕНИЯ

В качестве постановочной части задачи рассмотрим спекловой пучок, падающий на собирающую линзу с фокусным расстоянием f . Начальную плоскость разместим сразу за линзой, где радиус кривизны R волнового фронта пучка равен f . Рассмотрим, как будет меняться структура пучка в процессе фокусировки и какова степень корреляции распределения поля в начальной плоскости и в плоскости изображения, находящейся от линзы на расстоянии $2R$.

При численном моделировании структуры фрактального спеклового поля в начальной плоскости использовалась функция Вейерштрасса, имеющая вид

$$W_{x,y} = \sigma \sum_{v=0}^V \sum_{n=0}^N \left[b^{(D-2)n} \cos \left[2\pi s b^n \left(\left(x - \frac{K+1}{2} \right) \times \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left. \times \sin(\alpha v) + \left(y - \frac{K+1}{2} \right) \cos(\alpha v) \right] + \psi_n + \psi_v \right] + A. \quad (1)$$

Здесь $W_{x,y}$ — амплитуда поля излучения; x, y — дискретные поперечные координаты ($0 \leq x, y \leq K$); σ — стандартное отклонение амплитуды от среднего значения; N — количество гармоник; V — количество азимутальных парциальных волн;

n — номер гармоники; v — индекс азимутальной составляющей волны; α — элементарный азимутальный угол поворота; b — параметр скейлинга; s — масштабирующий параметр; D — фрактальная размерность графика функции Вейерштрасса при одномерном представлении; ψ_n , ψ_v — фазы компонент поля; A — компонента с однородным распределением амплитуды поля. При случайных значениях фаз ψ_n , ψ_v формировалось спекловое поле, плотность распределения интенсивности в котором подчинялась релеевской статистике.

Для того, чтобы учесть сферичность волнового фронта пучка на выходе линзы, функция (1) умножалась на корректирующую функцию

$$F_{x,y} = e^{\frac{i \left[\left(xu - \frac{(K+1)u}{2} \right)^2 + \left(yu - \frac{(K+1)u}{2} \right)^2 \right] \pi}{\lambda R}}. \quad (2)$$

Здесь параметр u характеризует используемую степень дискретизации попечных координат, λ — длина волны, R — радиус кривизны волнового фронта, $i = \sqrt{-1}$. В некоторых случаях для снижения влияния краевых эффектов использовалась дополнительная корректирующая функция T , играющая роль «мягкой» диафрагмы

$$T_{x,y} = \xi e^{\left[\left(xu - \frac{(K+1)u}{2} \right)^2 + \left(yu - \frac{(K+1)u}{2} \right)^2 \right]^4}, \quad (3)$$

где ξ — постоянная величина.

Приведенные ниже результаты численного моделирования, иллюстрирующие распространение спеклового пучка, получены для следующего набора параметров: $K = 255$, $\alpha = 2\pi/48$, $V = 47$, $v = 0 \dots V$, $N = 5$, $n = 0 \dots N$, $\sigma = 3.3$, $s = 0.05$, $b = 2$, $A = 0$. Случайные фазы ψ_n , ψ_v задавались с помощью соотношений

$$\psi_n = \frac{\text{rnd}(n)4\pi}{n+1}, \quad \psi_v = \frac{\text{rnd}(v)4\pi}{v+2}. \quad (4)$$

Будем для наглядности считать, что $R = 1.5$ м, а длина волны $\lambda = 0.5 \cdot 10^{-6}$ м. Положим также, что размер рабочего поля, определяемого величиной K , в метрическом измерении равен $a = 0.02$ м. В этом же измерении расстояние между значащими точками рабочего поля составляет $u = a/K = 7.812 \cdot 10^{-5}$ м.

Для оценки характеристик светового поля на разных расстояниях за экраном использовался составляющий основу фурье-оптики метод разложения изначального поля по плоским волнам [16]. Он реализуется в несколько этапов. Сначала с помощью процедуры быстрого преобразования Фурье определяется пространственный комплексный спектр излучения $S = \text{cfft}(W)$. Затем с учетом набегов плоских волн на разных

расстояниях z определяется новый комплексный спектр Q

$$Q_{x,y} = S_{x,y} \cdot \exp [i2\pi z_T (c(x)^2 + c(y)^2)]. \quad (5)$$

Для проведения дальнейших расчетов ему целесообразно придать центрально-симметричный характер

$$H_{x,y} = \left| Q_{\text{mod}\left(x+\frac{K+1}{2}, K+1\right), \text{mod}\left(y+\frac{K+1}{2}, K+1\right)} \right|. \quad (6)$$

В формуле (5) расстояния z выражаются в долях так называемой длины Тальбо $T = 2a^2/\lambda$, т. е. $z_T = z/T$. Входящие в эту формулу вспомогательные функции $c(t)$ имеют вид

$$c(t) = \text{mod}\left(t + \frac{K+1}{2}, K+1\right) + \frac{K+1}{2}. \quad (7)$$

Наконец, на последнем этапе процедуры посредством обратного преобразования Фурье определяется распределение поля $B_{x,y}$ на расстоянии z_T

$$B = \text{icfft}(H). \quad (8)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Расчет показал, что в соответствии с представлениями волновой оптики изначальный световой пучок сначала фокусируется вплоть до фокусного расстояния $z = R$, а затем расходится, формируя на расстоянии $z = 2R$ изображение начального распределения. Такого рода трансформация пучка показана на рис. 1. На нем показаны распределения $|W_{x,y}|$. На рис. 1a показано распределение $|W_{x,y}|$ сразу за линзой в предположении, что световой пучок ограничивает квадратная диафрагма, размер которой в 3.2 раза меньше размера рабочего поля. Постепенное уменьшение размеров пучка в процессе его фокусировки иллюстрирует рис. 1б, где световое поле приведено на расстоянии $z = R/2$. Качественное преобразование структуры пучка происходит в фокальной плоскости, когда $z = R$ (рис. 1в). В соответствии с положением фурье-оптики в этой плоскости поле является результатом фурье-преобразования начального распределения амплитуды световых колебаний. Сформированный в фокальной плоскости фурье-образ имел вид системы концентрических окружностей, которые соответствовали распределению пространственных частот фрактального спеклового пучка. Наличие скейлинга в фурье-образе доказывает то, что отношение радиусов окружностей составляли постоянную величину равную присутствующему в формуле (1) параметру $b = 2$. Изменение этого параметра, являющегося по сути коэффициентом скейлинга, приводило к изменению отношения радиусов.

Особенность пространственного спектра, обусловленная наличием скейлинга, во многом определяет эффективность визуального воздействия фрактальных структур при проведении лечебных процедур в арт-терапии и офтальмологии. Дело в том,

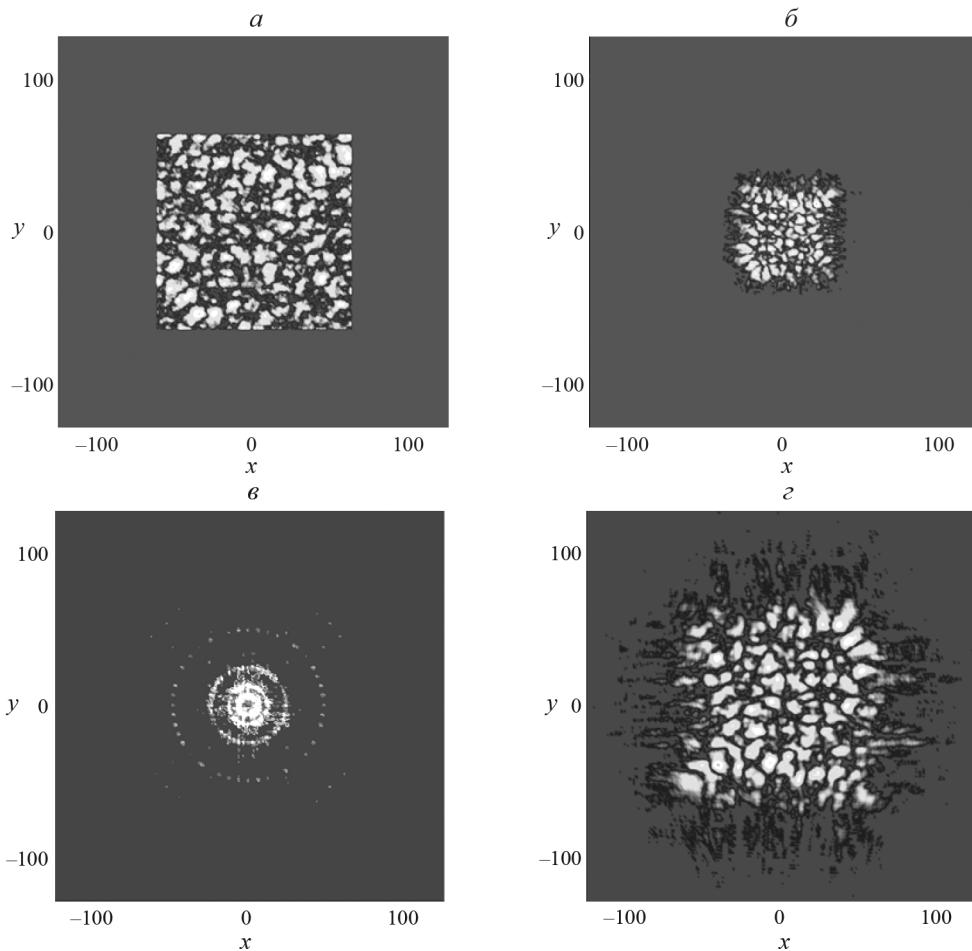


Рис. 1. Изменение структуры пучка в оптической системе. $z = 0$ (а), $R/2$ (б), R (в), $2R$ (г).

что в коре головного мозга обработка зрительных сигналов, несущих информацию об изображениях, осуществляется на основе структуры их пространственных спектров [14]. Из-за присутствия скейлинга отсутствует необходимость в обработке пространственных спектров в широком частотном диапазоне, достаточно зафиксировать лишь их низкочастотную часть. Это ускоряет и облегчает процесс зрительного восприятия рассматриваемых объектов и, как следствие, создает ощущение комфорта и эстетического наслаждения. Происходящее при этом укрепление связей между нейронами в коре головного мозга способствует излечению ряда глазных болезней (например, глаукомы). Распространяясь далее от фокальной плоскости пучок увеличивает размеры и формирует на расстоянии $z = R$ изображение начального распределения (рис. 1г).

Было обнаружено, что в процессе распространения спеклового пучка он сохранял фрактальные признаки независимо от статистически независимых реализаций их структуры. Оцениваемые методом покрытий [17] фрактальные размерности начального распределения и его изображения оказались близки между собой и составляли величину 2.5 ± 0.1 . Минимальная фрактальная размерность,

равная 2.25 ± 0.05 соответствовала распределению поля в фокальной плоскости. Параллельно с оценкой значений фрактальной размерности на разных расстояниях от начальной плоскости определялись средние значения спеклов. Делалось это по отсечке 0.5 от максимального значения рассчитываемой автокорреляционной функции. Расчет показал, что размеры спеклов в изображении за счет дифракционного уширения, примерно, на 20% превосходят свои начальные размеры. Значительное уменьшение спеклов (в 2.5 раза) наблюдалось вблизи фокальной плоскости.

Расчет коэффициента корреляции η распределений поля в начальной плоскости и в плоскости изображения (рис. 1а и 1г) дал значение $\eta = 0.53$. Увеличение фрактальной размерности D приводило к снижению η . Это хорошо видно из хода кривой, приведенной на рис. 2. В наиболее важной области для практических применений ($D < 1.5$) уменьшение величины η относительно максимального значения не превышает 30%.

ДРУГАЯ СТРУКТУРА ВОЛНОВОГО ФРОНТА

Для того, чтобы учесть влияние на характеристики излучения присутствия в начальной плоско-

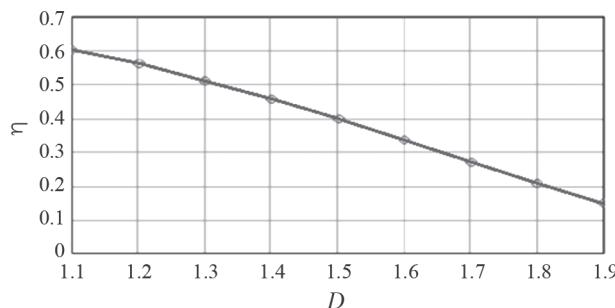


Рис. 2. Влияние фрактальной размерности D на значение коэффициента корреляции η .

сти сферической aberrации формуле (2) придавалась иной вид

$$F_{x,y} = e^{i\left[\left(\frac{2x}{K+1}-1\right)^2 + \left(\frac{2y}{K+1}-1\right)^2\cdot\left[1+\rho\left[\left(\frac{2x}{K+1}-1\right)^2 + \left(\frac{2y}{K+1}-1\right)^2\right]\right]\right]\cdot\frac{\pi(a)^2}{\lambda R}}. \quad (9)$$

Входящий в выражение (9) параметр ρ характеризует степень влияния aberrации на структуру изображения. На рис. 3 это влияние графически представлено в виде изменения коэффициента корреляции η изображения и начального распределения поля. Из рисунка видно, что снижение коэффициента корреляции, превосходящее 10%, происходит при $|\rho| > 0.1$.

Была рассмотрена также возможность использования разработанного программного обеспечения для случая распространения спекловой волны с изначально плоским волновым фронтом. Использованный в нем метод плоских волн по сравнению с предыдущим случаем потребовал определенной корректировки. Это связано с тем, что расходимость спеклового пучка требует увеличения размеров рабочего поля ввиду необходимости учета особенностей структуры пучка на его периферии. Указанная проблема была преодолена путем использования адаптивной схемы перманентного увеличения размеров рабочего поля. Было показано, что на расстоянии от начальной плоскости $z_1 = 0.0001d^2/\lambda$, где d — размер рабочего поля, распределение интенсивности сохраняет свойства, характерные для спеклового фрактального пучка. Количественный анализ трансформации структуры спекловой волны позволил установить, что такие характеристики поля как плот-

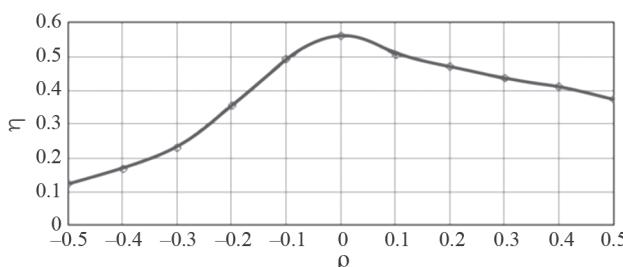


Рис. 3. Влияние сферической aberrации на структуру изображения.

ность вероятности и радиус корреляции значений интенсивности, их стандартное отклонение в области $0 < z < z_1$ в зависимости от реализации могут претерпевать заметные, а иногда значительные изменения. В то же время, фрактальная размерность, рассчитанная методом покрытий, испытывала отклонения от среднего значения, равного 2.45, не превышающие 2%. Это говорит об устойчивости такой важной характеристики спеклового поля, как его фрактальная размерность.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Распространение в оптических системах и в свободном пространстве фрактальных спекловых пучков рэлеевского типа характеризуется рядом важных физических закономерностей. Помимо того, что в процессе распространения остается неизменной скейлинговая структура их пространственного спектра, сохраняется как фрактальная форма, так и плотность вероятности поперечного распределения интенсивности. Однако величина фрактальной размерности, фиксируемой на различных расстояниях, в общем случае может меняться в больших пределах. В то же время фрактальные размерности пучков в начальной плоскости и в плоскости изображения близки между собой.

Коэффициент корреляции изначального поля и его изображения зависит от задаваемой в начальной плоскости фрактальной размерности и снижается ее увеличением. Так, увеличения фрактальной размерности от значения 2.25, до значения 2.7 может уменьшить коэффициент корреляции в 2 раза. Заметным образом влияет на коэффициент корреляции присутствие в сформированном в начальной плоскости пучке сферической aberrации. Если вклад aberrации в структуру волнового фронта превосходит 10%, то следует считаться с резким падением корреляционного коэффициента. Дополнительный анализ процесса распространения фрактального спеклового пучка в свободном пространстве показал, что и в этом случае он сохраняет фрактальные свойства.

Авторы выражают благодарность профессору физического факультета МГУ Боголюбову А. Н. за поддержку данного направления исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Funamizu H., Uozumi J. // J. Optics A. Pure Appl. Opt. 2008. V. 10. No. 2. Art. No. 025004.
- O'Holleran K., Dennis M.R., Flossmann F. et al. // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 100. No. 5. Art. No. 053902.
- Зотов А.М., Короленко П.В., Павлов Н.Н. // Изв. РАН. Сер. физ. 2022. Т. 86. № 11. С. 1617; Zотов А.М., Korolenko P.V., Pavlov N.N. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2022. V. 86. No. 11. P. 1341.

4. Engin E.Z., Sişli A.B., Pahnvar A.J. et al. // CBU-JOS. 2020. V. 16. No. 1. P. 47.
5. Carvalho O., Benderitter M., Roy L. // J. Biomed. Opt. 2010. V. 15. No. 2. Art. No. 027013.
6. Ульянов А.С. // Квант. электрон. 2008. Т. 38. № 6. С. 557; Ulyanov A.S. // Quantum. Electron. 2008. V. 38. No. 6. P. 557.
7. Korolenko P.V. // Phys. Wave Phenom. 2020. V. 28. No. 4. P. 313.
8. Каданер Г.И., Овчинников Б.В., Рубинштейн М.М. // Опт. журн. 2007. Т. 74. № 12. С. 19; Kadaner G.I., Ovchinnikov B.V., Rubinshtein M.M. // J. Opt. Technol. 2007. V. 74. No. 12. P. 806.
9. Кащенко Т.П., Корнишина Т.А., Базарбаева А.Р. и др. // Вестн. офтальмологии. 2014. Т. 130. № 5. С. 48.
10. Матросова Ю.В., Фабрикантов О.Л. // Офтальмология. 2018. Т. 15. № S2. С. 52.
11. Прокопенко В.Т., Матвеев Н.В., Олейник Р.В. и др. // Светотехника. 2021. № 4. С. 50.
12. Пьянкова С.Д. // Психол. иссл. 2019. Т. 12. № 63. Art. No. 12.
13. Simion R.M. // J. Experient. Psychother. 2016. V. 19. No. 2(74). P. 14.
14. Копытин А.И. Современная клиническая арт-терапия: учебное пособие. М.: Когито-Центр, 2015. 528 с.
15. Шелепин Ю.Е. Введение в нейроиконику: монография. СПб.: Троицкий мост, 2017. 352 с.
16. Короленко П.В. Когерентная оптика. М.: Юрайт, 2020. 184 с.
17. Митин В.Ю. // Вестн. Пермск. ун-та. Матем. Механ. Информ. 2013. № 2 (21). С. 16.

Propagation of fractal speckles in optical systems and in free space

R. T. Kubanov^a, A. M. Zотов^{a, b}, P. V. Korolenko^{a, b, *}, A. Yu. Mishin^a

^aMoscow State University,
Moscow, 119991 Russia

^bLebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, 119991 Russia

*e-mail: pvkorolenko@rambler.ru

The diffraction transformation of wave fractal fields is considered. It is shown that when light beams with a speckle structure propagate in optical systems and in free space, their fractal properties have a high degree of stability.

Keywords: speckles, fractal, optical system, Fourier transform