ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2025, том 89, № 1, с. 23–27

УДК 538.915

ПЛАЗМЕННЫЕ ВОЛНЫ В ДВУМЕРНОЙ СВЕРХРЕШЕТКЕ В УСЛОВИЯХ ВОЗДЕЙСТВИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

© 2025 г. И. А. Агапова[1], С. Ю. Глазов[1, *], С. В. Крючков[1, 2]

[1] Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Волгоградский государственный социально-педагогический университет», Волгоград, Россия
[2] Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Волгоградский государственный технический университет», Волгоград, Россия

[*] e-mail: ser-glazov@yandex.ru

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.
После доработки 16.09.2024 г.
Принята в печать 30.09.2024 г.

Получено выражение, позволяющее определить закон дисперсии плазменных волн $\omega(k)$ в двумерной полупроводниковой сверхрешетке в условиях воздействия нелинейной электромагнитной волны. В предельном случае слабой нелинейности найдено аналитическое выражение для $\omega(k)$. Установлена возможность управления частотой плазменной волны путем изменения параметров нелинейной волны.

Ключевые слова: полупроводниковая сверхрешетка, двумерный электронный газ, энергетический спектр, нелинейная электромагнитная волна, плазменные волны

DOI: 10.31857/S0367676525010049, **EDN:** DCFJXA

ВВЕДЕНИЕ

Квантовая теория плазменных волн для полупроводниковых сверхрешеток (СР) построена в работах [1, 2]. Важным направлением исследования коллективных явлений в конденсированных средах является изучение процессов распространения плазменных волн в низкоразмерных электронных системах и, в частности, в двумерных (2D) полупроводниковых СР. Не ослабевает внимание исследователей к изучению нелинейных электромагнитных волн, распространяющихся в полупроводниковых структурах с неквадратичным законом дисперсии. В работах [3–5] изучены нелинейные плазменные колебания электронного газа в полупроводниковой квантовой СР. В режиме редких столкновений ($\nu \ll \omega_p$, частота столкновений электрона с нерегулярностями кристаллической решетки ν много меньше обобщенной плазменной частоты электрона в минизоне ω_p) распространение электромагнитной волны вдоль слоев СР, когда ее поле направлено по оси СР, описывается уравнением Sine-Gordon (SGE) [6]. Одними из наиболее общих периодических решений SGE являются решения, выраженные через эллиптические функции Якоби и получившие название кноидальных волн. Когда характерное расстояние, на котором происходит заметное изменение поля волны, значительно больше длины свободного пробега электронов, можно считать поле волны однородным. Напряженность электрического поля волны при этом имеет вид [7–9]

$$E_x(t) = E_0 \mathrm{cn}\left(\frac{2K(\varkappa)\omega_0}{\pi}t, k\right), \tag{1}$$

где $\mathrm{cn}(x)$ — эллиптическая функция Якоби, $\varkappa = \frac{eE_0 d}{2\omega_p} \cdot \frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta}$ — модуль нелинейности (здесь и далее $\hbar = 1$), $\omega_0 = \frac{\pi}{2K(\varkappa)}$, $\beta = \frac{u}{V} \cdot (\beta > 1)$, V — скорость волны в отсутствие электронов, u — фазовая скорость волны, $K(\varkappa)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, E_0 — амплитуда напряженности поля нелинейной волны. В [7–9] рассмотрены особенности влияния поля нелинейной кноидальной волны на различные физические процессы в СР. В последнее время появилось значительное количество работ, посвященных теории кноидальных волн [10–13]. Это подчеркивает актуальность настоящего исследования.

В физике полупроводников вызывают повышенный интерес процессы распространения плазменных волн в 2D полупроводниковых СР. Возможность возникновения плазменных волн и плотность плазменных возбуждений в 2D электронном газе СР изучена в работах [14, 15]. В [16, 17] исследовано влияние сильного постоянного и переменного электрического поля на плазменные колебания в 2D электронном газе СР. Возможность распространения в 2D СР уединенных электромагнитных волн показана в [18]. Работы [19–23] посвящены исследованию новых материалов на основе графена — графеновых СР и особенностям закона дисперсии плазменных волн в таких структурах. В случае слабой неаддитивности энергетического спектра графеновых СР выражения для нахождения закона дисперсии плазменных волн $\omega(k)$, полученные для квантовых полупроводниковых СР, можно использовать для оценки $\omega(k)$ как в отсутствии внешних воздействий, так и в сильном статическом и переменном электрическом полях.

В данной работе исследуется влияние нелинейной электромагнитной волны на закон дисперсии плазменных волн в двумерной полупроводниковой квантовой сверхрешетке.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Энергетический спектр носителей заряда в 2D СР можно выбрать в модельном виде [14, 15]

$$\varepsilon(\vec{p}) = \Delta - \frac{\Delta}{2}\left[\cos(p_x d) + \cos(p_y d)\right], \qquad (2)$$

где Δ — полуширина минизоны проводимости; d — период СР; $\vec{p}$ — квазиимпульс электрона. Ограничимся одноминизонным приближением, пренебрегая межминизонными переходами.

На рис. 1 представлена геометрия задачи. Пусть в направлении оси OX СР приложено нелинейное электрическое поле (1), которое будем описывать векторным потенциалом $\vec{A}(t) = \left\{-\frac{c\Phi(t)}{ed}, 0\right\}$. Удобнее перейти от напряженности нелинейной волны к безразмерному потенциалу $\Phi(t)$

$$\Phi(t) = 2\arcsin\left\{\varkappa \operatorname{sn}\left(\frac{2K(\varkappa)\omega_0}{\pi}t, \varkappa\right)\right\}, \qquad (3)$$

где $0 < \varkappa \leqslant 1$, $\operatorname{sn}(x)$ — эллиптическая функция Якоби.

В приближении самосогласованного поля гамильтониан взаимодействующих электронов с учетом процессов переброса имеет вид [16, 17]

$$H = \sum_{\vec{p}} \varepsilon\left(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}(t)\right) a^+_{\vec{p}} a_{\vec{p}} + e\frac{1}{\sqrt{N_x N_y}} \times \\ \times \sum_{\vec{p},\vec{k}} \sum_{n,m} U\left(\vec{k}, t\right) \cdot M(k_x) M(k_y) a^+_{\vec{p}-\vec{k}+\vec{g}} a_{\vec{p}}, \qquad (4)$$

где $a^+_{\vec{p}}$, $a_{\vec{p}}$ — операторы рождения и уничтожения электрона с импульсом $\vec{p}$; N_x и N_y — число потенциальных ям, образующих СР вдоль осей x и y соответственно, $\vec{g} = \left(n\frac{2\pi}{d}, m\frac{2\pi}{d}\right)$,

$$M(k_x) = \int_0^{N_x d} \varphi^*(x)\varphi(x)\exp(-ik_x x)\,dx, \\ M(k_y) = \int_0^{N_y d} \varphi^*(y)\varphi(y)\exp(-ik_y y)\,dy, \qquad (5)$$

$U(\vec{k}, t)$ — самосогласованный потенциал, определяемый следующим соотношением

$$U(\vec{k}, t) = \frac{2\pi e}{\chi^k} \sum_{\vec{p}} \sum_{n,m} \langle a^+_{\vec{p}+\vec{k}+\vec{g}} a_{\vec{p}} \rangle M(-k_x) M(-k_y), \qquad (6)$$

χ — диэлектрическая проницаемость решетки.

Достаточно хорошим приближением, которым пользуются в теоретической физике низкоразмерных систем, является приближение случайных фаз [14–17, 19, 21–23]. Уравнение движения для средних $\langle a^+_{\vec{p}+\vec{k}+\vec{g}} a_{\vec{p}} \rangle$ в этом случае имеет вид [16, 17]

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + i\left[\varepsilon\left(\vec{p} + \vec{k} + \frac{e}{c}\vec{A}(t)\right) - \varepsilon\left(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}(t)\right)\right]\right\} \times \\ \times \langle a^+_{\vec{p}+\vec{k}+\vec{g}} a_{\vec{p}} \rangle = -ieU(\vec{k} + \vec{g}, t) \times \\ \times M\left([\vec{k} + \vec{g}]_x\right) M\left([\vec{k} + \vec{g}]_y\right) \left(n_{\vec{p}+\vec{k}+\vec{g}} - n_{\vec{p}}\right), \qquad (7)$$

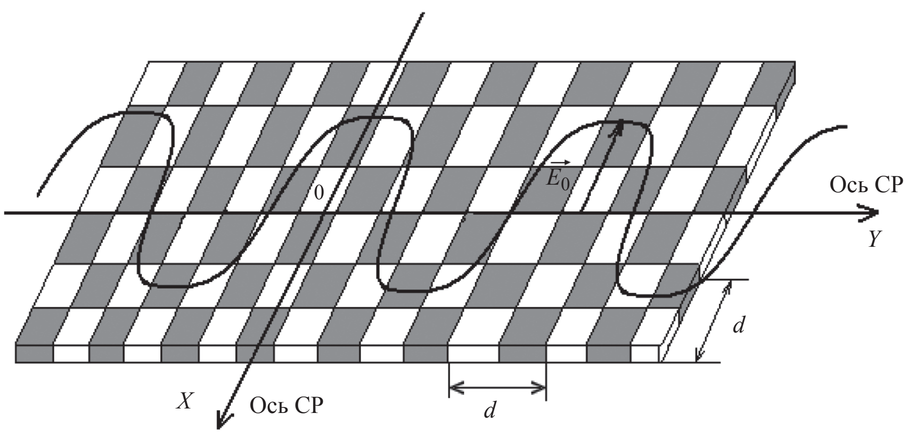

Рис. 1. Геометрия задачи.

где $n_{\vec{p}} = \langle a^+_{\vec{p}} a_{\vec{p}} \rangle$ — числа заполнения электронных уровней в 2D — электронном газе.

Решение уравнения (7) имеет вид

$$\begin{gathered}\langle a^+_{\vec{p}+\vec{k}+\vec{g}} a_{\vec{p}} \rangle = -ie\int\limits_{-\infty}^{t} dt' U(\vec{k}+\vec{g}, t)\times \\ \times M\left([\vec{k}+\vec{g}]_x\right) M\left([\vec{k}+\vec{g}]_y\right)(n_{\vec{p}+\vec{k}+\vec{g}} - n_{\vec{p}})\times \\ \times \exp\left\{ i\int\limits_{t}^{t'} \left[\varepsilon\left(\vec{p}+\vec{k}+\frac{e}{c}\vec{A}(t'')\right) - \varepsilon\left(\vec{p}+\frac{e}{c}\vec{A}(t'')\right)\right] dt'' \right\}.\end{gathered} \quad (8)$$

Для вычисления второго интеграла, входящего в выражение (8), воспользуемся разложением $\sin\Phi(t)$ и $\cos\Phi(t)$ в тригонометрический ряд Фурье для значения модуля нелинейности $\varkappa \in (0,1)$:

$$\begin{gathered}\cos\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos 2n\omega_0 t, \\ \sin\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(2n+1)\omega_0 t,\end{gathered} \quad (9)$$

$$\begin{gathered} a_0 = 2\frac{E(\varkappa)}{K(\varkappa)} - 1, \quad a_n = 4n\frac{\pi^2}{K^2(\varkappa)} \frac{q_\varkappa^n}{1-q_\varkappa^{2n}}, \\ b_n = 2(2n+1)\frac{\pi^2}{K^2(\varkappa)} \frac{q_\varkappa^{n+\frac{1}{2}}}{1+q_\varkappa^{2n+1}},\end{gathered} \quad (10)$$

$$q_\varkappa = \exp\left(-\frac{\pi K'(\varkappa)}{K(\varkappa)}\right), \quad K'(\varkappa) = K\left(\sqrt{1-\varkappa^2}\right).$$

Подставляя решение уравнения (7) в (6), получаем уравнение, определяющее закон дисперсии плазменных волн $\omega(\vec{k})$. Оценки показывают, что при $\omega_0 > \Delta$ и $\varkappa < 0.5$ с достаточной степенью точности в дисперсионном уравнении можно оставить только первые члены сумм (9). Тогда дисперсионное уравнение примет вид

$$\frac{2\pi e^2}{\chi} \prod(\vec{k}, \omega) S(\vec{k}) = 1, \quad (11)$$

$$S(\vec{k}) = \sum_{n,m} \frac{\left|M\left([\vec{k}+\vec{g}]_x\right)\right|^2 \left|M\left([\vec{k}+\vec{g}]_y\right)\right|^2}{\sqrt{\left(\vec{k}_x+\vec{g}_x\right)^2 + \left(\vec{k}_y+\vec{g}_y\right)^2}}, \quad (12)$$

$$\begin{gathered}\prod(\vec{k},\omega) = \sum_p J^2_{+0}\left[\Delta\sin(p_x d+\alpha_x)\sin(\alpha_x)\frac{a_1(\varkappa)}{2\omega_0}\right]\times \\ \times J^2_{+0}\left[\Delta\cos(p_x d+\alpha_x)\sin(\alpha_x)\frac{b_1(\varkappa)}{2\omega_0}\right]\times \\ \times\frac{n(\vec{p}+\vec{k}) - n(\vec{p})}{\Delta\left[\sin(p_x d+\alpha_x)\sin(\alpha_x)a_0(\varkappa) + \sin(p_y d+\alpha_y)\sin(\alpha_y)\right] - \omega},\end{gathered} \quad (13)$$

где $\alpha_x = \dfrac{k_x d}{2}$, $\alpha_x = \dfrac{k_x d}{2}$.

Для получения явного вида $S(\vec{k})$ нужно задать вид потенциальных ям в СР. При $\varphi(x) = \mathrm{const}$ при $0 \leqslant x \leqslant d$, и $\varphi(x) = 0$ при $x < 0$, $x > d$ формула (12) примет вид

$$S(\vec{k}) = \frac{4}{d^4}\sum_{n,m}\frac{\left[1-\cos(k_x d)\right]\left[1-\cos(k_y d)\right]}{(k_x+g_x)^2\left(k_y+g_y\right)^2\sqrt{(k_x+g_x)^2\left(k_y+g_y\right)^2}}. \quad (14)$$

Даже в таком простом модельном случае при произвольных значениях $\vec{k}$ не удается получить аналитическое выражение для $S(\vec{k})$. Однако при малых значениях $k\left(k_x, k_y \ll \dfrac{\pi}{d}\right)\cdot S(\vec{k}) \sim \dfrac{1}{k}$ и спектр плазмонов обладает дисперсией $\omega^2 \sim k$, характерной для 2D газа без периодического потенциала.

Для невырожденного электронного газа в пределе высоких температур: $\Delta \ll T$ рассмотрим частный случай, для которого можно получить аналитическое выражение закона дисперсии $\omega(k)$. При $\omega_0 \gg \Delta$ и $k_y = 0$ получаем:

$$S(\vec{k}) = \sum_{n,m} \frac{\left|M\left([\vec{k}+\vec{g}]_x\right)\right|^2 \left|M\left([\vec{k}+\vec{g}]_y\right)\right|^2}{\sqrt{\left(\vec{k}_x+\vec{g}_x\right)^2 + \left(\vec{k}_y+\vec{g}_y\right)^2}}, \quad (15)$$

где $f(k_x) = 1 + \dfrac{\chi T}{2\pi e^2 N_0}\dfrac{a_0(\varkappa)}{S(k_x)}$.

На рис. 2 построен график зависимости частоты плазменных волн от волнового числа $\omega(k)$, полученный с помощью численного анализа формулы (15). Установлена возможность управления частотой плазменной волны параметрами внешней нелинейной волны. Из рис. 2 следует, что уменьшение амплитуды нелинейной волны приводит к увеличению плазменной частоты. При $\dfrac{kd}{2} \ll 2$ получаем ожидаемую дисперсионную зависимость $\omega^2 \sim k$, характерную для 2D газа без СР. В пределе линейных волн ($\varkappa \to 0$) выражение (15) соответствует закону дисперсии плазменных волн в 2D электронном газе СР, находящейся в условиях воздействия переменного высокочастотного электрического поля [17]. В случае, когда $E_0 = 0$ ($\varkappa = 0$) выполняется предельный переход к результатам работы [14].

Параметры электронного спектра СР могут быть оценены в рамках модели Кронига—Пенни [15]. Таким образом можно из (11) определить дисперсионную зависимость $\omega(k)$ в широком диапазоне температур, периода СР и ширины потенциальных ям, образующих СР.

В последнее время внимание исследователей сосредоточено на изучении графеновых СР и, в частности, особенностям законов дисперсии плазменных волн в таких структурах [19—23], что может определить дальнейший предмет исследования и развитие данной работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена задача о влиянии нелинейной электромагнитной волны на закон дисперсии плазменных волн в двумерной полупроводниковой кван-

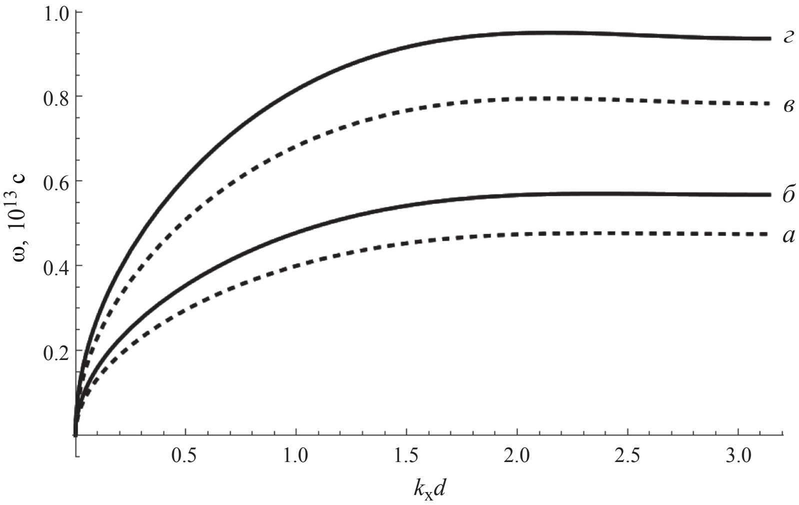

Рис. 2. Закон дисперсии плазменных волн $\omega(k)$ при: $\varkappa$ = 0.4; T = 100 K (*а*), $\varkappa$ = 0; T = 100 K (*б*), $\varkappa$ = 0.4 (*в*); T = 300 K, $\varkappa$ = 0; T = 300 K (*г*).

товой сверхрешетке. Получено выражение, позволяющее определить дисперсионную зависимость $\omega(k)$ в широком диапазоне температур, периода сверхрешетки и ширины потенциальных ям, образующих сверхрешетку. Показано, что при увеличении амплитуды нелинейной волны плазменная частота уменьшается. В предельном случае слабой нелинейности получено аналитическое выражение для $\omega(k)$. Расчеты выполнены на основе квантовой теории плазменных волн в приближении случайных фаз с учетом процессов переброса.

Данное исследование имеет фундаментальный характер, полученные теоретические результаты могут быть полезны при экспериментальном исследовании СР и результативно дополняют имеющиеся сведения о коллективных эффектах в низкоразмерных полупроводниковых сверхструктурах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shmelev G.M., Chaikovskii I.A., Pavlovich V.V., Epshtein E.M.* // Phys. Stat. Sol. 1977. V. 82. No. 391. P. 391.
2. *Das Sarma S., Quinn J.J.* // Phys. Rev. B. 1982. V. 25. No. 12. P. 7603.
3. *Эпштейн Э.М.* // ФТП. 1977. Т. 11. № 7. С. 456.
4. *Эпштейн Э.М.* // ФТП. 1978. Т. 12. № 5. С. 985.
5. *Басс Ф.Г., Лыках В.А., Тетервов А.П.* // ФТП. 1982. Т. 16. № 5. С. 865.
6. *Эпштейн Э.М.* // ФТТ. 1977. Т. 11. № 11. С. 3456.
7. *Крючков С.В., Попов К.А.* // ФТП. 1998. Т. 32. № 3. С. 334; *Kryuchkov S.V., Popov K.A.* // Semiconductors. 1998. V. 32. No. 3. P. 302.
8. *Крючков С.В., Федоров Э.Г.* // ФТП. 2002. Т. 36. № 3. С. 326; *Kryuchkov S.V., Fedorov E.G.* // Semiconductors. 2002. V. 36. No. 3. P. 307.
9. *Завьялов Д.В., Крючков С.В.* // ФТП. 2001. Т. 35. № 5. С. 575; *Zav'yalov D.V., Kryuchkov S.V.* // Semiconductors. 2001. V. 35. No. 5. P. 554.
10. *Черняев А.П., Черняева С.А.* // Комп. иссл. и моделир. 2021. Т. 13. № 5. С. 885.
11. *Макаров В.А., Петникова В.М.* // Квантовая электроника. 2018. Т. 48. № 11. С. 1023.
12. *Dzedolik V., Leksin A.Yu.* // J. Optics. 2020. V. 22. No. 7. Art. No. 075001.
13. *Ebadi G., Krishnan E.V., Biswas A.* // Pramana – J. Phys. 2012. V. 79. P. 185.
14. *Глазов С.Ю., Крючков С.В.* // ФТП. 2000. Т. 34. № 7. С. 835; *Glazov S.Yu., Kryuchkov S.V.* // Semiconductors. 2000. V. 34. No. 7. P. 807.
15. *Глазов С.Ю., Громышов И.С., Мещерякова Н.Е.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2014. Т. 78. № 12. С. 1521; *Glazov S.Y., Gromyshov I.S., Mescheryakova N.E.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2014. V. 78. No. 12. P. 1239.
16. *Глазов С.Ю., Крючков С.В.* // ФТП. 2001. Т. 35. № 4. С. 456; *Glazov S.Yu., Kryuchkov S.V.* // Semiconductors. 2001. V. 35. No. 4. P. 444.
17. *Глазов С.Ю., Кубракова Е.С.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2009. Т. 73. № 12. С. 1713; *Glazov S.Y., Kubrakova E.S.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2009. V. 73. No. 12. P. 1605.
18. *Крючков С.В., Шаповалов А.И.* // ФТТ. 1997. Т. 39. № 8. С. 1470; *Kryuchkov S.V., Shapovalov A.I.* // Phys. Solid State. 1997. V. 39. No. 8. P. 1305.
19. *Глазов С.Ю., Ковалев А.А., Мещерякова Н.Е.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2012. Т. 76. № 12. С. 1479; *Glazov S.Yu., Kovalev A.A., Mescheryakova N.E.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2012. V. 76. No. 12. P. 1323.
20. *Ратников П.В., Силин А.П.* // Письма в ЖЭТФ. 2015. Т. 102. № 11. С. 823; *Ratnikov P.V., Silin A.P.* // JETP Lett. 2015. V. 102. No. 11. P. 713.
21. *Глазов С.Ю., Ковалев А.А., Мещерякова Н.Е.* // ФТП. 2015. Т. 49. № 4. С. 515; *Glazov S.Yu., Kovalev A.A., Meshcheryakova N.E.* // Semiconductors. 2015. V. 49. No. 4. P. 504.

22. *Глазов С.Ю., Ковалев А.А.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2018. Т. 82. № 1. С. 105; *Glazov S.Yu., Kovalev A.A.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2018. V. 82. No. 1. P. 94.

23. *Глазов С.Ю., Ковалев А.А., Крючков С.В.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 2. С. 254; *Glazov S.Y., Kovalev A.A., Kryuchkov S.V.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2020. V. 84. No. 2. P. 199.

Plasma waves in a two-dimensional superlattice under the influence of a nonlinear electromagnetic wave

I. A. Agapova[a], **S. Yu. Glazov**[a, *], **S. V. Kryuchkov**[a, b]

[a] *Volgograd State Socio-Pedagogical University*
[b] *Volgograd State Technical University*

[*] *e-mail: ser-glazov@yandex.ru*

An expression is obtained that allows us to determine the law of dispersion of plasma waves $\omega(k)$ in a two-dimensional semiconductor superlattice under the influence of a nonlinear electromagnetic wave and, in the extreme case of weak nonlinearity, an analytical expression for $\omega(k)$ is found. The possibility of controlling the frequency of the plasma wave by the parameters of a nonlinear wave has been established.

Keywords: semiconductor superlattice, two-dimensional electron gas, energy spectrum, nonlinear electromagnetic wave, plasma waves