ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2024, том 88, № 6, с. 876–883

УДК 535.2

# АТОМНО-ФОТОННЫЙ КЛАСТЕР В НЕЛИНЕЙНОЙ И КВАНТОВОЙ ОПТИКЕ


**А. М. Башаров**[1,*]

[1] *Федеральное государственное бюджетное учреждение «Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Москва, Россия*

* *e-mail: basharov@gmail.com*

Поступила в редакцию 15.12.2023
После доработки 29.01.2024
Принята к публикации 26.02.2024

Построены модели излучательных квантовых систем, реализующие аналоги многофотонного и комбинационного резонансов квантов классического поля на атомной системе с участием квантов мод резонаторов. Отличительной особенностью моделей является описание ансамбля атомов и квантов при помощи либо образующих полиномиальной алгебры, либо двухмодового представления Йордана — Швингера алгебры su(2), так что можно говорить об атомно-фотонном и/или фотонном кластерах. Возникающие алгебры являются математически неразрешимыми в отличие от алгебры Гейзенберга — Вейля, что обеспечивает возможность реализации и наблюдения в ансамблях описанных кластеров фундаментальных эффектов когерентной нелинейной оптики, таких как фотонное эхо, оптическая нутация, сверхизлучение.

*Ключевые слова*: оператор электродипольного взаимодействия, гармонический квантовый осциллятор, алгебраическая теория возмущений, условия резонанса, эффективный гамильтониан

**DOI:** 10.31857/S0367676524060051, **EDN:** PHIIMF

## ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи нелинейной и квантовой оптики, как правило, сводятся к рассмотрению процессов взаимодействия различных полей с элементарными эффективными объектами — квантовыми излучателями,— после чего на основе полученных результатов рассматривается динамика ансамбля(ей) таких излучателей [1—5]. Статья посвящена рассмотрению некоторых классов квантовых излучателей, о которых можно говорить как об атомно-фотонном кластере. Во взаимодействии с классической когерентной волной или квантованным термостатом атомно-фотонный кластер характеризуется своей алгеброй операторов, а в остальном эффективный оператор резонансного взаимодействия аналогичен оператору резонансного взаимодействия двухуровнего атома или гармонического квантового осциллятора с когерентной волной или термостатом. Слово «эффективный» подчеркивает, что в конечных уравнениях исходной модели, на основе которых и исследуются физические явления, возникли операторы, схожие с аналогичными простейших моделей, какими является модель резонансного атома или квантового гармонического осциллятора. Иначе говоря, эффективные величины занимают те же «места» в операторе взаимодействия атома или квантового гармонического осциллятора после выполнения над исходным оператором взаимодействия всех приближений, связанных с условием резонанса во взаимодействии.

Следует отметить, что адекватным методом анализа основных уравнений моделей резонансных явлений в оптике служит метод усреднения Крылова — Боголюбова — Митропольского [1, 6, 7], алгебраическим вариантом и обобщением которого является метод алгебраической теории возмущений [5, 8—10]. Алгебраическая теория возмущений дает инструмент систематического построения эффективного гамильтониана задачи при помощи использования унитарной симметрии квантовой теории в условиях различных резонансных взаимодействий.

Эффективный оператор $V^{Eff}(t)$ резонансного взаимодействия классического поля с гармоническим осциллятором или двухуровневым атомом в электродипольном приближении в низшем порядке алгебраической теории возмущений в представлении взаимодействия можно записать в едином и простом виде как [1—5]

$$V^{Eff}(t) = g\mathscr{E}(t)\exp[-i(\overline{\omega}-\Omega)t]X_{+} + H.c., \quad (1)$$

где $\mathscr{E}(t)$ — амплитуда электрического поля $E(t) = \mathscr{E}(t)\exp(-i\overline{\omega}t) + c.c.$ когерентной волны несущей частоты $\bar{\omega}$, $X_+$ и $X_- = X_+^+$ — суть операторы, описывающее рождение и уничтожение «возбуждения» в резонансной квантовой системе, в которой $\Omega$ — частота указанного возбуждения или частота эффективного резонансного перехода ($\bar{\omega} \approx \Omega$), а $g$ — эффективная константа связи. Буквами $H.c.$ и $c.c.$ обозначаем слагаемые, эрмитово и комплексно-сопряженные предыдущим слагаемым, соответственно. Явным написанием аргумента времени у операторозначных величин подчеркиваем их принадлежность представлению взаимодействия.

В ансамблях одинаковых квантовых частиц специфика алгебры операторов квантовой системы $X_+$, $X_-$ определяет все многообразие нелинейных когерентных эффектов, типа фотонного эхо, и другие. Например, в случае гармонических одинаковых квантовых осцилляторов $X_+$ представляет оператор рождения $c^+$ кванта $\hbar\Omega$, $X_+ = c^+$. Оператор $X_-$ представляет оператор уничтожения кванта $\hbar\Omega$, $X_- = c$. Коммутационные соотношения $[c, c^+] = 1$ отвечают алгебре Гейзенберга — Вейля. Эта алгебра в математическом смысле разрешима [11], и поэтому в ансамблях гармонических осцилляторов эффекты, типа фотонного эхо, невозможны [12]. Причину такого положения дел мы рассмотрим в третьем разделе статьи.

В случае атомов $X_+ = R_+$ и $X_- = R_-$ удовлетворяют коммутационным соотношениям $[R_3, R_\pm] = \pm R_\pm$, $[R_+, R_-] = 2R_3$ алгебры su(2), которая неразрешима. Поэтому оказываются возможными эффекты, типа фотонного эхо, сверхизлучения, оптической нутации и др. [1—5, 9, 10, 12, 13].

Сейчас различные многорезонаторные системы предлагаются для устройств квантовой памяти [14, 15]. При этом квантовый гармонический осциллятор является основной моделью подобных квантовых систем. Он эффективно моделирует не только резонаторные устройства [3, 4, 16], но и сверхпроводящие структуры на основе эффекта Джозефсона [17, 18]. Поэтому представляет интерес построение моделей с участием квантовых гармонических осцилляторов, в которых бы реализовалось все многообразие когерентных нелинейных эффектов, некоторые из которых, например фотонное эхо, востребованы в устройствах квантовой памяти и квантовых процессорах.

## РАССМАТРИВАЕМЫЕ ОБЪЕКТЫ И ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Пусть имеются два одномодовых микрорезонатора, в общей области которых присутствуют как кванты внутрирезонаторных мод, так и внутрирезонаторный неподвижный атом (или молекула, квантовая точка и т. п., или их ансамбль). Также внутрирезонаторный атом может взаимодействовать с внешним классическим когерентным полем. Будем характеризовать имеющиеся объекты следующим образом.

1. Микрорезонаторы отличаются высокой добротностью, единственной собственной модой частоты $\omega_A$ и $\omega_r$ у каждого из микрорезонаторов, операторами рождения $A^+$, $r^+$ и уничтожения $A$, $r$ фотонов этих мод и квантовыми состояниями указанных фотонов. При этом потерями на зеркалах, наличием других мод, пренебрегаем. Гамильтонианы микрорезонаторов даются выражениями

$$H_c = \hbar\omega_c c^+ c,\ H_r = \hbar\omega_r r^+ r,$$

где $[c, c^+, c] = -c$, $[c, c^+, c^+] = c^+$, $[c, c^+] = 1$, $[r, r^+, r] = -r$, $[r, r^+, r^+] = r^+$, $[r, r^+] = 1$. Операторы различных резонаторов коммутируют друг с другом. Можно также говорить об одном двухмодовом резонаторе с независимыми модами и даже о многомодовом резонаторе, если дальнейшее условие резонанса будет затрагивать только указанные две моды.

2. Атомы, молекулы, квантовые точки для простоты будем именовать просто атомами с квантовыми стационарными невырожденными состояниями $|E_j>$ энергии $E_j$ в случае изолированного атома. Считаем, что уровень $|E_g>$ является основным, а некоторый уровень $|E_u>$ связан с основным оптически запрещенным (двухквантовым) переходом $E_u \to E_g$. Атомы сосредоточены в объеме с размерами, много меньшими длин электромагнитных волн, а взаимодействием между атомами пренебрегаем, кроме диполь-дипольного. Диполь-дипольное взаимодействие учитывается автоматически в высших порядках алгебраической теории возмущений [19, 20]. Число атомов $N_a$ со временем не меняется. Гамильтониан отдельного $i$-го атома имеет вид

$$H_a^{(i)} = \sum_j E_j\,|E_j>^{(i)}<E_j|^{(i)},$$

$$\sum_j |E_j>^{(i)}<E_j|^{(i)} = 1^{(i)},$$

$$<E_j|^{(i)}E_k>^{(i)} = \delta_{jk},\ E_j - E_i = \hbar\Omega_{ji},$$

а гамильтониан всей атомной подсистемы является прямой суммой гамильтонианов отдельных атомов

$$H_a = \sum_{i=1}^{N_a} H_a^{(i)}.$$

Верхний индекс у векторов состояний и операторов отмечает пространство состояний $i$-го атома. В данной статье при формулировке модели резонансного взаимодействия с атомно-фотонным кластером часто будем рассматривать только один атом $N_a = 1$, а квантовые состояния не будут характеризоваться определенной четностью, так что и прямой двухфотонный переход $E_u \to E_g$ не запрещен.

3. Внешнее классическое когерентное электромагнитное поле характеризуется напряженностью электрического поля $E = \mathscr{E}(t)e^{i(\vec{\kappa}\vec{r} - \nu t)} + c.c.$ с несущей частотой $\nu$, волновым вектором $\vec{\kappa}$ и медленно меняющейся по сравнению с $e^{\pm i(\vec{\kappa}\vec{r} - \nu t)}$ амплитудой

$\mathscr{E}$. Для простоты считаем, что атомы локализованы в окрестности точки $\vec{r} = 0$. Чтобы различать разные модели атомно-фотонного кластера, в одной из моделей для несущей частоты когерентной волны будем использовать обозначение $\overline{\omega}$, а в другой будем говорить о двухчастотной когерентной волне с несущими частотами $\nu_1$ и $\nu_2$.

4. Предполагаем, что электромагнитные поля задачи, как внешние, так и микрорезонаторных мод, взаимодействуют электродипольным образом с атомами, что описывается операторами взаимодействия в представлении взаимодействия

$$V_c(t) = \gamma_c (c e^{-i\omega_c t} + c^+ e^{i\omega_c t}) \sum_{kj} d_{kj} e^{i\Omega_{kj} t} \,|\, E_k >< E_j \,|,$$

$$V_r(t) = \gamma_r (r e^{-i\omega_r t} + r^+ e^{i\omega_r t}) \sum_{kj} d_{kj} e^{i\Omega_{kj} t} \,|\, E_k >< E_j \,|,$$

$$V_e(t) = (\mathscr{E} e^{-i\nu t} + \mathscr{E}^* e^{i\nu t}) \sum_{kj} d_{kj} e^{i\Omega_{kj} t} \,|\, E_k >< E_j \,|. \quad (2)$$

Вид указанных операторов является следствием вида $-\vec{E}\vec{d}$ электродипольного оператора взаимодействия, $\vec{d}$ — оператор дипольного момента атома, $\vec{E}$ — оператор напряженности электрического поля, которые создают осцилляторы в месте нахождения атома. Константы $\gamma_c$ и $\gamma_r$ учитывают местоположение атома в микрорезонаторах, а знак «минус» включаем в матричные элементы $d_{kj}$.

В системе представленных объектов возможно множество резонансных процессов. Их классификацию удобно проводить в терминах алгебраической теории возмущений. При этом нас интересует поведение объектов по отношению к поглощению (испусканию) одного кванта когерентной волны, поскольку именно так мы определяем эффективный излучатель. Первому порядку алгебраической теории возмущений отвечают однофотонные резонансные процессы, когда один поглощенный квант вызывает возбуждение атомной или фотонной подсистем. Здесь можно говорить о резонансе первого порядка. Это детально исследовано в рамках резонансного взаимодействия двухуровневой системы и не предполагает совместного взаимодействия всех перечисленных объектов.

Во втором и более высоких порядках алгебраической теории возмущений возможно множество различных резонансных процессов, среди которых выделим процессы с возбуждением в атомной подсистеме и без такого возбуждения. При этом интересуемся процессами совместного взаимодействия с когерентным классическим полем атомной и фотонной подсистем. Мы также предполагаем отсутствие резонансов первого порядка. Эффективный оператор взаимодействия удобно искать в представлении взаимодействия при помощи алгебраической теории возмущений. Обязательность атомной подсистемы в атомно-фотонном кластере и невозможность чисто фотонного кластера следует из структуры слагаемых алгебраической теории возмущений и разрешимости алгебры Гейзенберга — Вейля.

## АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Построение эффективного оператора взаимодействия между рассматриваемыми объектами состоит в таком преобразовании исходного вектора состояния всех объектов рассматриваемой системы $|\Psi(t)>$,

$$|\tilde{\Psi}(t) \geq \exp(-iS(t))\,|\Psi(t)>, \quad (3)$$

и разложения генератора $S(t)$ преобразования вектора состояния и преобразованного суммарного оператора взаимодействия $V(t) = V_c(t) + V_r(t) + V_e(t)$,

$$S(t) = S^{(1,0,0)}(t) + S^{(0,1,0)}(t) + \ldots,$$

$$\tilde{V}(t) = \tilde{V}^{(1,0,0)}(t) + \tilde{V}^{(0,1,0)}(t) + \tilde{V}^{(0,0,1)}(t) +$$

$$+ \tilde{V}^{(1,1,0)}(t) + \tilde{V}^{(1,1,1)}(t) + \ldots, \quad (4)$$

чтобы в эффективном гамильтониане $\tilde{V}(t)$ в представлении взаимодействия не было бы быстроменяющихся во времени слагаемых. Это требование, с одной стороны, отвечает методу усреднения Крылова — Боголюбова — Миропольского [6, 7] и алгебраической теории возмущений [9]. С другой стороны, оно является неотъемлемым условием применимости марковского приближения, если в рассмотрение, наряду с классической когерентной волной, включить термостатное поле, окружающее рассматриваемую систему [21, 22]. Требование отсутствия быстроменяющихся во времени слагаемых однозначно определяет слагаемые эффективного гамильтониана $\tilde{V}(t)$,

$$\tilde{V}(t) = \exp(-iS(t))V(t)\exp(iS(t)) -$$

$$- i\hbar \exp(-iS(t))\frac{d}{dt}\exp(iS(t)),$$

при использовании формулы Кэмпбелла—Бейкера—Хаусдорфа:

$$\tilde{V}(t) = V - i[S,V] - \tfrac{1}{2}[S,[S,V]] + \tfrac{i}{6}[S,[S,[S,V]]] +$$

$$+ \ldots - i\hbar e^{-iS} \tfrac{d}{dt} e^{iS}.$$

Верхние индексы в разложениях (4) отмечают слагаемые, имеющие соответствующий порядок по константе связи осцилляторов и когерентного поля атомом: левый — по константе $\gamma_c$, средний — по константе $\gamma_r$, правый — по связи когерентного поля. Общие формулы алгебраической теории возмущений нетрудно получить, используя формулу Кемпебелла — Бейкера — Хаусдорфа и соответствующие разложения в ряды. Они приведены в [5, 9, 10]. Например,

$$\tilde{V}^{(1,0,0)}(t) = \hbar \frac{dS^{(1,0,0)}(t)}{dt} + V_c(t),$$

$$\tilde{V}^{(1,1,0)}(t) = i\hbar\frac{d}{dt}S^{(1,1,0)}(t) - \frac{i}{2}[S^{(1,0,0)}(t), V_r(t)] - \\ -\frac{i}{2}[S^{(1,0,0)}(t), \tilde{V}^{(0,1,0)}(t)] - \\ -\frac{i}{2}[S^{(0,1,0)}(t), V_c(t)] - \frac{i}{2}[S^{(0,1,0)}(t), \tilde{V}^{(1,0,0)}(t)] \tag{5}$$

и т. п.

Можно иначе представить выражения (5), используя явное обозначение различных типов слагаемых при помощи штрихов. Пусть штрих у выражения, например, $V_c'(t)$, обозначает слагаемые, медленно меняющиеся во времени, а два штриха, например, $V_c''(t)$ — слагаемые, быстро меняющиеся во времени. Тогда мы каждый оператор представляем в виде суммы медленно и быстро меняющихся во времени слагаемых, например, $V_c''(t) = V_c'(t) + (t)V_c''(t)$. Оставляя в эффективном гамильтониане только медленно меняющиеся во времени слагаемые, мы, тем самым, относим все быстро меняющиеся слагаемые к генератору унитарного преобразования. При этом произведения медленно меняющихся во времени величин на быстроменяющиеся, очевидно, быстро меняются во времени, тогда как произведения быстрых во времени выражений могут содержать не только быстрые во времени слагаемые, но и слагаемые, которые медленно меняются во времени. В таких обозначениях выражения (5) принимают вид

$$\tilde{V}^{(1,0,0)}(t) = V_c'(t),\ \ \tilde{V}^{(0,1,0)}(t) = V_r'(t),\ \ \tilde{V}^{(0,0,1)}(t) = V_e'(t),$$

$$\hbar\frac{dS^{(1,0,0)}(t)}{dt} + V_c''(t) = 0,\ \hbar\frac{dS^{(0,1,0)}(t)}{dt} + V_r''(t) = 0,$$

$$\hbar\frac{dS^{(0,0,1)}(t)}{dt} + V_e''(t) = 0;$$

$$\tilde{V}^{(1,1,0)}(t) = -\tfrac{i}{2}[S^{(1,0,0)}(t), V_r''(t)]' - \tfrac{i}{2}[S^{(0,1,0)}(t), V_c''(t)]',$$

$$\tilde{V}^{(0,1,1)}(t) = -\tfrac{i}{2}[S^{(0,1,0)}(t), V_e''(t)]' - \tfrac{i}{2}[S^{(0,0,1)}(t), V_r''(t)]',$$

$$\tilde{V}^{(1,0,1)}(t) = -\tfrac{i}{2}[S^{(1,0,0)}(t), V_e''(t)]' - \\ -\tfrac{i}{2}[S^{(0,0,1)}(t), V_c''(t)]', \tag{6}$$

$$\hbar\frac{d}{dt}S^{(1,1,0)}(t) - \frac{i}{2}[S^{(1,0,0)}(t), V_r(t)]'' - \\ -\frac{i}{2}[S^{(1,0,0)}(t), \tilde{V}^{(0,1,0)}(t)] - \\ -\frac{i}{2}[S^{(0,1,0)}(t), V_c(t)]'' - \frac{i}{2}[S^{(0,1,0)}(t), \tilde{V}^{(1,0,0)}(t)], \ldots$$

$$\tilde{V}^{(2,0,0)}(t) = -\frac{i}{2}[S^{(1,0,0)}(t), V_c''(t)]',$$

$$\tilde{V}^{(0,2,0)}(t) = -\frac{i}{2}[S^{(0,1,0)}(t), V_r''(t)]' \ldots$$

Введенные обозначения позволяют выразить условие отсутствия резонансов первого порядка как

$$V_c'(t) = V_r'(t) = V_e'(t) = 0. \tag{7}$$

Соответственно, и последующие формулы упрощаются очевидным образом.

Представленная коммутаторная структура эффективного оператора взаимодействия объясняет также отсутствие эффектов, типа фотонного эхо, в системах квантовых гармонических осцилляторов. Дело в том, что унитарное преобразование (3) можно также рассматривать как преобразование вектора состояния из начального момента времени в момент времени $t$, генератором которого служит гамильтониан системы. В случае алгебры Гейзенберга — Вейля коммутатор осцилляторных операторов либо равен нулю, либо пропорционален тождественному оператору (разрешимость алгебры). Тогда вычисления по теории возмущений уже в первом порядке показывают, что никакого сигнала эхо нет и быть не может, как и нет таких эффектов как высокочастотный эффект Штарка в поле когерентной волны. Отсюда также следует невозможность чисто фотонного кластера из гармонических осцилляторов, в которых нет резонансов первого порядка. Однако, говоря об атомно-фотонном кластере, мы оставим это название в случае, когда в атомной системе совершаются реальные квантовые переходы и будем использовать термин фотонный кластер, когда в атомной системе имеют место только виртуальные переходы, так что начальное состояние атома не меняется (считаем, что в начальном состоянии атом заселяет только нижнее энергетическое состояние).

## АТОМНО-ФОТОННЫЙ КЛАСТЕР

Для реализации резонанса второго порядка в описанной системе достаточно иметь один одномодовый микрорезонатор, например, с частотой моды $\omega_c$, и ансамбль $N_a$ одинаковых неподвижных одинаковых частиц, например, атомов. Энергетические уровни основного состояния атома $E_g$ и некоторого возбужденного состояния $E_u$ связаны двухквантовым переходом и выполнено условие комбинационного резонанса

$$(E_u - E_g)/\hbar \equiv \Omega_0 \approx \nu - \omega_c. \tag{8}$$

Эту ситуацию удается проанализировать аналитически. Считаем, что $\gamma_r = 0$ и не рассматриваем процессы, типа $\tilde{V}^{(200)}$ и подобные. Нетрудно получить

$$\tilde{V}^{(101)} = \gamma_c c^+ \sum_i |E_u\rangle\langle E_g|^{(i)} \mathscr{E} e^{-i\nu t}\Pi_{ug}(-\omega_c) + H.c.,$$

где введен стандартный параметр теории оптических резонансных процессов [5,10]

$$\Pi_{nm}(\nu) = \sum_j \frac{d_{nj}d_{jm}}{\hbar}\left(\frac{1}{\Omega_{jn}+\nu} + \frac{1}{\Omega_{jm}-\nu}\right) = \Pi^*_{mn}(-\nu). \tag{9}$$

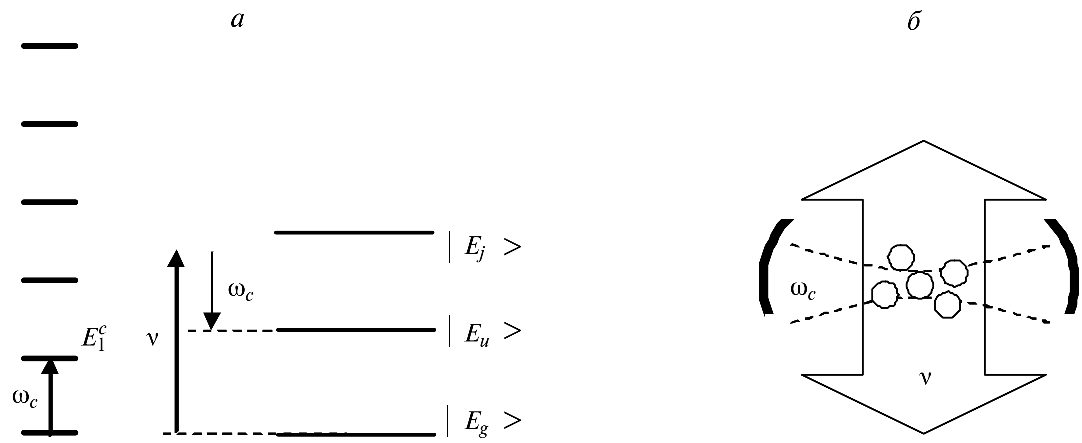


**Рис. 1.** Условие комбинационного резонанса и структура энергетических уровней атомов и фотонной моды (а), локализованных в микрорезонаторе (б), в случае (слева) воздействия внешней когерентной волны.

В силу условия резонанса (7) для резонансных атомных энергетических уровней $|E_g>$ и $|E_u>$ справедливо соотношение $\Pi_{ug}(\nu) = \Pi_{ug}(-\omega_c)$.

Эффективный гамильтониан $V^{eff}(t) = \tilde{V}^{(101)}(t)$ можно также записать как (1) с параметрами

$$g = \gamma_c \mu \Pi_{ug}(-\omega_c),\ X_+ = c^+ R_+,\ X_- = cR_-,$$
$$\Omega = \omega_c + (E_u - E_g)/\hbar.$$

Фактор $\mu \sim 1$ введен для учета геометрии задачи.

Операторы $X_\pm$ и $X_0 = \dfrac{R_3 + c^+ c}{2}$, где

$$R_+ = |E_u><E_g|,\ R_- = |E_g><E_u|,$$
$$R_3 = \tfrac{1}{2}(|E_u><E_u| - |E_g><E_g|), \qquad (10)$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[X_0, X_\pm] = \pm X_\pm,\ [X_-, X_+] = p_n(X_0 + 1) - p_n(X_0) \qquad (11)$$

с характеристическим полиномом

$$X_+ X_- = p_n(X_0) = c_0 \prod_{i=1}^{n} (X_0 - q_i)$$

третьего порядка ($n = 3$) с параметрами

$$c_0 = -1,\ q_1 = (r - X)/2,\ q_2 = (X - 3r)/2,$$
$$q_3 = (X + r)/2 + 1.$$

Операторы

$$X = c^+ c - R_3 + r$$
$$\text{и } R^2 = R_+ R_- + R_3^2 - R_3 = R_- R_+ + R_3^2 + R_3$$

являются операторами Казимира рассматриваемой алгебры, причем на неприводимом представлении собственные значения оператора $X$ неотрицательны, а оператора $R^2$ равны $r(r+1)$. Описанная алгебра бесконечномерная и называется полиномиальной алгеброй третьего порядка [23]. Ее представления и применения в оптике рассмотрены в работах [24—27].

Основной параметр атомно-фотонного кластера $\Pi_{ug}(-\omega_c)$ отличен от нуля, вообще говоря, и в случае, когда атомные состояния могут характеризоваться определенной четностью и в произвольном случае.

Таким образом, вовлечение реальных квантовых переходов в атомах в оптических резонансных процессах второго порядка позволяет ввести в рассмотрение атомно-фотонный кластер как единый излучатель, при взаимодействии с которым возможен весь спектр нелинейно-оптических эффектов вследствие коммутационных соотношений (9).

## ФОТОННЫЙ КЛАСТЕР

Для системы из двух квантовых гармонических осцилляторов с различными частотами $\omega_c$ и $\omega_r$ существует естественное условие резонанса,

$$\omega_r - \omega_c \approx \varpi, \qquad (12)$$

которое «выделяет» двухуровневую систему (рис. 2). Однако разрешимость алгебры Гейзенберга — Вейля делает невозможным эффективное резонансное взаимодействие когерентной волны с такой двухуровневой системой. Другими словами, рассматривая только гармонические осцилляторы, невозможно получить эффективный гамильтониан в форме (1), отвечающий условию (11), и невозможно формирование когерентных эффектов двухуровневых систем, типа фотонного эхо.

Тем не менее реализовать ситуацию, представленную на рис. 2, можно, если рассматривать нерезонансное взаимодействие когерентной волны не с микрорезонаторными модами $\omega_c$ и $\omega_r$, а только с внутрирезонаторными атомами. Микрорезонаторные моды также должны нерезонансно взаимодействовать с теми же внутрирезонаторными атомами. Опять возникает атомно-фотонный кластер, в котором, в отличие от предыдущего случая, в атомной подсистеме при взаимодействии с когерентной волной в условиях (11) реальных квантовых переходов не происходит. Поскольку атомная подсистема не меняет своего состояния, а условие резонанса (11) относится только к фотонным системам, то такой кластер будем называть фотонным. Исходные операторы взаимодействия в таком случае имеют вид (2), но, в отличие от предыдущего раздела, необходимо рассматривать два микрорезонатора $\omega_c$ и $\omega_r$. Вклад в эффективный обсуждаемого резонансного взаимодействия гамильтониан дает только слагаемое

$$\tilde{V}^{(1,1,1)}(t) = -\frac{i}{2}[S^{(1,1,0)},V_e]' - \frac{i}{2}[S^{(1,0,1)},V_r]' - \\ -\frac{i}{2}[S^{(0,1,1)},V_c]' - \tfrac{1}{12}[S^{(1,0,0)}(t),[S^{(0,1,0)}(t),V_e]]' - \\ -\tfrac{1}{12}[S^{(1,0,0)}(t),[S^{(0,0,1)}(t),V_r]' - \\ -\tfrac{1}{12}[S^{(0,1,0)}(t),[S^{(1,0,0)}(t),V_e]' - \\ -\tfrac{1}{12}[S^{(0,1,0)}(t),[S^{(0,0,1)}(t),V_c]' - \\ -\tfrac{1}{12}[S^{(0,0,1)}(t),[S^{(1,0,0)}(t),V_r]' - \\ -\tfrac{1}{12}[S^{(0,0,1)}(t),[S^{(0,1,0)}(t),V_c]]'.$$

Тот факт, что в системе, как считаем, нет никаких резонансов, кроме резонанса, описанного выше ((11) и рис. 2), выражается в требованиях

$$\tilde{V}^{(1,0,0)}(t) = \tilde{V}^{(0,1,0)}(t) = \tilde{V}^{(0,0,1)}(t) = \tilde{V}^{(1,1,0)}(t) = \\ = \tilde{V}^{(0,1,1)}(t) = \tilde{V}^{(1,0,1)}(t) = 0.$$

Необходимые слагаемые генератора унитарного преобразования выведены из уравнений [9]

$$\hbar\frac{dS^{(1,0,0)}(t)}{dt} + V_c(t) = 0\,,\ \hbar\frac{dS^{(0,1,0)}(t)}{dt} + V_r(t) = 0\,,$$

$$\hbar\frac{dS^{(0,0,1)}(t)}{dt} + V_e(t) = 0\,,$$

$$\hbar\frac{dS^{(1,1,0)}(t)}{dt} - \tfrac{i}{2}[S^{(1,0,0)}(t),V_r(t)] - \tfrac{i}{2}[S^{(0,1,0)}(t),V_c(t)] = 0,$$

$$\hbar\frac{dS^{(0,1,1)}(t)}{dt} - \tfrac{i}{2}[S^{(0,0,1)}(t),V_r(t)] - \tfrac{i}{2}[S^{(0,1,0)}(t),V_e(t)] = 0,$$

$$\hbar\frac{dS^{(1,0,1)}(t)}{dt} - \tfrac{i}{2}[S^{(1,0,0)}(t),V_e(t)] - \tfrac{i}{2}[S^{(0,0,1)}(t),V_c(t)] = 0.$$

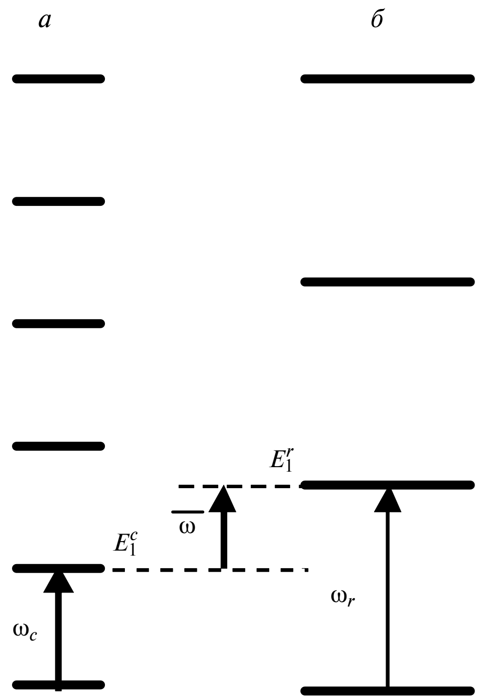


**Рис. 2.** Спектры гармонических осцилляторов (а) и (б). В поле когерентной волны эффективно осуществляется переход с уровня на уровень с поглощением кванта и обратно, с излучением кванта. При этом в силу условия другие энергетические уровни осцилляторов при определенных начальных условиях можно считать не задействованными. Возникающая двухуровневая система отмечена пунктиром.

В результате стандартных вычислений получаем эффективный гамильтониан резонансного взаимодействия фотонного кластера с когерентной волной в виде (1) с операторами:

$$X_+ = cr^+\,,\ X_- = c^+r\,,\ \Omega = \omega_r - \omega_c\,,$$

$$g = \gamma_r\gamma_c\mu\Pi_{ph}(\bar{\omega})|E_g><E_g|\,,$$

$$\Pi_{ph}(\bar{\omega}) = \\ = \sum_j\left(\frac{\Pi_{gj}(\bar{\omega})+\Pi_{gj}(-\omega_r)}{\Omega_{gj}+\omega_r-\bar{\omega}}d_{jg} + d_{gj}\frac{\Pi_{jg}(\bar{\omega})+\Pi_{jg}(-\omega_r)}{\Omega_{gj}-\omega_r+\bar{\omega}}\right) + \\ +\sum_j\left(\frac{\Pi_{gj}(\omega_c)+\Pi_{gj}(-\omega_r)}{\Omega_{gj}+\omega_r-\omega_c}d_{jg} + d_{gj}\frac{\Pi_{jg}(\omega_c)+\Pi_{jg}(-\omega_r)}{\Omega_{gj}-\omega_r+\omega_c}\right) + \\ +\sum_j\left(\frac{\Pi_{gj}(\omega_c)+\Pi_{gj}(\bar{\omega})}{\Omega_{gj}-\bar{\omega}-\omega_c}d_{jg} + d_{gj}\frac{\Pi_{jg}(\omega_c)+\Pi_{jg}(\bar{\omega})}{\Omega_{gj}+\bar{\omega}+\omega_c}\right). \quad (13)$$

Фактор $\mu \sim 1$ введен для учета геометрии задачи.

Основной параметр фотонного кластера $\Pi_{ph}(\bar{\omega})$ отличен от нуля только в случае, когда атомные состояния не характеризуются четностью.

Заметим, что форма параметра (12) непосредственно отвечает слагаемым $-\frac{i}{2}[S^{(1,1,0)},V_e]'-$ $-\frac{i}{2}[S^{(1,0,1)},V_r]'-\frac{i}{2}[S^{(0,1,1)},V_c]'$. Однако если учесть условие резонанса (11), то (12) можно переписать в виде

$$\Pi_{ph}(\bar{\omega})=$$
$$=\sum_j\left(\frac{\Pi_{gj}(\bar{\omega})+\Pi_{gj}(-\omega_r)}{\Omega_{gj}+\omega_c}d_{jg}+d_{gj}\frac{\Pi_{jg}(\bar{\omega})+\Pi_{jg}(-\omega_r)}{\Omega_{gj}-\omega_c}\right)+$$
$$+\sum_j\left(\frac{\Pi_{gj}(\omega_c)+\Pi_{gj}(-\omega_r)}{\Omega_{gj}+\bar{\omega}}d_{jg}+d_{gj}\frac{\Pi_{jg}(\omega_c)+\Pi_{jg}(-\omega_r)}{\Omega_{gj}-\bar{\omega}}\right)+$$
$$+\sum_j\left(\frac{\Pi_{gj}(\omega_c)+\Pi_{gj}(\bar{\omega})}{\Omega_{gj}-\omega_r}d_{jg}+d_{gj}\frac{\Pi_{jg}(\omega_c)+\Pi_{jg}(\bar{\omega})}{\Omega_{gj}+\omega_r}\right).$$

Такая форма параметра $\Pi_{ph}(\bar{\omega})$ непосредственно отвечает другим слагаемым эффективного оператора взаимодействия $\tilde{V}^{(1,1,1)}(t)$. При сравнении этого выражения с (12) видна характерная структура параметров эффективных резонансных моделей, аналогичная и другим условиям резонанса, таким, например, как в случае атомно-фотонного кластера предыдущего раздела.

Полученные результаты для фотонного кластера можно интерпретировать как физическую реализацию представления Йордана — Швингера алгебры su(2). Представление об эффективности этого представления в расчетах задача нелинейной оптики можно получить из [10]. Сам факт, что реальное взаимодействие рассмотренного фотонного кластера с когерентной волной описывается в терминах алгебры su(2), говорит о возможности наблюдения в ансамблях таких объектов всего спектра нелинейных когерентных эффектов, характерных для резонансного взаимодействия когерентной волны с ансамблем двухуровневых атомов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Квантовые осцилляторные системы постоянно находятся в фокусе внимания не только физиков, но и математиков. В работах [28, 29] развивается специфический метод рассмотрения осцилляторных систем, обобщающий преобразования Боголюбова, в статьях [30, 31] предложены другие варианты построения теории возмущений, отличные от алгебраической теории возмущений. Причем упор сделан на выводе кинетических уравнений, описывающих взаимодействие квантовых систем с термостатом. В нашем подходе взаимодействие с термостатом состоит в замене амплитуды электрического поля классической когерентной волны на соответствующие операторы термостата и дальнейшее рассмотрение и решение квантовых стохастических дифференциальных уравнений в марковском приближении, согласно общей схеме [9]. В какой мере получится согласовать кинетические уравнения для рассмотрения релаксационных процессов — вопрос открытый, поскольку непонятно, как в подходах [28—31] будут вводиться рассмотренные в статье кластеры, происхождение моделей которых обязано алгебраической теории возмущений. Наш метод объединяет и вывод кинетического уравнения, и сведение резонансных взаимодействий с квантовыми системами к эффективным моделям и системам. Любопытно, что такие разные задачи, как построение двухуровневой модели в резонансном взаимодействии ангармонического осциллятора с когерентной волной [32] и рассмотренная в данной статье ситуация с ансамблем гармонических квантовых осцилляторов, решены в рамках алгебраической теории возмущений. Найденная физическая реализация представления Йордана — Швингера алгебры su(2) позволяет в дальнейшем рассматривать на квантовых гармонических осцилляторах все нелинейно-оптические эффекты, характерные для двухуровневых систем [33]. При этом рассмотрение таких эффектов представляет собой отдельную задачу, так как они еще определяются специфическими начальными условиями.

Автор выражает благодарность Калачеву А. А. и Сазонову С. В. за полезные обсуждения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутылкин В.С., Каплан А.Е., Хронопуло Ю.Г., Якубович Е.И.* Резонансные взаимодействия света с веществом. М.: Наука, 1977. 350 с.
2. *Мандель Л., Вольф Э.* Оптическая когерентность и квантовая оптика, М.: Физматлит, 2000. 896 с.
3. *Скалли М.О., Зубайри М.С.* Квантовая оптика. М.: Физматлит, 2003. 512 с.
4. *Шляйх В.П.* Квантовая оптика в фазовом пространстве. М.: Физматлит, 2005. 760 с.
5. *Maimistov A.I., Basharov A.M.* Nonlinear optical waves, Dordrecht, Kluwer Academic, 1999. 650 p.
6. *Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н.* Введение в нелинейную механику. М.: РХД, 2004. 352 с.
7. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 410 с.
8. *Bogaevski V.N., Povzner A.* Algebraic methods in nonlinear perturbation theory. Springer, 1991.
9. *Башаров А.М.* // ЖЭТФ. 2020. Т. 158. № 5. С. 978; *Basharov A.M.* // JETP. 2020. V. 131. No. 5. P. 853.
10. *Башаров А.М.* Фотоника. Метод унитарного преобразования в нелинейной оптике. М.: МИФИ, 1990. 108 с.
11. *Исаев А.П., Рубаков В.А.* Теория групп и симметрий. М.: URSS, 2018. 504 с.
12. *Копвиллем У.Х., Пранц С.В.* Поляризационное эхо. М.: Наука, 1985. 192 с.

13. *Алексеев А.И., Башаров А.М.* // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1982. Т. 46. С. 557.
14. *Моисеев С.А., Перминов Н.С.* // Письма в ЖЭТФ. 2020. Т. 111. С. 602; *Moiseev S.A., Perminov N.S.* // JETP Lett. 2020. V. *111.* P. 500.
15. *Моисеев С.А., Перминов Н.С., Желтиков А.М.* // Письма в ЖЭТФ. 2022. Т. 115. № 5-6. С. 353; *Moiseev S.A., Perminov N.S., Zheltikov A.M.* // JETP Lett. 2022. V. 115. No. 6. P. 318.
16. *Dutra S.M.* Cavity quantum electrodynamics: the strange theory of light in a box. N.Y.: J. Wiley, 2005. 389 p.
17. *Krantz P., Kjaergaard M., Yan F. et al.* // Appl. Phys. Rev. 2019. V. 6. No. 2. P. 21318.
18. *Gu X., Kockum A., Miranowicz A. et al.* // Phys. Reports. 2017. V. 718-719. P. 1.
19. *Basharov A.M.* // Phys. Rev. A 2011. V. 84. Art. No. 013801.
20. *Cohen-Tannoudji C., Dupont-Roc J., Grynberg G.* Photons and atoms. Introduction to quantum electrodynamics. N.Y.: J. Wiley, 1997. 488 p.
21. *Трубилко А.И., Башаров А.М.* // Письма в ЖЭТФ. 2019. Т. 110. № 7-8. С. 505; *Trubilko A.I., Basharov A.M.* // JETP Lett. 2019. V. 110. No. 7. P. 517.
22. *Basharov A.M.* // J. Phys. Conf. Ser. 2021. V. 1890. Art. No. 012001.
23. *Карасев В.П.* // ТМФ. 1993. Т. 95. № 1. С. 3; *Karasev V.P.* // Theor. Math. Phys. 1993. V. 95. No. 1. P. 367.
24. *Vadeiko I.P., Miroshnichenko G.P., Rybin A.V., Timonen J.* // Phys. Rev. A. 2003. V. 67. Art. No. 053808.
25. *Башаров А.М.* // ЖЭТФ. 2010. Т. 137. С. 1090; *Basharov A.M.* // JETP. 2010. V. 110. P. 951.
26. *Башаров А.М.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2011. Т. 75. № 2. С. 176; *Basharov A.M.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2011. V. 75. No. 2. P. 161.
27. *Башаров А.М.* // Учен. зап. КГУ. Сер. физ.-мат. науки. 2010. Т. 152. № 3. С. 43.
28. *Teretenkov A.E.* // Math. Notes. 2022. V.112. No. 2. P. 318.
29. *Teretenkov A.E.* // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2019. V. 22. Art. No. 1930001.
30. *Trushechkin A.* // Phys. Rev. A. 2021. V. 103. Art. No. 062226.
31. *Timofeev G.M., Trushechkin A.S.* // Int. J. Modern Phys. A. 2022. V. 37. Art. No. 2243021.
32. *Алексашин М.К., Башаров А.М., Трубилко А.И.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2023. Т. 87. № 11. С. 1642; *Aleksashin M.K., Basharov A.M., Trubilko A.I.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2023. V. 87. No. 11. P. 1702.
33. *Эберли Дж., Аллен Л.* Оптический резонанс и двухуровневые атомы. М.: Мир, 1978. 222 с.


# Atom-photon cluster in nonlinear and quantum optics


**A. M. Basharov[1,*]**

*[1] National Research Center Kurchatov Institute, Moscow, 123182, Russia*
*[*] e-mail: basharov@gmail.com*



We described the constructed models of radiative quantum systems analogous of multiphoton and Raman resonances of classical field quanta on an atomic system with the participation of resonator mode quanta. A distinctive feature of the models is the possibility to describe an atomic ensemble and quanta using either the generators of polynomial algebra or the two-mode Jordan-Schwinger representation of the su(2) algebra, that could point to atomic-photon and/or photon clusters. The algebras are arising that are mathematically insoluble, in contrast to the Heisenberg — Weyl algebra, which makes it possible to implement and observe fundamental effects of coherent nonlinear optics, such as photon echo, optical nutation, and superradiance in ensembles of the described clusters.