Волновые явления: физика и применения

Редактор тематического выпуска
канд. физ.-мат. наук **А. Н. Калиш**

ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2024, том 88, № 2, с. 248–252

УДК 536.75

О КВАНТОВЫХ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЯХ МИКРОЧАСТИЦЫ В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

© 2024 г. С. В. Сазонов[1, 2, *]

[1]Федеральное государственное бюджетное учреждение «Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Москва, Россия

[2]Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)», Москва, Россия

*E-mail: sazonov.sergey@gmail.com

Поступила в редакцию 25.09.2023

После доработки 16.10.2023

Принята к публикации 31.10.2023

С помощью канонического квантования анализируется движение микрочастицы в среде с вязким сопротивлением. Детально рассматриваются локализованные волновые пакеты типа когерентных состояний. Установлено, что вязкое сопротивление подавляет квантовые свойства микрочастицы, что позволяет рассматривать вязкую среду как классический прибор.

DOI: 10.31857/S0367676524020144, **EDN:** RRIVGO

ВВЕДЕНИЕ

Квантовое описание движения микрочастиц в поле консервативных сил в настоящее время не вызывает принципиальных вопросов. Здесь выстроена непротиворечивая аксиоматика. Что же касается квантования в поле диссипативных сил, то здесь не все так однозначно.

Реальные физические системы в подавляющем большинстве являются открытыми. В таких системах приходится учитывать необратимые процессы релаксации, происходящие в соответствии со вторым началом термодинамики.

К настоящему времени предложены различные подходы к квантово-механическому описанию движения в открытых средах. Наиболее простым и продуктивным нам представляется подход, предложенный в [1–5], где используется канонический формализм с явно зависящим от времени гамильтонианом.

В настоящей работе мы на основе канонического формализма рассмотрим движение частицы в вязкой среде в присутствие однородной консервативной силы.

Следуя подходу, изложенному в [6], мы рассмотрим квантовые когерентные состояния частицы в вязкой среде, при которых минимизируются соотношения неопределенностей типа «координата – импульс», а волновые функции в различных случаях имеют вид локализованных гауссовых пакетов.

КЛАССИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ

Здесь нас будет интересовать поведение точечного квантового объекта, классический аналог которого подчиняется уравнению движения вида

$$m\ddot{\vec{r}} + \gamma m\dot{\vec{r}} = \vec{F}(t) - \nabla U\ , \qquad (1)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор объекта, m – его масса, γ – коэффициент сопротивления при вязкой силе, пропорциональной скорости $\dot{\vec{r}}$ движения объекта, $\vec{F}(t)$ – внешняя консервативная сила, зависящая от времени t, U – потенциальная энергия внешнего консервативного поля, зависящая от $\vec{r}$, ∇ – оператор градиента.

Следуя подходу, представленному в [1–3], запишем лагранжиан, соответствующий уравнению (1) в виде

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2}e^{\gamma t} + \vec{r}\cdot\vec{F}(t)e^{\gamma t} - U(\vec{r})e^{\gamma t}\,. \qquad (2)$$

Лагранжиан определен с точностью до аддитивного слагаемого, являющегося полной производной по времени от некоторой функции. Учитывая в этой связи, что

$$\vec{r}\cdot\vec{F}(t)e^{\gamma t} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}\cdot\int\limits_0^t \vec{F}(t')e^{\gamma t'}dt'\right) - \dot{\vec{r}}\cdot\int\limits_0^t \vec{F}(t')e^{\gamma t'}dt',$$

перепишем (2) в виде

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2}e^{\gamma t} - \dot{\vec{r}}\cdot\int\limits_0^t \vec{F}(t')e^{\gamma t'}dt' - U(\vec{r})e^{\gamma t}\,. \qquad (3)$$

Тогда канонический импульс

$$\vec{p}_{\rm c} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}}e^{\gamma t} - \int\limits_0^t \vec{F}(t')e^{\gamma t'}dt'. \quad (4)$$

Отсюда

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}_{\rm c}}{m}e^{-\gamma t} + \frac{e^{-\gamma t}}{m}\int\limits_0^t \vec{F}(t')e^{\gamma t'}dt'.$$

Используя данное выражение и выражение для функции Гамильтона $H = \vec{p}_{\rm c}\cdot\dot{\vec{r}} - L$, будем иметь

$$H = \frac{e^{-\gamma t}}{2m}\left(\vec{p}_{\rm c} + \int\limits_0^t \vec{F}(t')e^{\gamma t'}dt'\right)^2 + U(\vec{r})e^{\gamma t}. \quad (5)$$

Используя (5) и уравнения Гамильтона $\dot{\vec{r}} = \partial H / \partial \vec{p}_{\rm c}$, $\dot{\vec{p}}_{\rm c} = -\nabla H$, придем к уравнению (1).

КВАНТОВАНИЕ

Согласно процедуре канонического квантования, заменим в (5) декартовы компоненты векторов $\vec{p}_{\rm c}$ и $\vec{r}$ соответствующими эрмитовыми операторами $\hat{p}_{\rm cj}$ и $\hat{x}_{\rm l}$ ($j,l = 1,2,3$), удовлетворяющими следующим коммутационным соотношениям

$$\left[\hat{x}_{\rm j},\hat{x}_{\rm l}\right] = \left[\hat{p}_{\rm cj},\hat{p}_{\rm cl}\right] = 0, \ \left[\hat{x}_{\rm j},\hat{p}_{\rm cl}\right] = i\hbar\delta_{\rm jl}, \quad (6)$$

где $\hbar$ – постоянная Планка, $\delta_{\rm jl}$ – символ Кронекера.

Взяв, как обычно, в координатном представлении $\vec{r} \to \hat{\vec{r}} = \vec{r}$, $\vec{p}_{\rm c} \to \hat{\vec{p}}_{\rm c} = -i\hbar\nabla$ и учитывая (5), придем к уравнению Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{e^{-\gamma t}}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla + \int\limits_0^t \vec{F}(t')e^{\gamma t'}dt'\right)^2\psi + U(\vec{r})e^{\gamma t}\psi. \quad (7)$$

Из (7) следует уравнение непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0, \quad (8)$$

где

$$\rho = |\psi|^2,$$

$$\vec{j} = \frac{e^{-\gamma t}}{2m}\left\{i\hbar\left(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi\right) + 2|\psi|^2\int\limits_0^t \vec{F}(t')e^{\gamma t'}dt'\right\}. \quad (9)$$

Отсюда вытекает закон сохранения $\int|\psi|^2 d^3\vec{r} = const$. Таким образом, как и в консервативном случае, квадрат нормы волновой функции является постоянной величиной. Следовательно, в присутствие вязкого трения переменная $|\psi|^2$ также имеет смысл плотности вероятности нахождения квантовой частицы в точке с определенной координатой. Тогда справедливо условие нормировки $\int|\psi|^2 d^3\vec{r} = 1$.

Задав волновую функцию $\psi(\vec{r},0)$ в начальный момент времени $t = 0$, с помощью (7) можно найти волновую функцию $\psi(\vec{r},t)$ в произвольный момент времени.

КОГЕРЕНТНОЕ СОСТОЯНИЕ В ПРИСУТСТВИИ ОДНОРОДНОЙ СИЛЫ

Для рассмотрения случая, обозначенного в подзаголовке настоящего раздела положим в (7) $U = 0$.

Как было сказано выше, когерентное состояние в координатном представлении описывается гауссовым волновым пакетом. Поэтому зададим начальное состояние микрообъекта в виде

$$\psi(\vec{r},0) = \frac{1}{\pi^{3/4}l_0^{3/2}}\exp\left(-\frac{\vec{r}^2}{2l_0^2} + i\vec{k}_0\cdot\vec{r}\right), \quad (10)$$

где l_0 – начальная ширина волнового пакета, $\vec{k}_0$ – начальный дебройлевский волновой вектор частицы.

Решение уравнения (7) при условии (10) в безграничном пространстве имеет вид

$$\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{\pi^{3/4}l_0^{3/2}(1+i\eta)^{3/2}}e^{-if(t)}e^{i\vec{k}_0\vec{r}} \times \exp\left[-\frac{\left|\vec{r}-\vec{r}_{\rm c}(t)\right|^2}{2l_0^2(1+i\eta)}\right]. \quad (11)$$

Здесь

$$\eta = \frac{\hbar\tau}{ml_0^2}, \ \tau = \frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma}, \quad (12)$$

$$f(t) = \frac{\hbar\tau}{2m}k_0^2 + \frac{\vec{k}_0}{m}\cdot\int\limits_0^t e^{-\gamma t'}dt'\int\limits_0^{t'}\vec{F}(t'')e^{\gamma t''}dt'' + \frac{1}{2\hbar m}\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^{t'}\vec{F}(t'')e^{\gamma t''}dt''\right)^2 e^{-\gamma t'}dt',$$

классическая траектория $\vec{r}_{\rm c}(t)$ описывается выражением

$$\vec{r}_c(t) = \vec{v}_0\tau + \frac{1}{m}\int_0^t e^{-\gamma t'}dt'\int_0^{t'} \vec{F}(t'')e^{\gamma t''}dt'', \quad (13)$$

$\vec{v}_0 = \hbar\vec{k}_0 / m$ – начальная скорость частицы.

Из (9) и (11) для плотности вероятности получим

$$\rho(\vec{r},t) = \frac{1}{\pi^{3/2}l^3}\exp\left[-\frac{\left|\vec{r}-\vec{r}_c(t)\right|^2}{l^2}\right], \quad (14)$$

где

$$l = l_0\sqrt{1+\eta^2} = \sqrt{l_0^2 + \left(\frac{\hbar\tau}{ml_0}\right)^2}. \quad (15)$$

Полагая в (11) – (15) $\gamma = 0$, будем иметь движение микрообъекта в вакууме под действием консервативной силы. В частности, из (12) и (13) в этом случае находим $\tau = t$ и $\vec{r}_c(t) = \vec{v}_0 t + \frac{1}{m}\int_0^t dt'\int_0^{t'}\vec{F}(t'')dt''$. Кроме того, из (15) приходим к известному результату о неограниченном расплывании волнового пакета с течением времени: $l = \sqrt{l_0^2 + (\hbar t/ml_0)^2}$.

Присутствие вязкой среды приводит к ограничению расплывания плотности вероятности. При $t \gg 1/\gamma$, как видно из (15), ширина волнового пакета стремится к предельному значению

$$l_\infty = \sqrt{l_0^2 + \left(\frac{\hbar}{ml_0\gamma}\right)^2}. \quad (16)$$

Заметим, что предельная ширина равна минимально возможному значению $l_\infty^{\min} = \sqrt{2}l_0$ при $l_0 = \sqrt{\hbar/m\gamma}$.

Итак, сопротивление вязкой среды приводит к локализации области пространства, в которой может быть обнаружена микрочастица.

Пусть внешняя однородная консервативная сила $\vec{F}$ не зависит от времени. Тогда из (13) для классической траектории получим

$$\vec{r}_c(t) = \vec{v}_0\frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma} + \frac{\vec{F}}{m\gamma}\left(t - \frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma}\right). \quad (17)$$

Отсюда при $t \gg 1/\gamma$ имеем $\vec{r}_c(t) = \vec{v}_0/\gamma + \vec{v}_\infty t$, где

$$\vec{v}_\infty = \frac{\vec{F}}{m\gamma}. \quad (18)$$

Таким образом, при постоянной консервативной силе в установившемся режиме распределение плотности вероятности представляет собой стационарный локализованный в пространстве домен, движущийся с постоянной скоростью, равной установившейся скорости движения классической частицы. Важно заметить, что скорость установившегося движения не содержит информации о начальных условиях. В то же время данная информация в виде параметра l_0 содержится в ширине и амплитуде домена плотности вероятности (см. (16) и (14) при замене $l \to l_\infty$).

В отсутствие консервативной силы из (17) находим $\vec{r}_c(t) = \vec{v}_0\left(1-e^{-\gamma t}\right)/\gamma$. На временах $t \gg 1/\gamma$ локализованный домен плотности вероятности, пройдя расстояние $r_\infty = v_0/\gamma$, практически останавливается. При этом структура домена (14), включая его ширину и амплитуду, не отличается от таковой при наличии внешней однородной консервативной силы.

Вычислим неопределенности координаты $\left|\Delta\vec{r}\right|$ и физического импульса $\left|\Delta\vec{p}\right|$ частицы, используя стандартные выражения

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = \sqrt{\left\langle\vec{r}^2\right\rangle - \left\langle\vec{r}\right\rangle^2}, \left|\Delta\vec{p}\right| = \sqrt{\left\langle\hat{\vec{p}}^2\right\rangle - \left\langle\hat{\vec{p}}\right\rangle^2}, \quad (19)$$

где $\langle\hat{O}\rangle \equiv \int \psi^*\hat{O}\psi d^3\vec{r}$ – квантовое среднее от оператора $\hat{O}$.

Используя (14), найдем

$$\left\langle\vec{r}\right\rangle = \int \vec{r}\rho d^3\vec{r} = \vec{r}_c, \left\langle\vec{r}^2\right\rangle = \int \vec{r}^2\rho d^3\vec{r} = \vec{r}_c^2 + \frac{3}{2}l^2.$$

Отсюда и из (19) будем иметь $\left|\Delta\vec{r}\right| = \sqrt{3/2}l$. Так как данная неопределенность не зависит от внешней консервативной силы, то в силу изотропии для квадратов неопределенностей декартовых компонент координаты имеем $(\Delta x_j)^2 = (\Delta\vec{r})^2/3$. Тогда для всех трех декартовых компонент $j = 1,2,3$ находим

$$\Delta x_j = \frac{l}{\sqrt{2}}. \quad (20)$$

Из (4) с учетом замены физических переменных их операторами для оператора физического импульса $\hat{\vec{p}} = m\hat{\vec{v}}$ имеем

$$\hat{\vec{p}} = e^{-\gamma t}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla + \int_0^t \vec{F}(t')e^{\gamma t'}dt'\right).$$

Отсюда, а также из (11) получим

$$\hat{\vec{p}}\psi = e^{-\gamma t}\left[\hbar\vec{k}_0 + i\hbar\frac{\vec{r}-\vec{r}_c(t)}{l_0(1+i\eta)} + \int\limits_0^t \vec{F}(t')e^{\gamma t'}dt'\right]\psi .$$

Используя данное выражение и (19), после несложных вычислений будем иметь $\left|\Delta\vec{p}\right| = e^{-\gamma t}\sqrt{3/2}(\hbar/l)$. Так как $(\Delta p_j)^2 = (\Delta\vec{p})^2/3$, то для неопределенностей декартовых компонент физического импульса найдем

$$\Delta p_{\mathrm{j}} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}l}e^{-\gamma t} . \quad (21)$$

В результате из (20) и (21) приходим к соотношениям неопределенностей вида

$$\Delta x_{\mathrm{j}}\Delta p_{\mathrm{j}} = \frac{\hbar}{2}e^{-\gamma t} . \quad (22)$$

Отсюда при $t = 0$ имеем минимальные соотношения неопределенностей для консервативных сред $\Delta x_{\mathrm{j}}\Delta p_{\mathrm{j}} = \hbar/2$. Следовательно, начальное квантовое состояние микрочастицы, описываемое волновой функцией (10), является когерентным. С течением времени правые части соотношений неопределенностей «координата – физический импульс» уменьшаются и при $t \gg 1/\gamma$ практически обращаются в ноль. Здесь нет противоречий с фундаментальными основами квантовой механики, так как правые части соотношений неопределенностей «координата – канонический импульс» в любой момент времени равны $\hbar/2$. Это утверждение подкрепляется коммутационными соотношениями (6). Следовательно, волновая функция (11) описывает квантовое когерентное состояние микрочастицы в среде с вязким сопротивлением.

Как видно из (20), (15) и (12), неопределенность координаты возрастает с течением времени за счет расширения домена плотности вероятности. В свою очередь, из (21), (15) и (12) видно, что неопределенность физического импульса уменьшается. Происходит это из-за того, что при $t \gg 1/\gamma$ скорость микрочастицы стремится к определенному установившемуся значению $\vec{v}_\infty$ (см. (18) или к нулю в отсутствие консервативной силы.

Вязкое сопротивление обусловлено взаимодействием рассматриваемой микрочастицы с большим коллективом частиц среды. Это способствует локализации волновой функции микрочастицы, а, следовательно, возможности ее регистрации. Данное обстоятельство используется, например, в камере Вильсона и пузырьковой камере [7], выполняющих роль классических приборов по регистрации микрочастиц и измерению их параметров. Рассмотренная здесь теоретическая модель может быть использована при описании работы аналогичных приборов по регистрации нерелятивистских микрочастиц. Роль внешней силы здесь может играть электрическое поле. В его отсутствие длина трека микрочастицы в средах данных камер равна $r_\infty = v_0/\gamma$. Из этой формулы можно определить эмпирический параметр γ, запуская на вход в камеру микрочастицы с заданными скоростями. Взяв для альфа-частиц, регистрируемых в пузырьковой камере $r_\infty \sim 1$ мм, $v_0 \sim 10^8$ см/с [7], будем иметь $\gamma \sim 10^9$ с$^{-1}$. Тогда, приняв в качестве начальной ширины l_0 волнового пакета длину волны де Бройля $l_0 \sim \hbar/mv_0$, для ширины трека у его окончания из выражения (16) найдем $l_\infty \sim v_0/\gamma = r_\infty \gg l_0$. Таким образом, ширина трека в рассмотренном примере порядка его длины.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполненно исследование показывает, что сила вязкого трения, пропорциональная скорости микрочастицы, приводит к эффективной пространственной локализации плотности вероятности ее обнаружения. Как результат, неопределенность координаты стремится к постоянному значению, а неопределенность физического импульса уменьшается со временем по экспоненциальному закону. Это соответствует все большему приближению с течением времени к классическому движению. Поэтому можно сказать, что вязкая среда играет роль классического измерительного прибора.

Здесь рассмотрено движение микрочастицы в вязкой среде и в присутствии однородной консервативной силы. Ситуации, связанные с резонансом в квантовом затухающем осцилляторе и присутствием магнитного поля в вязкой среде будут рассмотрены отдельно. Данное рассмотрение может найти свои приложения к регистрационным приборами типа пузырьковых камер.

Представляет интерес рассмотрение случаев квантования движения микрочастиц, когда сила сопротивления вязкой среды пропорциональна квадрату их скорости. Данный вопрос мы также планируем исследовать в ближайшем будущем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Caldirola P.* // Nuovo Cimmento. 1941. V. 18. No. 9. P. 393.
2. *Kanai E.* // Progr. Theor. Phys. 1948. V. 3. No. 4. P. 440.
3. *Dodonov V.V., Man'ko V.I.* // Phys. Rev. A. 1979. V. 20. No. 2. P. 550.
4. *Um C.I., Yeon K.H.* // Phys. Rev. A. 1987. V. 36. No. 11. P. 5287.

5. *Тарасов В.Е.* // Теор. и матем. физ. 1994. Т. 100. № 3. С. 402.
6. *Багров В.Г., Гитман Д.М., Перейра А.С.* // УФН. 2014. Т. 184. № 9. С. 961; *Bagrov V.G., Gitman D.M., Pereira A.S.* // Phys. Usp. 2014. V. 57. No. 9. P. 891.
7. *Bugg D.* // Progr. Nucl. Phys. 1959. V. 7. P. 1.

On the quantum coherent states of microparticle in a viscous medium

S. V. Sazonov [1, 2, *]

[1]National Research Centre «Kurchatov Institute», Moscow, 123182 Russia
[2]Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993 Russia
**e-mail: sazonov.sergey@gmail.com*

Using a canonical quantization, the motion of a micro-particle in a medium with the viscous resistance is analyzed. Localized wave packets of the type of coherent states are considered in detail. It has been established that viscous resistance suppresses the quantum properties of a micro-particle, which makes it possible to consider a viscous medium as a classical device.