ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2024, том 88, № 1, с. 138–147

УДК 620.193.013

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ТРЕХ ИНВАРИАНТОВ В ВОЛНОВЫХ ЗАДАЧАХ ГИДРОДИНАМИКИ И ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

© 2024 г. В. М. Овсянников[1, *]

[1]Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования “Российский университет транспорта”, Академия водного транспорта, Москва, Россия

*E-mail: OvsyannikovVM@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.08.2023 г.
После доработки 15.09.2023 г.
Принята к публикации 29.09.2023 г.

В теории деформаций, общей для теории упругости, гидродинамики и электродинамики, закон сохранения для деформации контрольной фигуры содержит линейный, квадратичный и кубичный инварианты. Предельные переходы вывода уравнения неразрывности уничтожают квадратичный и кубичный инварианты в формуле коэффициента объемного расширения и в уравнении неразрывности. Из-за этого упрощения могут теряться описания некоторых режимов движения жидкостей и описания возможного поведения электромагнитных полей. Излагается процедура учета всех трех инвариантов в уравнениях гидродинамики и электродинамики. Для описания движений жидкости и поведения напряженности магнитного поля с учетом квадратичного и кубичного инвариантов предлагается использовать волновые дифференциальные уравнения второго и третьего порядков по времени.

DOI: 10.31857/S0367676524010249, **EDN:** RZAYZF

ВВЕДЕНИЕ

Центральным принципом математической физики является принцип сохранения. Он относится и к сохранению количества вещества, и к сохранению количества движения, и к сохранению энергии, и еще к ряду характеристик движения. Несмотря на очень частое его использование и обсуждение, вопрос сохранения и несохранения нельзя считать полностью изученным.

Во-первых, сохранение и несохранение может быть интегральным, относящимся к одному большому множеству, или дифференциальным, относящимся к большому числу объектов, окруженных со всех сторон такими же объектами, с которыми возможен обмен веществом или количеством энергии. Или речь может идти о локальном сохранении или несохранении для объектов, которых много, которые окружены со всех сторон подобными объектами. Но объекты при локальном сохранении или несохранении имеют малый, но конечный размер. Все геометрические построения производятся с объектами конечного размера. И только потом, использованием предельных переходов получают дифференциальные уравнения, связывающие некоторые свойства объектов. С бесконечно малыми объектами проводить геометрические построения нельзя. Поэтому конечно-разностное выражение для закона сохранения или уравнения неразрывности следует рассматривать более обоснованным, первородным, исходным и точным, чем дифференциальное уравнение, получаемое из этого конечно-разностного уравнения предельными переходами с утратой некоторых членов высокого порядка малости и большой информативности о движении. Решение задачи с использованием дифференциальных уравнений более высокого порядка является одним из возможных способов решения задачи. Имеется и другой способ, который сводится к решению конечно-разностных уравнений.

Во-вторых, не при всех лагранжевых законах движения жидкой частицы объем деформированной в процессе течения контрольной фигуры останется постоянным, не зависящим от времени. Точнее говоря, только для экспоненциального лагранжева закона движения жидкой частицы объем контрольной фигуры останется постоянным по времени и даст общеизвестный вид уравнения неразрывности из трех слагаемых оператора дивергенции. При всех других видах лагранжева закона движения жидкой частицы к дивергенции вектора скорости добавляются члены высокого порядка малости, нарушающие сохранение. С такой ситуацией столкнулся Эйлер, использовав линейную по времени формулу Коши–Гельмгольца в качестве лагранжева закона движения жидкой частицы при выводе уравнения неразрывности в 1752 г.

В результате Эйлер получил кубическую по времени зависимость объема контрольной фигуры вместо постоянной функции. Чтобы учесть, хотя бы приближенно, эффект сохранения, Эйлеру пришлось взять производную по времени от уравнения баланса количества вещества несжимаемой жидкости, понизив степень зависимости от времени и перейдя к уравнению неразрывности, а потом предельными переходами исключить оставшиеся слагаемые с приращениями времени в первой и во второй степенях.

Об этом упрощении, не преодоленном до настоящего времени, напомнил Л. И. Седов в своем знаменитом курсе механики сплошной среды, посвященном трем дисциплинам: теории упругости, гидродинамике и электродинамике. Общей в этих курсах является теория деформаций. Она основана на использовании тензора деформаций для теории упругости и тензора скоростей деформаций для гидродинамики и электродинамики. Различие тензоров состоит только в домножении компонент тензора скоростей деформаций в стационарном течении на приращение времени $t - t_0$, чтобы получить компоненты тензора деформаций.

Рассмотрим один из лучших и полных курсов механики сплошной среды Л. И. Седова [1]. В первом томе учебника в параграфе 5 главы 2 получена формула (5.37) для коэффициента кубического расширения θ для тензора деформаций, зависящая от трех инвариантов I_1, I_2, I_3:

$$\theta = \left(1 + 2I_1 + 4I_2 + 8I_3\right)^{1/2} - 1,$$

и на этой же странице она упрощена до приближенной формулы:

$$\theta \approx I_1,$$

учитывающей только первый инвариант с отбрасыванием второго I_2 и третьего I_3 инвариантов. То же самое делается с упрощением тензора скоростей деформаций в формуле (7.28) параграфа 7 главы 2 книги [1]. В этой формуле для скорости относительного изменения объема жидкости учтен только первый инвариант I_1. В такой форме гидродинамические уравнения передаются сейсмологам и гидроакустикам. У сейсмологов и гидроакустиков много своих проблем в методах измерений, и они не обязаны разбираться в тонкостях и трудностях построения предлагаемого им математического аппарата гидродинамики. Таким образом, имеются возможности проявления жидкостью новых не изученных нами свойств. Исследования возможных решений уравнений гидродинамики с учетом членов высокого порядка малости необходимы, чтобы увидеть их возможное проявление в экспериментах.

Уравнения электродинамики написаны Максвеллом с привлечением гидродинамического уравнения неразрывности для описания поведения поля электрической и магнитной напряженности. Несколько лет назад физики не знали тонкостей поведения молний, радиотехнических всплесков FRB. Как было бы полезно знать раньше до этих экспериментальных открытий физический смысл неучтенных в электродинамике высших инвариантов I_2 и I_3. Хотя бы качественное (а не количественное) представление о решениях волнового уравнения, выведенного с учетом этих инвариантов, помогло бы правильно поставить и продолжить эксперименты. Дорогостоящие сложные токамаки с большой неустойчивостью высокотемпературной плазмы проектируются по уравнениям, из которых удалены инварианты, контролирующие неустойчивость и устойчивость. Учет высших инвариантов нужен и в этой поисковой деятельности.

Эйлер в 1752 г. в классической работе Principia motus fluidorum [2], [3], [4] геометрически тоже вывел уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости с 15-ю слагаемыми,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \left(t - t_0\right) \times$$
$$\times \left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} + \frac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)} + \frac{\partial(w,u)}{\partial(z,x)}\right] +$$
$$+ \left(t - t_0\right)^2 \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = 0,$$

а затем откинул предельными переходами 12 из них, оставив только три, вошедшие в оператор дивергенции. Физического смысла откинутых слагаемых от Л. Эйлера до Л. И. Седова никто не исследовал. В гидродинамике и в электродинамике в полном уравнении неразрывности второй инвариант домножен на приращение времени в первой степени, а третий инвариант домножен на приращение времени во второй степени. При выводе волнового уравнения гидродинамики методом Лайтхилла акустической аналогии в его неоднородной части образуются степенные функции времени, которые меняют вид решения дифференциального волнового уравнения.

Добавление в уравнение неразрывности для напряженности магнитного поля системы уравнений электродинамики членов со вторым и третьим инвариантами тоже при выводе стандартным методом Максвелла дает неоднородное волновое уравнение со степенными функциями времени в неоднородной части уравнения. Решение волнового уравнения гидродинамики даст генерацию потоком звуковых периодических волн плотности и давления, а также аналога гидравлического удара Жуковского для трехмерного течения. Решение волнового уравнения для напряженности магнитного поля дает генерацию магнитных волн двух типов. Это гармонические сравнительно слабые волны магнитной напряженности и круто возрастающая волна типа солитона.

На пути расчета интенсивности электромагнитных волн возникает препятствие в неодинаковой размерности слагаемых неоднородной части волнового уравнения. Но полезным для физики результатом будет даже качественное, а не количественное решение о возможности появления нестационарности по времени напряженности магнитного поля за счет нелинейности стационарного распределения компонент напряженности H_x, H_y, H_z по пространственным координатам x, y, z при учете второго I_2 и третьего I_3 инвариантов уравнения неразрывности.

УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ С ТРЕМЯ ИНВАРИАНТАМИ

Даламбер в 1747 г. при решении задачи о приливах, происходящих в воздушной атмосфере под воздействием Луны, использовал соотношение для сохранения количества вещества в контрольной фигуре. В 1752 г. Эйлер вывел отвлеченное от конкретной задачи дифференциальное уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости. На промежуточной стадии вывода оно имело большое количество слагаемых. При переводе [3] работы Эйлера с латыни на английский язык К. Труселл объединил их в три якобиана второго порядка и один якобиан третьего порядка. Сумма трех якобианов второго порядка дает квадратичный инвариант I_2. Якобиан третьего порядка дает кубичный инвариант I_3. А оператор дивергенции, примененный к вектору скорости, дает линейный инвариант I_1.

В первоначальном варианте 1752 г. работы Эйлера Principia motus fluidorum приведено выражение для оператора дивергенции, содержащее 15 слагаемых вместо трех, используемых всеми. Эти 12 дополнительных слагаемых оператора дивергенции, учтенные в волновом уравнении электродинамики Максвелла, суммируются со слагаемым индукции Фарадея и приводят к описанию дополнительного возникновения ЭДС. В некоторых физических явлениях экспериментально наблюдается турбулентность магнитного поля. Наблюдатели склонны ее связывать с проявлением гидродинамической турбулентности, порождающей неравномерности и пульсации магнитной напряженности. Приводящийся ниже вывод неоднородного волнового уравнения для напряженности магнитного поля с учетом вычисленных Эйлером дополнительных членов уравнения неразрывности дает основание говорить о турбулизации самого магнитного поля даже при ламинарности сопровождающих его гидрогазодинамических течений. Показана возможность образования уединенной волны напряженности магнитного поля, возрастающей во времени по степенному закону.

Дополнение гидрогазодинамического уравнения неразрывности членами высокого порядка малости дало возможность решить около десятка гидрогазодинамических задач с получением правдоподобных результатов. В этой статье делается проверка возможности использования членов высокого порядка малости в задачах электродинамики.

В магистерской диссертации Н. Е. Жуковского [5], [6] В. А. Бубнов [7] обнаружил вычисленные члены второго порядка малости уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости. Позже, в 2006 г. автором статьи слагаемые высокого порядка малости были найдены в выводе Эйлера 1752 г. уравнения неразрывности [2], давшего понятие оператора дивергенции. К. Труселл [3] в 1954 г., переводя с латыни на английский язык работу Эйлера [2] по его докладу 1752 г. в Берлинской АН, объединил дополнительные слагаемые второго и третьего порядка малости уравнения неразрывности в три якобиана второго порядка и в один якобиан третьего порядка. Уравнение неразрывности Эйлера для несжимаемой жидкости получило вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}+(t-t_0)\times$$
$$\times\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial(w,u)}{\partial(z,x)}\right]+$$
$$+(t-t_0)^2\,\partial(u,v,w)/\partial(x,y,z)=0$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}+(t-t_0)I_2+(t-t_0)^2 I_3=0\,.$$

Здесь u, v, w — компоненты скорости вдоль осей координат x, y, z; $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ и $\partial(u,v,w)/\partial(x,y,z)$ — якобианы поля скорости второго и третьего порядков соответственно; t — время; t_0 — время начала деформации контрольной фигуры. Уравнение неразрывности получается взятием производной от уравнения баланса количества вещества по времени. Поэтому члены второго порядка малости уравнения баланса количества вещества, содержащие якобианы второго порядка, становятся членами первого порядка малости по времени уравнения неразрывности. Но мы будем именовать их по-прежнему членами второго порядка малости, относя степень малости к исходному уравнению баланса количества вещества.

Известно два подхода к описанию течения жидкости: лагранжев подход описания движения жидкой частицы во времени и эйлеров подход описания поля скорости жидкости. Разным лагранжевым законам движения жидкой частицы соответствуют разные эйлеровы поля скорости и разные уравнения неразрывности, отличающиеся видом добавок к оператору дивергенции вектора скорости. Эйлер, выводя закон сохранения, использовал линейный лагранжев закон движения жидкой частицы от времени, использующий формулы Коши–Гельмгольца:

$$x = \left(1 + at\right)x_b + bty_b,\ \ y = ctx_b + \left(1 + kt\right)y_b.$$

Понятно, что при линейном по времени увеличении линейного размера контрольной фигуры ее площадь будет изменяться по квадратной зависимости от времени, а объем – по кубической. И это объясняет происхождение членов в уравнении неразрывности, нарушающих сохранение.

Рассмотрим другой лагранжев закон движения жидкой частицы от времени – экспоненциальный. Формулам Коши–Гельмгольца, использованным Эйлером, в двухмерном плоском течении соответствует такая система дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = ax_b + by_b,\ \ \frac{dy}{dt} = cx_b + ky_b.$$

При использовании экспоненциального по времени лагранжева закона движения жидкой частицы уравнение неразрывности не будет иметь членов высокого порядка малости, но получит другую неточность. Сделаем в приведенной выше системе дифференциальных уравнений замену начальных значений x_b, y_b на текущие значения координат x, y. Она примет вид:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by,\ \ \frac{dy}{dt} = cx + ky.$$

Ее решение дает экспоненциальный лагранжев закон движения жидкой частицы от времени. При деформации плоской контрольной фигуры одна сторона растягивается по экспоненциальному закону от времени, а другая сторона сжимается в такое же число раз. Площадь остается постоянной по времени. Уравнение неразрывности имеет классический вид без дополнительных членов. Однако экспоненциальному лагранжеву закону движения жидкой частицы будет соответствовать линейное по координатам эйлерово поле скоростей с постоянными значениями коэффициентов a, b, c, k и производных компонент скорости по координатам вида $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

Мы получаем, что в местах строгой линейности компонент скорости уравнение неразрывности будет иметь общепринятый вид и генерации волн плотности и давления возникать не будет. Места же отличия поля компонент скорости от линейных будут генерировать волны.

Реальное поле скорости не может обойтись только линейными полями. Каждому лагранжеву закону движения жидкой частицы соответствуют свои добавки в уравнение неразрывности. Но дополнительные члены с высшими инвариантами I_2 и I_3 должны давать ориентировочную оценку интенсивности волнообразования. Действительное течение находится, возможно, где-то между этими двумя случаями линейного и экспоненциального лагранжева закона движения жидкой частицы.

Как было установлено, в решениях волнового уравнения для ряда гидродинамических задач дополнительные слагаемые высокого порядка малости приводят к самопроизвольному возникновению автоколебаний и гидравлическому удару. Это является причиной аварийных ситуаций. Поэтому допустимо использовать вычисленные Эйлером дополнительные слагаемые уравнения неразрывности для получения верхней оценки возможности опасного аварийного эффекта. Эти соображения относятся как к гидрогазодинамике, так и к электродинамике Максвелла.

ВЫВОД ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ С УЧЕТОМ ЧЛЕНОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Введение в уравнение неразрывности электродинамики Максвелла членов высокого порядка малости обсуждалось на конференции [8]. Построения волнового уравнения электродинамики напряженности магнитного поля сделаем, исходя из уравнения неразрывности для сжимаемой жидкости [9] с членами высокого порядка малости, содержащими высшие инварианты:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + (t - t_0)\rho \times$$
$$\times\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} + \frac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)} + \frac{\partial(w,u)}{\partial(z,x)}\right] +$$
$$+ (t - t_0)^2 \rho\partial(u,v,w) / \partial(x,y,z) = 0,$$

где ρ – плотность, и уравнений Максвелла для среды, не обладающей сегнетоэлектрическими и ферромагнитными свойствами:

$$rot\,\vec{E} = -\mu\mu_0\frac{\partial \vec{H}}{\partial t},\ rot\,\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J},\ div\,\vec{E} = 0,$$

$div\,\vec{H} = 0$, где $\vec{E}, \vec{H}$ – напряженности электрического и магнитного полей, c – скорость света, ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные, ε и μ — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, $\vec{J}$ — вектор плотности электрического тока.

Для вывода волнового уравнения для напряженности магнитного поля H_x возьмем первое уравнение Максвелла для компоненты ротора напряженности электрического поля E_x по оси x:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}$$

и возьмем производную по времени t от обеих его частей. Получим:

$$\mu\mu_0 \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} = -\frac{\partial\left[\partial E_z/\partial y - \partial E_y/\partial z\right]}{\partial t}.$$

Сделав перестановку порядка взятия производных в правой части уравнения, получим:

$$\mu\mu_0 \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} = -\frac{\partial\left[\partial E_z/\partial t\right]}{\partial y} + \frac{\partial\left[\partial E_y/\partial t\right]}{\partial z}.$$

Используя приведенные ниже формулы

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t},$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t},$$

это уравнение можно переписать так:

$$\mu\mu_0 \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\left\{\begin{gathered} -\frac{\partial J_y}{\partial z} + \frac{\partial J_z}{\partial y} + \\ + \frac{\partial\left[\partial H_x/\partial y - \partial H_y/\partial x\right]}{\partial y} + \\ + \frac{\partial\left[\partial H_x/\partial z - \partial H_z/\partial x\right]}{\partial z} \end{gathered}\right\}.$$

Раскрыв скобки, получим:

$$\mu\mu_0 \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\left\{\begin{gathered} -\frac{\partial J_y}{\partial z} + \frac{\partial J_z}{\partial y} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} - \\ - \frac{\partial\left[\partial H_y/\partial y + \partial H_z/\partial z\right]}{\partial x} \end{gathered}\right\}.$$

Запишем четвертое уравнение Максвелла

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

в более полном виде, добавив члены с якобианами второго и третьего порядков, аналогичные полученным Эйлером точным геометрическим расчетам:

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} + \\ + \left[\begin{gathered} \frac{\partial\left(H_x, H_y\right)}{\partial(x,y)} + \\ + \frac{\partial\left(H_y, H_z\right)}{\partial(y,z)} + \frac{\partial\left(H_z, H_x\right)}{\partial(z,x)} \end{gathered}\right] \times \\ \times\left(t - t_0\right) + \frac{\partial\left(H_x, H_y, H_z\right)}{\partial(x,y,z)}\left(t - t_0\right)^2 = 0.$$

Волновое уравнение для напряженности магнитного поля H_x в направлении оси x примет вид:

$$\mu\mu_0 \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\left[\begin{gathered} -\frac{\partial J_y}{\partial z} + \frac{\partial J_z}{\partial y} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \\ + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} \end{gathered}\right] + \\ + \frac{\left(t - t_0\right)}{\varepsilon\varepsilon_0}\left\{\partial\left[\frac{\partial\left(H_x, H_y\right)}{\partial(x,y)} + \frac{\partial\left(H_y, H_z\right)}{\partial(y,z)} + \frac{\partial\left(H_z, H_x\right)}{\partial(z,x)}\right]\Big/\partial x\right\} + \\ + \frac{\left(t - t_0\right)^2}{\varepsilon\varepsilon_0}\,\partial\left[\frac{\partial\left(H_x, H_y, H_z\right)}{\partial(x,y,z)}\right]\Big/\partial x$$

или

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} = \\ = \frac{\partial J_y}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial y} - \left(t - t_0\right) \times \\ \times\left\{\partial\left[\frac{\partial\left(H_x, H_y\right)}{\partial(x,y)} + \frac{\partial\left(H_y, H_z\right)}{\partial(y,z)} + \frac{\partial\left(H_z, H_x\right)}{\partial(z,x)}\right]\Big/\partial x\right\} - \\ - \left(t - t_0\right)^2 \partial\left[\frac{\partial\left(H_x, H_y, H_z\right)}{\partial(x,y,z)}\right]\Big/\partial x.$$

Аналогично выписываем волновое уравнение для напряженности магнитного поля по оси y:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = \\ = \frac{\partial J_z}{\partial x} - \frac{\partial J_x}{\partial z} - \left(t - t_0\right) \times$$

$$\times\left\{\partial\left[\frac{\partial(H_x,H_y)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(H_y,H_z)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial(H_z,H_x)}{\partial(z,x)}\right]\Big/\partial y\right\}-$$

$$-(t-t_0)^2\,\partial\left[\frac{\partial(H_x,H_y,H_z)}{\partial(x,y,z)}\right]\Big/\partial y$$

и по оси z:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2}-\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}=$$

$$=\frac{\partial J_x}{\partial y}-\frac{\partial J_y}{\partial x}-(t-t_0)\times$$

$$\times\left\{\partial\left[\frac{\partial(H_x,H_y)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(H_y,H_z)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial(H_z,H_x)}{\partial(z,x)}\right]\Big/\partial z\right\}-$$

$$-(t-t_0)^2\,\partial\left[\frac{\partial(H_x,H_y,H_z)}{\partial(x,y,z)}\right]\Big/\partial z\ .$$

Согласно полученным формулам, если в выводе волнового уравнения для напряженности магнитного поля учесть плотность электрического тока, то составляющие ротора плотности электрического тока могут генерировать гармонические волны напряженности магнитного поля. В случае отсутствия электрических токов аналогичную роль генерации волн напряженности магнитного поля могут взять на себя члены второго и третьего порядков малости оператора дивергенции, отражающие неравномерность распределения магнитостатического поля в пространстве. Здесь проявляется сходство роли дополнительных членов оператора дивергенции с производной по времени от плотности электрического тока закона индукции Фарадея 1831 г.

Недостатком полученных волновых уравнений является неодинаковость размерности членов, содержащих уединенные компоненты напряженности вида H_x, попарные произведения вида H_xH_y и тройные произведения вида $H_xH_yH_z$. Неодинаковость размерностей возникла из-за использования видоизмененного четвертого уравнения Максвелла с неуравненной размерностью слагаемых.

УРАВНИВАНИЕ РАЗМЕРНОСТИ ЧЛЕНОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ С ОСНОВНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Рассмотрим способ приравнять по размерности слагаемые с якобианами второго и третьего порядков к размерности основных членов, чтобы получить хотя бы качественное (если не количественное) приближенное решение полученных волновых уравнений турбулизации напряженности магнитного поля. Напряженность магнитного $\vec{H}$ и электрического $\vec{E}$ полей имеет одинаковую размерность $L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$. Эта размерность более сложная, чем для скорости V с размерностью $[LT^{-1}]$, присутствующей под знаком дивергенции в геометрических построениях Эйлера 1752 г. при выводе полного уравнения неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}+(t-t_0)\times$$

$$\times\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial(w,u)}{\partial(z,x)}\right]+$$

$$+(t-t_0)^2\,\partial(u,v,w)/\partial(x,y,z)=0$$

для несжимаемой жидкости. При переписывании [9] этого уравнения в 2006 г. для сжимаемого газа и сжимаемой жидкости, для которых вместо объемного расхода SV сохраняется массовый расход ρSV, введение плотности ρ было сделано так, чтобы геометрические построения Эйлера оставить нетронутыми, а отличие в размерности учесть множителем. При записи уравнения неразрывности для сжимаемой среды плотность ρ была введена под знак дивергенции для каждой компоненты скорости, а члены с якобианами второго и третьего порядков были домножены на плотность ρ целиком. Уравнение неразрывности для сжимаемой жидкости и газа приняло вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}+(t-t_0)\rho\times$$

$$\times\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial(w,u)}{\partial(z,x)}\right]+$$

$$+(t-t_0)^2\rho\,\partial(u,v,w)/\partial(x,y,z)=0.$$

Итак, массовый расход сжимаемой жидкости или газа ρSV был разбит на произведение плотности ρ и объемного расхода SV для струйки с площадью единичного поперечного сечения $S = 1$.

Поступим аналогично с напряженностью магнитного поля H, выделив из размерности (кг/м)$^{0.5}$ с$^{-1}$ в качестве сомножителя скорость:

$$(\text{кг/м})^{0.5}\ \text{с}^{-1} = (\text{кг/м}^3)^{0.5}\ \text{м/с}.$$

Наводящим соображением для введения физически понятного сомножителя, характеризующего электромагнитное поле, является аналог плотности с размерностью кг/м^3, находящийся в непривычной степени 0.5. Его аналогом для электромагнитного поля может служить объемная плотность электрического заряда q, измеряющаяся в кулонах на кубометр или $[L^{-3/2}M^{1/2}T^{-1}]$. Выражая массу в *кг*, линейный масштаб в *м*, а время в секундах, получаем (кг/м^3)$^{0.5}$ с$^{-1}$ =Кл/м^3, откуда (кг/м^3)$^{0.5}$ = = (Кл/м^3) сек. Таким образом,

$$[H] = [G][V].$$

Коэффициент G имеет размерность объемной плотности электрического заряда, умноженной на время. Разложение размерности напряженности магнитного поля H на необходимые сомножители имеет вид:

$$[H] = [q][\tau][V] = [G][V] = (\text{Кл/м}^3)\ \text{с (м/с)}.$$

Здесь

$$[G] = [q][\tau] = (\text{Кл/м}^3)\ \text{с}.$$

Выражение для четвертого обобщенного уравнения электродинамики будет вместо ($div\,\vec{H} = 0$) иметь вид:

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} + (t - t_0)G \times \left[\frac{\partial(H_x, H_y)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(H_y, H_z)}{\partial(y, z)} + \frac{\partial(H_z, H_x)}{\partial(z, x)}\right] + (t - t_0)^2 G^2 \frac{\partial(H_x, H_y, H_z)}{\partial(x, y, z)} = 0.$$

Для конкретизации величины q сделаем предположение, что она совпадает с плотностью электрического заряда в точке, где по волновому уравнению рассчитывается напряженность магнитного поля $\vec{H}$. Теперь можно произвести сокращение коэффициентов G с вынесением их из-под знаков якобианов. Получим:

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} + \left[\frac{(t - t_0)G}{G^2}\right] \times \left[\frac{\partial(H_x, H_y)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(H_y, H_z)}{\partial(y, z)} + \frac{\partial(H_z, H_x)}{\partial(z, x)}\right] + \left[\frac{(t - t_0)^2 G}{G^3}\right] \frac{\partial(H_x, H_y, H_z)}{\partial(x, y, z)} = 0.$$

Сократим вынесенные коэффициенты G и раскроем их как $G = q\tau$. Получим:

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} + \left[\frac{(t - t_0)}{\tau q}\right] \times \left[\frac{\partial(H_x, H_y)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(H_y, H_z)}{\partial(y, z)} + \frac{\partial(H_z, H_x)}{\partial(z, x)}\right] + \left[\frac{(t - t_0)^2}{(\tau q)^2}\right] \frac{\partial(H_x, H_y, H_z)}{\partial(x, y, z)} = 0.$$

Для конкретизации параметра τ, имеющего размерность времени, можно пойти двумя путями: считать его совпадающим с текущим временем $(t - t_0)$ или выбрать для него постоянное фиксированное значение, исходя из рассматриваемого физического процесса. В первом случае $(t - t_0)$ и τ можно сократить. Второй случай обсуждается в следующем разделе.

Сократив время в коэффициентах перед якобианами, получим для обобщенного четвертого уравнения электродинамики выражение, не содержащее времени:

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} + \frac{1}{q} \times \left[\frac{\partial(H_x, H_y)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(H_y, H_z)}{\partial(y, z)} + \frac{\partial(H_z, H_x)}{\partial(z, x)}\right] + \frac{1}{q^2} \frac{\partial(H_x, H_y, H_z)}{\partial(x, y, z)} = 0.$$

Используя это уравнение для вывода волнового уравнения, получим волновое уравнение, в котором не изменяются по времени коэффициенты перед якобианами второго и третьего порядков.

Волновое уравнение по оси x:

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} = \frac{\partial J_y}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{1}{q} \times \left\{\partial\left[\frac{\partial(H_x, H_y)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(H_y, H_z)}{\partial(y, z)} + \frac{\partial(H_z, H_x)}{\partial(z, x)}\right] \Big/ \partial x\right\} - \left(\frac{1}{q}\right)^2 \partial\left[\frac{\partial(H_x, H_y, H_z)}{\partial(x, y, z)}\right] \Big/ \partial x,$$

по оси y:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2}-\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}=$$
$$=\frac{\partial J_z}{\partial x}-\frac{\partial J_x}{\partial z}-\frac{1}{q}\times$$
$$\times\left\{\partial\left[\frac{\partial\left(H_x,H_y\right)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial\left(H_y,H_z\right)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial\left(H_z,H_x\right)}{\partial(z,x)}\right]\Big/\partial y\right\}-$$
$$-\left(\frac{1}{q}\right)^2\partial\left[\frac{\partial\left(H_x,H_y,H_z\right)}{\partial(x,y,z)}\right]\Big/\partial y$$

по оси z:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2}-\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}=$$
$$=\frac{\partial J_x}{\partial y}-\frac{\partial J_y}{\partial x}-\frac{1}{q}\times$$
$$\times\left\{\partial\left[\frac{\partial\left(H_x,H_y\right)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial\left(H_y,H_z\right)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial\left(H_z,H_x\right)}{\partial(z,x)}\right]\Big/\partial z\right\}-$$
$$-\left(\frac{1}{q}\right)^2\partial\left[\frac{\partial\left(H_x,H_y,H_z\right)}{\partial(x,y,z)}\right]\Big/\partial z$$

Правая часть каждого из уравнений накладывает на стационарное поле магнитной напряженности гармонические колебания, интенсивность которых пропорциональна производным якобианов квазистационарного поля по геометрическим координатам. Эти синусоидальные колебания могут рассматриваться начальной фазой турбулентности магнитного поля. Например, это волны турбулентности, заметные визуально по мерцанию полярных сияний, накладываемые на стационарное поле магнитной напряженности, генерируемой за счет конвекции проводящей среды при вращении планеты.

ОБРАЗОВАНИЕ ВОЛНЫ НАПРЯЖЕННОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ, ВОЗРАСТАЮЩЕЙ ВО ВРЕМЕНИ ПО СТЕПЕННОМУ ЗАКОНУ

Использованный при решении гидродинамических задач метод последовательных приближений предполагает, что в правой неоднородной части волнового уравнения используются известные стационарные решения, а левая часть волнового уравнения содержит “акустическое, звуковое давление”, вычисляемое методом запаздывающего потенциала решения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка. Аналогичный подход предлагается применить к решению выведенных волновых уравнений электродинамики.

Вторая возможность выбора для параметра τ постоянного фиксированного значения, исходя из рассматриваемого физического процесса, приводит к сохранению переменной времени t в правых неоднородных частях волновых уравнений.

Волновое уравнение принимает вид по оси x:

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2}-\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2}=$$
$$=\frac{\partial J_y}{\partial z}-\frac{\partial J_z}{\partial y}-\frac{\left(t-t_0\right)}{\tau q}\times$$
$$\times\left\{\partial\left[\frac{\partial\left(H_x,H_y\right)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial\left(H_y,H_z\right)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial\left(H_z,H_x\right)}{\partial(z,x)}\right]\Big/\partial x\right\}-$$
$$-\left[\frac{\left(t-t_0\right)}{\tau q}\right]^2\partial\left[\frac{\partial\left(H_x,H_y,H_z\right)}{\partial(x,y,z)}\right]\Big/\partial x$$

по оси y:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2}-\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}=$$
$$=\frac{\partial J_z}{\partial x}-\frac{\partial J_x}{\partial z}-\frac{\left(t-t_0\right)}{\tau q}\times$$
$$\times\left\{\partial\left[\frac{\partial\left(H_x,H_y\right)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial\left(H_y,H_z\right)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial\left(H_z,H_x\right)}{\partial(z,x)}\right]\Big/\partial y\right\}-$$
$$-\left[\frac{\left(t-t_0\right)}{\tau q}\right]^2\partial\left[\frac{\partial\left(H_x,H_y,H_z\right)}{\partial(x,y,z)}\right]\Big/\partial y$$

по оси z:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2}-\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}=$$
$$=\frac{\partial J_x}{\partial y}-\frac{\partial J_y}{\partial x}-\frac{\left(t-t_0\right)}{\tau q}\times$$
$$\times\left\{\partial\left[\frac{\partial\left(H_x,H_y\right)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial\left(H_y,H_z\right)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial\left(H_z,H_x\right)}{\partial(z,x)}\right]\Big/\partial z\right\}-$$
$$-\left[\frac{\left(t-t_0\right)}{\tau q}\right]^2\partial\left[\frac{\partial\left(H_x,H_y,H_z\right)}{\partial(x,y,z)}\right]\Big/\partial z$$

Это приводит к решениям волнового уравнения с образованием уединенной волны напряженности магнитного поля, возрастающей во времени по степенному закону. За счет членов с производными по координатам от якобианов второго порядка получается волна, возрастающая пропорционально третьей степени времени. За счет членов с производными по координатам от якобианов третьего порядка генерируется более крутая волна, возрастающая пропорционально четвертой степени времени.

Наложение степенной возрастающей функции на периодические колебания можно использовать в моделировании ухода Северного магнитного полюса с территории Канады в направлении Сибири. Согласно современным исследованиям, на совершавшиеся ранее суточные вращения магнитного полюса по овалу с размером большой оси 85 км последние два десятилетия стало накладываться перемещение полюса в направлении Сибири с увеличивающейся скоростью от 15 км/год в 2000 г. до 55 км/год в 2019 г. Использование дополнительных слагаемых оператора дивергенции, вычисленных Эйлером, может быть, поможет прояснить причины наблюдаемого явления.

Если пойти на дальнейшее углубление схожести поведения поля скорости и поля напряженности магнитного поля, то получим, что на линейных полях компонент магнитного поля производные компонент напряженности магнитного поля по координатам будут постоянными, якобианы напряженности магнитного поля будут иметь тоже постоянные значения. Поэтому производные по координатам от якобианов будут нулевыми. Дополнительные неоднородные члены волнового уравнения пропадут. На линейных полях компонент магнитного поля турбулизации магнитного поля не будет. Генерацию волн напряженности можно ожидать в местах большого отличия полях компонент магнитного поля от линейных и в трехмерных полях напряженности магнитного поля.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложен способ учета всех трех инвариантов в уравнениях гидродинамики и электродинамики.

Для описания движений жидкости и поведения напряженности магнитного поля с учетом квадратичного и кубичного инвариантов предлагается использовать волновые дифференциальные уравнения второго и третьего порядка по времени. В неоднородную часть этих уравнений войдут квадратичный и кубичный инварианты.

Показана возможность турбулизации напряженности магнитного поля за счет учета в уравнениях электродинамики Максвелла геометрических построений Эйлера по выводу уравнения неразрывности с учетом членов высокого порядка малости.

Установлен закон сложения выведенных Эйлером дополнительных слагаемых оператора дивергенции со слагаемым Фарадея электромагнитной индукции в волновом уравнении для магнитного поля. Он позволяет заключить, что дополнительные слагаемые оператора дивергенции описывают создание дополнительной электродвижущей силы ЭДС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.
2. *Euler L.* Principia motus fluidorum. Pars prior // Novi commentarii Academiae Imperialis scientiarum Petropolitanae. V. 6. 1761. P. 271.
3. *Euleri L.* Commentationes Mechanicae ad theoriam corporum pertinentes. Volumen prius. Lausannae, 1954.
4. *Эйлер Л.* Принципы движения жидкостей. Перевод с латыни начальных разделов доклада 1752 г. в Берлинской Академии наук Ивановой Е.В., Овсянникова В.М. М.: Спутник +, 2020. 203 с.
5. *Жуковский Н.Е.* Кинематика жидкого тела Н.Е. Жуковскаго. Москва. Въ Университетской типографии (Катковъ). На Страстном бульваре, 1876.
6. *Жуковский Н.Е.* Полное собрание сочинений. Т. 2. Гидродинамика. М.-Л.: ОНТИ. НКТП СССР, 1935.
7. *Bubnov V.A.* Convective heat and mass transfer in an insulated trailing swirl. N. Y.: Begell House Inc. Publ., 1998. 174 p.
8. *Овсянников В.М.* // Сб. Мат. шк. “Волны и вихри в сложных средах”. 12 Междунар. конф. шк. мол. учен. М., 2021. С. 175.
9. *Овсянников В.М.* // В сб. “Проблемы аксиоматики в гидрогазодинамике”. 2006. № 15. С. 19.

Use of geometric properties of three invariants in wave problems of hydrodynamics and electrodynamics

V. M. Ovsyannikov[a, *]

[a] *Russian University of Transport MIIT, Academy of Water Transport, Moscow, 127994 Russia*
**e-mail: OvsyannikovVM@yandex.ru*

The theory of deformations is common to the theory of elasticity, hydrodynamics and electrodynamics. The conservation law for the deformation of the control figure contains linear, quadratic and cubic invariants. Passing to the limit of the derivation of the continuity equation destroys the quadratic and cubic invariants in the formula for the volume expansion coefficient. This simplification can lead to the loss of some fluid motion modes. This simplification can lead to the loss of some modes of behavior of electromagnetic fields. A method for taking into account three invariants in the solutions of the equations of hydrodynamics and electrodynamics is presented. For this, wave differential equations of the second and third order in time are used.

Keywords: continuity equation, high-order terms of smallness, Maxwell’s equations of electrodynamics, wave equation, magnetic field.