

УДК 537.217

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ НЕЗАРЯЖЕННЫХ ТОНКОСТЕННЫХ ПРОВОДНИКОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И КОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

© 2023 г. В. П. Савин^{1, *}, Ю. А. Кокшаров^{1, 2}

¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

“Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”, физический факультет, Москва, Россия

²Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

“Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова Российской академии наук”, Москва, Россия

*E-mail: sylvadimir1999@yandex.

Поступила в редакцию 07.07.2023 г.

После доработки 17.07.2023 г.

Принята к публикации 28.07.2023 г.

Показано, что для тонкостенных незаряженных проводников цилиндрической и конической формы в поле точечного заряда, существует электростатический “эффект отталкивания”, ранее предсказанный для проводников с сквозной полостью. Аксиальная симметрия полости не обязательна для проявления эффекта. Это доказывает возможность существования “эффекта отталкивания” для проводников с различными типами полости.

DOI: 10.31857/S0367676523702885, EDN: FKMZWW

ВВЕДЕНИЕ

В задачах электростатики геометрическая форма заряженного объекта (проводника или диэлектрика) может играть важную роль [1–4]. Недавно был теоретически предсказан [5, 6] “эффект отталкивания” заряженного тела от незаряженных тонкостенных проводников, обладающих полостью — полусферы [5], эллипсоида и усеченной сферы [6]. Причину возникновения эффекта можно назвать геометрической, так как индуцированные на незаряженном проводнике заряды, обуславливающие притяжение, расположены на поверхности проводника геометрически менее выгодно в отношении величины создаваемой силы, чем заряды, отвечающие за отталкивание [6]. В работе [6] нами были обнаружены и другие интересные электростатические эффекты. Например, было показано, что необычный “эффект отталкивания” возможен не только для электронейтральных, но и для заряженных проводников с полостью. В частности, мы обнаружили, что слабозаряженная полусфера может отталкивать точечный заряд противоположного знака. Кроме того, мы показали, что, если такая полусфера взаимодействует с одноименным точечным зарядом, сила между телами испытывает осцилляции — притяжение и отталкивание несколько раз сменяют друг друга при удалении заряда от полусферы.

Следует отметить, что в работе [6] мы исследовали тонкостенные проводники только с не-

сквозной полостью — полуэллипсоиды с различной величиной эксцентриситета и различные виды усеченной сферы, включая полусферу как частный случай. В настоящей работе используются те же методы численного расчета, что и в работе [6], но представлены результаты исследования особенностей взаимодействия точечного заряда с незаряженными тонкостенными проводниками, имеющими сквозную полость — цилиндр и усеченный конус. Выбор формы проводников обусловлен, во-первых, тем, что цилиндрические и конические проводники очень важны в практическом плане [7, 8]. Во-вторых, одной из наших задач было выявить особенности “эффекта отталкивания”, если полость в проводнике становится сквозной. Кроме того, в работе исследовался “эффект отталкивания” для незамкнутого сегмента цилиндрической формы, как примера проводника с полостью, не обладающей аксиальной симметрией.

МЕТОДИКА РАСЧЕТА

Для численного решения электростатических задач можно, в общем случае, использовать как подход, основанный на решении дифференциальных уравнений (Пуассона и Лапласа) с соответствующим учетом граничных условий, так и подход, основанный на записи интегралов для потенциала и напряженности от источников в виде

поверхностных или объемных зарядов [9–11] с дополнительными условиями, зависящими от конкретной задачи, например, учет постоянства потенциала или заряда проводника. В случае, когда требуется найти равновесное распределение заряда на поверхности проводника, помещенного во внешнее электростатическое поле, можно рассматривать неизвестные заряды δq_i малых областей поверхности как источники потенциала для этих же областей. Это позволяет записать систему линейных интегральных уравнений, решение которой должно соответствовать минимуму некоторой функции переменных δq_i . Точность метода зависит от числа N разбиения поверхности на малые области. Поскольку метод интегральный, точность определения значений потенциала или напряженности поля выше, чем точность определения значений зарядов δq_i . Это общее свойство всех так называемых “методов моментов” [11, 12].

В нашей работе для решения электростатической задачи мы использовали два физических подхода: выравнивание (минимизация отклонения от среднего значения) потенциала поверхности проводника (1-й метод) и нахождение минимума электростатической энергии при установлении равновесного распределения индуцированных зарядов (2-й метод). В первом методе техническая часть решения сводится к минимизации функции N переменных, во втором — к решению системы N линейных уравнений с N неизвестными. Наши расчеты показали, что второй метод, как правило, менее точен по сравнению с первым. Это обусловлено интегральным характером полной энергии системы, то есть ее чувствительностью лишь к среднему значению плотности индуцированного заряда на небольших участках поверхности. Это допускает локальные отклонения плотности заряда от точной зависимости при использовании приближенного численного метода.

Конкретные алгоритмы численного расчета и лежащая в их основе физическая модель подробно описаны в работе [6]. Модель основана на представлении проводников в виде системы большого числа параллельных равномерно заряженных тонких колец для случая, если исследуемая система характеризуется свойством аксиальной симметрии (например, цилиндр или усеченный конус), или в виде большого числа точечных зарядов (в центрах малых областей разбиения поверхности), если нет аксиальной симметрии (например, цилиндрический сегмент). Результаты расчета представлены ниже.

ТОНКОСТЕННЫЙ ЦИЛИНДР И УСЕЧЕННЫЙ КОНУС

Рассмотрим два типа электронейтральных тонкостенных проводников со сквозными отверстиями, помещенные в поле точечного заряда q . Пусть один проводник имеет форму усеченного конуса (рис. 1а), другой — форму цилиндра (рис. 1б). Величины R_1 и R_2 обозначают радиусы правого и левого оснований проводников, соответственно. Будем предполагать для конуса $R = R_1 < R_2$, а для цилиндра $R = R_1 = R_2$, где R — единица измерения для всех величин, имеющих размерность длины. Длины проводников обозначаются символом L . Координата z правого и левого оснований каждого проводника равна нулю и $-L$, соответственно (рис. 1а, 1б). Положительный ($q > 0$) точечный заряд, создающий внешнее электростатическое поле, всегда находится на оси симметрии системы.

Для определения вида взаимодействия (притяжение или отталкивание) точечного заряда с нейтральным проводником необходимо найти знак производной электростатической энергии системы W по координате точечного заряда z_q . Результаты расчета энергии взаимодействия W в зависимости от z_q для усеченного конуса и цилиндра показаны на рис. 1б и рис. 1г, соответственно. Каждая кривая $W(z_q)$ имеет два локальных минимума W_1 и W_2 при z_1 и z_2 , соответственно, и единственный локальный максимум $W_{\max}$ при $z_{\max}$. Образовавшиеся на энергетических кривых $W(z_q)$ потенциальные ямы при W_1 и W_2 имеют глубины $\Delta W_1 = W_{\max} - W_1$ и $\Delta W_2 = W_{\max} - W_2$, соответственно (рис. 1б). На рис. 1б и рис. 1г направления действующей на точечный заряд q силы отталкивания $\vec{F}_q$ обозначены стрелками, которые направлены от локального максимума к локальным минимумам. Сила отталкивания $\vec{F}_q$ меняет свое направление на противоположное при пересечении точки $z_{\max}$. Энергетические кривые $W(z_q)$ асимметричны относительно $z_{\max}$ для усеченного конуса и симметричны для цилиндра. Для усеченного конуса более глубокая потенциальная яма находится вблизи отверстия с меньшим радиусом.

Для количественного описания характерных особенностей энергетических кривых введем безразмерные параметры. Параметр асимметрии β для зависимости $W(z_q)$ может быть записан в виде:

$$\beta = \frac{z_1 - z_{\max}}{z_{\max} - z_2} - 1. \quad (1)$$

Этот параметр, характеризует асимметрию энергетической кривой по координате. Он всегда

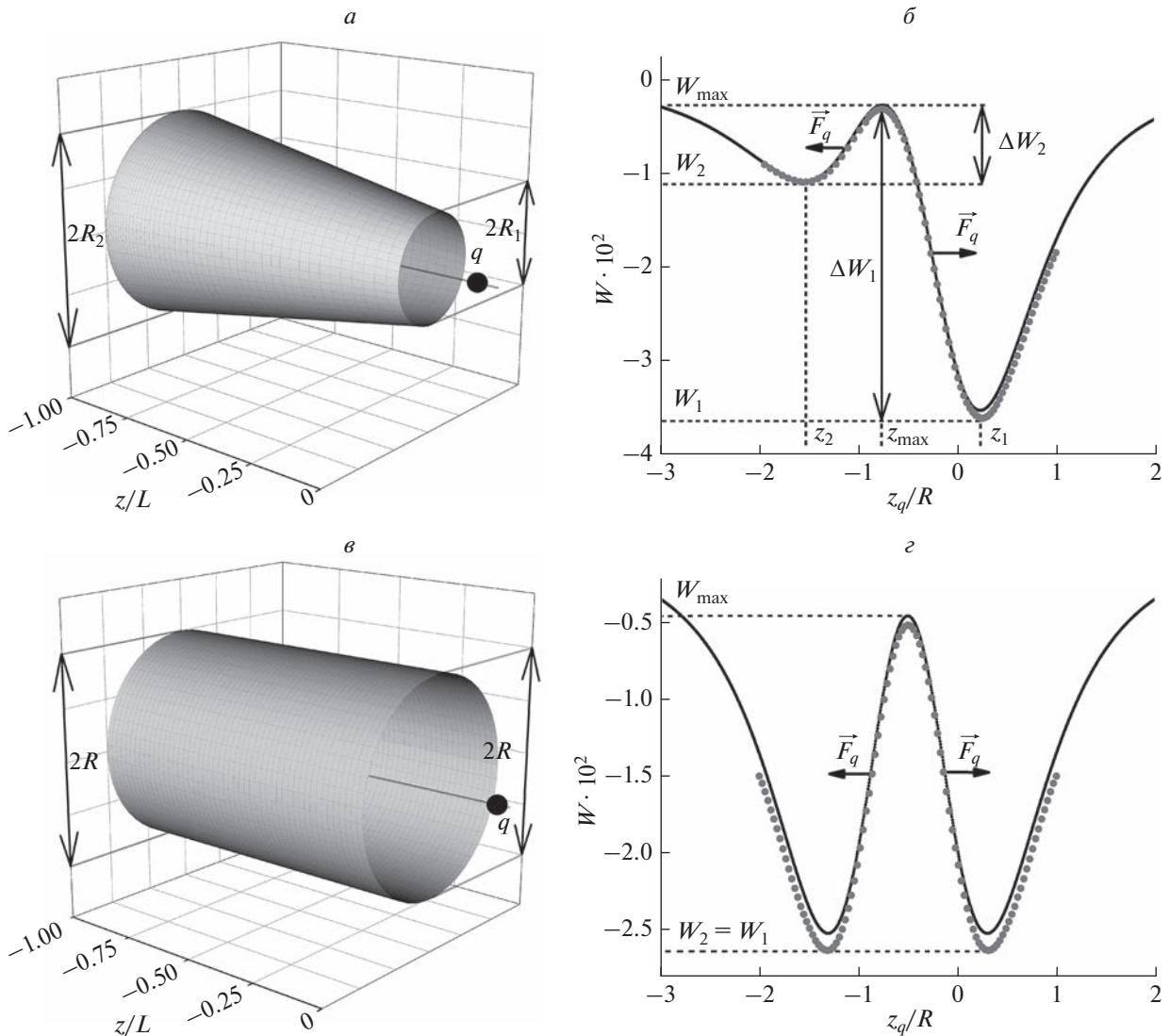


Рис. 1. Схемы систем с коническим (а) и с цилиндрическим (в) электронейтральными проводниками. Символами R_1 и R_2 обозначены радиусы оснований усеченного конуса. L — длина усеченного конуса. (б) и (г) Энергия W как функция координаты точечного заряда z_q в системах усеченный конус (при $R_1 = R$; $R_2 = 1.2R$; $L = R$) — точечный заряд q (б) и цилиндр (при $R_1 = R_2 = R$; $L = R$) — точечный заряд (г). Энергия W нормирована на $q^2/(4\pi\epsilon_0 R)$, где R — единица измерения для всех величин, имеющих размерность длины. Символы и линии обозначают результаты численного расчета 1-м и 2-м методами, соответственно. Значения энергий в локальных минимумах обозначаются символами W_1 и W_2 ($|W_2| \leq |W_1|$). ΔW_1 — Глубина потенциальной ямы большей глубины. Локальные минимумы W_1 и W_2 имеют координаты z_1 и z_2 , соответственно. Векторы $\vec{F}_q$ указывают направление действующей на точечный заряд q силы отталкивания, в зависимости от его положения по отношению к локальному максимуму $W_{\max}$, имеющему координату $z_{\max}$.

неотрицателен (при выборе условия $R_1 < R_2$). Вычитание единицы обусловлено удобством считать $\beta = 0$ для симметричной кривой.

Формула для безразмерного геометрического параметра α , характеризующего относительные размеры усеченного конуса, имеет вид:

$$\alpha = L \frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}. \quad (2)$$

Параметр α всегда неотрицателен, он равен нулю для случая цилиндра и стремится к L/R для случая, когда усеченный конус практически становится конусом ($R_2 \gg R_1$).

На рис. 2а представлена расчетная зависимость параметра асимметрии по координате β от геометрического параметра α при различных значениях R_1 , R_2 , L . Значение β минимально и равно

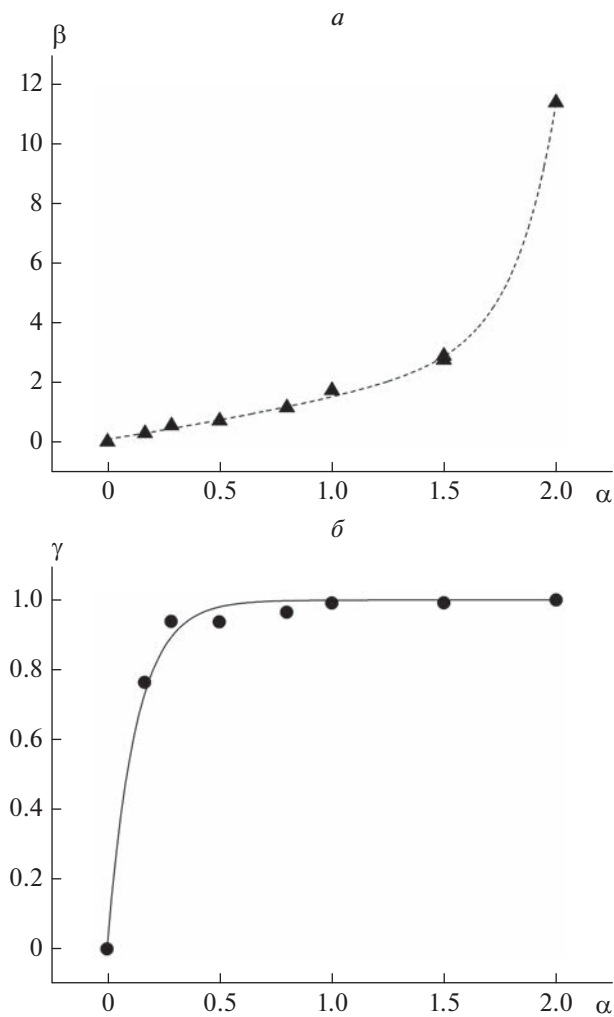


Рис. 2. Зависимость параметров β (а) и γ (б) от параметра α при разных величинах R_1 , R_2 , L . Результаты численного расчета 1-м методом обозначены символами. Штриховая линия построена с помощью сплайн-интерполяции. Сплошная линия является результатом применения процедуры NLSF в Origin 7.0 с использованием функции $\gamma(\alpha) = 1 - \exp(-\alpha/\alpha_0)$ при $\alpha_0 = 0.127 \pm 0.009$.

нулю при $\alpha = 0$, что соответствует случаю тонкостенного цилиндрического проводника ($R_1 = R_2$). Уменьшение отношения R_1/R_2 приводит к увеличению параметра α и, следовательно, способствует увеличению асимметрии кривой $W(z_q)$ и росту параметра β .

Асимметрия энергетической кривой проявляется также и в различии глубины потенциальных ям, характеризуемых величинами ΔW_1 и ΔW_2 (рис. 1б).

Для количественного описания этой асимметрии удобно использовать безразмерный параметр асимметрии по энергии γ :

$$\gamma = \frac{\Delta W_1 - \Delta W_2}{\Delta W_1} = \frac{W_2 - W_1}{\Delta W_1}. \quad (3)$$

Параметр γ характеризует относительную разницу глубины потенциальных ям. Он всегда неотрицателен и не может превышать 1.

С ростом геометрического параметра асимметрии α глубина потенциальной ямы ΔW_1 вблизи основания с меньшим радиусом R_1 растет по сравнению с глубиной потенциальной ямы ΔW_2 , находящейся вблизи большего основания R_2 . Зависимость параметра асимметрии по энергии $\gamma(\alpha)$ при различных значениях R_1 , R_2 , L представлена на рис. 2б. Для цилиндрического проводника глубина потенциальных ям одинакова $W_1 = W_2$ (рис. 1з). Это соответствует точке $\alpha = \gamma = 0$ на рис. 2б. Если усеченный конус обладает сильной асимметрией ($R_1 \ll R_2$ и $R_1 \ll L$), то $\alpha \gg 1$ и должны быть верными неравенства: $\beta \gg 1$; $\Delta W_1 \gg \Delta W_2$. В таком случае должно выполняться приближенное равенство $\gamma \approx 1$. Поведение зависимостей $\beta(\alpha)$ на рис. 2а и $\gamma(\alpha)$ на рис. 2б подтверждает эти выводы.

Таким образом, наши расчеты показывают, что точечный заряд, находящийся достаточно глубоко внутри (и на оси симметрии) полого тонкостенного проводника цилиндрической или конической формы со сквозной полостью, не может находиться в состоянии устойчивого равновесия и выталкивается из него. Если же заряд оказывается снаружи проводника (продолжая оставаться на его оси), он может как продолжать отталкиваться, если достаточно близок к проводнику, так и притягиваться при значительном удалении. При всех значениях геометрических параметров усеченного конуса отношение $\Delta W_1/(z_1 - z_{\max})$ больше $\Delta W_2/(z_{\max} - z_2)$, поэтому можно утверждать, что в среднем сила, изображенная с правой стороны рис. 1б, больше силы, изображенной с левой стороны. Однако смысл терминов “отталкивание” и “притяжение” в некоторых случаях требует дополнительного пояснения. Например, при некоторых значениях длины и радиусов усеченного конуса точка локального минимума энергии может оказаться внутри (а не вне, как на рис. 1б) конуса вблизи его входного малого отверстия. Тогда смена режима отталкивания (выталкивания из конуса) на режим притяжения (втягивания в конус) возникает, даже если заряд не вышел из внутреннего пространства конуса. Другой пример: при увеличении угла раствора усеченного конуса $z_{\max}$ становится меньше $-L$, т.е. точка максимума выходит за пределы конуса. При этом правый минимум может оставаться вне конуса

($z_1 > 0$). В таком случае заряд q втягивается в конус со стороны большего отверстия в области $z_{\max} < z < 0$, но выталкивается из конуса в области $0 < z < z_1$, когда выйдет за его пределы. При этом знак горизонтальной проекции силы взаимодействия заряда с конусом не меняется.

Несмотря на указанные терминологические тонкости, можно сказать, что “эффект отталкивания” реализуется для незаряженного тонкостенного проводника как в форме цилиндра, так и в форме усеченного конуса при всех значениях безразмерного геометрического параметра α . Например, в последнем примере, заряд q , находясь в области $z_2 < z < z_{\max}$, безусловно отталкивается от незаряженного проводника, что и означает “эффект отталкивания” в используемом в данной работе смысле.

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ СЕГМЕНТ

Используемая в данной работе физическая и компьютерная модель применима не только к аксиально-симметричным системам, которые были рассмотрены в работе [6] и к которым относятся проводники в форме цилиндра или усеченного конуса. Рассмотрим задачу о взаимодействии электронейтрального проводящего незамкнутого цилиндрического сегмента высоты H и радиуса R с точечным зарядом q . Заряд может смещаться только вдоль оси z . Схема системы показана на рис. 3а. Сечение сегмента горизонтальной плоскостью — полуокружность. Центр этой полуокружности на половине высоты цилиндрического сегмента расположен в начале координат, точечный заряд находится на оси, проходящей через центр проводника перпендикулярно его поверхности в этой точке. Данная система не обладает аксиальной симметрией, поэтому поверхность проводника следует разбить на малые участки, распределенные индукционные заряды которых заменяются на точечные заряды в центре участков. Поскольку в системе остаются две взаимно перпендикулярные плоскости симметрии, проходящие через заряд q и начало координат, число независимых переменных, задающих величины этих точечных зарядов, меньше полного числа зарядов в 4 раза. Это сокращает время расчета. На рис. 3б представлены энергетические кривые $W(z_q)$ при разных отношениях H/R . При $H/R \leq 1.5$ зависимости $W(z_q)$ имеют локальный минимум и поэтому “эффект отталкивания” существует, при $H/R \geq 1.5$ зависимости $W(z_q)$ становятся монотонными, поэтому “эффект отталкивания” не реализуется.

Исчезновение “эффекта отталкивания” при изменении относительных размеров сегмента можно объяснить исходя из следующих соображе-

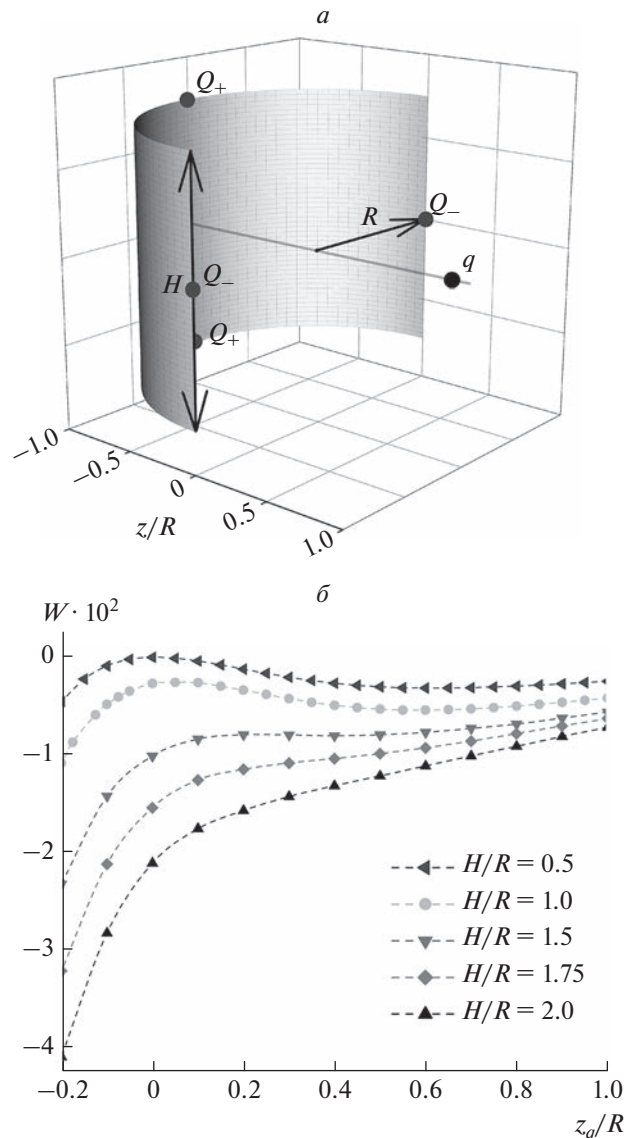


Рис. 3. (а) Изображение системы, содержащей электронейтральный проводящий цилиндрический сегмент и точечный заряд q (а). Параметры H и R обозначают высоту и радиус цилиндрического сегмента, соответственно. Точками Q_+ и Q_- обозначено расположение положительных и отрицательных зарядов в эквивалентной модели ($Q_+ = |Q_-|$). Энергия системы W как функция координаты точечного заряда z_q при различных значениях отношений H/R (б). Результаты численного расчета 1-м методом обозначены символами. Штриховая линия соединяет соседние точки для лучшего восприятия. Энергия $W(z_q)$ нормирована на величину $q^2/(4\pi\epsilon_0 R)$.

ний. Увеличение высоты проводника H приводит к отдалению от точечного заряда горизонтальных краев проводника, на которых сконцентрирована большая часть положительных индуцированных за-

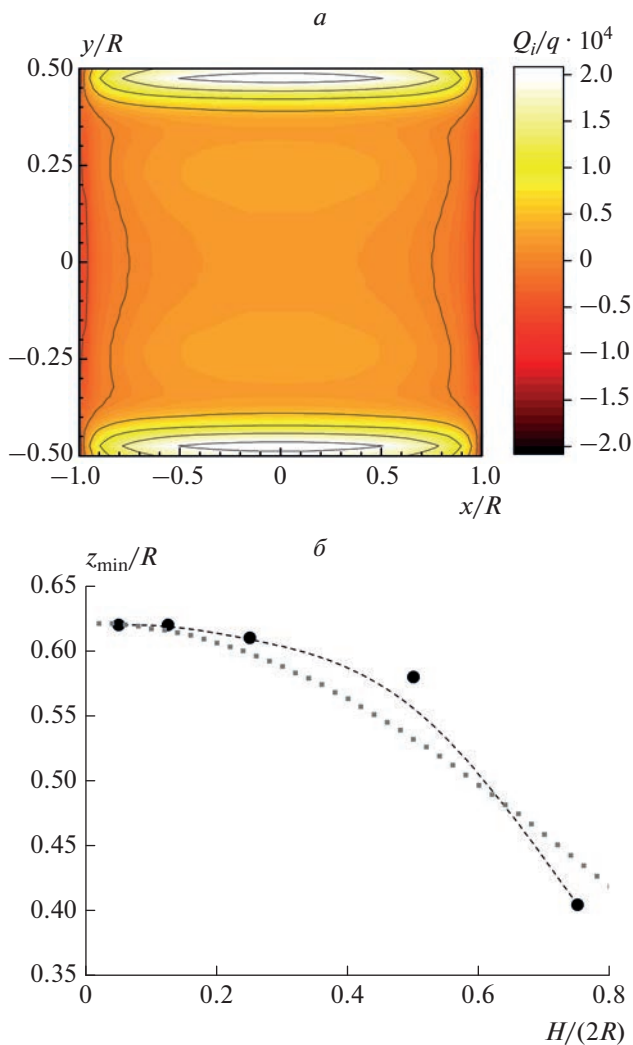


Рис. 4. Распределение индуцированных зарядов на поверхности цилиндрического сегмента в виде проекции на плоскость XY при $H/R = 1$ ($H = 1$; $R = 1$), $z_q = 0.6$ (вблизи локального минимума), $q > 0$ (а). Справа представлена шкала, ставящая в соответствие определенной величине заряда определенный цвет. Светлые тона отвечают области расположения положительных зарядов, темные — отрицательных индуцированных зарядов. Зависимость координаты локального минимума $z_{\min}$ от величины $H/(2R)$ (б). Результаты численного расчета 1-м методом обозначены символами. Штриховая линия построена с помощью сплайн-интерполяции, пунктирная — с использованием эквивалентной модели.

рядов, вызывающих отталкивание (см. рис. 4а). При этом ближайший к точечному заряду q край проводника, на котором сконцентрирована большая часть отрицательных индуцированных зарядов, вызывающих притяжение, не меняет своего положения (см. рис. 4а). Таким образом, по мере увеличения параметра H вклад отталкивающей

силы в результирующую силу взаимодействия уменьшается, и при превышении значения $H/R = 1.5$ “эффект отталкивания” пропадает.

Интересно сравнить исчезновение “эффекта отталкивания” для цилиндрического сегмента, не обладающего аксиальной симметрией, и для сплюснутого эллипсоида вращения, рассмотренного в работе [6]. В последнем случае по мере увеличения степени сжатия эллипсоида постепенно сближаются точки локальных максимума и минимума на энергетической кривой. В пределе эллипсоид переходит в участок плоской поверхности, не проявляющий “эффекта отталкивания”. Как видно из рис. 3б, в случае цилиндрического сегмента также происходит плавное сближение локальных экстремумов на энергетической кривой, которые уже нельзя различить при $H/R \geq 1.5$.

Если заменить сегмент эквивалентной моделью, в которой непрерывно распределенные поверхностные индуцированные заряды заменены четырьмя точечными зарядами, расположенными в средней точке краев сегмента (рис. 3а), можно найти условие для нулевой силы в минимуме энергии, выражаемое нелинейным уравнением относительно координаты заряда z_q :

$$\frac{z_q/R}{\left(1 + (z_q/R)^2\right)^{3/2}} = \frac{1 + z_q/R}{\left((H/2)^2 + (z_q/R)^2\right)^{3/2}}. \quad (4)$$

Решение этого уравнения показано на рис. 4б. Видно хорошее соответствие результатов простой модели 4-х зарядов и нашего численного решения, почти точно совпадающих при малой высоте цилиндрического сегмента, когда он вырождается в полуокружность.

Таким образом, мы показали, что аксиальная симметрия незаряженного тонкостенного проводника с полостью не является необходимым условием возникновения “эффекта отталкивания”.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для тонкостенных незаряженных проводников в форме цилиндра или усеченного конуса, находящихся в поле точечного заряда, исследованы зависимости электростатической энергии от расстояния между зарядом и проводником. Эти зависимости имеют два локальных минимума, что приводит к существованию силы отталкивания заряда от проводника в областях вблизи противоположных отверстий сквозной полости проводника. “Эффект отталкивания” существует также для точечного заряда, воздействующего на тонкий незаряженный проводящий сегмент цилиндрической формы. Однако этот эффект исчезает, если высота сегмента становится заметно больше его радиуса. Таким образом, в работе показано, что “эффект отталкивания” наблюдается в про-

водниках не только с глухой, но и со сквозной полостью, а также в системах, не обладающих аксиальной симметрией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jadhao V., Thomas C.K., de la Cruz M.O.* // Proc. Nat. Acad. Sci. 2014. V. 111. No. 35. P. 12673.
2. *Honig B., Nicholls A.* // Science. 1995. V. 268. No. 5214. P. 1144.
3. *Majic M.* // Amer. J. Phys. 2022. V. 90. No. 9. P. 682.
4. *Ciftja O., Beharie K., Beharie T.* // Eur. J. Phys. 2019. V. 40. No. 1. Art. No. 015501.
5. *Levin M., Johnson S.G.* // Amer. J. Phys. 2011. V. 79. No. 8. P. 843.
6. *Savin V.P., Koksharov Yu.A.* // J. Electrostat. 2022. V. 120. Art. No. 103769.
7. *Lekner J.* // J. Electrostat. 2022. V. 118. Art. No. 103721.
8. *Khair A.S.* // J. Appl. Phys. 2013. V. 114. Art. No. 134906.
9. *Rylander T., Bondeson A., Ingelström P.* Computational electromagnetics. N.Y.: Springer, 2013. 302 p.
10. *Chew W.C., Jin J.-M., Michielssen E., Song J.* Fast and efficient algorithms in computational electromagnetics. London: Artech House, 2001. 949 p.
11. *Gibson W.C.* The method of moments in electromagnetics. London: CRC Press, 2022. 510 p.
12. *Graglia R.D., Peterson A.F.* Higher-order techniques in computational electromagnetics. Edison: Scitech Publishing, 2015. 409 p.

Some features of electrostatics of uncharged thin-walled cylindrical and conical conductors

V. P. Savin^{a, *}, Yu. A. Koksharov^{a, b}

^a*Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia*

^b*Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 125009 Russia*

^{*}*e-mail: svsavim1999@yandex.ru*

It is shown that for thin-walled uncharged cylindrical and conical conductors in the field of a point charge, there is an electrostatic “repulsion effect” previously predicted for conductors with a non-through cavity. Axial symmetry of the cavity is not necessary for the manifestation of the effect. This proves the possibility of a “repulsion effect” for conductors with different types of cavities.