

УДК 534.222

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ДИФРАГИРУЮЩЕГО ИНТЕНСИВНОГО ГАУССОВСКОГО ПУЧКА В РАМКАХ МОДЕЛИ МОДУЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

© 2023 г. В. А. Гусев<sup>1</sup>, \*, Д. А. Жарков<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”, физический факультет, Москва, Россия

\*E-mail: [vgusev@bk.ru](mailto:vgusev@bk.ru)

Поступила в редакцию 28.10.2022 г.

После доработки 15.11.2022 г.

Принята к публикации 26.12.2022 г.

Развита модель модульной нелинейности для расчета поля ограниченных акустических пучков большой интенсивности. Получено точное решение данной задачи. Продемонстрировано влияние дифракционных и нелинейных эффектов на временной профиль пучка. Показано, что при уменьшении апертуры образуется последовательность коротких положительных импульсов большой амплитуды, наблюдавшаяся экспериментально.

DOI: 10.31857/S0367676522701071, EDN: MDVEYB

### ВВЕДЕНИЕ

Расчет временных профилей и пространственной структуры акустических пучков и полей большой интенсивности необходим во многих практически важных случаях, в частности в медицинских приложениях – ультразвуковой диагностике и терапии [1, 2]. Для выявления основных качественных особенностей трансформации временной и пространственной структуры пучков и их зависимости от начальных параметров и свойств среды желателен построение аналитических решений. Такие решения, как точные, так и приближенные, удается построить для многих одномерных задач нелинейной акустики [3, 4]. В то же время реальные источники являются источниками неоднородных волн, в первую очередь, ограниченных волновых пучков, которые для своего описания требуют применения трехмерных уравнений типа Хохлова–Заболотской (если волну можно считать узкополосным волновым пучком) либо Вестервельта (для волн с широким пространственным спектром). Возможности получения аналитических решений в этих случаях сильно ограничены. Поэтому даже такие классические задачи как дифракция на отверстии в экране и подобные ей для нелинейных волн аналитически изучены недостаточно полно. Характер влияния параметров волн и размеров экрана на пространственную структуру поля изучен не до конца. Отметим работу [5], в которой был проведен эксперимент по дифракции мощной нелинейной волны на экране. Как оказалось, при ди-

фракции нелинейной волны на узком экране профиль волны сильно меняется, искажается частотный спектр и зависимость амплитуд гармоник от их номера по сравнению с плоской волной. В частности, поле основной частоты сильно дифрагирует при прохождении через экран, так что в случае узкого отверстия поле дифрагированной волны состоит преимущественно из высших гармоник. Наиболее значимо изменяется временной профиль нелинейно-искаженной волны – вместо характерного пилообразного профиля формируется последовательность коротких положительных импульсов большой амплитуды. Численный анализ на основе уравнения Хохлова–Заболотской качественно подтвердил этот результат [5]. Однако конкретных выражений, описывающих характер изменения поля дифрагировавшей волны в зависимости от параметров задачи, и наглядного объяснения полученных результатов получено не было.

Продвинуться в направлении построения аналитических решений, позволяющих получить такие качественные зависимости, удастся при помощи моделей с нелинейностями модульного типа [6]. Такие модели успешно применялись для описания эффектов в кубично-нелинейных средах [7]. Основная идея состоит в качественной замене слагаемого с кубичной нелинейностью на слагаемое с так называемой квадратично-кубичной нелинейностью, т.е. вместо, например, слагаемого вида  $x^3$  записывается слагаемое  $x|x|$ . Лег-

ко видеть, что качественное поведение этих двух зависимостей в целом близко. В то же время, вместо уравнения с кубической нелинейностью получается уравнение фактически с квадратичной нелинейностью, для которого могут быть использованы известные подходы и решения. Но при этом будут получены решения с новым физическим смыслом. Аналогичная замена может использоваться и для слагаемых с квадратичной нелинейностью, когда слагаемое вида  $x^2$  заменяется на  $|x|$ . В этом случае получается набор линейных уравнений, каждое из которых формально может быть точно решено. Новый физический смысл появляется при сшивании решений этих уравнений и построении разрывных решений. Тем самым, нелинейные эффекты не пропадают при переходе к системе линейных уравнений, а проявляются при сшивании их решений. Такой подход был успешно применен для построения решений для поверхностной волны на границе полупространства нелинейной среды [8]. В случае поверхностных волн нелинейность среды не позволяет перейти к записи точного дисперсионного уравнения для скорости волны; возможно только использование методов возмущения. Применение модели модульной нелинейности позволило получить точное решение, качественно описывающее трансформацию поверхностной волны на границе нелинейной среды.

### УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ПУЧКОВ С МОДУЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Поле ограниченных акустических пучков большой интенсивности обычно описывают с помощью уравнения Хохлова–Заболотской:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p \frac{\partial p}{\partial \tau} \right) = \frac{c_0}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

где  $p$  – акустическое давление,  $\tau = t - z/c_0$  – время в сопровождающей системе координат,  $\rho_0$  и  $c_0$  – равновесные плотность и скорость звука,  $\varepsilon$  – нелинейный параметр. В (1) предполагается, что пучок распространяется в направлении оси  $z$  и медленно изменяется в поперечной плоскости  $x, y$ .

Основная идея модели модульной нелинейности состоит в замене в (1) слагаемого с квадратичной нелинейностью на слагаемое с модульной нелинейностью. Для последовательного построения такого уравнения удобно исходить из более общего уравнения типа уравнения Вестерверльта:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = - \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Произведем в (2) замену

$$\frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} \rightarrow \frac{\varepsilon p^*}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 |p|}{\partial t^2} \equiv \mu \frac{\partial^2 |p|}{\partial t^2}, \quad (3)$$

где  $\mu$  – новый нелинейный параметр среды с модульной нелинейностью. Раскрывая модуль, получим систему линейных волновых уравнений для интервалов различной полярности:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{1}{c_{\pm}^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = - \begin{cases} \mu \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, & p > 0, \\ -\mu \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, & p < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Уравнения (4) могут быть записаны в виде обычного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{1}{c_{\pm}^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

с эффективной скоростью звука, различной для интервалов разной полярности:

$$c_{\pm}^2 = \frac{c_0^2}{1 \mp \mu c_0^2}, \quad (6)$$

где верхний знак относится к интервалам положительной полярности  $p > 0$ , а нижний – к интервалам отрицательной полярности  $p < 0$ . Отметим, что скорость  $c_+$  при  $p > 0$  оказывается выше, чем скорость  $c_0$  в линейной среде, а  $c_-$  – меньше, что качественно совпадает со случаем квадратичной нелинейности. Теперь к уравнениям (5) могут быть применены стандартные методы решения и упрощения. В частности, переходя к новым переменным  $\tau_{\pm} = t - z/c_{\pm}$  и применяя метод медленно изменяющегося профиля (ММИП), можно получить линеаризованные уравнения Хохлова–Заболотской для каждой из полярностей:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tau_{\pm} \partial z} = \frac{c_{\pm}}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right). \quad (7)$$

В соответствии с видом уравнения (7) можно заключить, что вклад модульной нелинейности проявляется в двух факторах. Во-первых, импульсы разной полярности движутся с различными скоростями, т.е. профили смещаются относительно друг друга и необходимо проводить разрыв в области неоднозначности профиля. Во-вторых, дифракционное расплывание импульсов разной полярности будет различным за счет множителя  $c_{\pm}$  в правой части (6). Стоит отметить, что отличие  $c_{\pm}$  от  $c_0$  в правой части (7) играет скорее роль поправки вследствие закладываемой ММИП плавности изменения профиля в поперечном направлении. В частности, если выводить уравнения (7) напрямую из уравнения (1), то в правой части получится множитель  $c_0$ , а не  $c_{\pm}$ .

Применительно к замене квадратичной нелинейности на модульную (3) в случае ограниченных пучков нужно отметить следующее. В приосевой области пучка нелинейные искажения выражены сильно, при этом за счет более выраженного нелинейного затухания происходит сглаживание поперечного профиля пучка – так называемый эффект изотропизации диаграммы интенсивного пучка. В этом случае модель модульной нелинейности оправдана и эффективна. На периферии пучка, вдали от оси, его амплитуда мала, нелинейные эффекты слабы и могут быть рассчитаны методами возмущений. Применение модели модульной нелинейности в этом случае может завышать роль нелинейных эффектов. Это связано, в частности, с тем, что в случае квадратичной нелинейности возможен предельный переход к волнам бесконечно малой амплитуды, когда нелинейные эффекты плавно исчезают. В случае модульной нелинейности такой переход отсутствует и может достигаться только формальным уменьшением значения параметра  $\mu$ . На практике наибольший интерес представляет поле на оси пучка, что и будет рассмотрено далее.

### ДИФРАКЦИЯ ОГРАНИЧЕННОГО ПУЧКА В СРЕДЕ С МОДУЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Задачу дифракции нелинейной волны можно рассматривать в следующей постановке. Пусть излучается волна с некоторым поперечным распределением. Она испытывает нелинейные искажения и превращается в пилообразную. Затем

она падает на экран с отверстием или, в более общем случае, с амплитудной модуляцией. В частности, в работе [5] диаметр экрана был много меньше характерного поперечного размера пучка. После экрана распространение волны описывается уравнением (6). Для получения наиболее наглядных результатов удобно рассмотреть не экран с отверстием, а гауссовский пучок, заданный в плоскости  $z = 0$ . Граничное условие зададим в виде

$$p(t, z = 0, r) = p_0(t) \exp(-r^2/a^2),$$

причем временной профиль зададим в виде одиночной  $N$ -волны с характерными амплитудой  $A_0$  и длительностью  $t_0$ :

$$p_0 = \begin{cases} -A_0 \tau / t_0, & |\tau| < t_0 \\ 0, & |\tau| > t_0. \end{cases} \quad (8)$$

Характерная ширина пучка  $a$  формально играет роль эффективного радиуса отверстия. Удобство рассмотрения гауссового пучка состоит в возможности получения простых аналитических выражений для дифрагирующего поля.

Общее решение уравнений (7) на оси гауссовского пучка с произвольным профилем  $p_0(t)$  имеет вид:

$$p = p_0(\tau_{\pm}) - \frac{2c_{\pm} z}{a^2} \int_{-\infty}^{\tau_{\pm}} p_0(t) \exp\left(\frac{2c_{\pm} z}{a^2}(t - \tau_{\pm})\right) dt,$$

для  $N$ -волны (8) получаем:

$$\frac{p}{A_0} = \begin{cases} 0, & T < -1, \\ \exp(-X(T_{\pm} + 1))(1 + 1/X) - 1/X, & -1 < T < 1, \\ \exp(-XT_{\pm})[(1 - 1/X)\exp(X) + (1 + 1/X)\exp(-X)], & T > 1. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь введены безразмерные величины  $T_{\pm} = \tau_{\pm}/t_0$  и  $X = z/z_d$ , где

$$z_d = a^2/2c_{\pm}t_0 \quad (10)$$

– характерная дифракционная длина. Решение (9) представляет собой искаженную из-за дифракции  $N$ -волну, у которой появился “хвост” позади заднего фронта. При  $p > 0$  нужно выбрать решение с индексом “+”, при  $p < 0$  – с индексом “–”. Зависимость от апертуры пучка входит в дифракционную длину и, следовательно, в безразмерное расстояние  $X$ . Тем самым, изменение апертуры при прочих равных условиях означает формально переход к другому безразмерному расстоянию  $X$  при фиксированном расстоянии. При этом уменьшение апертуры соответствует увеличению  $X$ , т.е. чем меньше апертура, тем больше  $X$  и силь-

нее искажение волнового профиля. Отметим также, что в  $z_d$  входит и скорость  $c_{\pm}$ , т.е., вообще говоря, безразмерные расстояния будут различными для разных полярностей. Поскольку  $c_-$  меньше, чем  $c_+$ , то для отрицательной полярности  $X$  будет немного меньше и искажения несколько слабее.

На рис. 1 приведен исходный профиль  $N$ -волны (8) (пунктир) и решение (9) при  $X = 1$  (штриховая линия), показывающее искажения профиля волны, обусловленные дифракцией. Видно, что импульс изменяется несимметрично: пиковое положительное значение остается равным 1, а пиковое отрицательное – уменьшается по величине. Интервал положительной полярности уменьшается, а отрицательной – увеличивается.

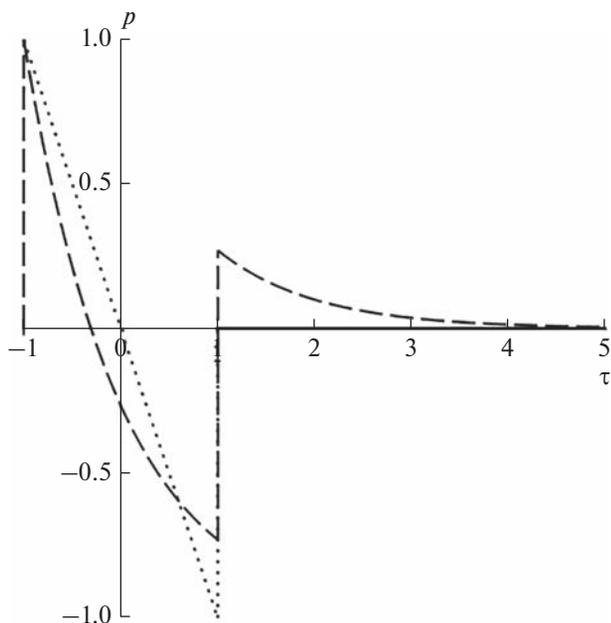


Рис. 1. Профиль исходной  $N$ -волны (8) (пунктир) и решения (9) (штриховая линия).

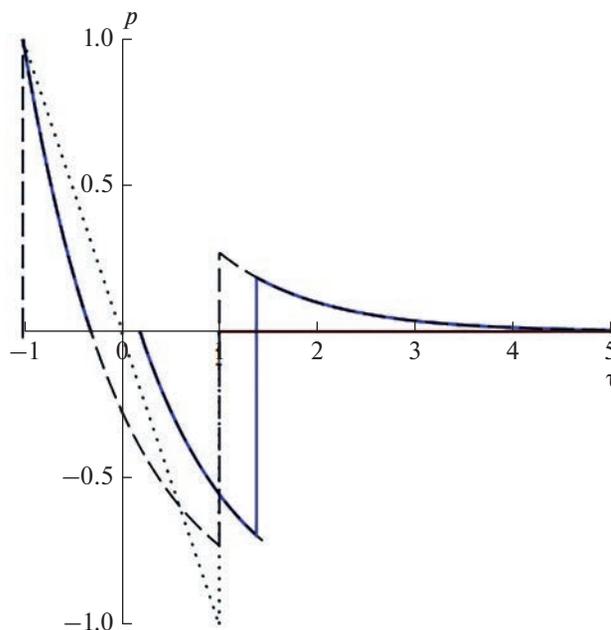


Рис. 2. Временной профиль пучка (синяя линия) при  $X = 1$  в сравнении с выражениями (8) и (9) (см. рис. 1).

Далее в среде с модульной нелинейностью необходимо провести сшивание профилей для интервалов положительной и отрицательной полярностей. Профиль волны в интервале отрицательной полярности отстает от волны в интервале положительной полярности. Первый интервал положительной полярности с передним фронтом становится все более узким и отрывается от остальной части импульса. В области заднего фронта профили для интервалов различной полярности наезжают друг на друга. Образующаяся неоднозначность профиля должна быть устранена проведением разрыва (ударного фронта), положение которого определяется правилом равенства площадей, поскольку импульс волны сохраняется. В результате после проведения разрыва происходит взаимная компенсация и уменьшение пиковых положительного и отрицательного значений. Тем самым, достигаемое пиковое отрицательное значение уменьшается дополнительно за счет нелинейного затухания на ударном фронте. В итоге временной профиль состоит из узкого положительного импульса большой амплитуды и следующего за ним широкого отрицательного импульса сравнительно небольшой амплитуды. В случае исходной периодической  $N$ -волны можно ожидать, что профиль будет близок к последовательности таких узких положительных импульсов. Таким образом, уменьшение отрицательного пикового значения происходит за счет дифракционного искажения профиля и нелинейного затухания.

Проследим изменение профиля волны при изменении апертуры пучка. Чем апертура меньше, тем на меньших расстояниях  $X$  будет проявляться отмеченная выше динамика. На рис. 2 и 3 приведены временные профили (сплошные синие линии) на расстояниях  $X = 1$  и  $X = 3$ . В области не-

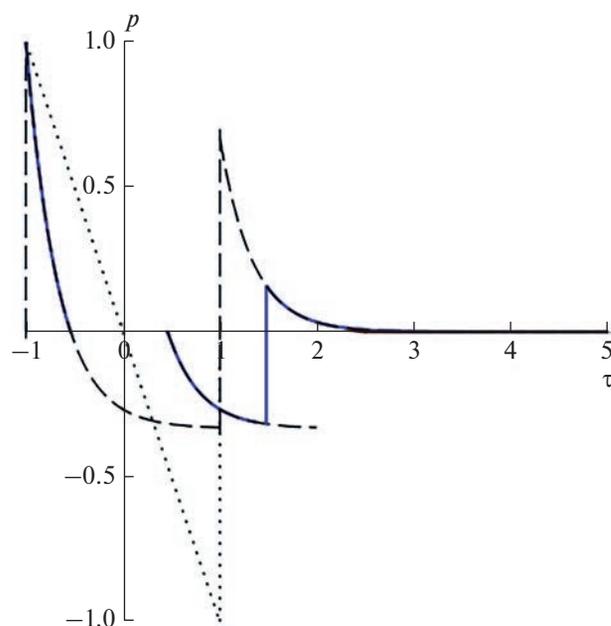


Рис. 3. Временной профиль пучка (синяя линия) при  $X = 3$  в сравнении с выражениями (8) и (9) (см. рис. 1).

однозначности проведен разрыв на основании правила равенства площадей. Как видно, передний фронт становится все более резким, а плавные участки профиля исчезают. Подчеркнем, что переход от  $X=1$  к  $X=3$  в соответствии с (10) можно интерпретировать как уменьшение апертуры пучка в  $\sqrt{3}$  раз при фиксированном расстоянии. Таким образом, при уменьшении апертуры пучка действительно должно наблюдаться образование последовательности коротких положительных импульсов большой амплитуды.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развита модель среды с модульной нелинейностью для расчета неоднородных полей ограниченных акустических пучков. Эта модель, в частности, качественно описывает искажение пучков и в классических квадратично-нелинейных средах. Получено точное решение для поля на оси гауссовского пучка в среде с модульной нелинейностью. Проанализировано влияние апертуры пучка на его эволюцию и продемонстрирована тенденция к формированию временного профиля в виде последовательности положительных импульсов большой амплитуды при уменьшении апертуры. Этот эффект качественно совпадает с экспериментальными данными.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-02-00493).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чупова Д.Д., Росницкий П.Б., Гаврилов Л.Р., Хохлова В.А. // Акуст. журн. 2022. Т. 68. № 1. С. 3; Chupova D.D., Rosnitskiy P.B., Gavrilov L.R., Khokhlova V.A. // Acoust. Phys. 2022. V. 68. No. 1. P. 1.
2. Гаврилов Л.Р., Сапожников О.А., Хохлова В.А. // Изв. РАН. Сер. физ. 2015. Т. 79. № 10. С. 1386; Gavrilov L.R., Sapozhnikov O.A., Khokhlova V.A. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2015. V. 79. No. 10. P. 1232.
3. Васильева О.А., Лапшин Е.А., Руденко О.В. // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 1. С. 3; Vasil'eva O.A., Lapshin E.A., Rudenko O.V. // Acoust. Phys. 2019. V. 65. No. 1. P. 23.
4. Руденко О.В. // Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика. 2018. Т. 26. № 3. С. 7.
5. Гурбатов С.Н., Вьюгин П.Н., Дерябин М.С. и др. // Акуст. журн. 2021. Т. 67. № 3. С. 235; Gurbatov S.N., Vyugin P.N., Deryabin M.S. et al. // Acoust. Phys. 2021. V. 67. No. 3. P. 237.
6. Rudenko O.V., Hedberg C.M. // Nonlinear Dynamics. 2017. V. 89. P. 1905–1913.
7. Руденко О.В. // ДАН. 2017. Т. 475. № 5. С. 503; Rudenko O.V. // Dokl. Math. V. 96. No. 1. P. 399.
8. Гусев В.А. // В кн.: Труды Всероссийской акустической конференции. СПб.: Политех-Пресс, 2020. С. 101.

## Analytical solution for the diffracting intense gaussian beam in the framework of a modular nonlinearity model

V. A. Gusev<sup>a, \*</sup>, D. A. Zharkov<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia

\*e-mail: vgusev@bk.ru

A model of modular nonlinearity has been developed for calculating the field of high-intensity bounded acoustic beams. The exact solution of this problem is obtained. The influence of diffraction and nonlinear effects on the time profile is demonstrated. It is shown that as the aperture decreases, a sequence of short positive high-amplitude pulses is formed, which was observed experimentally.