

УДК 533.9

## О ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРИИ ГАМ К РЕАЛЬНЫМ ТОКАМАКАМ С ГОФРИРОВАННЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

© 2024 г. Е. А. Сорокина<sup>а, \*</sup><sup>а</sup>НИИЦ “Курчатовский институт”, Москва, Россия

\*e-mail: Sorokina\_EA@nrcki.ru

Поступила в редакцию 14.11.2024 г.

После доработки 18.11.2024 г.

Принята к публикации 19.11.2024 г.

Исследовано влияние тороидальной гофрировки магнитного поля на пространственную структуру и частоту геодезической акустической моды (ГАМ) в плазме токамака. Показано, что тороидальная асимметрия магнитной конфигурации приводит к зацеплению колебаний электрического потенциала ГАМ с тороидально- и полоидально-неоднородными возмущениями давления плазмы. Для токамаков с большим аспектным отношением выведен закон дисперсии ГАМ, учитывающий неоднородность гофрировки в сечении токамака. При увеличении числа катушек  $n$  тороидального поля эффект гофрировки перестает зависеть от  $n$ . Показана применимость стандартной теории для нахождения частоты и пространственной структуры ГАМ в крупных токамаках.

**Ключевые слова:** геодезическая акустическая мода, токамак, тороидальная гофрировка магнитного поля, МГД, непрерывный спектр

DOI: 10.31857/S0367292124120017 EDN: EFPGMN

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Низкочастотные колебания электрического потенциала плазмы, интерпретируемые как геодезические акустические моды (ГАМ), наблюдаются и активно исследуются в экспериментах практически на всех ведущих токамаках и стеллараторах [1]. Интерес к ним обусловлен, с одной стороны, концепцией о важной роли шировых (зональных) течений в процессе самоорганизации турбулентной плазмы [2], с другой стороны — возможностью использования МГД-волн в диагностических целях [3–5].

ГАМ присущи плазме, удерживаемой в тороидальных системах с магнитными поверхностями. Полоидальная неоднородность модуля магнитного поля на осесимметричной магнитной поверхности ( $B \sim 1/R$ , где  $R$  — радиальная координата, отсчитываемая от геометрического центра тора) приводит к зацеплению полоидально- и тороидально-симметричных возмущений электрического потенциала плазмы с возмущением давления на первой гармонике по полоидальному углу.

В простейшем квазицилиндрическом приближении частота возникающих при этом колебаний описывается известным дисперсионным уравнением [6]

$$\omega^2(r) = \omega_s^2(r) \left( 2 + \frac{1}{q^2(r)} \right), \quad (1)$$

где  $\omega_s$  — звуковая частота,  $q$  — коэффициент запаса устойчивости,  $r$  — радиус магнитной поверхности, отсчитываемый от магнитной оси.

Поскольку именно кривизна магнитных силовых линий на магнитной поверхности является необходимым условием для существования ГАМ [7], спектр ГАМ и пространственная структура собственных колебаний оказываются весьма чувствительными к виду равновесной конфигурации магнитного поля. В этом аспекте теория осесимметричных ГАМ широко развита. В рамках одной только идеальной МГД-модели плазмы известны модификации выражения (1), учитывающие эффекты вытянутости, треугольности магнитных поверхностей и конечного обратного аспектного отношения установки [8–10], равновесного вра-

щения [11–17], давления плазмы [18, 19] и его анизотропии [20–22].

При этом принципиальным вопросом, практически не затронутым теорией, остается исследование влияния “трехмерности” (осевой асимметрии) магнитного поля на характеристики ГАМ: их дисперсию, пространственную структуру, условия существования и пр. Между тем именно трехмерное магнитное поле отвечает реалиям современных экспериментов, причем не только в принципиально трехмерных магнитных системах стеллараторного типа. В токамаках, принцип действия которых изначально основывался на идее удержания горячей плазмы в системе тороидально вложенных осесимметричных магнитных поверхностей, неизбежное нарушение осевой симметрии связано с дискретностью магнитных катушек тороидального поля. Дополнительными причинами “трехмеризации” магнитной конфигурации токамака служат такие факторы как: локальный нагрев плазмы, пучковое воздействие, развитие винтовых неустойчивостей, внешние магнитные возмущения и др. Нарушение осевой симметрии в токамаке может происходить как с изменением магнитной топологии, сопровождаемой образованием магнитных островов и/или эргодизацией магнитных силовых линий, так и с сохранением структуры вложенных магнитных поверхностей с появлением их тороидальной неоднородности.

Экспериментальные наблюдения указывают на то, что наличие магнитных поверхностей (не обязательно вложенных) является обязательным условием существования ГАМ. В пристеночном слое плазмы (scrape-off layer — SOL) токамаков, характеризуемом отсутствием магнитных поверхностей (силовые линии замыкаются на стенку), характерные колебания электрического потенциала плазмы не обнаруживаются [23]. Между тем ГАМ присущи островной структуре магнитного поля — существует даже понятие ГАМ, индуцированной магнитным островом [24]. Общий вывод, следующий из сопоставления экспериментальных наблюдений ГАМ на токамаках и стеллараторах [25–27], заключается в том, что несмотря на существенные различия в магнитных конфигурациях этих ловушек, характеристики и частотные диапазоны ГАМ на них весьма близки. В рамках кинетического подхода закон дисперсии ГАМ в винтовых системах исследовался в серии работ [28–31], при этом было получено неявное

выражение для квадрата частоты ГАМ, записанное в терминах квадратов Фурье-составляющих напряженности магнитного поля.

Измеряемая частота ГАМ на токамаках описывается простейшим законом дисперсии (1) лишь качественно, причем особенно существенно отклонения от стандартного скейлинга проявляются на периферии плазменного шнура — см. сводку эмпирических поправочных коэффициентов к выражению (1) в обзоре [1]. Возникает вопрос, не может ли быть тороидальная гофрировка магнитного поля ответственна за наблюдаемые расхождения. Хотя амплитуда гофрировки в токамаках как правило мала (порядка нескольких процентов), из-за большого тороидального градиента (номер тороидальной гармоники гофрировки преимущественно определяется числом магнитных катушек) эффект гофрировки может быть существенен для ГАМ ввиду принципиальной роли неоднородности поля в процессе колебаний.

В настоящей работе представлено развитие магнитогидродинамической (МГД) теории сплошного спектра ГАМ в тороидальной плазме с учетом возможной осевой асимметрии магнитных поверхностей, их гофрировки. Рассмотрение проведено с использованием идеальной одножидкостной МГД-модели плазмы в электростатическом пределе, в котором пренебрегается возмущениями магнитного поля. В этом же приближении было получено классическое выражение (1).

Ключевым моментом при аналитическом рассмотрении трехмерных магнитных конфигураций является способ задания магнитного поля. Дело в том, что в осесимметричном случае ( $\partial\Psi/\partial\varphi \neq 0$ ,  $\Psi$  — магнитная поверхность,  $\varphi$  — тороидальный угол) стандартное смешанное представление для магнитного поля,  $\mathbf{B} = [\nabla\Psi \times \nabla\varphi] + F\nabla\varphi$ , традиционно используемое при анализе колебаний и волн в токамаке, не удовлетворяет ни условию соленидальности,  $\nabla \cdot \mathbf{B}$ , ни условию существования магнитной поверхности,  $\mathbf{B} \cdot \nabla\Psi = 0$ . Вместо смешанного представления в настоящей работе использовано потоковое представление [32], тождественно удовлетворяющее обоим условиям для осесимметричной магнитной поверхности, и откалиброванное таким образом, чтобы сохранить принципиальный для существования ГАМ эффект геодезической кривизны магнитного поля.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 получены уравнения, описывающие сплошной спектр ГАМ, свободные от предположения об осевой симметрии магнитных поверхностей. В разд. 3 представлено явное выражение для магнитного поля. Для случая круглой гофрированной магнитной поверхности рассчитана геодезическая кривизна магнитных силовых линий — параметр, ответственный за зацепление возмущений давления и электрического потенциала в колебаниях ГАМ. В разд. 4 получено выражение для частоты сплошного спектра ГАМ в токамаке с большим аспектным отношением. Проанализирована степень влияния трехмерных эффектов на частоту ГАМ в типичных условиях современных экспериментов на токамаках. Основные выводы представлены в заключении.

## 2. МГД-УРАВНЕНИЯ СПЛОШНОГО СПЕКТРА ГАМ, ДОПУСКАЮЩИЕ ОСЕВУЮ АСИММЕТРИЮ МАГНИТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В рамках идеальной одножидкостной МГД-модели возмущения статической плазмы описываются следующей системой линеаризованных уравнений [33]:

$$-i\omega\rho\mathbf{v}' = -\nabla p' + \frac{1}{c}[\mathbf{j}' \times \mathbf{B}], \quad (2)$$

$$[\mathbf{v}' \times \mathbf{B}] = c\nabla\phi', \quad (3)$$

$$-i\omega p' + \Gamma p \nabla \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \nabla p = 0, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j}' = 0. \quad (5)$$

Уравнение (2) описывает движение плазмы, уравнение (3) соответствует условию потенциальности колебаний, уравнение (4) есть линеаризованное уравнение адиабаты совместно с уравнением непрерывности, (5) — условие квазинейтральности возмущений. Все обозначения стандартные:  $\rho$  — плотность плазмы,  $p$  — давление,  $\mathbf{v}$  — вектор скорости,  $\mathbf{B}$  — магнитное поле,  $\mathbf{j}$  — плотность тока,  $\phi$  — потенциал электрического поля,  $c$  — скорость света в вакууме,  $\Gamma$  — показатель адиабаты,  $\omega$  — частота возмущений, зависимость от времени  $t$  для которых предполагается в виде  $\sim \exp(-i\omega t)$ . Возмущенные величины отмечены “штрихом”. Используется система единиц СГС.

Далее используем некоторые общие следствия равновесия плазмы в системе магнитных поверхностей (в общем случае осесимметричных), формализуемых условием  $\mathbf{B} \cdot \nabla\Psi = 0$ ,

где  $\Psi = \Psi(R, \phi, Z)$  — магнитная поверхность. Здесь и далее используется цилиндрическая система координат  $\{R, \phi, Z\}$ , связанная с геометрическим центром тора.

Из уравнения (3), в частности, следует, что возмущение потенциала является функцией магнитной поверхности,  $\phi' = \phi'(\Psi)$ , и  $\mathbf{v}' \cdot \nabla\Psi = 0$ . Тогда выражение для возмущенной скорости имеет вид

$$\mathbf{v}' = \frac{c}{B^2} \frac{d\phi'}{d\Psi} [\mathbf{B} \times \nabla\Psi] + \frac{v'_{\parallel}}{B} \mathbf{B}, \quad (6)$$

где  $v'_{\parallel}$  — возмущение продольной скорости.

Подставляя выражение (6) в (2), приходим к уравнению

$$-\frac{i\omega\rho c}{B^2} \frac{d\phi'}{d\Psi} [\mathbf{B} \times \nabla\Psi] - \frac{i\omega\rho v'_{\parallel}}{B} \mathbf{B} = -\nabla p' + \frac{1}{c}[\mathbf{j}' \times \mathbf{B}],$$

из которого следуют выражения для возмущений продольной скорости

$$v'_{\parallel} = -i \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla p'}{\omega\rho B}$$

и плотности поперечного тока

$$\mathbf{j}'_{\perp} = \frac{c}{B^2} [\mathbf{B} \times \nabla p'] + \frac{i\omega\rho c^2}{B^2} \frac{d\phi'}{d\Psi} \nabla\Psi.$$

Исключая  $\mathbf{v}'$  из (4) с использованием двух следствий силового баланса в состоянии равновесия,  $p = p(\Psi)$  и  $\nabla \times \mathbf{B} \cdot \nabla\Psi = 0$ , приходим к уравнению, описывающему связь между колебаниями давления плазмы и электрического поля:

$$\omega^2 p' + \frac{\Gamma p}{\rho} \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla p'}{B^2} \right) + i\omega c \Gamma p \frac{d\phi'}{d\Psi} [\mathbf{B} \times \nabla\Psi] \cdot \nabla \frac{1}{B^2} = 0. \quad (7)$$

Уравнение (5) усредним по магнитной поверхности согласно правилу

$$\langle A \rangle = \frac{\oint JA(\mathbf{r})d\theta d\phi}{\oint Jd\theta d\phi},$$

где  $A$  — некоторая произвольная функция координат,  $J = ([\nabla\Psi \times \nabla\phi] \cdot \nabla\theta)^{-1}$  — якобиан перехода от цилиндрических координат  $\{R, \phi, Z\}$  к координатам  $\{\Psi, \phi, \theta\}$ , связанным с магнитной поверхностью,  $\theta$  — полоидальный угол. С использованием известных тождеств:  $\langle \mathbf{B} \cdot \nabla A \rangle = 0$ ,  $\langle \nabla\Psi \cdot \nabla \times \mathbf{A} \rangle = 0$  и  $\langle \nabla \cdot \mathbf{A} \rangle = d\langle \mathbf{A} \cdot \nabla\Psi \rangle / d\Psi$  ( $\mathbf{A}$  — произвольный вектор) и с учетом полученного выражения для плотности поперечного тока уравнение (5) сводится к условию

$$\frac{d}{d\Psi} \oint J \left( p' [\mathbf{B} \times \nabla \Psi] \cdot \nabla \frac{1}{B^2} + \frac{i\omega_{cp} |\nabla \Psi|^2}{B^2} \frac{d\phi'}{d\Psi} \right) d\theta d\phi = 0, \quad (8)$$

причем для описания локализованных мод сплошного спектра достаточно потребовать равенство нулю самого интеграла, стоящего под знаком производной  $d/d\Psi$ .

Уравнения (7), (8) составляют итоговую систему уравнений для описания спектра локализованных ГАМ в системе магнитных поверхностей. Возмущения давления,  $p'$ , и электрического поля,  $\sim d\phi'/d\Psi$ , зацеплены через параметр  $[\mathbf{B} \times \nabla \Psi] \cdot \nabla 1/B^2$ , пропорциональный геодезической кривизне магнитных силовых линий.

Уравнения (7), (8) сводятся к системе уравнений, полученной ранее в работе [10] для описания спектра ГАМ в некруглой плазме осесимметричного токамака, при замене члена  $[\mathbf{B} \times \nabla \Psi] \cdot \nabla 1/B^2$  на  $F\mathbf{B} \cdot \nabla(1/B^2)$ , справедливой только в осесимметричном случае для магнитного поля вида  $\mathbf{B} = [\nabla\phi \times \nabla\Psi] + F\nabla\phi$ .

Частота сплошного спектра ГАМ определяется из условия совместности уравнений (7) и (8) при заданном магнитном поле  $\mathbf{B}$ .

### 3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ С ТОРОИДАЛЬНОЙ ГОФРИРОВКОЙ

Для описания поля с осесимметричными магнитными поверхностями используем разложение вектора  $\mathbf{B}$  по контравариантному базису

$$\mathbf{B} = [\nabla\Psi \times \nabla\phi] - s(\Psi, \theta)[\nabla\Psi \times \nabla\theta], \quad (9)$$

где  $s(\Psi, \theta)$  — некоторая функция магнитной поверхности и полоидального угла. Наличие функции  $s$  в представлении (9) не нарушает условия соленоидальности магнитного поля ( $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ), при этом дарует свободу в функциональной зависимости тороидального магнитного поля от полоидального угла. Условие того, что  $\Psi$  является магнитной поверхностью, для поля вида (9) выполняется по построению ( $\mathbf{B} \cdot \nabla\Psi = 0$ ).

В плоскости  $\phi = \text{const}$  введем “полярный” радиус  $r = \sqrt{(R - R_0)^2 + Z^2}$  и стандартным образом определим полоидальный угол как  $\theta = \text{atan}(Z / (R - R_0))$ , где  $R_0$  — радиус магнитной оси или большой радиус токамака.

Рассмотрим функцию  $\Psi$  вида

$$\Psi(r, \phi, \theta) = \frac{B_a \tilde{r}^2}{2q}, \quad (10)$$

где роль метки магнитной поверхности выполняет комбинация  $\tilde{r} = r\sqrt{1 + \delta(r, \theta)\cos n\phi}$ . Величина  $\delta$  обозначает амплитуду гофрировки, характеризующую отношение  $(B_{\max} - B_{\min}) / (B_{\max} + B_{\min})$ , где  $B_{\max}$  — максимум модуля поля,  $B_{\min}$  — минимум модуля поля на тороидальном обводе тора;  $n$  — гармоника гофрировки. В общем случае амплитуда гофрировки,  $\delta$ , зависит от радиуса и от полоидального угла. При переходе к случаю осевой симметрии  $\delta \rightarrow 0$ , и выражение для магнитной поверхности приобретает стандартный вид  $\Psi = B_a r^2 / (2q)$ , где  $B_a$  — поле на магнитной оси токамака. Поскольку данная работа преимущественно ориентирована на исследование эффекта тороидальной асимметрии магнитного поля в токамаке, для характеристики вращательного преобразования магнитных силовых линий в (10) используется коэффициент запаса устойчивости  $q$ .

Функцию  $s$  определим из условия, что тороидальное магнитное поле в тороидальной системе пропорционально  $\sim 1/R$ . Тогда

$$s = \frac{q}{1 + \tilde{r} \cos \theta / R_0}.$$

Компоненты магнитного поля (9) в явном виде выписываются как

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{\varepsilon B_a}{2(1 + \varepsilon \cos \theta)} \left( \frac{n\delta \sin n\phi}{1 + \tilde{\varepsilon} \cos \theta} - \frac{\cos n\phi}{q} \frac{\partial \delta}{\partial \theta} \right), \\ B_\theta &= \frac{\varepsilon B_a}{q(1 + \varepsilon \cos \theta)} \left( 1 + \left( \delta + \frac{r}{2} \frac{\partial \delta}{\partial r} \right) \cos n\phi \right), \\ B_\phi &= \frac{B_a}{(1 + \tilde{\varepsilon} \cos \theta)} \left( 1 + \left( \delta + \frac{r}{2} \frac{\partial \delta}{\partial r} \right) \cos n\phi \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь введен малый параметр  $\varepsilon = r / R_0 \ll 1$  пропорциональный обратному аспектному отношению токамака и также используется аналогичное обозначение  $\tilde{\varepsilon} = \tilde{r} / R_0$ , атрибутированное к метке магнитной поверхности. Далее также будем полагать, что амплитуда гофрировки магнитного поля  $\left( \delta + \frac{r}{2} \frac{\partial \delta}{\partial r} \right)$  мала, так что  $\delta \sim \kappa \varepsilon$ , где  $\kappa \lesssim 1$  (стандартный ордеринг в токамаке предполагает  $\delta \sim \varepsilon^2$ , однако учитывая, что  $\delta$  может войти в уравнения в комбинации с высокими  $n$ , мы будем удерживать слагаемые  $\sim \delta$  наравне с  $\sim \varepsilon$ ). Всюду далее будем удерживать члены порядка  $\varepsilon^2$ , но пренебрегать слагаемыми  $\sim \varepsilon^2 / q^2$  (отношение квадратов полоидального и тороидального полей).



Введенная посредством выражения (10) тороидальная неоднородность магнитной поверхности приводит к гофрировке тороидального и полоидального магнитных полей, а также к появлению радиальной (по малому радиусу) компоненты магнитного поля. С точностью до членов  $\sim \epsilon \delta$  величина  $B_\phi$ , заданная (11), совпадает с выражением [34].

В отмеченных приближениях получаем выражение для члена, характеризующего геодезическую кривизну силовых линий магнитного поля:

$$[\mathbf{B} \times \nabla \Psi] \cdot \nabla \frac{1}{B^2} = \frac{2\tilde{\epsilon} \sin \theta}{q} + \frac{(1 + \tilde{\epsilon} \cos \theta) \cos n\phi}{q \left( 1 + \cos n\phi \left( \delta + \frac{r}{2} \frac{\partial \delta}{\partial r} \right) \right)} \times \\ \times \left( 2 \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos n\phi \frac{\partial \delta}{\partial \theta} r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \delta + \frac{r}{2} \frac{\partial \delta}{\partial r} \right). \quad (12)$$

В отличие от осесимметричного случая в выражение (12) помимо стандартного (первого) слагаемого, зависящего от метки магнитной поверхности  $\tilde{\epsilon} \sim \sqrt{\Psi}$  и синусной гармоники полоидального угла, входит дополнительная составляющая, содержащая явную зависимость от  $\phi$ , наличие которой обусловлено полоидальной неоднородностью амплитуды гофрировки магнитного поля.

#### 4. СПЛОШНОЙ СПЕКТР ГАМ В СИСТЕМЕ ОСЕНЕСИММЕТРИЧНЫХ МАГНИТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Используем полученные выражения для вывода закона дисперсии ГАМ.

Тороидальная асимметрия магнитных поверхностей приводит к зацеплению тороидальных гармоник колебаний. Рассмотрим возмущения давления вида  $p' = p'(\Psi, \theta)$ , предполагая возможность явной зависимости  $p'$  от тороидального угла. Уравнение (7) при подстановке (12) сводится к виду

$$\omega^2 p' + \omega_s^2 \left( \frac{1}{q^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta^2} + \frac{2}{q} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta \partial \phi} + \frac{\partial^2 p'}{\partial \phi^2} \right) + \\ + \left( \frac{1}{q} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \frac{\partial p'}{\partial \phi} \right) \frac{\omega_s^2}{2r} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \left( n\delta \sin n\phi - \frac{1}{q} \frac{\partial \delta}{\partial \theta} \cos n\phi \right) + (13) \\ + \frac{2i\omega \Gamma p}{q} \frac{d\phi'}{d\Psi} \left( \tilde{\epsilon} \sin \theta + \frac{\cos n\phi}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \delta}{\partial \theta} \right) \right) + \dots = 0,$$

где  $\omega_s^2 = \Gamma p / \rho R_0^2$  — квадрат звуковой частоты, ... соответствует слагаемым высших порядков

по  $\tilde{\epsilon}$  и  $\delta$ , которые для краткости здесь не выписываем.

Для нахождения явного вида тороидальных и полоидальных гармоник возмущений давления необходимо конкретизировать профиль амплитуды гофрировки. В общем случае  $\delta$  является сложной функцией полоидального угла и радиуса плазменного шнура, определяемой формой и положением магнитных катушек [35]. Для качественного описания эффекта используем упрощенную линейную зависимость

$$\delta = \delta_0 \left( 1 + k \frac{r}{a} \cos \theta \right), \quad (14)$$

описывающую спад амплитуды гофрировки при переходе с внешнего обвода тора на внутренний. Здесь  $\delta_0$  определяет амплитуду гофрировки на магнитной оси токамака, параметр  $k$  характеризует градиент спада,  $a$  — малый радиус токамака. При  $k = 2/3$  на внутреннем обводе тора гофрировка магнитного поля равна нулю.

Будем искать решение уравнения (13) с подстановкой (14) в виде  $p' = p'_0(\Psi, \theta) + \delta_0 p'_1(\Psi, \phi, \theta) + \delta_0^2 p'_2(\Psi, \phi, \theta)$ , откуда находим явные выражения для гармоник давления через возмущения потенциала (выписаны лишь те гармоники, которые вносят заметный вклад в закон дисперсии):

$$p'_0 = \bar{p}_0 \sin \theta, \quad \bar{p}_0 = -\frac{2i\omega \Gamma p \tilde{\epsilon}}{q(\omega^2 - \omega_s^2 / q^2)} \frac{d\phi'}{d\Psi}, \quad (15)$$

$$p'_1 = \bar{p}_{1c} \sin \theta \cos n\phi, \quad (16)$$

$$\bar{p}_{1c} = \frac{i\omega \Gamma p}{q \left( (\omega^2 - n^2 \omega_s^2 - \omega_s^2 / q^2)^2 - 4n^2 \omega_s^4 / q^2 \right)} \frac{d\phi'}{d\Psi} \times \\ \times \left( 3 \frac{k\tilde{r}}{a} (\omega^2 - n^2 \omega_s^2 - \omega_s^2 / q^2) + 4 \frac{n^2}{q^2} \frac{\tilde{\epsilon} \omega_s^4}{\omega^2 - \omega_s^2 / q^2} \right),$$

$$p'_2 = \bar{p}_{20} \sin \theta, \quad (17) \\ \bar{p}_{20} = -\frac{3}{2} \frac{k\tilde{r}}{a} \frac{i\omega \Gamma p}{q(\omega^2 - \omega_s^2 / q^2)} \frac{d\phi'}{d\Psi} \times \\ \times \left( \frac{3}{2} - \frac{n^2 \omega_s^2 (\omega^2 - n^2 \omega_s^2 + \omega_s^2 / q^2)}{(\omega^2 - n^2 \omega_s^2 - \omega_s^2 / q^2)^2 - 4n^2 \omega_s^4 / q^2} \right).$$

Теперь, интегрируя (8) по тороидальному и полоидальному углам при постоянной  $\Psi$  и пренебрегая слагаемыми  $\sim \tilde{\epsilon}^2 \delta^2$ , имеем

$$\frac{\tilde{\epsilon}}{q} \bar{p}_0 - \frac{\delta_0^2}{q} \left( \frac{3}{4} \frac{k\tilde{r}}{a} \left( \bar{p}_{1c} - \frac{5}{2} \bar{p}_0 \right) + \tilde{\epsilon} \left( \frac{1}{2} \bar{p}_{1c} - \bar{p}_{20} \right) \right) + \\ + i\omega_{cp} \frac{\tilde{r}^2}{q^2} \left( 1 + \frac{3}{2} \tilde{\epsilon}^2 \right) \frac{d\phi'}{d\Psi} = 0,$$

$$\omega^2 = \omega_s^2 \left( 2 + \frac{1}{q^2} - 3\tilde{\epsilon}^2 - \frac{9\delta_m^2}{2(3/2k+1)^2(n^2-2)^2-4n^2/q^2} \right) \times \\ \times \left( \left( \frac{kR_0}{a} \right)^2 (n^2-2) - \frac{1}{3} \frac{kR_0}{a} \left( 5(n^2-2)^2 - 16 \frac{n^2}{q^2} \right) \right). \quad (19)$$

что после подстановки (15)–(17) дает искомый закон дисперсии ГАМ

$$\omega^2 \left( 1 + \frac{3}{2} \tilde{\epsilon}^2 \right) - 2\omega_s^2 - \frac{\omega_s^2}{q^2} - \frac{9\delta_0^2}{4} \times \\ \times \frac{\omega_s^2}{\left( \omega^2 - \omega_s^2/q^2 - n^2\omega_s^2 \right)^2 - 4n^2/q^2\omega_s^4} \times \\ \times \left( \frac{k^2 R_0^2}{a^2} \left( \omega^2 - \frac{\omega_s^2}{q^2} \right) \left( \omega^2 - \frac{\omega_s^2}{q^2} - n^2\omega_s^2 \right) + \right. \quad (18) \\ \left. + \frac{2}{3} \frac{kR_0}{a} \left( 5 \left( \omega^2 - \frac{\omega_s^2}{q^2} - n^2\omega_s^2 \right)^2 - 16 \frac{n^2}{q^2} \omega_s^4 \right) \right) = 0.$$

При нулевой амплитуде гофрировки,  $\delta_0 = 0$ , уравнение (18) сводится к известному выражению для частоты ГАМ с учетом конечного обратного аспектного отношения [10]. Будем искать решение уравнения (18) вблизи этой частоты, полагая  $\omega^2 = \omega_s^2(2 + 1/q^2 - 3\tilde{\epsilon}^2 + \delta_0^2\alpha)$ , где  $\alpha$  – поправка к квадрату частоты, обусловленная гофрировкой. В итоге имеем

Выражение (19) представляет собой модификацию частоты ГАМ с учетом гофрировки магнитного поля, характеризуемой номером тороидальной гармоники  $n$  и параметром  $k$ , определяющим неоднородность гофрировки внутри пламенного шнура согласно формуле (14). Вместо величины  $\delta_0$  в (19) используется  $\delta_m = (3/2k + 1)\delta_0$  – максимальная амплитуда гофрировки магнитного поля на внешнем обводе тора – величина известная из эксперимента.

Как уже отмечалось ранее, в рассматриваемых приближениях вклад гофрировки в дисперсию ГАМ связан с неоднородностью ее амплитуды в полоидальном сечении плазменного шнура. Амплитуда гофрировки входит в закон дисперсии в произведении с аспектным отношением токамака. Это отражает соотношение между эффектом гофрировки и эффектом тороидальной кривизны магнитного поля, служащей триггером для колебательного процесса ГАМ. Величина  $\alpha$ , характеризующая эффект гофрировки, растет с ростом аспектного отношения, но при высоких  $n$

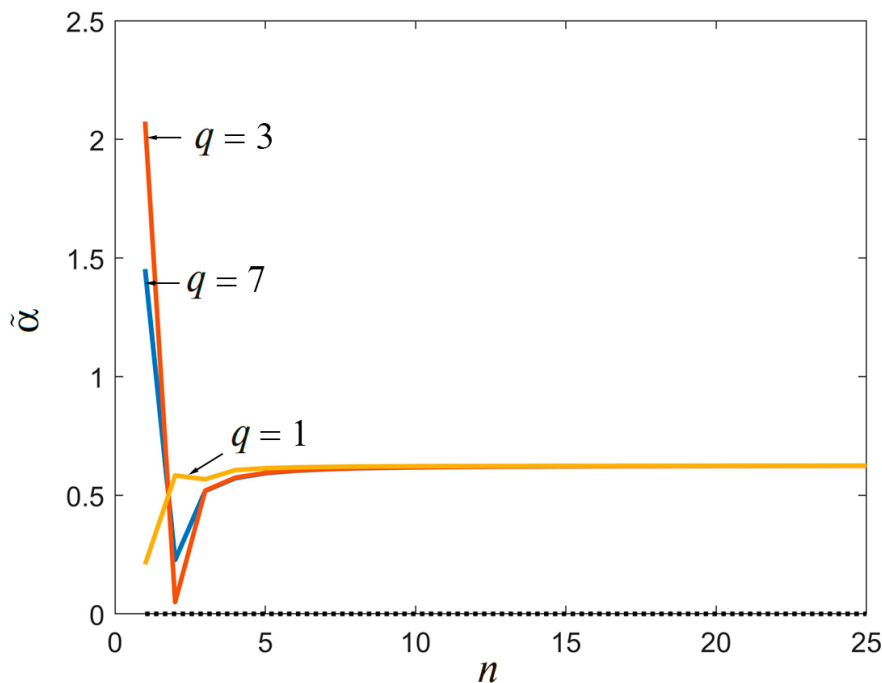


Рис. 1. Зависимость величины  $\tilde{\alpha} = \alpha(n) / \alpha(0)$  от  $n$  при разных значениях  $q$ ,  $R_0/a = 3$ .

от  $n$  не зависит. Формальная зависимость  $\alpha(n)$  как от непрерывной переменной представлена на рис. 1.

Оценим количественное влияние эффектов тороидальной асимметрии магнитного поля на частоту ГАМ, используя экспериментальные и прогнозируемые данные по гофрировке магнитного поля на токамаках. Для этого рассчитаем разницу между частотой моды в присутствии и без ( $\delta_m = 0$ ) тороидальной гофрировки, используя формулу (19):  $\Delta = |\omega - \omega(\delta_m = 0)| / \omega(\delta_m = 0) \times 100\%$ . В расчетах будем полагать  $k = 2/3$ ,  $\tilde{\epsilon} = a/R_0$ ,  $q = 5$ ; номер тороидальной гармоники  $n$  положим равным числу катушек тороидального поля.

Амплитуда тороидальной гофрировки магнитного поля в токамаке преимущественно определяется числом катушек тороидального поля и может составлять от десятой доли процента до почти десяти процентов. С увеличением числа катушек амплитуда гофрировки падает.

В токамаке Т-10 число магнитных катушек относительно невелико,  $n = 16$ , что приводит к заметной гофрировке магнитного поля на периферии плазмы,  $\delta_m \sim 3\%$  [36]. При этом, подставляя эти параметры в формулу (19), находим  $\Delta \sim 0.15\%$ . Таким образом, влияние гофрировки на частоту ГАМ пренебрежимо мало.

Аналогичный вывод справедлив и для других крупных токамаков, что отражено в табл. 1.

В табл. 1 также приведено значение отношения тороидально неоднородного возмущения давления плазмы ( $\sim \cos n\phi$ ) к его осесимметричной составляющей:

$$\frac{\bar{p}_{1c}}{\bar{p}_0} \approx \frac{\delta_m}{(3/2k + 1)((n^2 - 2)^2 - 4n^2 / q^2)} \times \left( 3 \frac{kR_0}{a} (n^2 - 2) - 2 \frac{n^2}{q^2} \right).$$

Видно, что несмотря на формальное зацепление колебаний электрического потенциала

плазмы с  $n$ -й тороидальной гармоникой колебаний давления, описываемое (16), величина последней оказывается весьма малой, что сильно затрудняет возможность ее регистрации на эксперименте.

Таким образом, мы продемонстрировали, что осевая асимметрия магнитного поля, обусловленная дискретностью магнитных катушек, в крупных токамаках не оказывает сколь-нибудь заметного влияния на частоту и структуру ГАМ.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что теория ГАМ, построенная для идеализированной модели осесимметричного токамака, пригодна для описания колебаний в реальных условиях эксперимента, когда тороидальное магнитное поле создается дискретным набором магнитных катушек. Показано, что основное отличие закона дисперсии ГАМ от стандартного выражения (1) связано не столько с гофрировкой как таковой, а с ее полоидальной неоднородностью.

Тороидальная гофрировка магнитных поверхностей в установках с большим аспектным отношением приводит к появлению дополнительного слагаемого в выражении для кривизны магнитного поля (12), содержащего явную зависимость от тороидального угла. Физически это означает, что колебания электрического потенциала плазмы, постоянного на магнитной поверхности, “зацепляются” с  $n$ -ми тороидальными гармониками возмущений давления, где  $n$  соответствует гармонике гофрировки. Однако при больших  $n$ , как амплитуда тороидально неоднородного возмущения давления (16), так и соответствующий ей вклад в закон дисперсии ГАМ (18), оказываются пренебрежимо малыми.

Сколько-нибудь заметного влияния осевой несимметрии магнитной конфигурации на спектр ГАМ можно ожидать лишь для низких значений  $n$ .

**Таблица 1.** Оценка эффекта гофрировки магнитного поля на частоту ГАМ для различных токамаков

Токамак	$\delta_m, \%$	$n$	$R_0 / a$	$\Delta, \%$	$\bar{p}_{1c} / \bar{p}_0$
Т-10 [36]	3	16	5	0.15	$6 \times 10^{-4}$
Tore Supra [37]	7	18	3.3	0.57	$7 \times 10^{-4}$
JET [38]	0.08	32	3	$7 \times 10^{-5}$	$2 \times 10^{-6}$
ИТЭР [39]	0.5	18	3.1	$3 \times 10^{-3}$	$5 \times 10^{-5}$

Подобные крупномасштабные отклонения от осевой симметрии свойственны токамакам, снабженным катушками для подавления ELM (от англ. Edge Localized Modes) [40], а также для экспериментов с тестовыми модулями бланкета [41]. В этом случае вклад тороидальной асимметрии в дисперсию ГАМ будет пропорционален величине  $(\delta_m R_0 / a)^2$ .

Отметим, что амплитуда гофрировки нелинейным образом связана с количеством катушек тороидального магнитного поля. Так, расчеты для параметров магнитной системы ИТЭР [42] предсказывают более чем двадцатикратный рост амплитуды гофрировки магнитного поля в случае уменьшения числа магнитных катушек с 16 до 8.

Указанные выше результаты получены с использованием относительно простой линейной зависимости амплитуды гофрировки от большого радиуса тора. Более резкий рост указанной амплитуды при переходе со внутреннего на внешний обвод тора, встречающийся в модельных расчетах (см., например, [36]), потенциально может повысить влияние гофрировки на спектр ГАМ, но вряд ли можно ожидать качественного усиления эффекта.

Специального рассмотрения требует оценка эффекта гофрировки в сферических токамаках, для которых необходим учет высших слагаемых разложения по обратному аспектному отношению.

Работа проведена в рамках выполнения государственного задания НИЦ “Курчатовский институт”.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Conway G.D., Smolyakov A.I., Ido T. // Nucl. Fusion. 2022. V. 62. P. 013001.  
DOI: 10.1088/1741-4326/ac0dd1.
2. Diamond P.H., Itoh S.-I., Itoh K., Hahm T.S. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2005. V. 47. P. R35.  
DOI: 10.1088/0741-3335/47/5/R01.
3. Fasoli A., Testa D., Sharapov S., Berk H.L., Breizman B., Gondhalekar A., Heeter R.F., Mantsinen M. and contributors to the EFDA-JET Workprogramme // Plasma Phys. Control. Fusion. 2002. V. 44. P. B159.  
DOI: 10.1088/0741-3335/44/12B/312.
4. Itoh S.-I., Itoh K., Sasaki M., Fujisawa A., Ido T., Nagashima Y. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2007. V. 49. P. L7.  
DOI: 10.1088/0741-3335/49/8/L01.
5. Itoh S.-I., Nishimura S., Itoh K., Fujisawa A., Nagashima Y., Inagaki S. // Plasma Fusion Res. 2009. V. 4. P. 014.  
DOI: 10.1585/pfr.4.014.
6. Winsor N., Johnson J.L., Dawson J.M. // Phys. Fluids. 1968. V. 11. P. 2448.  
DOI: 10.1063/1.1691835.
7. Сковорода А.А., Сорокина Е.А. // Физика плазмы. 2018. Т. 44. С. 937.  
DOI: 10.1134/S0367292118110100.
8. Shi B.-R., Li J.-Q., Dong J.-Q. // Chinese Phys. Lett. 2005. V. 22. P. 1179.
9. Wahlberg C., Graves J.P. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2016. V. 58. P. 075014.  
DOI: 10.1088/0741-3335/58/7/075014.
10. Сорокина Е.А., Лахин В.П., Коновальцева Л.В., Ильгисонис В.И. // Физика плазмы. 2017. Т. 43. С. 231.  
DOI: 10.7868/S036729211703012X.
11. Wang S. // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. P. 085002.  
DOI: 10.1103/PhysRevLett.97.085002;  
P. 129902 (erratum).  
DOI: 10.1103/PhysRevLett.97.129902.
12. Wahlberg C. // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 101. P. 115003.  
DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.115003.
13. Wahlberg C. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2009. V. 51. P. 085006.  
DOI: 10.1088/0741-3335/51/8/085006.
14. Lakhin V.P., Ilgisonis V.I., Smolyakov A.I. // Phys. Lett. A. 2010. V. 374. P. 4872.  
DOI: 10.1016/j.physleta.2010.10.012.
15. Ilgisonis V.I., Lakhin V.P., Smolyakov A.I., Sorokina E.A. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2011. V. 53. P. 065008.  
DOI: 10.1088/0741-3335/53/6/065008.
16. Lakhin V.P., Ilgisonis V.I. // Phys. Plasmas. 2011. V. 18. P. 092103.  
DOI: 10.1063/1.3628302.
17. Haverkort J.W., de Blank H.J., Koren B. // J. Comput. Phys. 2012. V. 231. P. 981.  
DOI: 10.1016/j.jcp.2011.03.016.
18. Ильгисонис В.И., Коновальцева Л.В., Лахин В.П., Сорокина Е.А. // Физика плазмы. 2014. Т. 40. С. 955.  
DOI: 10.7868/S0367292114110031.
19. Лахин В.П., Сорокина Е.А., Ильгисонис В.И., Коновальцева Л.В. // Физика плазмы. 2015. Т. 41. С. 1054.  
DOI: 10.7868/S0367292115120070.
20. Ren H. // Phys. Plasmas. 2014. V. 21. P. 044505.  
DOI: 10.1063/1.4873383.



21. *Lakhin V.P., Sorokina E.A.* // Phys. Plasmas. 2018. V. 25. 072111.  
DOI: 10.1063/1.5037343.
22. *Ляхин В.П., Сорокина Е.А.* // Физика плазмы. 2019. Т. 45. С. 195.  
DOI: 10.1134/S0367292119020069.
23. *Melnikov A.V., Vershkov V.A., Eliseev L.G., Grashin S.A., Gudozhnik A.V., Krupnik L.I., Lysenko S.E., Mavrin V.A., Perfilov S.V., Shelukhin D.A., Soldatov S.V., Ufimtsev M.V., Urazbaev A.O., Van Oost G., Zimeleva L.G.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2006. V. 48. P. S87.  
DOI: 0.1088/0741-3335/48/4/S07.
24. *Ishizawa A., Kishimoto Y., Nakamura Y.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2019. V. 61. P. 054006.  
DOI: 10.1088/1361-6587/ab06a8.
25. *Fujisawa A., Itoh K., Shimizu A., Nakano H., Ohshima S., Iguchi H., Matsuoka K., Okamura S., Itoh S.-I., Diamond P.H.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2006. V. 48. P. S31.  
DOI: 10.1088/0741-3335/48/4/S03.
26. *Fujisawa A., Shimizu A., Nakano H., Ohshima S., Itoh K., Nagashima Y., Itoh S.-I., Iguchi H., Yoshimura Y., Minami T., Nagaoka K., Takahashi C., Kojima M., Nishimura S., Isobe M., Suzuki C., Akiyama T., Ido T., Matsuoka K., Okamura S., Diamond P.H.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2007. V. 49. P. 211.  
DOI: 10.1088/0741-3335/49/3/002.
27. *Fujisawa A., Itoh K., Shimizu A., Nakano H., Ohshima S., Iguchi H., Matsuoka K., Okamura S., Minami T., Yoshimura Y., Nagaoka K., Ida K., Toi K., Takahashi C., Kojima M., Nishimura S., Isobe M., Suzuki C., Akiyama T., Ido T., Nagashima Y., Itoh S.-I., Diamond P.H.* // Phys. Plasmas. 2008. V. 15. P. 055906.  
DOI: 10.1063/1.2889012.
28. *Watari T., Hamada Y., Fujisawa A., Toi K., Itoh K.* // Phys. Plasmas. 2005. V. 12. P. 062304.  
DOI: 10.1063/1.1922807.
29. *Watari T., Hamada Y., Nishizawa A., Notake T., Takeuchi N.* // Plasma Sci. Technol. 2006. V. 8. P. 105.
30. *Watari T., Hamada Y., Notake T., Takeuchi N., and Itoh K.* // Phys. Plasmas. 2006. V. 13. P. 062504.  
DOI: 10.1063/1.2206170.
31. *Watari T., Hamada Y., Nishizawa A., Todoroki J.* // Phys. Plasmas. 2007. V. 14. P. 112512.  
DOI: 10.1063/1.2805441.
32. *Ильгисонис В.И., Сковорода А.А.* // ЖЭТФ. 2010. Т. 137. С. 1018.  
DOI: 10.1134/S1063776110050201.
33. *Hassam A.B., Drake J.F.* // Phys. Fluids B. 1993. V. 5. P. 4022.  
DOI: 10.1063/1.860622.
34. *Юшманов П.Н.* Вопросы теории плазмы / Под ред. академика Б.Б. Кадомцева. М.: Энергоатомиздат, 1987. Вып. 16. С. 102.
35. *Грибов Ю.В., Цаун С.В., Юшманов П.Н.* Препринт ИАЭ-3681/7. М.: Институт атомной энергии им. И.В. Курчатова, 1982.
36. *Melnikov A.V., Eliseev L.G., Perfilov S.V., Andreev V.F., Grashin S.A., Dyabilin K.S., Chudnovskiy A.N., Isaev M.Yu., Lysenko S.E., Mavrin V.A., Mikhailov M.I., Ryzhakov D.V., Shurygin R.V., Zenin V.N. and the T-10 Team* // Nucl. Fusion. 2013. V. 53. P. 093019.  
DOI: 10.1088/0029-5515/53/9/093019.
37. *Trier E., Eriksson L.-G., Hennequin P., Fenzi C., Bourdelle C., Falchetto G., Garbet X., Aniel T., Claret F., Sabot R.* // Nucl. Fusion. 2008. V. 48. P. 092001.  
DOI: 10.1088/0029-5515/48/9/092001.
38. *Crombé K., Andrew Y., Biewer T.M., Blanco E., de Vries P.C., Giroud C., Hawkes N.C., Meigs A., Tala T., von Hellermann M., Zastrow K.-D. and JET EFDA Contributors* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2009. V. 51. P. 055005.  
DOI: 10.1088/0741-3335/51/5/055005.
39. *Fasoli A., Gormenzano C., Berk H.L., Breizman B., Briguglio S., Darrow D.S., Gorelenkov N., Heidbrink W.W., Jaun A., Konovalov S.V., Nazikian R., Noterdaeme J.-M., Sharapov S., Shinohara K., Testa D., Tobita K., Todo Y., Vlad G., Zonca F.* // Nucl. Fusion. 2007. V. 47. P. S264.  
DOI: 10.1088/0029-5515/47/6/S05.
40. *In Y., Park J.-K., Jeon Y.M., Kim J., Park G.Y., Ahn J.-W., Loarte A., Ko W.H., Lee H.H., Yoo J.W., Juhn J.W., Yoon S.W., Park H. and 3D Physics Task Force in KSTAR* // Nucl. Fusion. 2017. V. 57. P. 116054.  
DOI: 10.1088/1741-4326/aa791c.
41. *Shinohara K., Kurki-Suonio T., Spong D., Asunta O., Tani K., Strumberger E., Briguglio S., Koskela T., Vlad G., Günter S., Kramer G., Putvinski S., Hamamatsu K. and ITPA Topical Group on Energetic Particles* // Nucl. Fusion. 2011. V. 51. P. 063028.  
DOI: 10.1088/0029-5515/51/6/063028.
42. *Mahdavi-pour B., Salar Elahi A., Ghoranneviss M.* // J. Inorg. Organomet. Polym. 2016. V. 26. P. 439.  
DOI: 10.1007/s10904-015-0325-z.

## ON THE APPLICABILITY OF GAM THEORY TO REAL TOKAMAKS WITH RIPPLED MAGNETIC FIELDS

**E. A. Sorokina<sup>a, \*</sup>**

*<sup>a</sup>National Research Centre “Kurchatov Institute”, Moscow, 123098, Russia*

*\*e-mail: Sorokina\_EA@nrcki.ru*

The influence of the toroidal magnetic field ripples on the spatial structure and frequency of the geodesic acoustic mode (GAM) in tokamak plasma has been investigated. It is shown that the toroidal asymmetry of the magnetic configuration leads to coupling of oscillations of the GAM electric potential with toroidal and poloidal inhomogeneous perturbations of the plasma pressure. For tokamaks with a large aspect ratio, the GAM dispersion law is derived, taking the non-uniformity of the ripple in the tokamak cross-section into account. As the number of the toroidal field coils  $n$  increases, the effect of ripples ceases to depend on  $n$ . The applicability of the standard theory to finding the frequency and spatial structure of GAM in large tokamaks is shown.

*Keywords:* geodesic acoustic mode, tokamak, toroidal field ripples, MHD, continuous spectrum