

## ВОЛНЫ ВАН КАМПЕНА В КВАНТОВОЙ ПЛАЗМЕ

© 2024 г. А. М. Игнатов<sup>а,\*</sup><sup>а</sup>Институт общей физики им. А.М.Прохорова РАН, Москва, Россия

\*e-mail: aign@fpl.gpi.ru

Поступила в редакцию 29.09.2024 г.

После доработки 06.10.2024 г.

Принята к публикации 06.10.2024 г.

Обсуждается построение волн Ван Кампена при различных способах описания квантовой бесстолкновительной плазмы. Рассматриваются линеаризованное квантовое кинетическое уравнение, описание в терминах отдельных волновых функций и уравнения квантовой гидродинамики. Показано, что при описании посредством волновых функций теория возмущений сохраняет полную энергию плазмы.

**Ключевые слова:** квантовая плазма, волны Ван Кампена

**DOI:** 10.31857/S0367292124110033, **EDN:** FCCADJ

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В классической кинетической теории, основанной на уравнении Власова, существует два подхода к исследованию линейных волн в плазме. Наиболее распространен метод Ландау, сводящийся к вычислению диэлектрической проницаемости плазмы (например, [1, 2]). Известен также подход Ван Кампена, в рамках которого вычисляются собственные функции и собственные значения линеаризованных кинетических уравнений [3–5].

Кинетика классической бесстолкновительной плазмы может также описываться при помощи бесконечного набора гидродинамических уравнений. При вычислении функций отклика использование уравнения Власова и многопоточковой гидродинамики приводят к одинаковым результатам. Однако существует различие, связанное с интегралами движения и, в частности, энергии. Применительно к уравнению Власова разложение по малому отклонению от стационарного состояния нарушает закон сохранения энергии. Однако для многопоточковой гидродинамики удается построить теорию возмущений, сохраняющую энергию в каждом порядке [6].

Кинетике квантовой плазмы посвящено много монографий (например, [1, 7, 8]) и обзоров (например, [9–13]). Также как и в классическом случае для описания невырожденной бесстолкновительной квантовой плазмы и вычисления функций отклика используются либо квантовое уравнение Власова для функции Вигнера, либо бесконечный набор уравнений Шредингера или квантовой гидродинамики. При помощи набора уравнений Шредингера построение волн Ван Кампена для случая устойчивой плазмы обсуждалось в работе [14].

В настоящей статье исследуются волны Ван Кампе-

на для различных вариантов квантовой кинетической теории. Для простоты мы ограничиваемся потенциальным приближением, пренебрегая электромагнитными эффектами. Рассматривается однокомпонентная плазма, состоящая из электронов без спина на компенсирующем фоне.

В разд. 2 перечислены используемые математические модели. В разд. 3 обсуждается связь между разложениями по теории возмущений для различных вариантов описания плазмы. Явные выражения для волн Ван Кампена приведены в разд. 4, а в разд. 5 обсуждаются энергетические соотношения.

## 2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для унификации обозначений перечислим существующие альтернативные подходы к описанию кинетики квантовой плазмы. При этом мы ограничиваемся минимальными комментариями, подробности можно найти в вышеупомянутых обзорах.

Пусть имеется набор частиц с волновыми функциями  $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{q})$ , удовлетворяющими уравнению Шредингера

$$i\hbar\dot{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\mathbf{r}, \mathbf{q}) + e\varphi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}, \mathbf{q}). \quad (1)$$

Волновые функции  $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{q})$  зависят от времени, трех координат  $\mathbf{r}$  и, кроме того, от дополнительной переменной  $\mathbf{q}$ , при помощи которой различаются частицы. По аналогии с гидродинамикой эта величина в дальнейшем называется лагранжевой меткой. Величина  $\mathbf{q}$  может совпадать, например, с импульсом частицы на бесконечности, однако допустимы и другие способы выбора лагранжевой метки.

В уравнении (1) использованы стандартные обозначения:  $\hbar$  — постоянная Планка,  $m$  и  $e < 0$  — масса и

заряд электрона. Точкой над символом обозначается производная по времени  $t$ , явная зависимость от которого, как правило, опускается. Дифференциальные операторы  $\Delta$  и  $\nabla$  действуют на пространственные переменные  $\mathbf{r}$ .

Полная плотность частиц принимается равной

$$n(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{q} F_0(\mathbf{q}) |\psi(\mathbf{r}, \mathbf{q})|^2, \quad (2)$$

где функция  $F_0(\mathbf{q}) \geq 0$  равна плотности числа состояний с меткой  $\mathbf{q}$ . Очевидно, что такая форма записи неоднозначна, и в общем случае в уравнениях (1), (2) можно совершить произвольную замену переменных  $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}'(\mathbf{r}, \mathbf{q})$ . Потенциал электрического поля в уравнении Шредингера (1) считается самосогласованным и определяется через уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -4\pi e(n(\mathbf{r}) - n_0), \quad (3)$$

где  $n_0$  — плотность компенсирующего фона. В соответствии с определением (2) для обеспечения полной зарядовой нейтральности необходимо, чтобы  $\int d\mathbf{q} F_0(\mathbf{q}) = n_0$ . Система (1)–(3) называется уравнениями Шредингера–Пуассона.

Если перейти к квадрату амплитуды и фазе волновой функции  $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = \sqrt{n(\mathbf{r}, \mathbf{q})} e^{i\theta(\mathbf{r}, \mathbf{q})}$ , то из (1) следует

$$\begin{aligned} \dot{n}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) &= -\frac{\hbar}{m} \nabla[n(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \nabla\theta(\mathbf{r}, \mathbf{q})], \\ \dot{\theta}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) &= -\frac{e}{\hbar} \varphi(\mathbf{r}) - \frac{\hbar}{2m} \nabla\theta(\mathbf{r}, \mathbf{q})^2 - U(\mathbf{r}, \mathbf{q}), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = -\frac{\hbar}{2m\sqrt{n(\mathbf{r}, \mathbf{q})}} \Delta\sqrt{n(\mathbf{r}, \mathbf{q})} \quad (5)$$

и полная плотность равна  $n(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{q} F_0(\mathbf{q}) n(\mathbf{r}, \mathbf{q})$ . В литературе величина (5) часто ассоциируется с квантовым давлением.

Для каждого сорта частиц можно ввести скорость  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = (\hbar/m) \nabla\theta(\mathbf{r}, \mathbf{q})$  и тогда (4) переписываются в виде набора уравнений квантовой гидродинамики

$$\begin{aligned} \dot{n}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) &= -\nabla[n(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{q})], \\ \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) &= -(\mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \cdot \nabla) \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) - \frac{e}{m} \nabla\varphi(\mathbf{r}) - \nabla U(\mathbf{r}, \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (6)$$

Наиболее приближенным по форме к классическому является описание кинетики плазмы при помощи функции Вигнера, определяемой как

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \int \frac{d\mathbf{q} d\mathbf{s}}{(2\pi\hbar)^3} F_0(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}/\hbar} \psi^*(\mathbf{r} + \mathbf{s}/2, \mathbf{q}) \psi(\mathbf{r} - \mathbf{s}/2, \mathbf{q}). \quad (7)$$

При этом полная плотность частиц (2) равна  $n(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{p} f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ . Уравнение для функции (7), которое часто называется квантовым уравнением Власова или уравнением Вигнера–Пуассона, следует из уравнения Шредингера (1) и имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) &= -\frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{r}} + \\ &+ e \int d\mathbf{p}' d\mathbf{r}' Q(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{p} - \mathbf{p}') \varphi(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}, \mathbf{p}'), \end{aligned} \quad (8)$$

где ядро интегрального оператора можно записать в двух эквивалентных формах

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{r}, \mathbf{p}) &= i \frac{1}{\hbar} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} [\delta(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}/2) - \delta(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}/2)] = \\ &= \frac{2}{\hbar} \frac{1}{(\pi\hbar)^3} \sin(2\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar). \end{aligned} \quad (9)$$

Динамические уравнения (1), (4), (6), (8) имеют интегралы движения. Для нас в дальнейшем будет представлять интерес полная энергия  $H$ , которую можно представить в виде суммы энергии частиц и энергии электрического поля  $H = H^{(p)} + H^{(f)}$ . В зависимости от используемого набора динамических переменных энергию частиц можно записать в нескольких эквивалентных формах

$$\begin{aligned} H^{(p)} &= \int d\mathbf{r} d\mathbf{q} \frac{\hbar^2}{2m} F_0(\mathbf{q}) |\nabla\psi(\mathbf{r}, \mathbf{q})|^2 = \\ &= \int d\mathbf{r} d\mathbf{q} F_0(\mathbf{q}) n(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \left[ \frac{\hbar^2}{2m} \nabla\theta(\mathbf{r}, \mathbf{q})^2 + \hbar U(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \right] = \\ &= \int d\mathbf{r} d\mathbf{q} F_0(\mathbf{q}) n(\mathbf{r}, \mathbf{q}) [m\mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{q})^2 + \hbar U(\mathbf{r}, \mathbf{q})] = \\ &= \int d\mathbf{r} d\mathbf{p} \frac{p^2}{2m} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (10)$$

Энергия поля

$$H^{(f)} = \int d\mathbf{r} \frac{\nabla\varphi(\mathbf{r})^2}{8\pi} \equiv \frac{e^2}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \frac{n(\mathbf{r})n(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (12)$$

зависит в силу (3) только от полной плотности.

Величины  $\psi$  и  $(n, \theta)$  связаны взаимно-однозначным соответствием, поэтому системы кинетических уравнений (1) и (4) эквивалентны. Эта эквивалентность сохраняется и при переходе к гидродинамическому описанию на языке переменных  $(n, \mathbf{v})$  (6), но лишь при дополнительном условии  $\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = 0$ . При этом условии системы уравнений (1), (4), (6) записаны для одной комплексной или двух действительных функций переменных  $(\mathbf{r}, \mathbf{q})$ .

В то же время квантовое уравнение Власова (8) описывает эволюцию во времени одной действительной функции  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  шести переменных. Таким образом, при переходе от описания на языке волновых функций или гидродинамических переменных к квантовому кинетическому уравнению (8) теряется часть степеней свободы.

В пределе  $\hbar \rightarrow 0$ , как легко увидеть из первой строчки (2), уравнение (8) переходит в классическое уравнение Власова. Квантовое давление (5) при этом обращается в нуль, а система (6) переходит в набор уравнений гидродинамики классической плазмы. Однако в квантовом случае поле скоростей  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{q})$  по определению потенциально, тогда как в классическом случае нет никаких причин отбрасывать вихревые течения [6]. Имеет ли какой-нибудь смысл описание квантовой механики на языке квантовой гидродинамики (6) с учетом вихревых течений — вопрос открытый.

### 3. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Теория возмущений строится при помощи разложения решений динамических уравнений вблизи какого-либо состояния. Допустим, что при  $\mathbf{r} \rightarrow \infty$  потенциал электрического поля  $\phi(\mathbf{r}) \rightarrow 0$ . Тогда решение (1) можно записать в виде  $\psi_0(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = \exp(i\theta_0(\mathbf{r}, \mathbf{q}))$ , где  $\theta_0(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{q}/\hbar - tq^2/(2\hbar m)$ . Тем самым мы фиксируем выбор лагранжевой метки  $\mathbf{q}$ , которая теперь совпадает с импульсом частицы на бесконечности.

Соответствующее невозмущенное решение уравнений (4) имеет вид  $n(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = 1$ ,  $\theta(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = \theta_0(\mathbf{r}, \mathbf{q})$ , а уравнений (6)  $n(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = 1$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = \mathbf{q}/m$ . При помощи (7) волновая функция  $\psi_0(\mathbf{r}, \mathbf{q})$  отображается в невозмущенное решение квантового уравнения Власова (8)  $f(\mathbf{p}) = F_0(\mathbf{p})$ , т. е. при таком выборе лагранжевой метки функция  $F_0(\mathbf{p})$  является невозмущенной функцией распределения по импульсам.

Представим поправки к волновым функциям в виде  $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = \psi_0(\mathbf{r}, \mathbf{q})(1 + \varepsilon\psi_1(\mathbf{r}, \mathbf{q}))$ , где  $\varepsilon \ll 1$  — формальный малый параметр, и, аналогично,  $n(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = 1 + \varepsilon n_1(\mathbf{r}, \mathbf{q})$ ,  $\theta(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = \theta_0(\mathbf{r}, \mathbf{q}) + \varepsilon\theta_1(\mathbf{r}, \mathbf{q})$  и так далее. Далее разложим все возмущенные величины в интеграл Фурье по координатам  $y(\mathbf{r}) \rightarrow y_{\mathbf{k}} = \int d\mathbf{r}/(2\pi)^{3/2} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} y(\mathbf{r})$ . Тогда в первом порядке разложения по  $\varepsilon$  возмущение полной плотности записывается как  $n_{\mathbf{k}} = \int d\mathbf{q} F_0(\mathbf{q})(\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) + \psi_{-\mathbf{k}}^*(\mathbf{q}))$ , а из уравнений (1), (3) получается линейное интегральное уравнение для поправки к волновой функции ( $\psi_1(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \rightarrow \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})$ )

$$\dot{\psi}_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = -i \left( \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{m} + \omega_0(k) \right) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) - i \frac{4\pi e^2}{\hbar k^2} \int d\mathbf{q}' F_0(\mathbf{q}') [\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}') + \psi_{-\mathbf{k}}^*(\mathbf{q}')], \quad (13)$$

где величина  $\omega_0(k) = \hbar k^2/(2m)$  обычно ассоциируется с частотой волны де Бройля.

Аналогичным образом линеаризуются уравнения (4) ( $n_1(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \rightarrow n_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})$ ,  $\theta_1(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \rightarrow \theta_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})$ )

$$\begin{aligned} \dot{n}_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) &= -i \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{m} n_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) + 2\omega_0(k)\theta_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}), \\ \dot{\theta}_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) &= -i \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{m} \theta_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) - \frac{1}{2} \omega_0(k) n_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) - \\ &\quad - \frac{4\pi e^2}{\hbar k^2} \int d\mathbf{q}' F_0(\mathbf{q}') n_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}'). \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнения (13) и (14) эквивалентны. Это легко проверить, учитывая, что возмущение волновой функции связано с возмущениями амплитуды и фазы соотношениями

$$\begin{aligned} n_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) &= \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) + \psi_{-\mathbf{k}}^*(\mathbf{q}), \\ \theta_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) &= -\frac{i}{2} [\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) - \psi_{-\mathbf{k}}^*(\mathbf{q})]. \end{aligned} \quad (15)$$

Линеаризованные уравнения (6) получаются из (14) простой заменой  $\mathbf{v}_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = i\mathbf{k}\theta_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})\hbar/m$ . Поскольку ре-

шения линеаризованных уравнений (6), (13), (14) однозначно связаны между собой, в дальнейшем мы ограничиваемся исследованием уравнения (13).

В линейном приближении уравнение для функции Вигнера (8) записывается в виде ( $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \rightarrow f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})$ )

$$\dot{f}_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = -i \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{m} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) + i \frac{4\pi e^2}{k^2} \tilde{F}_{0\mathbf{k}}(\mathbf{p}) \int d\mathbf{p}' f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}'), \quad (16)$$

где  $\tilde{F}_{0\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = [F_0(\mathbf{p}^{(1)}) - F_0(\mathbf{p}^{(-1)})]/\hbar$  и использовано обозначение  $\mathbf{p}^{(s)} = \mathbf{p} + s\hbar\mathbf{k}/2$ , ( $s = \pm 1, \pm 2 \dots$ ). Заметим, что функция  $\tilde{F}_{0\mathbf{k}}(\mathbf{p})$  равна конечно-разностной производной невозмущенной функции распределения  $F_0(\mathbf{p})$  в направлении вектора  $\mathbf{k}$ . В классическом пределе  $\hbar \rightarrow 0$  эта функция переходит в обыкновенную производную  $\tilde{F}_{0\mathbf{k}}(\mathbf{p}) \rightarrow F'_{0\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = \mathbf{k} \cdot (\partial F_0(\mathbf{p})/\partial \mathbf{p})$ .

После преобразования Фурье линеаризованная связь между волновой функцией и функцией Вигнера (7) переходит в

$$f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = F_0(\mathbf{p}^{(-1)})\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}^{(-1)}) + F_0(\mathbf{p}^{(1)})\psi_{-\mathbf{k}}^*(\mathbf{p}^{(1)}). \quad (17)$$

Легко проверить при помощи (13), что определяемая этим соотношением функция удовлетворяет уравнению (16).

Так же как и в общем случае, линеаризованное уравнение (13) описывает динамику большого числа степеней свободы, чем квантовое уравнение Власова (16), поэтому для установления однозначной связи между решениями этих уравнений необходимо ввести дополнительные переменные. Это можно сделать следующим образом. Рассмотрим комбинацию волновых функций вида

$$g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}^{(-1)}) + \psi_{-\mathbf{k}}^*(\mathbf{p}^{(1)}). \quad (18)$$

Из уравнения Шредингера (13) следует, что

$$\dot{g}_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = -i \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{m} g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}). \quad (19)$$

Заметим, что в определении (18) правую часть можно умножить на произвольную не зависящую от времени функцию. По аналогии с гидродинамикой можно сказать, что функции (18) описывают пассивную примесь, переносимую потоком со скоростью  $\mathbf{p}/m$ . Поскольку  $g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})^* = g_{-\mathbf{k}}(\mathbf{p})$ , функция (18) представляет образ Фурье действительной величины. В дальнейшем возмущения, связанные с (18), называются баллистическими модами.

Соотношения (17) и (18) представляют собой линейную систему уравнений относительно  $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}^{(-1)})$  и  $\psi_{-\mathbf{k}}^*(\mathbf{p}^{(1)})$ , решая которую получаем

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = \frac{F_0(\mathbf{p}^{(2)})g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}^{(1)}) - f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}^{(1)})}{F_0(\mathbf{p}^{(2)}) - F_0(\mathbf{p})}. \quad (20)$$

Это решение можно записать в кратком виде как отображение  $(f, g) \rightarrow \psi = M(f, g)$ , при этом обратное отображение  $\psi \rightarrow (f, g)$  задается соотношениями (17), (18).

При помощи соотношений (15), (20) величины  $n_k(\mathbf{p})$ ,  $\theta_k(\mathbf{p})$  можно также выразить в виде линейных комбинаций

$$\begin{aligned} n_k(\mathbf{p}) &= \sum_{s=\pm 1} \frac{F_0(\mathbf{p}^{(2s)})g_k(\mathbf{p}^{(s)}) - f_k(\mathbf{p}^{(s)})}{F_0(\mathbf{p}^{(2s)}) - F_0(\mathbf{p})}, \\ \theta_k(\mathbf{p}) &= -\frac{i}{2} \sum_{s=\pm 1} s \frac{F_0(\mathbf{p}^{(2s)})g_k(\mathbf{p}^{(s)}) - f_k(\mathbf{p}^{(s)})}{F_0(\mathbf{p}^{(2s)}) - F_0(\mathbf{p})}. \end{aligned} \quad (21)$$

Соотношения (17), (18) представляют собой линейную обратимую замену переменных, осуществляющую декомпозицию волновой функции на две части. Одна из частей, определяемая соотношением (20) при  $g_k(\mathbf{p}) = 0$ , приводит к возмущению полной плотности и, тем самым, связана с коллективными процессами. Для волновых функций вида (20) с  $f_k(\mathbf{p}) = 0$  возмущение полной плотности равно нулю.

Таким образом, существует взаимно-однозначное отображение  $\psi \leftrightarrow (f, g)$ . Отображение (20) определяет систему координат в линейном пространстве  $L$  решений (13) и приводит к разбиению  $L$  на два подпространства  $L = L_f \oplus L_g$ . Подпространство  $L_f$  определяется волновыми функциями (20) с  $g_k(\mathbf{p}) = 0$ , а подпространство  $L_g$  — с  $f_k(\mathbf{p}) = 0$ . Переход от уравнения Шредингера—Пуассона (13) к квантовому уравнению Власова (16) осуществляет проекцию пространства  $L$  на подпространство  $L_f$ , и при этом теряется часть степеней свободы, связанная с баллистическими модами (18). Аналогичным образом можно трактовать связь (21) гидродинамических переменных ( $n_k$ ,  $\theta_k$ ) и функций ( $f_k$ ,  $g_k$ ).

#### 4. ВОЛНЫ ВАН КАМПЕНА

Уравнения (13), (14) и (16) в своих правых частях содержат интегральные операторы, действующие на соответствующий набор функций. Под волнами Ван Кампена понимаются собственные функции этих интегральных операторов. Общая теория интегральных уравнений с сингулярными ядрами изложена в монографии [15].

##### 4.1. Квантовое уравнение Власова

Начнем с уравнения для функции Вигнера (16). Обозначим собственные значения интегрального оператора в правой части как  $-i\omega$ . Тогда собственные функции должны удовлетворять уравнению

$$(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}/m)f_k(\mathbf{p}) = -\frac{4\pi e^2}{k^2} \tilde{F}_{0k}(\mathbf{p})n_k, \quad (22)$$

где

$$n_k = \int d\mathbf{p} f_k(\mathbf{p}) \quad (23)$$

— возмущение полной плотности.

Общая схема нахождения собственных функций выглядит следующим образом. Решения (22) зависят

от того, какие значения принимает спектральный параметр  $\omega$ . Для действительного  $\omega$  решение ищется в виде

$$f_k(\mathbf{p}) = -\frac{4\pi e^2}{k^2} \tilde{F}_{0k}(\mathbf{p})n_k \frac{\mathcal{P}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}/m} + C\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}/m),$$

где символ  $\mathcal{P}$  обозначает, что интегрирование понимается в смысле главного значения. Неизвестная константа  $C$  получается из уравнения (23). Подобные решения относятся к непрерывному спектру и существуют при произвольном действительном параметре  $\omega$ .

Для случая комплексного  $\omega$  нужно поделить обе части (22) на  $\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}/m$ , тогда из (23) получается уравнение для спектрального параметра  $\omega$ . Эти решения относятся к дискретному спектру и возникают лишь в неустойчивой плазме.

Как уже отмечалось, уравнение (16) или (22) отличаются от уравнения Власова для классической плазмы лишь заменой производной  $F'_{0k}(\mathbf{p})$  на конечно-разностную производную  $\tilde{F}_{0k}(\mathbf{p})$ . Поэтому для получения решений (22) можно воспользоваться результатами работы [6], где приведены соответствующие формулы для классической плазмы с произвольной функцией распределения, зависящей от трехмерного вектора  $\mathbf{p}$ , осуществив в них замену  $F'_{0k}(\mathbf{p}) \rightarrow \tilde{F}_{0k}(\mathbf{p})$ .

Решения уравнений (22), (23) определяются двумя голоморфными функциями комплексной переменной  $\zeta$

$$\epsilon_k^{(\pm)}(\zeta) = 1 + \frac{4\pi e^2}{k^2} \int d\mathbf{p} \frac{\tilde{F}_{0k}(\mathbf{p})}{\zeta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}/m}, \quad (24)$$

где функция  $\epsilon_k^{(+)}(\zeta)$  определена при  $\text{Im } \zeta > 0$ , а  $\epsilon_k^{(-)}(\zeta)$  при  $\text{Im } \zeta < 0$ . Выражения (24) определяют продольную диэлектрическую проницаемость плазмы и связаны очевидными соотношениями  $\epsilon_k^{(+)}(\zeta) = \epsilon_k^{(-)}(-\zeta)$ ,  $\epsilon_k^{(-)}(\zeta^*) = [\epsilon_k^{(+)}(\zeta)]^*$ .

На действительной оси функции (24) выражаются через действительные и мнимые части  $\epsilon_k^{(\pm)}(\omega) = \epsilon_{1k}(\omega) \mp i\epsilon_{2k}(\omega)$  ( $\text{Im } \omega = 0$ ), где

$$\begin{aligned} \epsilon_{1k}(\omega, \mathbf{k}) &= 1 + \frac{4\pi e^2}{k^2} \int d\mathbf{p} \frac{\mathcal{P}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}/m} \tilde{F}_{0k}(\mathbf{p}), \\ \epsilon_{2k}(\omega, \mathbf{k}) &= \frac{4\pi^2 e^2}{k^2} \int d\mathbf{p} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}/m) \tilde{F}_{0k}(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (25)$$

Собственные функции (22), (23) непрерывного спектра записываются в виде

$$\begin{aligned} V_{k,\omega}(\mathbf{p}) &= -\frac{4\pi e^2}{k^2} \tilde{F}_{0k}(\mathbf{p}) \times \\ &\times \left\{ \frac{\mathcal{P}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}/m} - \pi \frac{\epsilon_{1k}(\omega)}{\epsilon_{2k}(\omega)} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}/m) \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Собственные функции дискретного спектра определяются нулями диэлектрической проницаемости (24). Обозначим корни функций  $\epsilon_k^{(\pm)}(\zeta) = 0$

как  $\zeta = \Omega_k^{(s)}$  ( $s = \pm 1, \pm 2, \dots$ ), причем  $\text{sign Im } \Omega_k^{(s)} = \text{sign } s$ . Можно выбрать нумерацию корней так, чтобы  $\Omega_k^{(-s)} = \Omega_k^{(s)*}$ ,  $\Omega_k^{(-s)} = -\Omega_k^{(s)}$ . Тогда решения уравнений (22), (23) записываются как

$$V_k^{(s)}(\mathbf{p}) = -\frac{4\pi e^2}{k^2} \frac{\tilde{F}_{0k}(\mathbf{p})}{\Omega_k^{(s)} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}/m}. \quad (27)$$

Функции (26), (27) нормированы так, что  $\int d\mathbf{p} V_{k,\omega}(\mathbf{p}) = 1$  и  $\int d\mathbf{p} V_k^{(s)}(\mathbf{p}) = 1$ . Кроме того, выполняются очевидные соотношения симметрии:  $V_{-k,-\omega}(\mathbf{p}) = V_{k,\omega}(\mathbf{p})$ ,  $V_k^{(-s)}(\mathbf{p}) = V_k^{(s)*}$ ,  $V_{-k}^{(-s)}(\mathbf{p}) = V_k^{(s)}(\mathbf{p})$ .

Функции Ван Кампена  $V_{k,\omega}(\mathbf{p})$  (26) и  $V_k^{(s)}(\mathbf{p})$  (27) образуют полный набор, т. е. по ним можно разложить любую функцию  $f(\mathbf{p})$ . Общее решение (16) записывается в виде

$$f_k(t, \mathbf{p}) = \int d\omega V_{k,\omega}(\mathbf{p}) a_{k,\omega}(t) + \sum_{s=\pm 1, \pm 2, \dots} V_k^{(s)}(\mathbf{p}) a_k^s(t), \quad (28)$$

где суммирование проводится по всем нулям функций  $\epsilon_k^{(\pm)}$  ( $\zeta$ ). Амплитуды волн Ван Кампена удовлетворяют соотношениям симметрии  $a_{-k,-\omega} = a_{k,\omega}^*$ ,  $a_{-k}^s = a_k^{s*}$ , а их динамика в линейном приближении задается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{a}_{k,\omega} &= -i\omega a_{k,\omega}, \\ \dot{a}_k^s &= -i\Omega_k^{(s)} a_k^s. \end{aligned} \quad (29)$$

Формулы обращения (28) имеют вид

$$\begin{aligned} a_{k,\omega}(t) &= \int d\mathbf{p} V_{k,\omega}^\dagger(\mathbf{p}) f_k(t, \mathbf{p}), \\ a_k^s(t) &= \int d\mathbf{p} V_k^{(\dagger s)}(\mathbf{p}) f_k(t, \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} V_{k,\omega}^\dagger(\mathbf{p}) &= \frac{1}{\epsilon_{1k}(\omega)^2 + \epsilon_{2k}(\omega)^2} \left[ -\frac{\epsilon_{2k}(\omega)}{\pi} \frac{\mathcal{P}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}/m} + \right. \\ &\quad \left. + \epsilon_{1k}(\omega) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}/m) \right], \\ V_k^{(\dagger s)}(\mathbf{p}) &= \frac{1}{\epsilon_k^{(s)*}(\Omega_k^{(s)})} \frac{1}{\Omega_k^{(s)} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}/m} \end{aligned} \quad (31)$$

— присоединенные функции Ван Кампена. Поскольку при выводе формул обращения используются лишь аналитические свойства диэлектрической проницаемости (24), выражения (31) совпадают с полученными в [6] выражениями для классической плазмы.

Функции Ван Кампена позволяют построить решение начальной задачи для линеаризованного уравнения (16). Пусть в начальный момент времени  $f_k(0, \mathbf{p}) = f_{0k}(\mathbf{p})$ . Начальные амплитуды  $a_{0k,\omega}$ ,  $a_{0k}^s$  вычисляются при помощи формул (30). Соответственно, решение начальной задачи определяется при помощи (28) с  $a_{k,\omega}(t) = a_{0k,\omega} e^{-i\omega t}$ ,  $a_k^s(t) = a_{0k}^s e^{-i\Omega_k^{(s)} t}$ .

Вследствие выбранной нормировки функций (26) при фиксированном волновом векторе возмущение полной плотности записывается как  $n_k(t) =$

$= \int d\omega a_{k,\omega}(t) + \sum_s a_k^s(t)$ . В устойчивой среде волны дискретного спектра отсутствуют. Если  $\epsilon_{1k}(\omega_0) = 0$ ,  $\epsilon_{2k}(\omega_0) \ll 1$  при некоторой частоте  $\omega_0$ , то функция (31) и амплитуды (30) при  $\omega \approx \omega_0$  имеют острый максимум. По этой причине на достаточно больших временах возмущение плотности ведет себя как  $n_k(t) \sim \exp(-i\omega_0 t - \gamma t)$ . Величина декремента затухания  $\gamma$  определяется характерной шириной волнового пакета  $a_{k,\omega}(t)$  вблизи  $\omega_0$ , то есть в конечном итоге величиной  $\epsilon_{2k}(\omega_0)$ . Таким образом, в рамках подхода Ван Кампена затухание Ландау интерпретируется как результат фазового перемешивания суперпозиции незатухающих волн с бесконечно близкими частотами.

#### 4.2. Уравнение Шредингера—Пуассона

Аналогичным образом можно искать собственные функции оператора в правой части уравнения (13) [14]. Однако вместо непосредственного решения (13) проще и нагляднее воспользоваться связью (20) между волновыми функциями и переменными  $f_k$  и  $g_k$ .

При  $g_k(\mathbf{p}) = 0$  отображение (20) переводит функцию Ван Кампена непрерывного спектра (26) в  $\Psi_{k,\omega}(\mathbf{p}) = M(V_{k,\omega}(\mathbf{p}), 0)$ , а дискретного спектра (27) — в  $\Psi_k^{(s)}(\mathbf{p}) = M(V_k^{(s)}(\mathbf{p}), 0)$ , где

$$\begin{aligned} \Psi_{k,\omega}(\mathbf{p}) &= \frac{2\pi e^2}{m\omega_0(k)} \left\{ \frac{\mathcal{P}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}/m - \omega_0(k)} - \right. \\ &\quad \left. - \pi \frac{\epsilon_{1k}(\omega)}{\epsilon_{2k}(\omega)} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}/m - \omega_0(k)) \right\}, \\ \Psi_k^{(s)}(\mathbf{p}) &= \frac{2\pi e^2}{m\omega_0(k)} \frac{1}{\Omega_k^{(s)} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}/m - \omega_0(k)}. \end{aligned} \quad (32)$$

Таким образом, общее решение линеаризованного уравнения Шредингера—Пуассона записывается в виде

$$\begin{aligned} \psi_k(t, \mathbf{p}) &= \int d\omega \Psi_{k,\omega}(\mathbf{p}) a_{k,\omega}(t) + \\ &\quad + \sum_{s=\pm 1, \pm 2, \dots} \Psi_k^{(s)}(\mathbf{p}) a_k^s(t) + b_k(t, \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (33)$$

где функция  $b_k(t, \mathbf{p}) = M(0, g_k(t, \mathbf{p}))$  равна

$$b_k(t, \mathbf{p}) = \frac{F_0(\mathbf{p}^{(2)})}{F_0(\mathbf{p}^{(2)}) - F_0(\mathbf{p})} g_k(t, \mathbf{p}^{(1)}) \quad (34)$$

и описывает вклад баллистических мод. В соответствии с (19) временная динамика баллистических мод определяется уравнением

$$\dot{b}_k(\mathbf{p}) = -i \left( \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{m} + \omega_0(k) \right) b_k(\mathbf{p}). \quad (35)$$

Для решения начальной задачи для уравнения (13) необходимо вычислить при помощи (17), (18) функции  $f_k$ ,  $g_k$  в начальный момент времени. Амплитуды

$a_{\mathbf{k},\omega}(0)$ ,  $a_{\mathbf{k}}^s(0)$  вычисляются при помощи (30), после чего уравнения (29), (35) позволяют восстановить функцию (33).

Используя связь (15), из формулы (33) можно получить явные решения для уравнений линеаризованной гидродинамики (14). Получающиеся выражения довольно громоздки и большого интереса не представляют.

## 5. ЭНЕРГИЯ ВОЛН

Как уже отмечалось, описание квантовой плазмы возможно как в терминах волновой функции (1), так и функции Вигнера (8). Однако при анализе законов сохранения использование теории возмущений для решения двух различных уравнений приводит к неэквивалентным результатам.

При разложении полной энергии  $H = H^{(p)} + H^{(f)}$  (11), (12), выраженной через функцию Вигнера, по степеням отклонения от невозмущенной функции распределения  $F_0(\mathbf{p})$  возникает ряд вида  $H = H_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \dots$ . Энергия частиц (11) при этом линейно зависит от функции Вигнера  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ , поэтому каждый член разложения энергии в отдельности не является сохраняющейся величиной. Баланс энергии в каждом порядке теории возмущений можно обеспечить только с помощью высших членов разложения. Заметим, что аналогичная проблема возникает и в классической плазме.

С другой стороны, при описании кинетики плазмы при помощи волновых функций, энергия частиц (10) квадратично зависит от  $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{q})$ . Первый отличный от константы член разложения полной энергии (10), (12) квадратичен и может быть записан как

$$H_2 = \hbar \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} F_0(\mathbf{q}) \left( \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{m} + \omega_0(\mathbf{k}) \right) |\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})|^2 + 2\pi e^2 \int d\mathbf{k} d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 F_0(\mathbf{q}_1) F_0(\mathbf{q}_2) \frac{n_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}_1) n_{-\mathbf{k}}(\mathbf{q}_2)}{k^2}, \quad (36)$$

где величина  $n_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})$  определяется соотношением (15). Учитывая линеаризованное уравнение Шредингера (13), легко убедиться, что величина (36) представляет собой интеграл движения  $\dot{H}_2 = 0$ . Таким образом, при описании в терминах волновых функций баланс энергии сохраняется уже в линейной теории.

Будучи выраженной при помощи отображения (20) через функции  $f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})$  и  $g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})$ , энергия (36) разделяется на две независимые части  $H_2 = H_2^{(f)} + H_2^{(g)}$ , где

$$H_2^{(f)} = - \int d\mathbf{k} d\mathbf{p} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{2m\tilde{F}_{0\mathbf{k}}(\mathbf{p})} |f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})|^2 + 2\pi e^2 \int d\mathbf{k} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \frac{f_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}_1) f_{-\mathbf{k}}(\mathbf{p}_2)}{k^2}, \quad (37)$$

$$H_2^{(g)} = \int d\mathbf{k} d\mathbf{p} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{2m\tilde{F}_{0\mathbf{k}}(\mathbf{p})} F_0(\mathbf{p}^{(1)}) F_0(\mathbf{p}^{(-1)}) |g_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})|^2$$

соответствуют вкладу коллективных и баллистических мод.

При помощи разложения (28) энергию коллективных мод можно выразить через амплитуды  $a_{\mathbf{k},\omega}$ ,  $a_{\mathbf{k}}^s$ . Для этого необходимы интегралы от квадратичных комбинаций функций Ван Кампена, которые отличаются от полученных в [6] выражений заменой  $F'_{0\mathbf{k}}(\mathbf{p}) \rightarrow \tilde{F}_{0\mathbf{k}}(\mathbf{p})$ . В явном виде

$$H_2^{(f)} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} d\omega \frac{\omega}{R_{\mathbf{k}}(\omega)} |a_{\mathbf{k},\omega}|^2 + \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} \sum_s \frac{\Omega_{\mathbf{k}}^s}{R_{\mathbf{k}}^s} a_{\mathbf{k}}^s a_{-\mathbf{k}}^{-s}, \quad (38)$$

где множители  $R_{\mathbf{k}}(\omega)$  и  $R_{\mathbf{k}}^s$  выражаются через диэлектрическую проницаемость (24), (25)

$$R_{\mathbf{k}}(\omega) = - \frac{k^2}{4\pi^2 e^2} \frac{\epsilon_{2\mathbf{k}}(\omega)}{\epsilon_{1\mathbf{k}}(\omega)^2 + \epsilon_{2\mathbf{k}}(\omega)^2}, \quad (39)$$

$$R_{\mathbf{k}}^s = \frac{k^2}{4\pi e^2} \frac{1}{\epsilon_{\mathbf{k}}^{(s)'}(\Omega_{\mathbf{k}}^s)}.$$

Основное различие между двумя способами описания кинетики плазмы — на языке функции Вигнера или набора волновых функций — проявляется в следующем обстоятельстве. Полная энергия сохраняется в обоих случаях. Уравнение (8) может быть записано в гамильтоновом виде  $\dot{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \{H, f(\mathbf{r}, \mathbf{p})\}$ , где  $\{.,.\}$  — скобка Пуассона, полученная в [16] и гамильтониан  $H$  совпадает с полной энергией. Однако скобка Пуассона [16] сама зависит от функции  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ , и это приводит к дисбалансу энергии при непосредственном разложении (11), (12).

С другой стороны, уравнение Шредингера (1) при помощи полной энергии (10), (12) записывается явно в гамильтоновом виде

$$\dot{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = - \frac{i}{\hbar F_0(\mathbf{q})} \frac{\delta H}{\delta \psi^*(\mathbf{r}, \mathbf{q})}.$$

По этой причине при разложении в ряд по отклонению от равновесного состояния энергия сохраняется в каждом порядке теории возмущений.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе проведено сравнение волн Ван Кампена для различных способов описания квантовой бесстолкновительной плазмы. При описании на языке квантового уравнения Власова полученные выражения практически ничем не отличаются от аналогичных решений для классической плазмы. Волны Ван Кампена при этом связаны с возмущением электрического поля, но им нельзя приписать какую-либо энергию.

При описании на языке набора волновых функций или многопоточковой гидродинамики возникает два типа элементарных возбуждений. Для одного типа волн возмущение электрического поля отлично от нуля, и в целом они аналогичны ленгмюровским волнам. Для другого типа волн, которые в данной работе названы баллистическими, электрическое поле отсутствует. Однако обоим типам волн можно приписать

сохраняющуюся энергию, и в этом смысле они являются хорошо определенными физическими объектами. В рамках линейной теории баллистические моды возмущений большого интереса не представляют, однако они могут принимать участие в различных нелинейных процессах.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Силин В.П., Рухадзе А.А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М: Госатомиздат, 1961.
2. Александров А.Ф., Рухадзе А.А. Лекции по электродинамике плазмоподобных сред. М: Из-во МГУ, 1999.
3. Van Kampen N.G., Felderhof B.U. Theoretical methods in plasma physics. New York: Wiley, 1967.
4. Эккер Г. Теория полностью ионизованной плазмы. М.: Мир, 1974.
5. Игнатов А.М. // Физика плазмы. 2017. Т. 43. С. 21.
6. Игнатов А.М. // Физика плазмы. 2015. Т. 41. С. 850.
7. Melrose D. B. Quantum Plasmadynamics: Unmagnetized Plasmas, Lecture Notes in Physics V. 735. Springer, New York. 2008.
8. Haas F. Quantum Plasmas: An Hydrodynamic Approach. Springer New York, 2011.
9. Кузелев М.В., Рухадзе А.А. // УФН. 1999. Т. 169. С. 687.
10. Шукла П.К., Элиассон Б. // УФН. 2010. Т. 180. С. 55.
11. Владимиров С.В., Тыщцкий Ю.О. // УФН. 2011. Т. 181. С. 1313.
12. Бобылев Ю.В., Кузелев М.В. // Физика плазмы. 2014. Т. 40. С. 417.
13. Бобылев Ю.В., Кузелев М.В. // Физика плазмы. 2014. Т. 40. С. 429.
14. Кузелев М.В. // ЖЭТФ. 2010. Т. 137. С. 807.
15. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. 3-е изд. М.: Наука. 1968.
16. Игнатов А.М. // Краткие сообщ. физ. 2024. В печати

## VAN KAMPEN WAVES IN QUANTUM PLASMA

A. M. Ignatov<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup> Prokhorov General Physics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russia

\*e-mail: aign@fpl.gpi.ru

The construction of van Kampen waves for various methods of describing quantum collisionless plasma is discussed. The linearized quantum kinetic equation, description in terms of individual wave functions, and quantum hydrodynamics equations are considered. It is shown that perturbation theory conserves the total plasma energy when described by wave functions.

**Keywords:** quantum plasma, Van Kampen waves